УДК 510.63

© *Ю. М. Сметанин*

АНАЛИЗ ПАРАДОКСОВ МАТЕРИАЛЬНОЙ ИМПЛИКАЦИИ В ОРТОГОНАЛЬНОМ БАЗИСЕ СИЛЛОГИСТИКИ

Рассмотрены недостатки аристотелевского базиса силлогистики, показано почему в классической логике возникли парадоксы материальной импликации и предлагается способ проверки соответствия условного суждения логическому следованию (материальной импликации). Показано, что в ортогональном базисе полисиллогистики эти парадоксы невозможны.

Ключевые слова: силлогистика, формальная логика, парадоксы материальной импликации, булева алгебра, полисиллогизм.

Но да будет слово ваше: да, да; нет, нет;
а что сверх этого, то от лукавого.
Евангелие от Матфея.

Введение

«Известно, что материальная импликация $x \Rightarrow y$, которой в современной логике представлено отношение следования «Из x следует y» («x влечет y»), парадоксальна. Импликация $x \Rightarrow y$ соблюдается при несуществовании x независимо от y и при общезначимости y независимо от x. Ясно, что следования нет. Но ведь без следования не может быть логики. Настойчивые попытки устранить парадоксы породили набор иных импликаций, ни одна из которых необходимым следованием не оказалась. Ян Лукасевич, усмотрев причину парадоксов в неадекватности двухзначной логики, изобрел в 1920 г. трехзначную логику, однако определил ее путем такой модификации двухзначности, при которой парадоксальность импликации сохранилась и необходимого следования не возникло. Поразительно, что все трехзначные логики, предложенные затем Льюисом, Бочваром, Гейтингом, Собочинским и другими, явились разновидностями логики Лукасевича, также не содержащими полноценного отношения следования» [2]. Автор данной работы считает, что парадоксы материальной импликации неустранимы в классической логике как модели объективной реальности, которая построена на базе вырожденной булевой алгебры [8, с. 19]. В рамках модели, основанной на реализации булевой алгебры на базе множеств [8, с. 39], их просто нет. Причина их неистребимости в классической логике и трехзначных логиках заключается в следующем.

1. Все они следуют из многосмысловости простых суждений Аристотеля, являющихся краеугольным камнем его силлогистики и западной философии.

2. Классическая логика основана на вырожденной булевой алгебре.

Сначала попытаемся ответить на два вопроса.

1. Что не учитывается в двоичной логике (не замечает замыленный глаз матлогика) при отражении объективной реальности в рассуждениях?

2. Как этот неучет (неразличение существенных свойств оригинала) приводит в двузначной логике — модели объективной реальности к парадоксам материальной импликации?

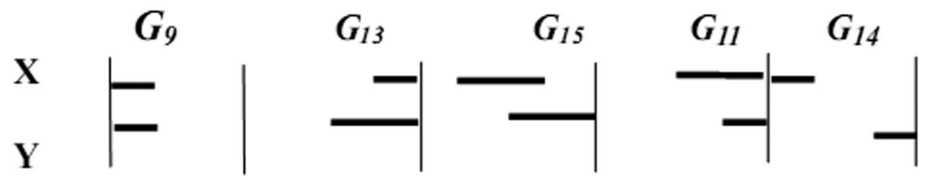


Рис. 1. Классические жергонновы отношения

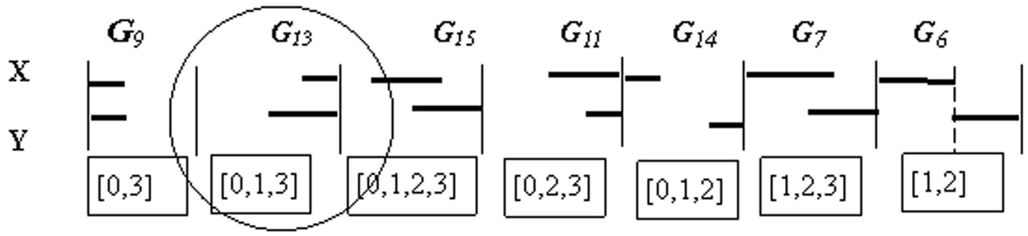


Рис. 2. Расширенные жергонновы отношения

Данная работа основывается на никем не опровергнутом утверждении, принятом без доказательства, которое гласит: любое логическое утверждение можно интерпретировать в виде соотношения между множествами; и на правиле не рассматривать никакие утверждения и рассуждения без фиксации универсума. А если говорить по большому счету, то на методологически правильном применении основного метода познания — моделирования. Итак, начнем с рассмотрения жергонновых отношений, выражающих смысл базовых суждений Аристотеля.

§ 1. Роковые для классической логики особенности базиса Аристотеля. Основные обозначения и определения

Булева алгебра [8] на основе множеств имеет непосредственное отношение к силлогистике, которое было замечено и исследовано еще Аристотелем, Лейбницем, Жергонном, Венном, Эйлером и другими корифеями. В основе силлогистики Аристотеля лежат простые суждения, представленные четырьмя типами: A — общеутвердительное (все X есть Y); E — общеотрицательное (все X не есть Y); I — частноутвердительное (некоторые X есть Y); O — частноотрицательное (некоторые X не есть Y). Жергонну (рис. 1) удалось представить все классы аристотелевых простых суждений с помощью соотношений между множествами. Эти соотношения получили в математике и логике название «жергонновых отношений».

Рисунок 1 показывает введенные Жергонном отношения, переименованные в [26], и на фоне универсума: $G9$ — совпадение или равнозначность, $G13$ — левостороннее включение, $G15$ — частное совпадение, $G11$ — правостороннее включение, $G14$ — несовместимость. Отметим, что рассуждения, проводимые Жергонном по верхней части рис. 1, проводятся без учета универсума (это методологическая ошибка кочует из учебника в учебник). Термины X и Y можно представить как некоторые совокупности (множества, классы) в виде диаграмм Эйлера. На рис. 1 они представлены в виде линейных диаграмм В. И. Лобанова [17]. Жергонн без учета универсума выделил 5 возможных соотношений. Он показал, что каждый тип аристотелева простого суждения соответствует некоторым типам этих отношений: типу A соответствует $G9$ или $G13$; типу E соответствует $G14$; типу I соответствует $G9$, либо $G13$, либо $G15$, либо $G11$; типу O соответствует $G15$, либо $G11$, или $G14$.

На рис. 3 показано еще больше смыслов с учетом универсума и расширенной системы жергонновых отношений. Причина, по которой Аристотель выбрал свой «лукавый базис», кроется, по-видимому, в парадигме науки об управлении социумом (социологии), которая была принята в тот период времени. С незапамятных времен существуют две системы знаний о мире, два способа циклического воспроизводства культуры социума — значит, и две системы образования. Первая система знаний предназначена для широких масс. Вторая — для узкого круга, призвание которого — управлять. Исторически это различие прослеживается во всех типах культур, с системой образования которых мы знакомы (Египет, Месопотамия, Иудея, Древняя Греция). Так, описывая возмущение Александра Македонского по поводу опубликования некоторых философских учений Аристотелем, который был учителем Александра, Плутарх — посвященный высокого уровня [21] приводит весьма показательное письмо царя-полководца: «Александр Аристотелю желает благополучия! Ты поступил неправильно, обнародовав учения, предназначенные только для устного преподавания. Чем же мы будем отличаться от остальных людей, если те самые учения, на которых мы были воспитаны, сделаются общим достоянием? Я хотел бы превосходить других не столько могуществом, сколько знаниями о высших предметах. Будь здоров». Успокаивая уязвлённое честолюбие, жажду и чувство превосходства Александра над «остальными людьми», Аристотель в своём ответе ему написал, что «хотя эти учения и обнародованы, но вместе с тем как бы и не обнародованы». В некоторых случаях этот прием сознательно используется так называемыми специалистами, этими, по выражению Бернарда Шоу, «заговорщиками против непосвящённых». Даже если это письмо Плутарх выдумал, все равно это еще более убедительно подтверждает образ мысли «учителей и наставников элиты». В наукообразных текстах очень многих ученых смыслы настолько смещены по отношению к обыденному их осознанию, что эти тексты становятся заведомо непонятными для непосвящённых (то есть неспециалистам). Выражение мыслей на «фене» это стандартный приём достижения кастовых преимуществ для всех замкнутых сообществ. Александр Македонский — лидер социальной «элиты» — обеспокоен «нарушением» Аристотелем монополии на Знание. Эта монополия — основа власти над невежественным обществом, источник пресловутого «могущества» и «превосходства». Девятнадцатью веками позднее, Ф. Бэкон заявил (F. Bacon, 1561–1626), «Knowledge itself is power» — «Знание по сути своей есть власть». Если задуматься над ответом великого стагирита, то легко сделать вывод, что он обеспокоен сохранением монополии на Знание ещё больше, чем ученик, и потому намекает недогадливому Александру: осуществлённая утечка — плановая и в некотором смысле дефективна. Ее обнародование не позволяет овладеть Знанием в полной мере только на основе её прочтения — требуются ещё некие пояснения; а возможно — не только пояснения, но и соучастие в совместной с носителями знаний деятельности, потому, что практика — необходимая компонента НАСТОЯЩЕГО образования, в том числе и потому, что выявляет любую несостоятельность и неадекватность жизни разного рода псевдонаучных теорий. Здесь мы сталкиваемся с фундаментальным различением информации, циркулирующей в процессе информационного взаимодействия, на две категории — информация, выраженная словам (оглашенная) и информация, наличествующая (учитываемая) по умолчанию — инвариантная неопределенность — понятие, раскрытое в работах К.И. Валькова [6]. Это — одна из допустимых версий, почему в простые суждения Аристотель заложил много смыслов. Видимо, причина того, что до сих пор современные логики не могут до конца разобраться в учении Аристотеля о логике, кроется как раз в том, что «хотя это учение и обнародовано, но вместе с тем как бы и не обнародовано» (см. рис. 1–4). Многосмысловость базиса роковым образом сказалась на развитии классической логики. Логики, апеллируя к Аристотелю, построили наряду с классической и множество других логик [2–5, 7, 15–17, 19], однако все их попытки встроить классическую силлогистику в математическую логику до сих пор были безуспешны. Рассуждая методически, им бы нужно было сначала покопаться в базисе. Поскольку нельзя рассуждать без учета универсума, то жергонновых отношений для непустых X и Y не пять, а семь (см. рис. 2). Посредством расширенных жергонновых отношений на 3 отражена множественность смыслов простых суждений Аристотеля. На рисунке 2 овалом обведено соотношение являющееся прообразом материальной импликации в классической логике и элементом ортогонального базиса (ОБ) силлогистики, предложенного Ю.М. Сметаниным

