

УДК 517.938.5+531.38

© *М. П. Харламов, П. Е. Рябов*

### ДИАГРАММЫ СМЕЙЛА–ФОМЕНКО И ГРУБЫЕ ИНВАРИАНТЫ СЛУЧАЯ КОВАЛЕВСКОЙ–ЯХЬЯ <sup>1</sup>

Представлена полная аналитическая классификация атомов гиростата Ковалевской–Яхья, возникающих в критических точках ранга 1. Найдены все разделяющие значения гиростатического момента при классификации диаграмм Смейла–Фоменко. Разработан «конструктор» графов Фоменко, применение которого дало полное описание грубой топологии этого интегрируемого случая. Доказано, что имеется девять групп эквивалентных молекул (без меток), содержащих 22 устойчивых графа и 6 неустойчивых по отношению к количеству критических окружностей на критических уровнях.

*Ключевые слова:* гиростат, случай Ковалевской–Яхья, диаграммы, топологические инварианты.

#### Введение

Работа посвящена случаю интегрируемости Ковалевской–Яхья [1] и является продолжением статей [2, 3], результаты которых используются ниже. В [3] имеется и достаточно полный обзор работ, посвященных этой задаче. Изучается система уравнений

$$\begin{aligned} 2\dot{\omega}_1 &= \omega_2(\omega_3 - \lambda), & 2\dot{\omega}_2 &= -\omega_1(\omega_3 - \lambda) - \alpha_3, & \dot{\omega}_3 &= \alpha_2, \\ \dot{\alpha}_1 &= \alpha_2\omega_3 - \alpha_3\omega_2, & \dot{\alpha}_2 &= \alpha_3\omega_1 - \alpha_1\omega_3, & \dot{\alpha}_3 &= \alpha_1\omega_2 - \alpha_2\omega_1 \end{aligned} \quad (1)$$

на фазовом пространстве  $P^5 = \mathbb{R}^3(\boldsymbol{\omega}) \times S^2(\boldsymbol{\alpha})$ , определенном в  $\mathbb{R}^6$  как уровень геометрического интеграла  $\Gamma = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$ . Имеется набор интегралов в инволюции

$$\begin{aligned} L &= \omega_1\alpha_1 + \omega_2\alpha_2 + \frac{1}{2}(\omega_3 + \lambda)\alpha_3, & H &= \omega_1^2 + \omega_2^2 + \frac{1}{2}\omega_3^2 - \alpha_1, \\ K &= (\omega_1^2 - \omega_2^2 + \alpha_1)^2 + (2\omega_1\omega_2 + \alpha_2)^2 + 2\lambda[(\omega_3 - \lambda)(\omega_1^2 + \omega_2^2) + 2\omega_1\alpha_3], \end{aligned} \quad (2)$$

поэтому интегральное отображение — отображение момента для системы (1) задается так:

$$J = L \times H \times K : P^5 \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Его бифуркационную диаграмму обозначим через  $\Sigma$ . Она является подмножеством в объединении трех (пересекающихся) поверхностей  $\Pi_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) в пространстве  $\mathbb{R}^3(\ell, h, k)$ :

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \left\{ h = \frac{\ell^2}{s^2} + \frac{\lambda^2}{2} + s, k = \frac{\ell^4}{s^4} - \frac{2\ell^2}{s} + 1, \ell s \neq 0 \right\} \cup \\ &\quad \cup \{k = 1, \ell = 0\} \cup \left\{ k = 1 + \left(h - \frac{\lambda^2}{2}\right)^2, \ell = 0 \right\}, \\ \Pi_{2,3} &= \left\{ h = 2\ell^2 + \frac{1}{2s} - \frac{\lambda^2}{2}(1 - 4s^2), k = -4\ell^2\lambda^2 + \frac{1}{4s^2} - \frac{\lambda^2}{s}(1 - \lambda^2s)(1 - 4s^2) \right\}. \end{aligned}$$

Здесь  $s < 0$  для  $\Pi_2$  и  $s > 0$  для  $\Pi_3$ . Полное исследование условий, определяющих  $\Sigma$  в этом объединении для различных систем параметров, приведено в [4, 3].

Функция  $L$  является функцией Казимира скобки Пуассона на  $P^5$ , поэтому на любом уровне  $P_\ell^4 = \{L = \ell\} \subset P^5$  индуцированное поле является гамильтоновой системой с двумя степенями свободы. Интегральное отображение  $\mathcal{R}_\ell = H \times K|_{P_\ell^4} : P_\ell^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  делает ее вполне интегрируемой,

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 10-01-00043, 10-01-97001).

и к ней применимы все понятия и результаты общей теории [5, 6]. В частности, бифуркационной диаграммой отображения  $\mathcal{R}_\ell$  является сечение множества  $\Sigma$  плоскостью  $\ell = \text{const}$ .

Множество критических точек  $\mathcal{C}$  отображения момента стратифицировано его рангом. В силу того, что интеграл  $L$  всюду регулярен и расслаивает  $P^5$  на гладкие симплектические листы  $P_\ell^4$ , естественно принять следующую терминологию.

**Определение 1.** Рангом и типом критической точки  $x \in \mathcal{C} \subset P^5$  будем называть ранг и тип этой точки по отношению к тому из отображений-ограничений  $\mathcal{R}_\ell$ , в область определения которого эта точка попадает. Критическая точка будет называться вырожденной или невырожденной, если она является таковой в соответствующей системе на  $P_\ell^4$ .

Итак, ранг критической точки по определению на единицу меньше, чем ранг в этой точке отображения момента. Бифуркационная диаграмма  $\Sigma$  есть  $J$ -образ множества критических точек ранга 0 или 1.

Как принято в системах с симметрией, изоэнергетические многообразия здесь имеют два индекса  $Q_{\ell,h}^3 = \{x \in P^5 : L(x) = \ell, H(x) = h\}$ , но дополнительно они зависят также и от параметра  $\lambda$ :  $Q_{\ell,h}^3 = Q_{\ell,h}^3(\lambda)$ . Предположим, что на  $Q_{\ell,h}^3$  нет критических точек ранга 0 и вырожденных критических точек ранга 1. Такое изоэнергетическое многообразие будем называть *типичным*, а точку  $(\ell, h)$  — *типичной* точкой плоскости  $Olh$ . Топология возникающего на типичном  $Q_{\ell,h}^3$  слоения Лиувилля с точностью до грубой эквивалентности определена соответствующим инвариантом Фоменко [7], который также называется графом Фоменко или молекулой [6]. Цель настоящей работы — дать исчерпывающую классификацию таких молекул как основу для дальнейшего *тонкого* топологического анализа с использованием меченых инвариантов [8]. Ранее большая часть молекул, присутствующих в этой задаче, была предъявлена в работах [9, 10]. В работе [11] получена полная классификация графов без учета требования совпадения (*идентичности*) соответствующих молекул в смысле определения [6].

### § 1. Диаграммы Смейла и изоэнергетические многообразия

Гиростат является механической системой с четырьмя степенями свободы (тело плюс ротор), в которой  $\lambda$  есть постоянная циклического интеграла и равноправно входит в состав интегральных констант. Поэтому все рассуждения о постоянстве каких-либо свойств в пространстве интегральных или иных параметров естественно рассматривать в расширенном пространстве этих параметров, включающих ось  $\mathbb{R} = \mathbb{R}_\lambda$ . В связи с этим договоримся о следующем. Пусть  $A$  — какое-либо множество, а  $B(\lambda)$  — семейство его подмножеств, зависящих от параметра  $\lambda$ . Обозначим  $\hat{A} = A \times \mathbb{R}_\lambda$ ,  $\hat{B}$  — объединение подмножеств  $B(\lambda)$  в  $\lambda$ -сечениях пространства  $\hat{A}$ . Если множеству  $A$  или  $B(\lambda)$  присвоен термин «объект», то соответствующему  $\hat{A}$  или  $\hat{B}$  присвоим термин «расширенный объект». В дальнейшем, в силу имеющегося произвола в выборе направления подвижных осей, в которых записаны уравнения (1), можно считать, что  $\lambda \geq 0$ . При этом  $\lambda = 0$  (классическая задача Ковалевской, полностью изученная ранее в [12, 13]) рассматривается здесь лишь как предельный случай для сравнения результатов.

Многообразия  $Q_{\ell,h}^3$  терпят перестройки в точках бифуркационной диаграммы отображения  $L \times H$ . Обозначим эту диаграмму через  $\Sigma_{LH} = \Sigma_{LH}(\lambda)$  и будем называть диаграммой Смейла. В *расширенном* пространстве  $\mathbb{R}^3(\ell, h, \lambda)$  возникает *расширенная* диаграмма Смейла  $\widehat{\Sigma}_{LH}$ . Она делит  $\mathbb{R}^3(\ell, h, \lambda)$  на открытые связные компоненты, которые принято называть *камерами*. В силу имеющейся в задаче симметрии фазового пространства  $(\omega_1, \omega_2, \alpha_3) \mapsto (-\omega_1, -\omega_2, -\alpha_3)$ , устанавливающей изоморфизм фазовых потоков на  $Q_{\ell,h}^3$  и  $Q_{-\ell,h}^3$ , объявим одной камерой также и объединение двух компонент, отличающихся знаком  $\ell$ .

Уравнения диаграмм Смейла приведены в [10] (см. также [9]), топологические типы  $Q_{\ell,h}^3$  найдены в [11, 10], все виды диаграмм Смейла и камеры определены в [9] с помощью компьютерного моделирования. Далее, в теореме 1 для такой классификации даны точные аналитические основания.

**Замечание 1.** Условимся еще об одной системе обозначений. Пусть  $\Phi$  — какое-либо выделенное подмножество фазового пространства (в основном это будут множества критических точек заданного свойства). На этом множестве определены общие первые интегралы (2), но могут быть определены и частные интегралы. Возникает отображение множества  $\Phi$  в пространство или плоскость каких-либо интегральных констант. Если из контекста ясно, о каком именно интегральном отображении идет речь, то образ множества  $\Phi$  будем обозначать так же, как и само множество, и говорить о поверхности или кривой с обозначением  $\Phi$ . Говоря об условиях существования движений в прообразе какого-либо подмножества в плоскости или пространстве интегральных постоянных, точки подмножества будем называть *допустимыми*, если им отвечают вещественные решения исходной системы того типа, о котором идет речь (например, движений из рассматриваемой критической подсистемы или любых движений, если рассматривается система в целом).

**Теорема 1.** В случае Ковалевской–Яхья имеется семь устойчивых по параметру  $\lambda$  видов диаграмм Смейла  $\Sigma_{LH}(\lambda)$ . Разделяющими значениями параметра служат  $0, \lambda_1, \lambda_* = 2^{-3/4}, \lambda^* = (4/3)^{3/4}, 2\sqrt{\sqrt{2}-1}, \lambda_2, \sqrt{2}$ , где

$$\lambda_1 = \frac{(X-4)^{3/2}}{2\sqrt{2}X^{3/4}} \approx 0.023, \quad X^4 - 24X^3 + 720X^2 - 2048X - 3072 = 0, \quad X \approx 4.342,$$

$$\lambda_2 = \frac{3X-4}{2X^{3/4}} \approx 1.326, \quad 3X^4 + 32X^3 - 180X^2 + 96X - 64 = 0, \quad X \approx 3.685.$$

Расширенная диаграмма  $\widehat{\Sigma}_{LH}$  делит пространство  $\mathbb{R}^3(\ell, h, \lambda)$  на восемь камер  $A, \dots, H$  с непустыми изоэнергетическими многообразиями. Условия существования камер, связность камер и топология  $Q_{\ell, h}^3$  приведены в табл. 1. Все изоэнергетические многообразия связны, через  $K^3$  обозначена связная сумма  $(S^2 \times S^1) \# (S^2 \times S^1)$ .

Таблица 1

Код камеры	Время жизни по $\lambda$	Компонент в камере	$Q_{\ell, h}^3$
A	$\lambda \in [0, +\infty)$	1	$S^3$
B	$\lambda \in [0, +\infty)$	2	$S^2 \times S^1$
C	$\lambda \in (0, \lambda_*)$	2	$S^2 \times S^1$
D	$\lambda \in [0, \lambda_1)$	2	$K^3$
E	$\lambda \in [0, +\infty)$	1	$\mathbb{R}P^3$
F	$\lambda \in (\lambda_*, \lambda_2)$	2	$S^2 \times S^1$
G	$\lambda \in (\lambda^*, \sqrt{2})$	1	$K^3$
H	$\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$	2	$S^2 \times S^1$

Для доказательства достаточно отметить, что диаграмма Смейла есть образ неподвижных точек уравнений Эйлера–Пуассона, множество которых  $\mathcal{C}^0$  удобно параметризовать величиной осевой компоненты угловой скорости  $\omega_3 = r$  [11]. Значения первых интегралов на  $\mathcal{C}^0$  (уравнения диаграммы) таковы

$$\ell = \mp \frac{1}{2} [\lambda(r-\lambda) + d] \sqrt{\frac{r}{2} \left[ -r + \frac{1}{r-\lambda} d \right]}, \quad h = -\frac{1}{2} r(r-\lambda) + \frac{2r-\lambda}{r-\lambda} d, \quad (3)$$

$$d = \pm \sqrt{4 + r^2(r-\lambda)^2}, \quad r \in (-\infty, 0] \cup [0, \lambda) \cup (\lambda, +\infty).$$

Знак  $d$  при  $r \neq 0$  определяется по правилу  $\text{sgn } d = \text{sgn } [r(r-\lambda)]$  и произволен при  $r = 0$ . В частности, значению  $r = 0$  при любом  $\lambda$  отвечают две точки фазового пространства — положения абсолютного равновесия тела  $\omega = 0, \alpha = (\pm 1, 0, 0)$ . Этим и обусловлен выбор интервалов изменения  $r$  (ноль включен дважды). Обозначим подмножества в  $\mathcal{C}^0$  в соответствии с промежутками изменения  $r$  через  $\delta_1$  для  $r \in [0, \lambda)$ ,  $\delta_2$  для  $r \in (-\infty, 0]$ ,  $\delta_3$  для  $r \in (\lambda, +\infty)$

(последнее множество состоит из двух связных компонент) и, в соответствии с замечанием 1, теми же символами  $\delta_j$  обозначим и *образы* этих подмножеств — *кривые*  $\delta_j$  в пространствах интегральных постоянных или *поверхности*  $\delta_j$  в расширенных пространствах (заданные в этом случае параметрами  $r, \lambda$ ).

Эволюция кривых  $\delta_j$  по  $\lambda$  легко исследуется аналитически. На рис. 1 для интервалов между разделяющими значениями  $\lambda$  показаны фрагменты диаграммы, в которых происходят перестройки, и обозначения возникающих камер. Кривая  $\delta_1$  в перестройках не участвует, оставаясь нижней границей допустимых значений  $h$ . При переходе через значение  $\lambda_*$ , то есть от (b) к (c), точки возврата на кривой  $\delta_2$  сливаются с точкой самопересечения, затем снова расходятся, камера C исчезает, рождается новая камера F. При  $\lambda > \lambda_*$  кривая  $\delta_3$  в перестройках также не участвует. При переходах через  $\lambda^*, 2\sqrt{\sqrt{2}-1}, \sqrt{2}$  перестройки происходят на оси  $\ell = 0$ . Разделяющие значения  $\lambda_1, \lambda_2$  находятся из условия попадания верхней точки возврата кривой  $\delta_2$  на кривую  $\delta_3$  и нижней точки возврата в другую, регулярную, точку кривой  $\delta_2$ . В формулировке теоремы указаны подстановки  $\lambda$  через новую переменную  $X$ , приводящие к выписанным там же уравнениям для  $X$ , каждое из которых имеет ровно один вещественный корень в нужном промежутке для обеспечения положительного значения  $\lambda$ .