Замечание 1. В данном контексте на рис. 1 и у Аристотеля, и у Жергонна по умолчанию (а в определении ОБ явно) предполагается, что рассматриваемые множества X и Y являются

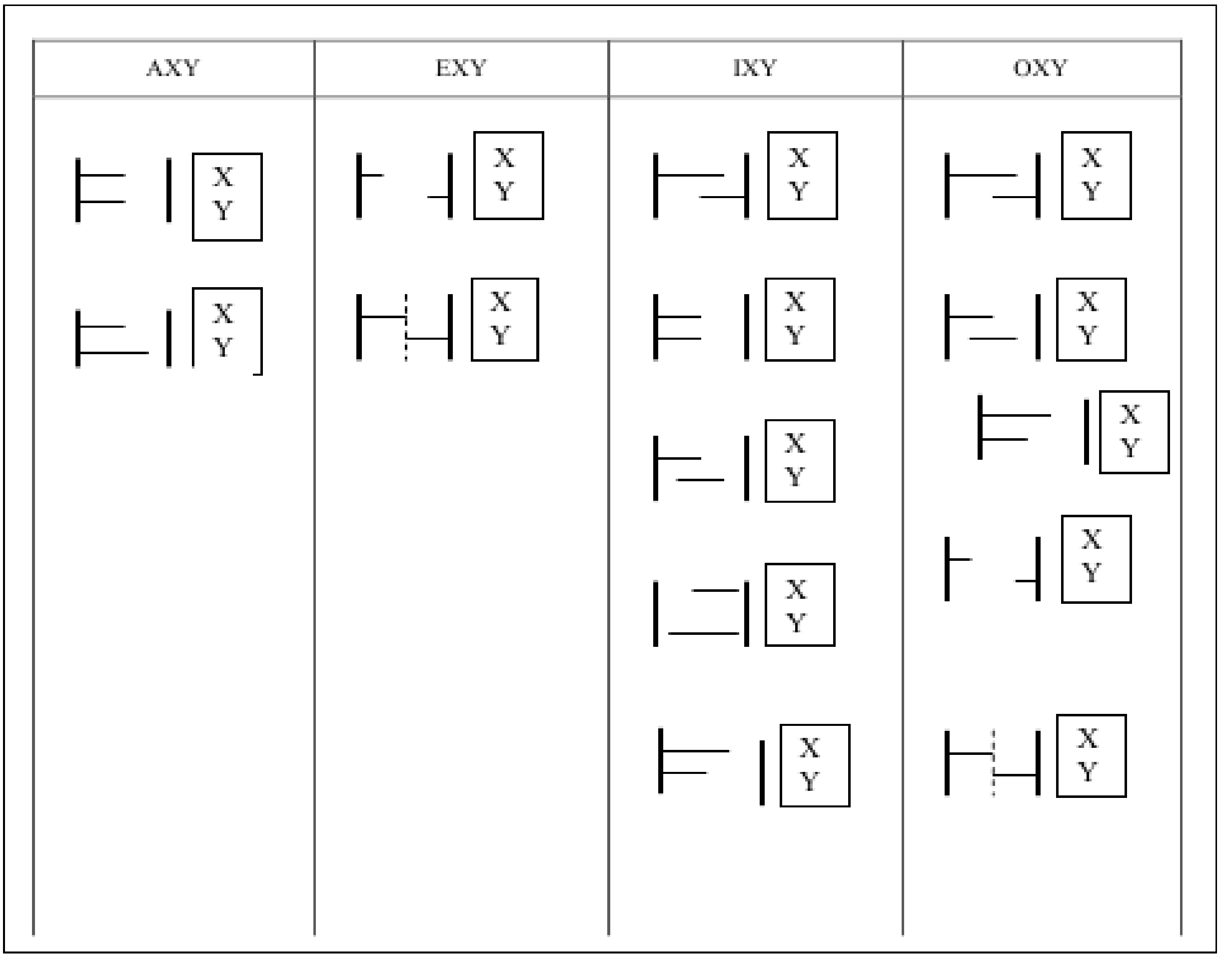


Рис. 3. Многосмысловость простых суждений из базиса Аристотеля

непустыми собственными подмножествами универсума.

Замечание 2. В классической логике неразличение отношения строгого и нестрогого включения множеств сопоставляет отношениям $X \subset Y$ и $X \subseteq Y$, в случае когда $(X \neq \varnothing)(Y \neq \varnothing)(X \subset U)(Y \subset U)$, одну и ту же операцию материальной импликации $x \Rightarrow y$. Обратим здесь внимание уважаемого читателя на очень важный момент, касающийся высказывательных булевых переменных x и y. С точки зрения моделирования мышления как отражения объективной реальности, это не произвольные, неизвестно откуда взявшиеся переменные. Они непосредственно связаны с объективной реальностью, в которой имеются множество всех рассматриваемых предметов и два непустых подмножества всех предметов, которые имеют имена X и Y и находятся между собой в отношении ($X \subset Y$ либо $X \subseteq Y$). Переменные x и y взяты не с улицы, они являются характеристическими функциями множеств X и Y, и их значение (истина или ложь) имеют отнюдь не абстрактное как у Гильберта [9] значение. Нелепость его определения исчисления высказываний хорошо отражена в работе выдающегося русского философа А.Ф. Лосева [18].

Приведем цитату из параграфа 4 данной работы. «§ 4. Логика Гильберта–Аккермана. Остановимся еще некоторое время на Давиде Гильберте, безусловно, самой крупной фигуре современной логистики которому, кстати, принадлежит и систематический очерк именно математической логики, а не только логически обработанной математики. Это — D.Hilbert и W.Ackermann, Grundzge der theoretischen Logic. Berl. 1928. 1937. Приведем отсюда несколько данных. 1. Читаем вступительные замечания. «Первую необходимую составную часть математической логики образует так называемое исчисление высказываний. Под высказыванием надо понимать всякое предложение, в отношении которого имеет смысл утверждать, что его содержание истинно или ложно». Гильберт отказывается в данном месте входить в «более тонкую структуру высказываний» и анализировать, например, отношение субъекта и предиката, а берет высказывание как целое. Таким образом, уже с первых строк здесь вводится непроанализированное высказывание, на котором потом будет строиться вся логика. Что есть высказывание или суждение известно, разумеется, всем и без всякой логики. Но ведь что такое дождь, снег, гром, молния, что такое пищеварение или кровообращение тоже всем известно; и это еще не значит, что не нужны ни метеорология, ни физиология. Единственный определенный момент, выставленный здесь, есть истинность или ложность. Но что такое истинность и ложность, здесь опять-таки не говорится. Конечно, Гильберт опять скажет, что и без этого все понимают, что такое истинность и что такое ложность. Однако такая ссылка на «всех» в устах Гильберта была бы не только пустой отговоркой, но и в корне неправильной. Если брать действительно «всех», то эти «все» понимают истинность и ложность, конечно, материально, а вовсе не только формально, не говоря уже о том, что разных пониманий истинности и ложности фактически существует в человеческой истории бесконечное количество. Разные понимания истинности или ложности существуют и в самой логике. Так, с легкой руки Аристотеля, часто говорят, что истинность и ложность возможны только в отношении суждений, и что понятия сами по себе не истинны и не ложны. Однако не только суждения, но и понятия тоже могут быть истинными или ложными, так, например, ложно понятие круглого квадрата. или деревянного железа; (это противоречит канонам классической логики, она утверждает, что это понятие пустое, однако соответствующий этому пустому множеству индикатор (пропозициональная переменная) тождественно равен лжи даже в фантастическом смысле самого Гильберта (см. раздел 4 — прим. автора) то же, конечно, надо сказать и об умозаключении. Как показывает последующее, сам Гильберт понимает истинность и ложность отнюдь не как «все», но весьма оригинально, если не прямо фантастично. Что же такое тогда «высказывание»? Если под высказыванием понимать то, что понимают «все», то есть нечто словесное, а не специально логическое, то одному логическому содержанию может соответствовать множество разных высказываний, и одному высказыванию может соответствовать масса разных понятий, суждений и умозаключений. Вся эта проблематика начисто отсутствует в логике Гильберта. Таким образом, в основу построения логики у Гильберта положено два совершенно сырых, совершенно непроанализированных и догматических понятия, именно «высказывания» и «истинности». »