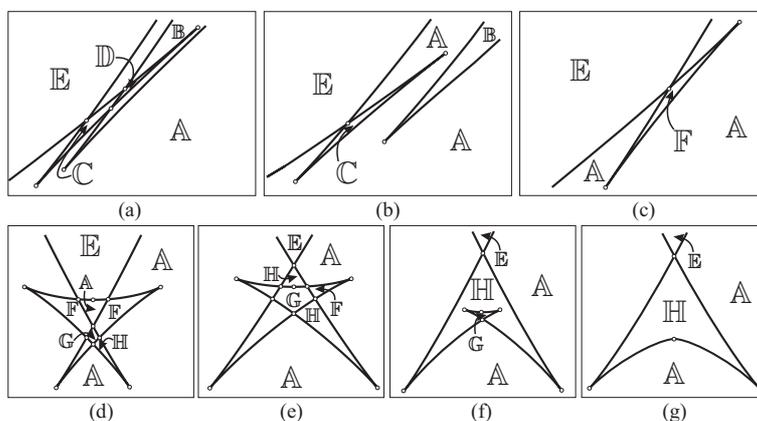


Рис. 1. Фрагменты и камеры диаграмм Смейла

Топология  $Q_{\ell,h}^3(\lambda)$  определяется по Смейлу как приведенное расслоение окружностей над областью возможности движения на сфере Пуассона  $\{\alpha : U_{\ell,\lambda}(\alpha) \leq h\}$  и находится по теории Морса. Здесь  $U_{\ell,\lambda}$  — эффективный потенциал. Заметим, что для любой функции  $f$  на  $\mathbb{R}^3$  характеристический многочлен второго дифференциала ее ограничения на сферу есть

$$\xi_f(\mu) = \frac{1}{\mu} \det[\Theta^2 f - \mu E], \quad \Theta = \alpha \times \frac{\partial}{\partial \alpha}.$$

Для  $U_{\ell,\lambda}$  корни этого многочлена (показатели Морса) в точках  $C^0$  таковы:

$$\mu_1 = -\frac{1}{2} [r(r - \lambda) + d], \quad \mu_2 = -\frac{1}{2(r - \lambda)d} [(2r - \lambda)(r - \lambda) - d] [(2r - \lambda)(r - \lambda)r + \lambda d].$$

В частности,  $\text{sgn } \mu_1 = -\text{sgn } d$ , поэтому  $\mu_1 > 0$  на  $\delta_1$  и  $\mu_1 < 0$  на  $\delta_2, \delta_3$ . Показатель  $\mu_2$  положителен на кривой  $\delta_1$ . В остальных случаях знак  $\mu_2$  определяется, с учетом соглашения о знаке  $d$ , расположением точки  $(r, \lambda)$  в области  $r \neq \lambda$  по отношению к кривым  $\mu_2 = 0$ , которые, очевидно, отвечают точкам возврата на диаграммах Смейла.

## § 2. Критические подсистемы

Напомним понятие критической подсистемы [14, 15]. Применительно к рассматриваемой задаче критической подсистемой  $M_j$  называется множество критических точек отображения момента, лежащих в прообразе особой поверхности  $\Pi_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ). Пусть  $(\ell, h)$  — *типичная*

точка. Тогда пересечение  $Q_{\ell,h}^3 \cap \mathcal{C}$  состоит из конечного числа невырожденных критических окружностей. Рассмотрим прямую  $\tau_{\ell,h} \subset \mathbb{R}^3(\ell, h, k)$  над  $(\ell, h)$ , параллельную  $Ok$ . Для типичной точки критические окружности соответствуют конечному числу точек *трансверсального* пересечения  $\tau_{\ell,h}$  с поверхностями  $\Pi_j$ . Чтобы построить молекулу, нужно установить отвечающие этим пересечениям атомы и, для несимметричных атомов, выяснить их ориентацию при возрастании интеграла  $K$ . Ответить практически на все вопросы позволяет вычисление типа критической точки  $x$  и индекса Морса–Ботта, то есть индекса второго дифференциала ограничения функции  $K$  на трансверсальную площадку  $T_{\ell,h}(x)$  к точке  $x$  на критической окружности внутри  $Q_{\ell,h}^3$ . Известно, что трансверсальным пересечениям поверхностей  $\Pi_j$  отвечают критические точки ранга 0, а линиям касания пары поверхностей — вырожденные критические точки ранга 1 [2]. Поэтому образ любой критической точки  $x$  функции  $K$  на типичном  $Q_{\ell,h}^3$  может принадлежать только одной из особых поверхностей, а сама точка  $x$  — только одной из критических подсистем. Таким образом, нужно классифицировать точки критических подсистем по разбиению, порожденному критическими точками необщего положения, и для каждой из образовавшихся областей вычислить тип и индекс Морса–Ботта. В сечении плоскостями постоянного значения  $\ell$  или  $h$  бифуркационной диаграммы  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3(\ell, h, k)$  каждая из полученных областей даст дугу, вдоль которой сохраняется соответствующий атом в составе молекулы  $W_{\ell,h}$ , а в расширенном пространстве — область на поверхности сечения трехмерного комплекса  $\widehat{\Sigma}$  соответствующей гиперплоскостью, в которой сохраняется тип и ориентация атома в составе молекулы  $W_{\ell,h}(\lambda)$ . Перейдем к классификации точек критических подсистем.

Первая критическая подсистема определена уравнениями [16]

$$\mathcal{M}_1 : \begin{cases} \omega_1 = p, & \omega_2 = 0, & \omega_3 = r, \\ \alpha_1 = \frac{1}{2}r^2 + p^2 - h, & \alpha_2 = \sqrt{R(r)}, & \alpha_3 = -p(r - \lambda). \end{cases}$$

Здесь

$$p^2 = h - \frac{\lambda^2}{2} - s, \quad \ell = -sp, \quad R = -\frac{1}{4}r^4 - (2p^2 - h)r^2 + 2\lambda p^2 r + 1 - (p^2 - h)^2 - p^2 \lambda^2$$

и  $\dot{r} = \sqrt{R(r)}$ . В качестве координат на  $\mathcal{M}_1$  могут быть выбраны  $r$  (переменная вдоль критической окружности) и две из интегральных констант  $s, h, \ell$ . Очевидно, что если при заданных  $s, \ell, h$ , подчиненных уравнениям поверхности  $\Pi_1$ , все корни  $R(r)$  простые, то есть на заданном интегральном уровне нет критических точек ранга 0, то количество периодических решений на этом уровне в  $\mathcal{M}_1$  равно количеству промежутков неотрицательности  $R(r)$ .

Тип критической точки ранга 1 подсистемы  $\mathcal{M}_1$  определяется симплектическим оператором, порожденным функцией  $F_1 = K - 2p^2 H$  [2], с собственными числами  $\pm \sqrt{m_1}$ , где

$$m_1 = 2 \left[ 2s^2 - 2\left(h + \frac{\lambda^2}{2}\right)s + 1 \right] \left[ \frac{3}{2}s - \left(h - \frac{\lambda^2}{2}\right) \right] = \frac{1}{s^3} (2\lambda^2 s^2 - s + 2\ell^2) (s^3 - 2\ell^2).$$

В соответствии с этим разложением на множители обозначим множества вырожденных критических точек ранга 1 в подсистеме  $\mathcal{M}_1$  через  $\Delta_0, \Delta_1$  и, согласно замечанию 1, так же обозначим и их образы в произвольных пространствах интегральных постоянных. В частности, с учетом условий существования движений, полученных в [4, 3], для интегральных констант  $s, \ell, h$  будем иметь

$$\Delta_0 : \ell = \pm \sqrt{\frac{s}{2}(1 - 2\lambda^2 s)}, \quad h = s + \frac{1}{2s} - \frac{\lambda^2}{2}, \quad s \in (0, \frac{\lambda^2}{2}]; \quad (4)$$

$$\Delta_1 : \ell = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} s^{3/2}, \quad h = \frac{3}{2}s + \frac{\lambda^2}{2}, \quad s \in [0, s_*], \quad (5)$$

где  $s_*(\lambda) \in \mathbb{R}$  — наибольший корень многочлена  $9s^4 + 2\lambda^2 s^3 - 24s^2 - 24\lambda^2 s + 4(4 - \lambda^4)$ , существующий при всех  $\lambda$ . Первая кривая — линия касания поверхностей  $\Pi_1, \Pi_3$ , вторая — часть ребра возврата поверхности  $\Pi_1$  между его точками пересечения с компонентами  $\delta_3$ .

Заметим, что любая точка из  $\mathcal{M}_1$  является в пространстве  $\mathbb{R}^6(\omega, \alpha)$  критической точкой функции  $K_1 = K - 2p^2H - 4pL - \Gamma$  (при вычислении дифференциала  $p$  считается константой). Поэтому для нахождения (двух) показателей Морса–Ботта надо найти характеристический многочлен ограничения  $d^2K_1$  на  $T_{\ell,h}$ . На каждой траектории найдется точка  $x_0$ , в которой  $R(r) = 0$ . В этой точке можно взять касательный базис к  $T_{\ell,h}(x_0)$  в виде

$$v_1 = (0, 1, 0, 0, 0, 0), \quad v_2 = \left(\lambda + r, 0, -4p, 2p(\lambda - r), 0, 2\left(h - p^2 - \frac{r^2}{2}\right)\right).$$

Собственные числа ограничения  $d^2K_1$  на линейную оболочку векторов  $v_1, v_2$

$$\mu_1 = 2 \left[2s - (\lambda - r)^2\right], \quad \mu_2 = -32 \left(h - \frac{3}{2}s - \frac{\lambda^2}{2}\right) \left[h - \frac{3}{2}s - \frac{\lambda^2}{2} - (\lambda + r)^2\right].$$

В частности, в силу равенства  $R(r) = 0$  произведение

$$\mu_1\mu_2 = -64 \left[\frac{3}{2}s - \left(h - \frac{\lambda^2}{2}\right)\right] \left[2s^2 - 2\left(h + \frac{\lambda^2}{2}\right)s + 1\right]$$

от  $r$  не зависит, и его знак определен расположением точки  $(s, h)$  по отношению к множеству  $m_1 = 0$ . Поэтому величины  $\mu_1, \mu_2$  на невырожденных траекториях в ноль не обращаются, а значит, не меняют знака.

Напомним, что атом  $B$  в трехмерном изоэнергетическом многообразии есть прямое произведение на окружность бифуркации одной окружности в две через «восьмерку». В связи с этим он принципиально несимметричен. Уровни, отвечающие окружности, охватывающей «восьмерку» в целом (то есть окружности, которая при стремлении значения дополнительного интеграла к критическому в пределе дает всю «восьмерку»), и ребро в графе, порожденное этими уровнями, называем «внешними» или «головой» атома  $B$ . Уровни, отвечающие паре окружностей, лежащих внутри петель «восьмерки» (то есть окружностям, которые при стремлении значения дополнительного интеграла к критическому в пределе дают не всю «восьмерку», а лишь ее петли), и два ребра в графе, порожденные этими уровнями, называем «внутренними» или «ногами» атома  $B$ . Рассматривая последовательности бифуркаций в направлении возрастания интеграла  $K$ , для краткости атом  $A$  с ребром вверх и атом  $B$  с «головой» вниз обозначаем соответственно  $A_+, B_+$  (увеличение числа торов), атом  $A$  с ребром вниз и атом  $B$  с «головой» вверх обозначаем соответственно  $A_-, B_-$  (уменьшение числа торов).

**Предложение 1.** *В направлении возрастания интеграла  $K$  на изоэнергетическом уровне  $Q_{\ell,h}^3$  имеем следующие бифуркации в точках критической подсистемы  $\mathcal{M}_1$  на невырожденных критических окружностях:*

- 1) для эллиптических траекторий — атом  $A_+$  при  $\mu_1 > 0, \mu_2 > 0$  и атом  $A_-$  при  $\mu_1 < 0, \mu_2 < 0$ ;
- 2) для одной гиперболической траектории на критическом уровне  $K$  — атом  $B_-$  при  $\mu_1 > 0, \mu_2 < 0$  и атом  $B_+$  при  $\mu_1 < 0, \mu_2 > 0$ ;
- 3) для двух гиперболических траекторий с одинаковыми сочетаниями знаков двух пар  $(\mu_1, \mu_2)$  на критическом уровне  $K$  — два атома  $B_-$  при  $\mu_1 > 0, \mu_2 < 0$  и два атома  $B_+$  при  $\mu_1 < 0, \mu_2 > 0$ ;
- 4) для двух гиперболических траекторий с разными сочетаниями знаков в парах  $(\mu_1, \mu_2)$  на критическом уровне  $K$  — два атома  $A^*$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Для эллиптических траекторий утверждение очевидно. Можно показать, что для гиперболических траекторий вектор  $v_1$  направлен во внешнюю часть «восьмерки»: направление оси  $O\omega_2$  отвечает за переход с критической поверхности к объемлющему ее тору. Такое понимание легко получить, анализируя, например, проекции интегральных многообразий на плоскость  $O\omega_1\omega_2$  (результаты такого исследования представлены в [11]). Видно,

что аналогично классической задаче разрывы проекции никогда не происходят в направлении оси  $O\omega_2$ . Следовательно, при  $\mu_1 > 0$  интеграл  $K$  на трансверсальной площадке растет к «внешней» окружности и убывает к паре «внутренних». Если на двух гиперболических окружностях наборы знаков в парах  $(\mu_1, \mu_2)$  различны, то, предполагая наличие двух атомов  $B$  с противоположными направлениями «голов», получим бифуркацию трех торов в три. Как утверждается в [11], количество торов на регулярном уровне может быть равным лишь 1, 2 или 4. Поэтому в данном случае мы имели бы бифуркацию четырех торов в четыре. Однако таких примыкающих друг к другу камер в данной задаче не найдено. Если предположить, что имеется атом  $C_2$ , то в аналитическом решении [17] существовала бы гетероклиническая траектория, которой также здесь нет. Значит, в такой точке имеется два атома  $A^*$ .  $\square$

При классификации точек критических подсистем с точки зрения возникающих атомов разделяющим служит множество критических точек ранга 0 и вырожденных критических точек ранга 1. Для краткости назовем соответствующее подмножество в критической подсистеме *ключевым* множеством этой подсистемы.

**Определение 2.** Пусть на критической подсистеме заданы два (возможно, частных) независимых почти всюду интеграла  $f, g$ . Назовем  $(f, g)$ -диаграммой критической подсистемы образ ее ключевого множества при отображении  $f \times g$ .