Из умолчаний Лосева можно видеть, что неявно он раньше всех поставил в логике проблему нахождения границы корректного использования формальных методов и структур для моделирования мышления и отражаемого им процессов и явлений объективной реальности. Например, не рассматривая конкретный универсум и содержание терминов нельзя сказать, что является истинным $IO(X,Y)$ или одно из 6 противоположных ему суждений. Отрицание суждения ОБ «Некоторые военнослужащие русские …» в смысле IO («военнослужащие», «русские») в универсуме $U=$ «граждане РФ» нельзя сделать формально, то есть точно указать его смысл, не рассматривая конкретные характеристические функции в конкретном универсуме здесь и сейчас. Отрицая суждение «Некоторые военнослужащие являются русскими …», в смысле независимого пересечения $G15 = IO(X,Y)$, мы должны утверждать, что смысл этого отрицания выражает одно из оставшихся 6 отношений $G6, G7, G9, G11, G13, G14$. То есть либо «Множество военнослужащих совпадает с множеством нерусских» $G6$, либо «Все не военнослужащие есть русские» $G7$, либо «Все множество военнослужащих совпадает с множеством русских» $G9$, либо «Все русские — военнослужащие» $G11$, либо «Все военнослужащие — русские» $G13$, либо «Все военнослужащие являются нерусскими» $G14$. Само собой понятно, что, только зная жизнь как таковую и понимая конкретно в данной ситуации, что «истина» соответствует реальному национальному составу армии и «ложь» как значение утверждения означает, что оно противоречит реальному состоянию. Мы, зная состав армии РФ, понимаем: отрицание утверждения IO («военнослужащие», «русские») является в настоящее время ложью. В том смысле, что в настоящее время ни одно из альтернативных утверждений не реализовано в армии РФ. Поэтому его отрицание «Неверно, что неверно, что некоторые военнослужащие являются русскими ...» равносильное «Некоторые военнослужащие являются русскими ...» является истинным суждением. «Неверно, что Волга и Кама являются американскими реками» $G13$ равносильно по смыслу «Волга и Кама не являются американскими реками» $G14$. Этот вариант выбран из шести по признаку истинности. Все остальные суждения ОБ являются ложными, но установить это достоверно, можно только зная универсум U — все реки земли и науку — географию и политическую карту мира.

Идти по пути, предначертанному Аристотелем, то есть формулировать правильные мыслительные формы (силлогизмы) заведомо бесперспективно (есть еще сориты, полисиллогизмы и другие формы умозаключений). Выход предложен в [27]*, смысл его в том, чтобы строить интерпретацию умозаключения на базе подмножеств универсума — терминов рассуждения.* Итак, характеристическая функция множества X ставит в соответствие любому элементу универсума $e \in U$ булеву переменную x, которая равна 1, если e принадлежит множеству X, либо равна 0, если e не принадлежит X [20]. Таким образом смысл «истины» и «лжи» проявляется только на фоне инвариантной неопределенности — универсума [6]. Соотношению $X \subseteq Y \equiv (X \subset Y) \oplus (X = Y)$ соответствует таблица 1. Таблица 1 соответствует формуле трехзначной логики $(xy + x'y') + ix'y$, равносильной утверждению $(x < y) \oplus (x = y)$. Здесь через i обозначено третье истинностное значение «может быть», то есть это не материальная импликация. Соотношению $X \subset Y$ соответствует таблица 2, задающая отношение между индикаторами X и Y. Таблица 2 соответствует формуле $x \Rightarrow y \equiv x'y' + x'y + xy$ — материальная импликация.

x	y	
$e \in X$	$e \in Y$	это не импликация
0	0	1
0	1	i
1	0	0
1	1	1

Таблица 1. Отношения индикаторов для отношения нестрогого включения X в Y

x	y	$x \leqslant y \equiv x \Rightarrow y$
$e \in X$	$e \in Y$	это импликация
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Таблица 2. Отношения индикаторов для отношения строгого включения X в Y

Замечание 3. Рассматривая примеры парадоксов (см. далее § 3), логики не учитывают свойство материальной импликации, которое дано по умолчанию как смысл логической операции алгебры логики, определенной на индикаторах множеств X и Y $(X \subset Y)$, которые в свою очередь в языковой форме моделируют причину и следствие из объективной реальности. При этом выпячиваются некоторые из четырех отношений между конституентами этих множеств за счет указания на некоторые из строк 1, 2, 3, 4 таблицы 2, для которых операция для этих логиков имеет значение абстрактная истина. При этом они не указывают на те из строк 1, 2, 3, 4, для которых отношение между конституентами не соответствует истинностному канону для импликации как проекции отношения $(X \subset Y)$. В то время как с точки зрения цели моделирования, соотношения для конституент должны выполняться все единовременно, для того

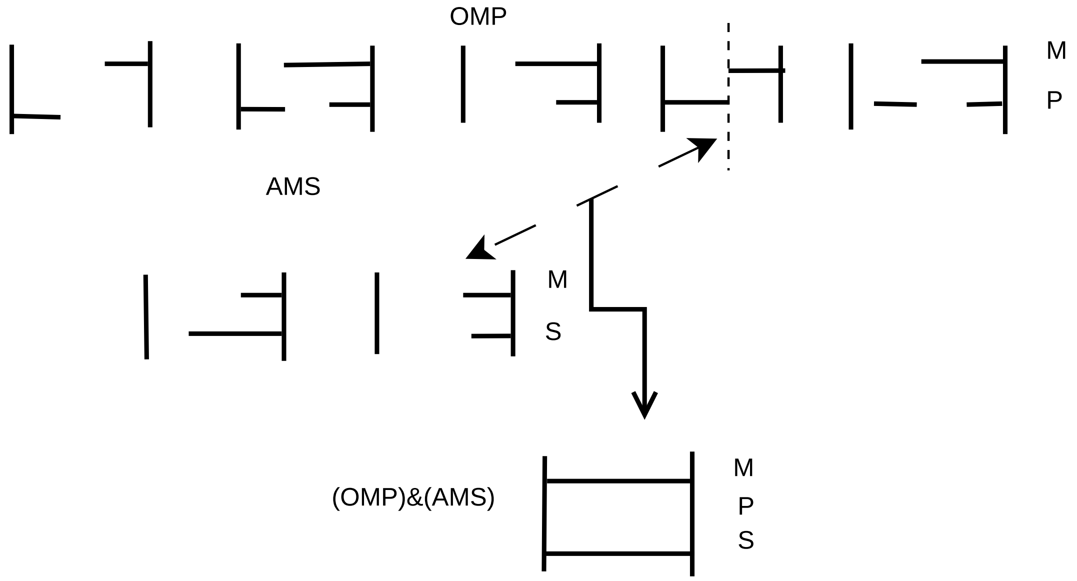


Рис. 4. Контрпример для модуса OAO третьей фигуры

чтобы логическое следование имело место. Повсеместно вместо материальной импликации, соответствующей отношению $X \subset Y$, рассматривают ее образ в таблице 2 как образ отношения $X \subseteq Y$, что приводит к неправильным умозаключениям (см. пример на рис. 4).

В параграфе 2 показано, что отображение расширенной алгебраической системы множеств относительно строгого частичного порядка, задаваемого отношением строгого включения в систему их индикаторов неизоморфно. *Итак, парадоксы приписывают не материальной импликации. Аристотелево общеутвердительное суждение определяет отнюдь не материальную импликацию (что сказал $(X \subset Y) \oplus (X = Y)$ и что не сказал?). Многосмысловость простых суждений и неадекватность (вырожденность) классической логики (смотри § 3) не позволяет органически встроить в нее силлогистику Аристотеля. Неучет универсума и многосмысловость базиса приводит к массе ошибочных суждений и умозаключений.* Например, в одном из лучших современных учебников [12, с. 168] правильным признается суждение по модусу OAO третьей фигуры.

Некоторые M не есть P.
Все M суть S
____
Некоторые S не суть P.

Правильным оно признается на основе рассмотрения якобы всех возможных вариантов — пяти различных тернарных отношений непустых терминов в посылках. Однако различение строгого включения и равенства терминов дает вариант соотношений, опровергающий утверждение о правильности умозаключения (см. рис. 4 и рис. 3). Всего имеется 10 возможных соотношений между терминами, причем отношение, определяемое двусторонней стрелкой, возможно лишь при пустом термине P. Но Аристотель не допускал пустых терминов в рассуждениях! Для построения линейных диаграмм десяти возможных тернарных отношений можно использовать алгоритм Ю.М. Сметанина из работы [27]. Ход построения нижней диаграммы и ее базового множества номеров указан внизу рисунка. Напомним коротко результаты работы [26], в которой был введен ортогональный базис силлогистики в форме следующих суждений (функторов):

1. $A(X, Y)$ — все X есть Y в смысле $X \subset Y$ — общеутвердительное суждение;

2. $Eq(X, Y)$ — множество X совпадает с множеством Y;

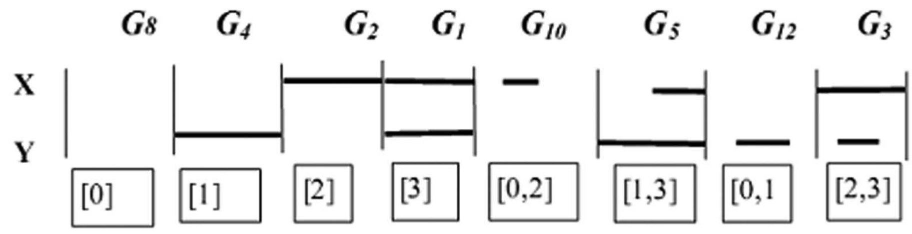


Рис. 5. Дополнение расширенных жергонновых отношений

3. $E(X,Y)$ — ни один элемент множества X не является элементом множества Y (все X не есть Y). Это общеотрицательное суждение может быть выражено через общеутвердительные $A(X,Y')$ или $A(Y,X')$;

4. $IO1(X,Y)$ — (некоторые X есть Y) и (некоторые X не есть Y) и (X, объединенное с Y, не есть универсум);

5. $IO2(X,Y)$ (некоторые X есть Y) и (некоторые X не есть Y) и (X, объединенное с Y, совпадает с универсумом). Это суждение можно выразить как $A(Y,X')$ или $A(X',Y)$.

Свяжем с показанными на рисунке 2 множествами следующие суждения:

1. $G9(X,Y) = Eq(X,Y)$; $U = XY + X'Y'$ — множество X совпадает (равно) с множеством Y при этом конституенты XY и $X'Y'$ являются непустыми множествами, а $X'Y$ и XY' — пустые;

2. $G13(X,Y) = A(X,Y)$ — множество X есть собственное подмножество Y или событие X влечет наступление события Y, либо $U = XY + X'Y + X'Y'$ и из четырех конституент пустая только XY'. Другими словами, все X есть Y тогда и только тогда, когда произвольный элемент универсума e удовлетворяет только одному из соотношений $e \notin X$ и $e \notin Y$, либо $e \notin X$ и $e \in Y$, либо $e \in X$ и $e \in Y$;

3. $G15(X,Y) = IO(X,Y)$ равносильно $U = XY + XY' + X'Y + X'Y'$ — существуют разбиение универсума на 4 непустые подмножества XY, XY', $X'Y$, $X'Y'$. По-другому, можно сказать что (некоторые X есть Y) и (некоторые X не есть Y) и (некоторые Y не есть X) и (некоторые не X не есть Y);

4. $G11 = A(X',Y')$ равносильно $U = XY + XY' + X'Y'$;

5. $G14 = E(X,Y) = A(X,Y')$ — все X не есть Y, либо $U = XY' + X'Y + X'Y'$;

6. $G7 = A(X',Y)$ равносильно $U = XY' + XY + X'Y$;

7. $G6 = Eq(X,Y')$ равносильно $U = XY' + X'Y$.

На основе полученных результатов сформулирован алгоритм решения полисиллогизмов [27] и проведены компьютерные эксперименты по решению классических задач [13].

На рис. 5 отражены остальные из пятнадцати возможных соотношений между X и Y. Первые семь показаны на рис. 2. Расширенные отношения дополнены еще восемью отношениями. Это дополнение расширенных жергонновых соотношений $G8, G4, G2, G1, G10, G5, G12, G3$ будем называть вырожденными соотношениями, так как они подразумевают, что хотя бы одно из множеств X или Y совпадает с пустым множеством либо с универсумом. В прямоугольниках указаны базовые множества номеров отношений (БМН). Это понятие введено в работе [27].

Замечание 4. Автором разработано логико-вероятностное исчисление событий, выражаемых в ортогональном базисе с помощью логических операций двузначными утверждениями, которые являются суждениями из представленных на рис. 2 и рис. 5. В нем события, изображенные на рис. 5, являются независимыми, то есть в их наступлении, даже детерминированном, нет причинно–следственных связей. Следовательно, нет и логического следования. Независимость понимается в вероятностном смысле: $P(XY) = P(X)P(Y)$. Однако даже среди отношений с зависимыми событиями события X, Y детерминированно зависимы (то есть имеет место логическое следование, необходимое следование, материальная импликация) только в отношениях $G13, G11$. В таблице на рис. 7 также показано, какие 4 соотношения между множествами X и Y должны в совокупности выполняться, если выполняется соответствующее элементарное соотношение $G1, \ldots, G15$ и наоборот (см. замечание 3).

Замечание 5. В случае рассмотрения расширенной и дополненной системы отношений ортогональный базис также становится многосмысловым. Это легко проверить (см. [26]). Однако большинство содержательных рассуждений и установление логического следования проводится на системах множеств (терминов), являющихся собственными непустыми подмножествами универсума, а в этой ситуации ортогональный базис односмысловой. Ниже показаны полученные в [26] соотношения, из которых видно, что равенство двух множеств может рассматриваться в трех смыслах, а строгое включение — в четырех, лишь отношение IO остается односмысловым. Это говорит о том, что решение задач полисиллогистики при возможно пустых множествах (терминах) в ортогональном базисе Eq, A, IO будет затруднено разбором случаев, кроме того, формально соотнеся отношение строгого включения с импликацией, в классической логике мы получаем весь букет парадоксов материальной импликации.

1. $Eq(X, Y) \equiv X = Y \equiv G1 \oplus G8 \oplus G9 \equiv (X'Y = \varnothing)(XY' = \varnothing)$;
2. $Eq(X, Y') \equiv (X' = Y) \equiv G2 \oplus G4 \oplus G6 \equiv (X'Y' = \varnothing)(XY = \varnothing)$;
3. $A(X, Y) \equiv X \subset Y \equiv G4 \oplus G5 \oplus G12 \oplus G13 \equiv (XY' = \varnothing)(X'Y \neq \varnothing)$;
4. $A(X, Y') \equiv X \subset Y' \equiv G8 \oplus G10 \oplus G12 \oplus G14 \equiv (XY = \varnothing)(X'Y' \neq \varnothing)$;
5. $A(X', Y') \equiv X' \subset Y' \equiv G2 \oplus G3 \oplus G10 \oplus G11 \equiv (X'Y = \varnothing)(XY' \neq \varnothing)$;
6. $A(X', Y) \equiv X' \subset Y \equiv G1 \oplus G3 \oplus G5 \oplus G7 \equiv (X'Y' = \varnothing)(XY \neq \varnothing)$;
7. $IO(X, Y) \equiv G15 \equiv (X'Y' \neq \varnothing)(X'Y \neq \varnothing)(XY\text{'} \neq \varnothing)(XY \neq \varnothing)$.

Что делать в этом более общем случае? Подойдем к этому вопросу методически и целесообразно нашей публикации (оставляя пока в стороне решение задач). Рассмотрим отражение каждого из пятнадцати расширенных и дополненных жергонновых соотношений между парой подмножеств (возможно пустых и несобственных) непустого универсума в соотношения между индикаторами этих подмножеств. При этом выясним, какую информацию относительно соотношений между множествами мы теряем, проектируя эти 15 соотношений в двузначный универсум и обратно. Это можно сделать, рассмотрев таблицы на рис. 6 и 7. Критерием (признаком) потери информации будет служить невозможность однозначно восстановить исходное соотношение (прообраз) по его образу. В столбце 1 находится прообраз — жергонново соотношение, оно выражается с помощью отношений ($\neq$, $=$, $\subset$) и функторов ортогонального базиса в столбце 3 таблиц на рис. 6 и 7. При этом все невырожденные соотношения выражаются однозначно, а вырожденные могут быть представлены несколькими способами. В столбце 4 показано соотношение между индикаторами множеств (пропозициональными переменными), прообраз которого находится в столбце 3. Некоторые образы (прообразы) взаимно однозначно соответствуют друг другу. Например, $G2$ можно выразить двумя суждениями $(X = Y')(X' = \varnothing)(Y = \varnothing)$, либо $(X' \subset Y')(X' = \varnothing)(Y = \varnothing)$. Каждому из них однозначно сопоставляется свой образ в виде суждения относительно индикаторов множеств. Первому

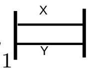
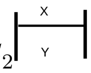
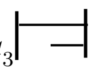
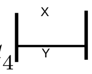
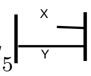
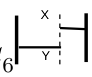
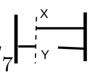
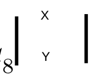
Имя	Конституенты	Соотношение/мера	Образ
G_1 	$X'Y' = \varnothing$	$A(X', Y)(X' = \varnothing)(Y' = \varnothing)$	$(x' < y)(x' = 0)(y' = 0)$
	$X'Y = \varnothing$		
	$XY' = \varnothing$		
	$XY \neq \varnothing$	$P(XY) = 1$	
G_2 	$X'Y' = \varnothing$	$A(X', Y')(X' = \varnothing)(Y = \varnothing)$	$(x' < y')(x' = 0)(y' = 0)$
	$X'Y = \varnothing$		
	$XY' \neq \varnothing$	$P(XY') = 1$	
	$XY = \varnothing$		
G_3 	$X'Y' = \varnothing$	$A(X', Y)(X' = \varnothing)A(X', Y')$	$(x' \leqslant y)(x' = 0)(x' \leqslant y')$
	$X'Y = \varnothing$		
	$XY' \neq \varnothing$	$P(XY') = P(Y')$	
	$XY \neq \varnothing$	$P(XY) = P(Y)$	
G_4 	$X'Y' = \varnothing$	$A(X, Y)(Y' = \varnothing)(X = \varnothing)$	$(x < y)(x = 0)(y' = 0)$
	$X'Y \neq \varnothing$	$P(X'Y) = 1$	
	$XY' = \varnothing$		
	$XY = \varnothing$		
G_5 	$X'Y' = \varnothing$	$A(X, Y)(Y = \varnothing)A(X'Y)$	$(x \leqslant y)(y' = 0)(x' \leqslant y)$
	$X'Y \neq \varnothing$	$P(X'Y) = P(X')$	
	$XY' = \varnothing$		
	$XY \neq \varnothing$	$P(XY) = P(X)$	
G_6 	$X'Y' = \varnothing$	$Eq(X, Y')(X \neq \varnothing)(Y \neq \varnothing)$	$x = y'$
	$X'Y \neq \varnothing$	$P(X'Y) = P(Y)$	
	$XY' \neq \varnothing$	$P(XY') = P(X)$	
	$XY = \varnothing$	$P(XY) = 0$	
G_7 	$X'Y' = \varnothing$	$A(X', Y)(X \neq \varnothing)(Y \neq \varnothing)$	$x' \leqslant y$
	$X'Y \neq \varnothing$	$P(X'Y) = P(X')$	
	$XY' \neq \varnothing$	$P(XY') = P(Y')$	
	$XY \neq \varnothing$	$P(XY) = 1 - P(X') - P(Y')$	
G_8 	$X'Y' \neq \varnothing$	$P(X'Y') = 1$	$(x = y)(x = 0)(y = 0)$
	$X'Y = \varnothing$	$A(X, Y)(X = \varnothing)(Y = \varnothing)$	
	$XY' = \varnothing$		
	$XY = \varnothing$		