$(S, L)$ -диаграмма критической подсистемы  $\mathcal{M}_1$  по сравнению с бифуркационной диаграммой, состоящей из кривых  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  и изученной в [3], содержит и кривые  $\Delta_0, \Delta_1$  — проекции на  $(s, \ell)$ -плоскость кривых (4), (5). Перестройки диаграммы при  $\lambda > 0$  происходят при следующих значениях параметра:  $\lambda_*, 1, \lambda^*, \sqrt{2}$ . Взаимное расположение кривых  $\delta_2, \Delta_0$  добавило по сравнению с [3] разделяющее значение  $\lambda = 1$ . Все виды диаграммы подсистемы  $\mathcal{M}_1$  показаны на рис. 2: (a)  $0 < \lambda < \lambda_*$ ; (b)  $\lambda_* < \lambda < 1$ ; (c)  $1 < \lambda < \lambda^*$ ; (d)  $\lambda^* < \lambda < \sqrt{2}$ ; (e)  $\lambda > \sqrt{2}$ . На последнем рисунке (f) изображена для сравнения диаграмма классической задачи  $\lambda = 0$ . Во всех случаях, кроме (d), изображена сама диаграмма и ее увеличенный фрагмент. В случае (d) показан лишь фрагмент, содержащий все элементы, изменившиеся по сравнению с предыдущим значением  $\lambda$ , в двух масштабах. Звездочкой обозначены области, для которых в прообразе поверхности  $\Pi_1$  нет критических точек. В остальном допустимая область (то есть область с непустыми критическими интегральными многообразиями) разбита на связные подобласти  $a_1 - a_{12}$ . В силу отмеченной ранее симметрии, области, переходящие друг в друга при замене  $\ell \rightarrow -\ell$ , обозначены одинаково. В табл. 2 собрана вся необходимая информация для определения соответствующих атомов в составе графов Фоменко при пересечении поверхности  $\Pi_1$ , а именно,  $\lambda$ -промежутки существования области в расширенном пространстве (время жизни), количество критических окружностей для точки области, выход области в расширенном пространстве на исследованные ранее зоны  $\lambda = 0$  [12, 18, 19] и  $\ell = 0$  [9, 10, 20]. При наличии такого выхода, в последнем столбце таблицы указаны обозначения соответствующих дуг, путей или графов, на которых такой атом встречается. Поскольку единственная не имеющая аналога область  $a_4$  отвечает эллиптическому типу критических окружностей и индекс Морса–Ботта равен нулю, то, строго говоря, вся информация извлекается непосредственно из уже имеющихся исследований.

Обратимся к подсистемам  $\mathcal{M}_{2,3}$ . Здесь аналитическое решение найдено в [21, 22], где разбивка на два многообразия осуществлена по другому принципу (фактически по кривой  $\Delta_0$ ). Уравнения для подсистем запишем в следующем, алгебраическом, виде:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\frac{\ell}{s} - \frac{2\kappa\rho\zeta}{1+\zeta^2}, & \omega_2 &= -\frac{1}{\sqrt{2}(1+\zeta^2)} \sqrt{\frac{\rho^2}{\kappa s} Z(\zeta)}, & \omega_3 &= \lambda + 2\kappa \frac{1-\zeta^2}{1+\zeta^2}, \\ \alpha_1 &= \frac{\lambda s(1-\zeta^4) + 2\ell\rho\zeta(1+\zeta^2) - 8\kappa^3\zeta^2}{\kappa(1+\zeta^2)^2}, & \alpha_2 &= -\frac{2\sqrt{2}\kappa}{(1+\zeta^2)^2} \sqrt{\frac{\zeta^2}{\kappa s} Z(\zeta)}, \\ \alpha_3 &= \frac{\ell(1-\zeta^2) - 2\lambda\rho s\zeta}{\kappa(1+\zeta^2)}. \end{aligned}$$

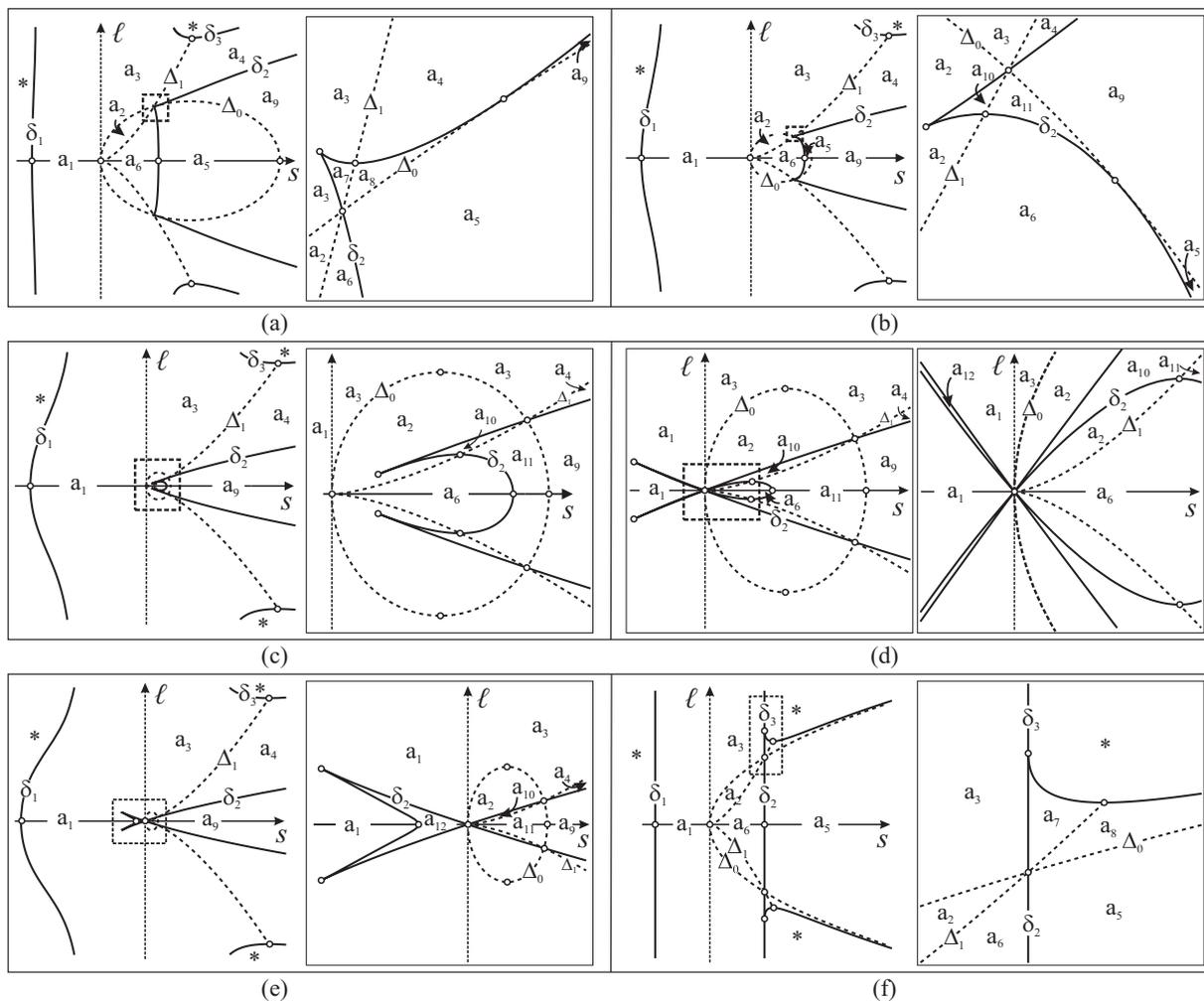


Рис. 2. Диаграмма подсистемы  $\mathcal{M}_1$

Здесь

$$\varkappa^2 = \ell^2 + \lambda^2 s^2, \quad \rho^2 = 1 - \frac{2\varkappa^2}{s}, \quad \zeta = \begin{cases} z, & \rho^2 \geq 0 \\ iz, & \rho^2 < 0 \end{cases}, \quad z \in \mathbb{R},$$

$$Z(\zeta) = (\varkappa - 2\lambda s^2)\zeta^4 + 4\ell\rho s\zeta(1 + \zeta^2) + 2\varkappa(1 - 4\varkappa^2 s)\zeta^2 + (\varkappa + 2\lambda s^2).$$

Динамика определяется уравнением

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{\varkappa s} Z(\zeta)}. \tag{6}$$

Отсюда находим, что при заданных значениях  $s, \ell$ , отвечающих уровню в  $\mathcal{M}_{2,3}$ , не содержащему критических точек ранга 0, количество критических окружностей в системах  $\mathcal{M}_{2,3}$  равно количеству траекторий в фазовом пространстве  $\{(z, \dot{z})\}$  соответствующего уравнения (6), включая, конечно, и точку  $z = \infty$ . Таким образом, если, после перехода к вещественной переменной, многочлен под радикалом имеет  $2m$  вещественных корней ( $m = 0, 1, 2$ ), то на уровне заданных  $s, \ell$  в  $\mathcal{M}_{2,3}$  лежит  $m$  критических окружностей, за исключением случая, когда  $m = 0$  и старший коэффициент многочлена положительный. В этом случае имеются две критические окружности ( $z$  пробегает все  $\mathbb{R}$ ), на каждой из которых сохраняет свой знак переменная  $\omega_2$ . Отметим последний случай как *особый*:

$$\rho^2 > 0, \quad \varkappa - 2\lambda s^2 > 0, \quad Z(z) > 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Таблица 2