Рис. 6. Гомоморфизм отношений $G1$–$G8$ между множествами X, Y и отношениями их индикаторов

сопоставлено суждение $(X = Y')(X' = \varnothing)(Y = \varnothing)$, второму $(x' \leqslant y')(x' = 0)(y = 0)$. По каждому из этих образов однозначно восстанавливается его прообраз. Для других образов (прообразов) взаимно однозначное соответствие установить не удается. Например, суждениям $(X' \subset Y')(X' = \varnothing)(Y \neq \varnothing)$ и $(X' \subset Y)(X' = \varnothing)(Y' \neq \varnothing)$, определяющим $G3$, однозначно сопоставляются их образы $(x' \leqslant y')(x' = 0)$ и $(x' \leqslant y)(x' = 0)$. Обратное соответствие неоднозначно ввиду потери информации о том, что множества X и Y' есть собственные, непустые подмножества универсума. Первому из образов можно сопоставить в качестве прообраза как $G2$, так и $G3$, второму — $G1$, либо $G3$. Например, от $G13(X, Y) \equiv A(X, Y)(X \neq \varnothing)(Y' \neq \varnothing)$ однозначно переходим к образу $G13 = (x \leqslant y')$. Обратный переход неоднозначен ввиду потери информации о том, что конституента $X'Y$ является собственным непустым подмножеством универсума (так как в вырожденной булевой алгебре, которая лежит в основе классической логики нет значения между 0 и 1). Таким образом, мы можем обратно сопоставить для $G13$ любое из семи соотношений $G1(X, Y) \oplus G4(X, Y) \oplus G5(X, Y) \oplus G8(X, Y) \oplus G9(X, Y) \oplus G12(X, Y) \oplus G13(X, Y)$. Отсюда проистекают парадоксы материальной импликации.

Имя	Конституенты	Соотношение/мера	Образ
G_9	$X'Y' \neq \varnothing$	$P(X'Y') = P(X') = P(Y')$	
	$X'Y = \varnothing$	$Eq(X,Y)(X \neq \varnothing)(X' \neq \varnothing)$	$x = y$
	$XY' = \varnothing$		
	$XY \neq \varnothing$	$P(XY) = P(X) = P(Y)$	
G_{10}	$X'Y' \neq \varnothing$	$P(X'Y') = P(X')$	
	$X'Y = \varnothing$	$A(X,Y')(X' \neq \varnothing)(Y = \varnothing)$	$(x \leqslant y')(y = 0)(x' \leqslant y)$
	$XY' \neq \varnothing$	$P(XY') = P(X)$	
	$XY = \varnothing$		
G_{11}	$X'Y' \neq \varnothing$	$P(X'Y') = P(X')$	
	$X'Y = \varnothing$	$A(X',Y')(X' \neq \varnothing)(Y' \neq \varnothing)$	$x' \leqslant y'$
	$XY' \neq \varnothing$	$P(XY') = 1 - P(X') - P(Y)$	
	$XY \neq \varnothing$	$P(XY) = P(Y)$	
G_{12}	$X'Y' \neq \varnothing$	$P(X'Y') = P(Y')$	
	$X'Y \neq \varnothing$	$P(X'Y') = P(Y)$	
	$XY' = \varnothing$	$A(X,Y)(Y' \neq \varnothing)(X = \varnothing)$	$(x \leqslant y)(x = 0)(x \leqslant y')$
	$XY = \varnothing$		
G_{13}	$X'Y' \neq \varnothing$	$P(X'Y') = P(Y')$	
	$X'Y \neq \varnothing$	$(P(X'Y) = 1 - P(X) - P(Y')$	
	$XY' = \varnothing$	$A(X,Y)(X \neq \varnothing)(Y' \neq \varnothing)$	$x \leqslant y$
	$XY \neq \varnothing$	$P(XY) = P(Y)$	
G_{14}	$X'Y' \neq \varnothing$	$P(X'Y') = 1 - P(X) - P(Y)$	
	$X'Y \neq \varnothing$	$P(X'Y) = P(Y)$	
	$XY' \neq \varnothing$	$P(XY') = P(X)$	
	$XY = \varnothing$	$A(X,Y')(X \neq \varnothing)(Y \neq \varnothing)$	$x \leqslant y'$
G_{15}	$X'Y' \neq \varnothing$	$X'Y' + X'Y + XY' +$	$x'y' + x'y + xy' +$
	$X'Y \neq \varnothing$	$+XY = U$	$+xy = 1$
	$XY' \neq \varnothing$		
	$XY \neq \varnothing$	$P(XY) = P(X)P(Y)$	

Рис. 7. Гомоморфизм отношений $G9$–$G15$ между множествами X, Y и отношениями их индикаторов

Вышесказанное является безусловным стимулом к переходу от логических моделей на основе вырожденной булевой алгебры к моделям на основе алгебры множеств с не бинарным универсумом. Однако для такого перехода есть и более веские причины, а именно: неразличение элементов и объемов множеств X и Y в бинарной модели на базе вырожденной булевой алгебры с пропозициональными переменными x, y формально приводит к «парадоксам» материальной импликации. Продолжим рассмотрение таблиц из рис. 6 и 7. Каждое из множеств X, Y можно трактовать как модель случайного события, изображенного на фоне универсума (достоверного события) и выражаемое в форме утверждений, истинность которых соответствует явлению объективной реальности, а ложность, наоборот, явлению, в котором они не произошли. В этой интерпретации события X, Y в различных вариантах их совместного появления, соответствующие отношениям $G1 - G15$ (см. рис. 6 и рис. 7) можно разделить на два класса: зависимые и независимые в вероятностном, причинно-следственном и логическом смысле (смысле логического следования). Для этого достаточно ввести числовую меру на подмножествах универсума. Критерием проверки на независимость событий служит равенство

$$P(XY) = P(X)P(Y). \tag{2}$$

При этом мера универсума есть 1.

Прямо из содержания таблиц на рис. 6 и 7 следует, что к независимым относятся события, взаимное появление которых соответствует всем вырожденным жергонновым отношениям. Из невырожденных независимы только события, находящиеся в отношении $G15 = IO(X, Y)$. В третьем столбце этих таблиц показано как рассчитать вероятность события, соответствующего каждой из конституент для двух множеств находящихся в одном из отношений $G1$–$G15$. Прежде чем перейти к парадоксам определимся с понятием материальной импликации и ее смысловым содержанием.

Определение материальной импликации и ее смысла в логике. *Материальная импликация* — это операция алгебры логики, задаваемая таблицей 2, от двух высказывательных переменных x и y. Эти переменные являются характеристическими функциями (индикаторами, образами, моделями) непустых множеств X и Y, которые, в свою очередь, являются собственными подмножествами универсума и находятся в отношении $X \subset Y$.

Смысловое содержание материальной импликации состоит в том, что X и Y являются моделями объемов терминов, либо отражают некоторые события (явления), причем второе Y появляется всегда при появлении первого X; то есть между ними существует детерминированная причинно-следственная связь в том смысле, что как только происходит отнесение элемента универсума к термину X, так автоматически этот элемент относится к термину Y. Как только происходит событие X (в общем случае случайное) так факт того, что оно произошло, автоматически (детерминированно) влечет факт того, что произошло Y.

Из оглашенного смысла материальной импликации следует, что с ее помощью моделируются детерминированные причинно–следственные связи между явлениями объективной реальности. Поэтому материальная импликация несет в логической модели объективной реальности смысл логического следования. При этом $x(X)$ — достаточное условие для $y(Y)$ и наоборот, $y(Y)$ необходимое условие для $x(X)$. Логическое следование отражает детерминированную причинно–следственную связь между явлениями объективной реальности. □

Когда логики и философы от логики об этом забывают, то есть когда они начинают «формально анализировать» с помощью нулей и единиц (абстрактной истины и лжи) разнокачественную словесную продукцию не различая, что она правильна в данном контексте, либо неправильно отражает объективную реальность, тогда и возникают парадоксы материальной импликации. Для лучшего понимания вышесказанного рассмотрим подробнее неизоморфизм алгебры логики и алгебры множеств.

§ 2. Булевы алгебры как основа логики

В работе [8] рассматриваются булевы алгебры — алгебраические системы, которые в зависимости от обстоятельств могут интерпретироваться как системы событий, либо как системы высказываний, допуская и другие интерпретации. В частности там отмечено [8, с. 8]:

« . . . Буль в своей обширной монографии «Исследование законов мышления, на которых основаны математические теории логики и вероятностей» отчетливо указал на связь построенного им исчисления с основаниями теории вероятностей. Эта связь основывается на аналогии между «событиями» и «высказываниями», позволяющей обслуживать логику и теорию вероятностей одним формальным аппаратом. Грубо говоря, «событие» — это то, что может произойти или не произойти; «высказывание» же — это то, что может быть истинно или ложно. Среди событий есть достоверные и невозможные; высказывания могут оказаться тождественно истинными или тождественно ложными. Между событиями возможна причинно-следственная связь: одно событие бывает иногда следствием другого. Точно так же между высказываниями возможна логическая связь; они могут вытекать одно из другого. Каждому событию может быть сопоставлено некоторое высказывание, утверждающее, что это событие произошло. С другой стороны, всегда можно истолковать высказывание как утверждение об осуществлении некоторого события. Сказанное сейчас убеждает в возможности построения единого «исчисления», которое могло бы, смотря по обстоятельствам, служить то «исчислением высказываний», то «исчислением событий». Такое исчисление и было создано Дж. Булем. В течение полувека, однако, оно развивалось в чисто «логическом» русле. Первое значительное исследование по аксиоматике теории вероятностей появилось лишь в 1917 г.; его автором был С.Н. Бернштейн.

Последующие исследования в этой области, связанные в первую очередь с работами А.Н. Колмогорова, окончательно поставили теорию вероятностей на твердую почву и оказали большое влияние на смежные разделы математики, в особенности — на теорию меры».

Поскольку событие имеет интерпретацию в форме множества, а высказывание интерпретируется как пропозициональная переменная с двумя возможными значениями «истина» и «ложь», то *изоморфизм* между алгеброй событий и алгеброй их индикаторов возможен только в случае, если множества — события в универсуме (достоверном событии) — упорядочены отношением нестрогого порядка. Покажем это. Пусть X и Y — два частично упорядоченных (отношением строгого порядка $<$) множества. Будем говорить, что отображение множества X в множество Y есть строгий изоморфизм (антирефлексивный изоморфизм), если оно взаимно однозначно и сохраняет строгий порядок ($<$), то есть неравенства $x < y$ и $\varphi(x) < \varphi(y)$ равносильны. Ясно, что обратное отображение φ^{-1} есть также строгий изоморфизм. Множества X и Y в случае надобности можно отождествлять. Для обозначения таких множеств можно использовать отношение равенства ($=$). Характеристическая функция, или индикатор множества X, имеющая областью определения элементы универсума, определяется, равенством $x(e) = 1$, если $e \in X$, и $x(e) = 0$, если $e \notin X$, где e — произвольный элемент универсума. Рассмотрим систему $\sum = \{X_i\}$ произвольных собственных подмножеств непустого множества U. *Пусть на множествах из* $\sum = \{X_i\}$ *определен нестрогий частичный порядок посредством отношения* $\subseteq$ *нестрогого включения.* Возьмем в качестве S систему всех характеристических функций множеств из $\sum$. Обозначим через φ отображение, сопоставляющее каждому X_i его характеристическую функцию x_i. Ясно, что φ устанавливает взаимно однозначное соответствие между $\sum$ и S. Нестрогое включение $X_i \subseteq X_j$ означает, что $x_i \leqslant x_j$ для любого $e \in U$, поэтому неравенства $X_i \subseteq X_j$ и $x_i \leqslant x_j$ равносильны. Таким образом, φ представляет собой изоморфизм между $\sum$ и S.

Если рассматривать строгий частичный порядок на X_i, то неравенство $X_i \subset X_j$ посредством φ в случае ($e \in X_i$ и $e \in X_j$) указывает на $x_i = x_j$, а в случае ($e \notin X_i$ и $e \in X_j$) указывает на $x_i < x_j$. Очевидно, что строгого изоморфизма нет. С учетом рассмотрения таблиц на рис. 6 и 7 нет и изоморфизма. *С точки зрения частичного порядка безразлично, что рассматривать — алгебраическую систему множеств или изоморфную ей алгебраическую систему характеристических функций этих множеств. Это отражено в теореме Стона* [10, с. 35].

В случае рассмотрения строгого частичного порядка строгого изоморфизма между этими системами нет, а есть гомоморфное отображение первой во вторую, при котором во второй теряется разделение отношений строгого включения и равенства между множествами. Проекционная модель на основе индикаторов настолько грубая, что любое непустое подмножество универсума алгебраической системы множеств отражается в ней как ноль, либо единица. Это и является причиной парадоксов материальной импликации (*см. замечание 5*).

Таким образом, мы не можем утверждать, что существует взаимно однозначное соответствие между отношением нестрогого включения $X \subseteq Y \equiv (X \subset Y) \oplus (X = Y)$ и материальной импликацией их индикаторов $x \Rightarrow y$. (см. таблицу 1 и таблицу 2 из раздела 2). В том же разделе обосновано, почему при моделировании рассуждений необходимо отказаться от использования нестрогого включения.

Замечание 6. Далее будем рассматривать частично упорядоченные отношением строгого порядка системы подмножеств множества U, называемого далее универсумом. При этом отдельные его элементы, в случае надобности, будем считать его одноэлементными подмножествами.

Частично упорядоченное отношением строгого порядка множество U называется строгой структурой (антирефлексивной структурой), если в нем при любых его подмножествах $X \subset U$, $Y \subset U$ система множеств $\{X, Y\}$ имеет точную верхнюю и нижнюю границы. Антирефлексивная структура U обладает свойством дистрибутивности, если для ее элементов выполняется соотношение $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$.

Нулем (0) и (1) единицей антирефлексивной структуры U называются ее наибольший и наименьший элемент. В нашем случае — это U и пустое множество. Булевой алгеброй называется дистрибутивная структура с неравными друг другу нулем 0 и единицей 1, в которой всякий элемент имеет дополнение. Таким образом, булева алгебра всегда содержит не менее двух элементов. Алгебра, содержащая только 0 и 1, называется вырожденной [8, с. 19].

Замечание 7. Классическая логика построена на основе вырожденной булевой алгебры, в которой 0 отождествлен с абстрактной ложью, а 1 — с абстрактной истиной, то есть она отражает объективную реальность как систему событий (минуя моделирование событий множествами) даже не в систему характеристических функций этих множеств, а в абстрактные по Гильберту пропозициональные переменные. В связи с этим отчетливо осознается провальная попытка схоластов-формализаторов выделить логику, элитаризировать ее на фоне остальных наук как науку о формах мышления, оторвать ее от объективной реальности, то есть считать, что это не средство моделирования, а нечто абсолютное и самодостаточное. Однако логика — это не цель, а средство [6, 18].

Замечание 8. Всякая алгебра множеств является булевой алгеброй относительно строгого и нестрогого включения как естественного упорядочения. С каждой такой алгеброй автоматически связывается (в случае частичного упорядочения на основе нестрогого включения) изоморфная ей булева алгебра соответствующих характеристических функций. В случае частичного упорядочения на основе строгого включения между алгеброй множеств и алгеброй характеристических функций устанавливается неизоморфное отображение (см. таблицы на рис. 6 и 7), которое является причиной парадоксов материальной импликации.

Замечание 9. Любое суждение может быть выражено как соотношение между множествами, поэтому можно в принципе отказаться от вырожденной булевой алгебры и развивать классическую логику на основе невырожденой булевой алгебры множеств, хотя бы уже потому, что в ней нет парадоксов материальной импликации (см. § 3).

Для практических приложений невырожденных булевых алгебр, построенных на основе конечных систем множеств важную роль играет следующая теорема.

Теорема 1 (см. [15, с. 111]). *Если $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ — конечная система множеств со свойствами кольца или полукольца, то существует и может быть построена конечная система E различных непустых множеств $E_1, E_2, \dots, E_m$ со следующими свойствами:*

a) для любой пары E_i, E_k при $i \neq k$ имеет место равенство $E_i \cap E_k = \emptyset$;

b) любое множество системы S в точности равно объединению некоторых множеств системы E.

Система множеств E называется системой непустых конституент системы S. Количество множеств $m \leqslant 2^n$.

Теорема 1 является фундаментом, на котором можно строить процедуры и алгоритмы проверки умозаключений, в частности полисиллогизмов [27].

§ 3. «Парадоксы» материальной импликации или почему, признавая объективную реальность, мы вынуждены отрицать их наличие

Необходимо отметить, что в математике в основном произведена смысловая зачистка, все «чисто» и никаких парадоксов материальной импликации не признается. Отсюда пристекает снисходительно-насмешливое отношение математиков к классической логике. Парадоксы возникают при выходе за границы математики, на бытовом и псевдонаучном уровне: когда мы пытаемся применить булеву логическую операцию импликация $\Rightarrow$, либо связку «если …, то …» для формализации условных высказываний в разговорной и псевдонаучной речи. Оказывается, что не все условные высказывания соотносятся с импликацией несмотря на то, что логики, используя неадекватную модель на основе вырожденной булевой алгебры, формально вынуждены утверждать обратное. При этом каждое из парадоксальных утверждений можно соотнести с элементом $A(X,Y)$, либо $Eq(X,Y)$ ортогонального базиса (см. соотношения 1–6 в замечании 5). Для устранения мнимого парадокса достаточно соотнести используемые в нем термины с двумя множествами X, Y, вычислить их конституенты и найти и указать по рис. 6 и 7, в каком из жергонновых отношений они находятся. Идентификатор жергоннова отношения, разоблачающего фокус парадокса, будем записывать в скобках после «парадоксального утверждения».