Область (время жизни)	К-во окр-стей	Показатели Морса–Ботта	Выход на $\lambda = 0/\ell = 0$	Атом	Аналоги
$a_1$ ( $0 \leq \lambda < +\infty$ )	1	(– –)	Да/Да	$A_-$	2, 3 [18, Рис. 6.3] $a_1, a_2$ [10, Рис. 2] $\gamma_1, \gamma_4$ [19, Рис. 11] $\alpha_2, \alpha_3$ [20, Рис. 1]
$a_2$ ( $0 \leq \lambda < +\infty$ )	1	(– –)	Да/Да	$A_-$	3, 3' [18, Рис. 6.3] $a_2$ [10, Рис. 2] $\gamma_1, \gamma_4$ [19, Рис. 11] $\alpha_2, \alpha_3$ [20, Рис. 1]
$a_3$ ( $0 \leq \lambda < +\infty$ )	1	(+ –)	Да/Нет	$B_-$	9 [18, Рис. 6.3] $\gamma_5$ [19, Рис. 11]
$a_4$ ( $0 < \lambda < +\infty$ )	1	(+ +)	Нет/Нет	$A_+$	Отсутств.
$a_5$ ( $0 \leq \lambda < 1$ )	2	(+ –), (– +)	Да/Да	$2A^*$	6 [18, Рис. 6.3] $a_4$ [10, Рис. 2] $\gamma_2$ [19, Рис. 11] $\delta_1, \delta_2$ [20, Рис. 1]
$a_6$ ( $0 \leq \lambda < \sqrt{2}$ )	1	(– +)	Да/Да	$B_+$	5 [18, Рис. 6.3] $b_2$ [10, Рис. 3] $\gamma_3$ [19, Рис. 11] $\beta_1$ [20, Рис. 1]
$a_7$ ( $0 \leq \lambda < \lambda_*$ )	2	(+ –), (+ –)	Да/Нет	$2B_-$	$\Delta$ [13, Рис. 2] $\gamma_6$ [19, Рис. 11]
$a_8$ ( $0 \leq \lambda < \lambda_*$ )	2	(+ +), (+ +)	Да/Нет	$2A_+$	$E$ [13, Рис. 2] $\gamma_7$ [19, Рис. 11]
$a_9$ ( $0 < \lambda < +\infty$ )	2	(+ +), (– –)	Нет/Да	$A_+, A_-$	$a_5$ [10, Рис. 2] $\alpha_5, \alpha_6$ [20, Рис. 1]
$a_{10}$ ( $\lambda_* < \lambda < +\infty$ )	2	(– –), (– –)	Нет/Да	$2A_-$	$c_3, c_4$ [10, Рис. 4] $\alpha_3, \alpha_8$ [20, Рис. 1]
$a_{11}$ ( $\lambda_* < \lambda < +\infty$ )	2	(– +), (– +)	Нет/Да	$2B_+$	$b_4$ [10, Рис. 3] $\beta_5, \beta_6$ [20, Рис. 1]
$a_{12}$ ( $\lambda^* < \lambda < +\infty$ )	2	(– –), (– –)	Нет/Да	$2A_-$	$d_2, d_3$ [10, Рис. 5] $\alpha_3, \alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10}$ [20, Рис. 1]

Тип критической точки ранга 1 подсистем  $\mathcal{M}_{2,3}$  определяется симплектическим оператором, порожденным функцией  $F_2 = K + (2\lambda^2 - 1/s)H$ , с собственными числами  $\pm\sqrt{m_2}$  [2]:

$$m_2 = -\frac{1}{s^3} \left[ 2s^2 - 2\left(h + \frac{\lambda^2}{2}\right)s + 1 \right] (8\lambda^2 s^3 - 1) = \frac{2}{s^2} (2\lambda^2 s^2 - s + 2\ell^2) (8\lambda^2 s^3 - 1).$$

Обращение в нуль первого сомножителя происходит на той же кривой  $\Delta_0$  касания поверхностей  $\Pi_1, \Pi_3$ . Второй сомножитель дает еще одно множество вырожденных точек ранга 1 в подсистеме  $\mathcal{M}_3$ , которое обозначим через  $\Delta_3$ . Его образ — часть ребра возврата поверхности  $\Pi_3$ . С учетом условий существования движений, полученных в [4, 3], для интегральных констант  $s, \ell, h$  имеем

$$\Delta_3 : \quad h = h_* + 2\ell^2, \quad \begin{cases} \ell \in \mathbb{R}, & \lambda \leq \lambda^* \\ |\ell| \geq \ell^*, & \lambda > \lambda^* \end{cases}, \quad s = \frac{1}{2\lambda^{2/3}}, \quad (8)$$

где

$$h_* = \frac{1}{2} \lambda^{2/3} (3 - \lambda^{4/3}), \quad \ell^* = \frac{2\lambda^{2/3} - \sqrt{4 + \lambda^{4/3}}}{\sqrt{2}(\sqrt{4 + \lambda^{4/3}} - \lambda^{2/3})^{1/2}} > 0 \quad (\lambda > \lambda^*).$$

Выписать оба показателя Морса–Ботта в обозримом аналитическом виде для систем  $\mathcal{M}_{2,3}$  не удается. Однако оказалось возможным получить несложные выражения для их вычисления

и, что самое важное, явно выделить такой вектор, трансверсальный к траектории в гиперболических точках, по направлению которого, за исключением особого случая (7), разрыв «восьмерки» не происходит. Это позволяет определить направление атомов типа  $B$  при возрастании интеграла  $K$ .

Рассмотрим случай, не удовлетворяющий (7). Трансверсальную площадку к критической окружности (в критической точке ранга 1) ищем как ортогональное дополнение к векторам  $\nabla\Gamma, \nabla L, \nabla H, \text{sgrad } H$ . На любой траектории переменная  $z$  осциллирует между корнями соответствующего многочлена  $Z(z)$ , включая, конечно, и возможность прохода через бесконечно удаленную точку. Выберем на траектории точку  $x_0$ , в которой  $Z(z) = 0$ . Тогда три вектора градиентов ортогональны плоскости  $O\omega_2\alpha_2$ , а вектор  $\text{sgrad } H$  лежит в этой плоскости и, с точностью до ненулевого множителя, имеет вид

$$(0, 1, 0, 0, b, 0), \quad b = \frac{4\chi\zeta}{\rho(1 + \zeta^2)}.$$

Поэтому в качестве первого вектора трансверсальной площадки возьмем  $v_1 = (0, -b, 0, 0, 1, 0)$ . Тогда вектор  $v_2$  находится как ортогональный пяти векторам  $\nabla\Gamma, \nabla L, \nabla H, \text{sgrad } H$  и  $v_1$ .

Условный экстремум функции  $K$  на совместном уровне функций  $\Gamma, L, H$  в  $\mathbb{R}^6(\omega, \alpha)$  есть критическая точка функции с неопределенными множителями Лагранжа

$$K_2 = K + (2\lambda^2 - \frac{1}{s})H + 2sL^2 - \frac{2\chi^2}{s}\Gamma.$$

Очевидно, часть этой функции, не содержащая  $L, \Gamma$ , совпадает с  $F_2$ . Матрица ограничения квадратичной формы  $d^2K_2$  на трансверсальную площадку в базисе  $\{v_1, v_2\}$  оказывается диагональной, и первый показатель Морса–Ботта равен

$$\mu_1 = (d^2K_2)v_1 \cdot v_1 = 2 \frac{[16\chi^2\zeta^2 + \rho^2(1 + \zeta^2)^2]^2}{\rho^2(1 + \zeta^2)^4}.$$

В частности, его знак один и тот же на критических окружностях, лежащих на одном интегральном уровне. Тогда это верно и для знака  $\mu_2$ , так как тип точек на этих окружностях одинаков. Здесь важно отметить, что, как показывает анализ проекций интегральных многообразий на плоскость  $O\omega_1\omega_2$ , в окрестности систем  $\mathcal{M}_{2,3}$  так же, как и в случае с системой  $\mathcal{M}_1$ , критическая поверхность гиперболической окружности никогда не рвется в направлении оси  $O\omega_2$ , в частности, это означает, что для атомов типа  $B$  вектор  $v_1$  всегда указывает во внешность «восьмерки». Отсюда следует, что если  $\mu_1 > 0$ , то в направлении «головы» атома функция  $K$  возрастает («голова» вверх), а если  $\mu_1 < 0$ , то в направлении «головы» атома функция  $K$  убывает («голова» вниз). Итак, направление ребер у несимметричных атомов определяется знаком величины  $\rho^2$ .

Поскольку в  $\mathcal{M}_2$  по определению  $s < 0$ , то  $\rho^2 > 0$ ,  $m_2 < 0$  и  $\mu_1 > 0$ . Вырожденных точек в  $\mathcal{M}_2$  нет,  $(S, L)$ -диаграмма, как и диаграмма в [3], состоит из множеств  $\delta_1, \delta_3$ . Перестройка диаграммы при  $\lambda > 0$  не происходит. Все критические точки ранга 1 имеют эллиптический тип. При возрастании интеграла  $K$  на изоэнергетическом уровне  $Q_{\ell,h}^3$  в точках  $\mathcal{M}_2$  на любой критической окружности происходит бифуркация  $A_+$  рождения тора. На рис. 3 вместе с  $(S, L)$ -диаграммой второй критической системы показаны допустимые области: область  $b_1$  с одной критической окружностью и две симметричных относительно  $\ell = 0$  области  $b_2$  с двумя критическими окружностями. В области, помеченной звездочкой, движений нет. Свойства соответствующих уровней и атомов собраны в табл. 3. Как видно, в подсистеме  $\mathcal{M}_2$  ничего нового по сравнению с классической задачей не появляется.

В подсистеме  $\mathcal{M}_3$ , как известно из классической задачи, возможно присутствие атомов  $C_2$  [12]. Для неособого случая выше доказано, что при наличии двух траекторий на одном и том же уровне интегралов распределение знаков в парах показателей Морса–Ботта одинаково. Рассмотрим особый случай (7). На плоскости  $(s, \ell)$  условиям положительности указанных

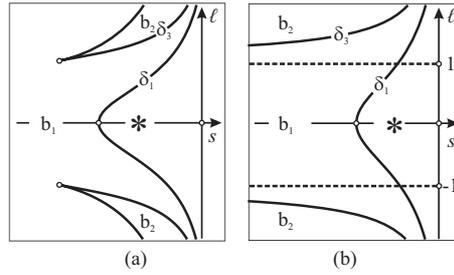


Рис. 3. Диаграмма подсистемы  $M_2$ : (а)  $\lambda > 0$ ; (б) предельный случай  $\lambda = 0$

Таблица 3

Область (время жизни)	К-во окр-стей	Показатели Морса-Ботта	Выход на $\lambda = 0/\ell = 0$	Атом	Аналоги
$b_1$ ( $0 \leq \lambda < +\infty$ )	1	(+ +)	Да/Да	$A_+$	1 [18, Рис. 6.3] $a_1$ [10, Рис. 2] $\alpha_1$ [19, Рис. 11] $\alpha_1$ [20, Рис. 1]
$b_2$ ( $0 \leq \lambda < +\infty$ )	2	(+ +), (+ +)	Да/Нет	$2A_+$	Переход III $\rightarrow$ VI [18, Рис. 6.1d] $\alpha_2$ [19, Рис. 11]

констант отвечает область  $\lambda^2 s^2 (2s^2 - 1) < \ell^2 < s(1 - 2\lambda^2 s)/2$ . Она заключена внутри  $\Delta_0$  и при  $\lambda < 1$  ограничена справа ветвью кривой  $\delta_2$ . Эта область имеет пересечение с осью  $\ell = 0$  при  $s \in (0, \min\{1/2, 1/2\lambda^2\})$ , а так как  $Z > 0$  на всей прямой, то удобно взять для упрощения вычислений  $z = 0$ . Тогда векторы, задающие трансверсальную площадку к периодическому решению, легко находятся

$$v_1 = \left( -(1 + 2\lambda^2 s), 0, 0, 0, \frac{\sqrt{2s(1 - 2\lambda^2 s)}}{\sqrt{1 + 2s}} [(1 + s)\lambda^2 s - 1], \lambda s(3 - 2\lambda^2 s) \right),$$

$$v_2 = \left( 0, \frac{\lambda \sqrt{s(1 + 2s)}}{\sqrt{2(1 - 2\lambda^2 s)}}, 1, 0, 0, 0 \right).$$

Собственные числа матрицы квадратичной формы  $d^2 K_2$  на этой паре векторов таковы:

$$\mu_1 = \frac{4s}{1 + 2s} [1 + \lambda^2 s^2 (5 - 2\lambda^2 s)]^2, \quad \mu_2 = \frac{1}{s} (8\lambda^2 s^3 - 1).$$

Очевидно, при рассматриваемых условиях  $\mu_1 > 0, \mu_2 < 0$ . Итак, распределение знаков одинаково на обеих траекториях этого уровня, а именно, при рассмотренном выборе базиса это  $(+, -)$ . Следует констатировать, что и вычисление показателей Морса-Ботта не дает возможности различить с помощью локального анализа атомы  $2B$  и  $C_2$ . Однако, поскольку рассматриваемая область имеет в расширенном пространстве выход на классический аналог  $\lambda = 0$ , сопоставление с результатами [12, 18] приводит к тому, что рассматриваемый особый случай соответствует атому  $C_2$ . Получаем следующее утверждение.

**Предложение 2.** В направлении возрастания интеграла  $K$  на изоэнергетическом уровне  $Q_{\ell,h}^3$  в точках критической подсистемы  $M_3$  на невырожденных критических окружностях имеем следующие бифуркации:

- 1) для эллиптических траекторий — атом  $A_+$  при  $\rho^2 > 0$  и атом  $A_-$  при  $\rho^2 < 0$ ;
- 2) для одной гиперболической траектории на критическом уровне  $K$  — атом  $B_-$  при  $\rho^2 > 0$  и атом  $B_+$  при  $\rho^2 < 0$ ;
- 3) для двух гиперболических траекторий на критическом уровне  $K$  — два атома  $B_-$  при  $\rho^2 > 0$  и два атома  $B_+$  при  $\rho^2 < 0$ , за исключением особого случая (7), в котором имеем атом  $C_2$ .

$(S, L)$ -диаграмма критической подсистемы  $\mathcal{M}_3$  по сравнению с рассмотренной в [3] дополняется множествами  $\Delta_0$  и  $\Delta_3$ , где последняя есть образ на  $(s, \ell)$ -плоскости кривой (8). В допустимую область не входят следующие компоненты дополнения к диаграмме: при всех  $\lambda$  — область, прилегающая к оси  $s = 0$  и ограниченная ветвями кривых  $\Delta_0, \delta_2$ ; при  $\lambda > \lambda^*$  — область, ограниченная кривой  $\delta_2$  между двумя ее точками пересечения с осью  $\ell = 0$  при  $r \neq 0$ . Перестройки типов диаграмм в области  $\lambda > 0$  происходят при тех же значениях параметра, что и для подсистемы  $\mathcal{M}_1$ . Типы диаграммы подсистемы  $\mathcal{M}_3$  показаны на рис. 4: (a)  $0 < \lambda < \lambda^*$ ; (b)  $\lambda_* < \lambda < 1$ ; (c)  $1 < \lambda < \lambda_*$ ; (d)  $\lambda^* < \lambda < \sqrt{2}$ ; (e)  $\lambda > \sqrt{2}$ ; (f) предельный случай  $\lambda = 0$ . Пунктиром показаны кривые вырождения  $\Delta_0, \Delta_3$  за исключением той части кривой  $\Delta_0$ , которая является внешней границей допустимой области — она показана сплошной линией. Как и ранее звездочкой отмечены области, в которых критические движения отсутствуют. Отсутствие критических движений в области, обозначенной  $\bar{c}$  (рис. 4, d, e) доказано в [9] в точках оси  $\ell = 0$ .

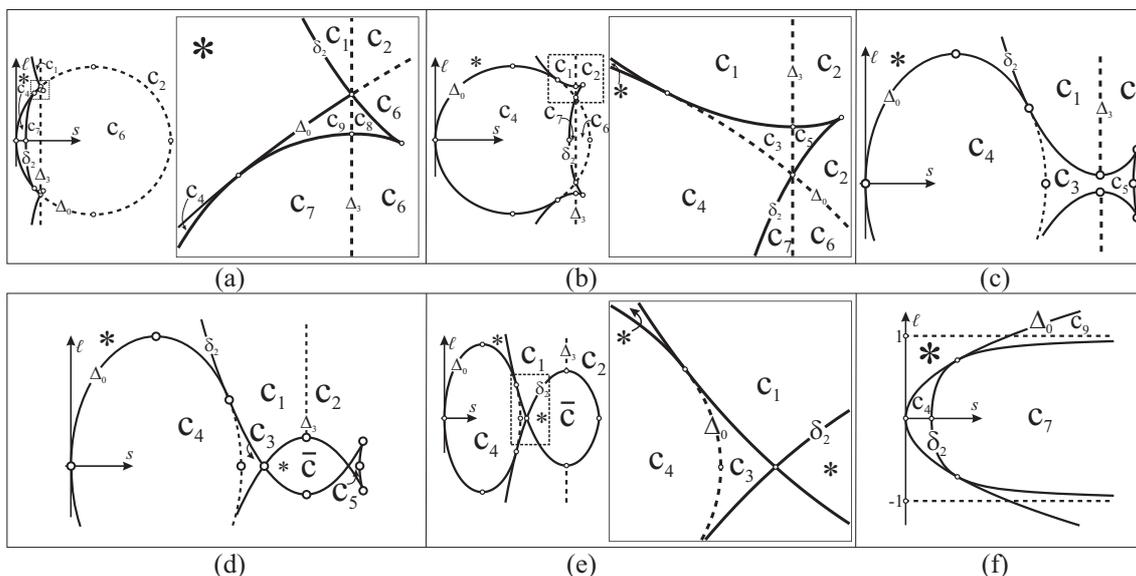


Рис. 4.  $(S, L)$ -диаграммы критической подсистемы  $\mathcal{M}_3$

Применение полученных результатов к точкам областей  $c_1 - c_9$  в образе подсистемы  $\mathcal{M}_3$  на  $(s, \ell)$ -плоскости приводит к описанию характеристик и атомов, собранных в табл. 4. Как видим, все области, кроме  $c_1, c_8$ , при рассмотрении расширенных диаграмм в  $(s, \ell, \lambda)$ -пространстве имеют выход на соответствующие области исследованных ранее задач ( $\lambda = 0$  или  $\ell = 0$ ), поэтому для атомов здесь добавлена лишь их направленность. В частности, наличие атома  $C_2$  в области  $c_4$  и двух атомов  $B$  в области  $c_9$  обосновано в работах [12, 13, 18] (в других обозначениях). Наличие двух атомов  $B$  в области  $c_5$  следует из результатов [10]. В новых областях  $c_1, c_8$  по доказанному выше критические окружности имеют эллиптический тип, их количество вычисляется по приведенным критериям, а направленность определяется показателями Морса–Ботта.

### § 3. Диаграммы Смейла–Фоменко

Из определения топологического инварианта [7] следует, что в состав множества параметров, разделяющего различные графы Фоменко на изоэнергетических многообразиях  $Q_{\ell, h}^3(\lambda)$ , нужно, в дополнение к диаграмме Смейла, включить образ множества вырожденных критических точек ранга 1, так как переход через такие точки определяет перестройки в графах, не связанные с изменением топологии  $Q_{\ell, h}^3(\lambda)$ . Таким образом, в состав кривых, разделяющих неэквивалентные графы, входят как кривые  $\delta_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ), заданные уравнениями (3), так и кривые  $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_3$ , определенные в соответствии с (4), (5), (8). Уравнения этих шести кривых (но без ограничений на входящие в эти уравнения координаты и параметры) впервые получены в [11].

Таблица 4

Область (время жизни)	К-во окр-стей	Показатели Морса–Ботта	Выход на $\lambda = 0/\ell = 0$	Атом	Аналоги
$c_1$ ( $0 < \lambda < +\infty$ )	1	(– –)	Нет/Нет	$A_-$	Отсутств.
$c_2$ ( $0 < \lambda < +\infty$ )	1	(– +)	Нет/Да	$B_+$	$a_5$ [10, Рис. 2] $\beta_3$ [20, Рис. 1]
$c_3$ ( $\lambda_* < \lambda < +\infty$ )	2	(– –), (– –)	Нет/Да	$2A_-$	$b_4$ [10, Рис. 3] $\alpha_7$ [20, Рис. 1]
$c_4$ ( $0 \leq \lambda < +\infty$ )	2	(+ –), (+ –)	Да/Да	$C_2$	8 [18, Рис. 6.3] $a_4, b_5$ [10, Рис. 2,3] $\beta_2$ [19, Рис. 11] $\gamma$ [20, Рис. 1]
$c_5$ ( $\lambda_* < \lambda < \sqrt{2}$ )	2	(– +), (– +)	Нет/Да	$2B_+$	$b_3$ [10, Рис. 3] $\beta_4$ [20, Рис. 1]
$c_6$ ( $0 < \lambda < 1$ )	1	(+ +)	Нет/Да	$A_+$	$a_3, a_4$ [10, Рис. 2] $\alpha_4$ [20, Рис. 1]
$c_7$ ( $0 \leq \lambda < 1$ )	1	(+ –)	Да/Да	$B_-$	7 [18, Рис. 6.3] $a_3$ [10, Рис. 2] $\beta_1$ [19, Рис. 11] $\beta_2$ [20, Рис. 1]
$c_8$ ( $0 < \lambda < \lambda_*$ )	2	(+ +), (+ +)	Нет/Нет	$2A_+$	Отсутств.
$c_9$ ( $0 \leq \lambda < \lambda_*$ )	2	(+ –), (+ –)	Да/Нет	$2B_-$	$E$ [13, Рис. 2] $\beta_3$ [19, Рис. 11]

**Определение 3.** Назовем диаграммой Смейла–Фоменко  $\Sigma'_{LH}$  объединение  $\Sigma_{LH}$  с образом множества вырожденных точек ранга 1 под действием отображения  $L \times H$ .

Такие диаграммы для классических задач динамики твердого тела построены в работах А.А. Ошемкова [23, 24]. Отметим, что при наличии более сложных атомов, чем найденные выше для рассматриваемого случая, перестройки молекул могут происходить и без возникновения вырожденных точек (см., например, результат численного эксперимента в работе [25]). Однако пока не ясно, можно ли заранее, на основе локального анализа особенностей, выявить возможность наличия таких перестроек и включить в разделяющее множество необходимые дополнения к диаграмме Смейла–Фоменко.

**Теорема 2.** В случае Ковалевской–Яхья имеется десять структурно устойчивых диаграмм Смейла–Фоменко  $\Sigma'_{LH}(\lambda)$ . Разделяющими значениями параметра служат  $0, \lambda_1, \lambda_3, \lambda_*, 1, \lambda^*, \lambda_4, 2\sqrt{\sqrt{2}-1}, \lambda_2, \sqrt{2}$ , где

$$\lambda_3 = \left( \frac{45}{2^{1/3}} - \frac{99}{4 \cdot 2^{2/3}} - \frac{161}{8} \right)^{1/