Парадокс «из лжи следует все» $(G4, G8, G12)$. «Если вода не жидкость, то ПАПА римский — глава католической церкви» $(G4)$. Обозначим $A(\text{В}, \text{Ж}')$ через x, где В — одноэлементное множество, единственным элементом которого является вода, Ж — множество жидкостей, $A(\text{П,Гк}) \oplus Eq(\text{П,Гк})$ обозначим через y, где П — одноэлементное множество, состоящее из действующего ПАПЫ, Гк — одноэлементное множество, состоящее из действующего главы католической церкви. Сопоставим истинному равенству $x = 0$ пустое множество X, а другому истинному равенству $y = 1$ одноэлементный универсум Y, состоящий из одного ПАПЫ (0, 1 — это истина и ложь в данном контексте). При этом x, y являются характеристическими функциями для X, Y. Поэтому суждение «если x, то y» является образом отношения $G4 \equiv (X = \varnothing)(Y = U)$ и не является материальной импликацией.

«Если вода — не жидкость, то кошка — это курица» $(G8)$. Рассуждая аналогично «если x, то y» и сопоставляя двум истинным равенствам $x = 0$ и $y = 0$ два пустых множества X, Y и любой универсум U, мы на основании содержания рис. 6 (3) утверждаем, что прообразом данного утверждения в логике, порожденной невырожденной булевой алгеброй на основе множеств, является соотношение $(G8)$. При этом для материальной импликации не выполняются соотношения $(XY \neq \varnothing)(X'Y \neq \varnothing)$. «Если земля имеет форму куба, то мужчины которые живут в долинах — плешивые» $(G12)$. «Если x, то y» здесь трактуется так: пропозициональной переменной x и истинному утверждению $x = 0$ соответствует пустое множество X; пропозициональной переменной y, могущей принимать как истинные, так и ложные значения, соответствует непустое множество Y плешивых людей, входящее в универсум U людей, живущих в долинах. Поэтому прообразом суждения «если x, то y» в данном случае является отношение $(G12)$ $(X = \varnothing)(Y \neq \varnothing)(Y' \neq \varnothing)$, которое также не является материальной импликацией. Из лжи логически не следует ничего, даже ложь. Ложь в вырожденной булевой алгебре соответствует невозможному событию в логике, порожденной невырожденной булевой алгеброй на базе множеств. Но из невозможного события не следует ни одно событие, включая достоверное. Как говаривал гений наш Уильям Шекспир «Из ничего не выйдет ничего». Парадокс «из лжи следует все» иногда используется в спорах как раз для того, чтобы подчеркнуть, абсурдность (неуместность в данном универсуме) некоторого утверждения. Например: «Если он — честный прокурор, то я — президент Барак Хусейн Обама».

Парадокс «истина следует из всего». Идея данного парадокса заключается в том, что $(x \Rightarrow true) \equiv true$ при любом x $(G1, G4, G5)$. Поэтому достаточно взять в качестве логического следствия любое истинное высказывание, а в качестве условия — совершенно произвольное, и получить якобы истинное условное высказывание. Все наоборот — говорить об истинности таких условных высказываний ненаучно, некорректно и бессмысленно. Например: «Если А.Н. Колмогоров — не ученый, то И.В. Курчатов — физик» $(G4)$. «Если $2 + 2 = 4$, то длина прямой бесконечна» $(G1)$. «Если люди, живущие в долине, — плешивые, то человек смертен» $(G5)$. Случай $G4$ уже рассмотрен. Рассмотрим $G1$: $x \equiv$ «$2 * 2 = 4$» означает, что $x = 1$ — истинно, y — «длина прямой бесконечна» означает, что $y = 1$ также истинно. Этим пропозициональным переменным сопоставляются $X = Y = U$, и поэтому прообразом «если x, то y» в данном случае является $G1$, а не $G13$. Случай $G5$: x — «люди, живущие в долине, — плешивые» — эта пропозициональная переменная может принимать как ложное, так и истинное значение; y — «человек смертен»; $y = 1$ — истина; поэтому в универсуме людей, живущих в долине, x является индикатором непустого множества X плешивых, а y — индикатором универсума. Поэтому прообразом суждения «если x, то y» в данном случае является $G5$, и оно также не есть материальная импликация.

Парадокс «в огороде бузина». Высказывание «Если в огороде бузина, то в Киеве дядька». Рассмотрим простейший универсум, в котором можно рассуждать об этом парадоксе, состоящий из элементов, обладающих только свойством быть бузиной в огороде, обладающих свойством быть дядькой в Киеве и обладающих обоими этими свойствами. Пусть X — множество элементов, которые являются бузинами в огороде и дядьками в Киеве одновременно. Y — это все дядьки в Киеве. При этом материальная импликация для индикаторов x, y имеет место, если $X \subset Y$. Поэтому думайте сами! Решайте сами! Возможно ли на белом свете иметь дядьку в Киеве, который по совместительству еще является бузиной в огороде. Очевидно, что это невозможно, так как нарушаются соотношения $XY' = \varnothing$ и $XY \neq \varnothing$, и истинным является простое суждение ортогонального базиса $E(X,Y) = A(X,Y') = G14(X,Y)$. Для крайних случаев, когда $X = Y$, либо $XY = \varnothing$, это высказывание тоже не будет воплощать материальную импликацию на индикаторах.

Материальная импликация из таблицы 2, определенная на индикаторах x, y, такова, что их прообразы в модели — невырожденной булевой алгебры на основе множеств — это соотношение $G13$, в котором X и Y — непустые собственные подмножества универсума. Они же есть события, которые могут произойти в одной из четырех комбинаций (см. столбец 2 на уровне соотношения 13 на рис. 7). Любой здравый человек, в том числе логик, скажет, что логическое следование здесь есть, при этом

$$G13 = A(X,Y)(X \neq \varnothing)(Y' \neq \varnothing) \equiv (X'Y' \neq \varnothing)(X'Y \neq \varnothing)(XY' = \varnothing)(XY \neq \varnothing).$$

Очевидно, что как только нарушается хотя бы одно из 4 условий, прописанных во втором столбце таблиц на рис. 6 и 7 (то есть они не выполняются в совокупности), так следования нет; нет и его образа в вырожденной булевой алгебре — материальной импликации как проекции первичной модели объективной реальности во вторичную — бинарный универсум.

Рассмотрим еще один пример, который дорог автору как память о студенческих годах. «Сократ бежит и Сократ не бежит, следовательно я в бане». Это иллюстрация так называемого закона Дунса Скота. Разберемся подробно с этим законом, который в общем виде выглядит так $xx' \Rightarrow y$. Отметим, что информация, которая нам представляется в учебниках по умолчанию вместе с этим образом невырожденной булевой алгебры множеств, методологически ущербна. Здесь x и y — любые взятые неизвестно откуда булевы переменные, принимающие абстрактные значения «истина», либо «ложь». Итак, если Сократ бежит и Сократ не бежит, то я в бане. Обыватель не видит никакого следования, а вот логик–формалист утверждает, что это несуразное суждение нужно формально считать истинным. Пусть универсум, в котором можно обсуждать данное воплощение закона Дунса Скота, состоит из состояний меня и Сократа, то есть имеется 4 множества состояний: X — Сократ бежит; X' — Сократ не бежит; Y — я в бане, Y' — я не в бане. Допустим, что рассматриваемое утверждение есть воплощение материальной импликации. Следовательно, $XX' \subset Y$. Невооруженным взглядом видно, что речь идет о соотношении $\varnothing \subset Y$; насчет правильности закона исключенного третьего в каждом отдельно взятом детерминированном универсуме у нас нет никаких сомнений. Это соотношение $G4$ рис. 6 является по нашей классификации вырожденным. Существуют еще 2 соотношения $G5$ и $G12$, на базе которых также можно построить похожие на материальную импликацию «парадоксальные» суждения. Вот их примеры. Соотношению $G5$ соответствует $X'Y + XY = U \equiv (X \subset Y)(Y = U)$, что не является прообразом материальной импликации и на русский язык переводится так: «Если Сократ бежит, то я в бане, но я всегда в бане». И это логиками трактуется как парадокс? Наконец соотношение $G12$, которое для множеств нашего примера можно на русском языке выразить так: «Если Сократ бежит и Сократ не бежит, то я в бане или я не в бане».

Еще раз повторим: для прообраза материальной импликации (про который по умолчанию не упоминается и в связи с этим формалисты про него забывают) должны выполняться все 4 соотношения между конституентами в столбце 2 таблиц на рис. 6 и 7 на уровне соотношения $G13$, иначе это — не материальная импликация.

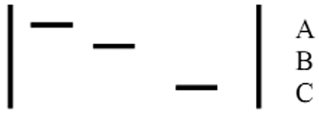


Рис. 8. Неправильное доказательство правильности силлогизма Б. Рассела

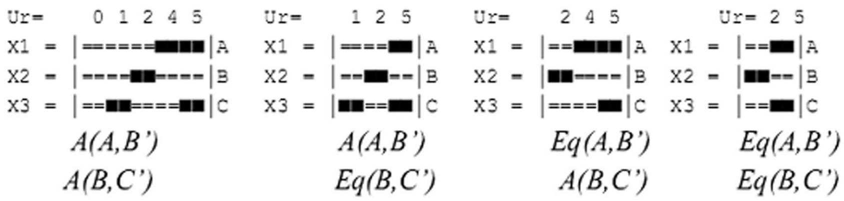


Рис. 9. Четыре варианта смысла посылок силлогизма

Рассмотрение импликации (вторичной модели причинно-следственной связи в реальности) как таковой, то есть «отвязанной» от первичной теоретико-множественной модели, приводит к тому, что материальная импликация составляется из абстрактных булевых переменных, а не из характеристических функций, связанных с множествами, моделирующими объективную реальность, и никакого отношения к объективной реальности может посему не иметь, что и отмечается де факто математиками и легко обнаруживается во всех трактатах по логике, которые рассматривают «парадоксы» материальной импликации.

В защиту Аристотеля скажем словами Н.П. Брусенцова [3]: «Классическая формальная логика не способствует, а препятствует становлению интеллекта, умению постигать объективные взаимосвязи вещей, выявлять структуру бытия. И вместе с тем, с ее точки зрения силлогистика Аристотеля — «это узкая система, неприменимая ко всем видам рассуждений, например, к математическим доказательствам, поскольку Аристотель, якобы не признавал то ли пустых множеств, то ли «понятий с пустым объемом». Но ведь аристотелевой силлогистике не свойственно несоответствие интуиции естественно-языковым приемам рассуждения, упорядочение и обобщение которых в ней впервые осуществлено. Классической же логике свойственно абстрагироваться от всякого содержания и здравого смысла».

Рассмотрим еще один пример неучета всех смыслов простых суждений Аристотеля на примере следующего силлогизма: «Если A находится вне B и B находится вне C, то A находится вне C». В односмысловых терминах ортогонального базиса это выглядит так. Из $A(A,B')\oplus Eq(A,B')$ и $A(B,C')\oplus(Eq(B,C')$ следует $A(A,C')\oplus Eq(A,C')$. Данный силлогизм из работы [23, с. 38] опровергнут В.И. Лобановым и является образцом неряшливого мышления. На первый взгляд кажется, что силлогизм верен (см. рис. 8). Однако подойдем к данному доказательству методически. Здесь мы имеем четыре варианта тернарных отношений между терминами двух посылок. Они изображены на рис. 9. Заключение силлогизма $A(A,C')\oplus Eq(A,C')$ не выполняется ни в одном из четырех случаев. Поэтому данный силлогизм неправильный. Соотношение на рис. 6 детерминированно не следует из всех смысловых вариантов посылок. На рис. 9 показаны машинограммы, полученные в результате работы программы, построенной по алгоритму Ю.М. Сметанина из работы [27].

Аксиоматический метод — главный оплот формализма — сам по себе не плох и не хорош. Таковым он становится в руках ученых. Одни формалисты — математики от мертвой схоластики. Другие — математики от жизни, например, А.Н. Колмогоров. Математики от жизни находят в объективной реальности новые интерпретации своей аксиоматики, а математики от мертвой схоластики находят (не могут не найти) только те интерпретации, которые уже найдены до них. Аксиоматика теории вероятностей А.Н. Колмогорова, многократно проинтерпретированная в объективной реальности, основанная на булевой алгебре множеств, должна стать и аксиоматикой классической логики. Аксиоматика же классической логики, основанная на двоичной схоластике, до сих пор страдает от «парадоксов» материальной импликации.

Основные результаты данной работы таковы:

1. *Парадоксы материальной импликации в классической логике порождены несовершенным проекционным механизмом моделирования причинно-следственных отношений между явлениями объективной реальности в виде соотношений (булевых функций) в вырожденной булевой алгебре с универсумом* 0, 1. *Методология построения адекватных проекционных моделей разработана К.И. Вальковым.*

2. *При сохранении аристотелевского базиса силлогистики и некоторых других базисов, предложенных Васильевым, Брусенцовым, Лобановым, нельзя обойтись без многозначной (в частности, троичной логики) и, соответственно, многосмысловости ее суждений. При этом автор данной работы не утверждает, что ее использование неэффективно в инженерной практике.*

3. *При переходе к ортогональному базису силлогистики, предлагаемому автором, можно обойтись двузначными (истина, ложь) простыми высказываниями о равенстве (неравенстве) пустому множеству пересечения, объединения и дополнения терминов рассуждений.*

4. *Автор уверен, что полученная на основе невырожденной булевой алгебры логика является естественным преемником и уточнением классической логики (уточненной логической моделью объективной реальности). Это уточнение с односмысловым для непустых терминов* X, Y *базисом* $A(X,Y), Eq(X,Y), E(X,Y) = A(X,Y'), IO(X,Y)$ *позволяет объяснить появление «парадоксов» материальной импликации, а также объяснить, что они являются мнимыми.*

5. *Силлогистику в случае принятия ортогонального базиса придется переписывать заново.*

В заключение можно сформулировать общее для всех, по необходимости или по собственной воле познающих мир, чаяние: *и введи нас во искушение, но избави, избави нас от лукавого!*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аристотель. Сочинения в четырех томах. М.: Мысль. Т. 1. 1975; Т. 2. 1978.
2. Брусенцов Н. П. Устранение парадоксов и химер. М.: Фонд «Новое тысячелетие», 2010.
3. Брусенцов Н. П. Искусство достоверного рассуждения. Неформальная реконструкция аристотелевой силлогистики и булевой математики мысли. М.: Фонд «Новое тысячелетие», 1998.
4. Брусенцов Н. П. Блуждание в трех соснах (Приключения диалектики в информатике) М.: SvR–Аргус, 2000. URL: `http://ternarycomp.narod.ru/3PINES.DOC`.
5. Брусенцов Н. П. Логика и интеллект // Искусственный интеллект. 2004. № 2. С. 28–31.
6. Вальков К. И. Проекционное моделирование и автоматизация: учеб. пособие для факультета повышения квалификации. Л.: ЛИСИ, 1985. 86 с.
7. Васильев Н. И. Воображаемая логика. Избранные труды. М.: Наука, 1989. 124 с.
8. Владимиров Д. А. Булевы алгебры. М.: Наука, 1969. 264 с.
9. Гильберт Д., Аккерман В. Основы теоретической логики. М.: Иностр. лит., 1947.
10. Горбатов В. А. Теория частично упорядоченных систем. М.: Советское радио, 1976. 336 с.
11. Закревский Д. А. К формализации полисиллогистики // Логический вывод. М.: Наука, 1979. 416 с.
12. Кузина Е. Б. Логика в кратком изложении и упражнениях. М.: Изд-во МГУ, 2000. 240 с.
13. Кузичев А. С. Диаграммы Венна. М.: Наука, 1968. 253 с.
14. Кулик Б. А. Логический анализ систем на основе алгебраического подхода: дис. . . . д-ра физ.-матем. наук / СПбГУ. СПб., 2008. 266 с.
15. Кулик Б. А. Логические основы здравого смысла / под ред. Д.А. Поспелова. СПб.: Политехника, 1997. 131 с.

16. Кэррол Л. Символическая логика / Льюис Кэррол. История с узелками. М.: Мир, 1973. 431 с.
17. Лобанов В. И. Русская вероятностная логика. М.: Русская правда, 2009. 320 с.
18. Лосев Ф. Ф. Критические заметки о буржуазной математической логике // Историко-математические исследования. 2-я серия. Вып. 8(43). М.: Янус-К, 2003. С. 339–401
19. Лукасевич Я. Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики. М.: Иностр. лит., 1959.
20. Нефедов В. Н., Осипова В. А. Курс дискретной математики. М.: Изд-во МАИ, 1992. 264 с.
21. Плутарх. Сравнительные жизнеописания в двух томах. Т. 2. М.: Наука, 1994.
22. Порецкий П. С. О способах решения логических равенств и об обратном способе математической логики. Казань, 1884.
23. Рассел Б. Искусство мыслить. М.: Идея–Пресс, Дом интеллектуальной книги, 1999. 240 с.
24. Сметанин Ю. М. Ортогональный базис силлогистики или какая логика нужна экономистам // Менеджмент: теория и практика. УдГУ. Ижевск, 2009. № 3–4. С. 25–42.
25. Сметанин Ю. М. Сопоставление расширенной алгебры множеств и алгебры логики с точки зрения проблем полисиллогистики // Менеджмент: теория и практика. УдГУ. Ижевск, 2010. № 3–4. С. 12–27.
26. Сметанин Ю. М. Ортогональный базис силлогистики // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. Вып. 4. С. 155–166
27. Сметанин Ю. М. Алгоритм решения полисиллогизмов в ортогональном базисе посредством исчисления конституентных множеств // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 4. С. 172–185.

Поступила в редакцию 28.11.11

Yu. M. Smetanin

Analysis of paradoxes of tangible implication in the orthogonal basis of syllogistics

The article analyzes the disadvantages of Aristotle syllogistic basis. The author indicates reasons for paradoxes of tangible implication in classical logics. It is suggested to verify correlations between a conditioned judgment and a tangible implication. Such paradoxes are not allowed in the multi-level syllogistic orthogonal basis.

Keywords: syllogistics, formal logics, orthogonal basis, paradoxes of tangible implication, Boolean algebra, polysyllogism, multi-level syllogistics.

Mathematical Subject Classifications: 03B10

Сметанин Юрий Михайлович, к. ф.-м. н., доцент, зав. кафедрой высшей математики и информатики, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: gms1234gms@rambler.ru

Smetanin Yurii Mikhailovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia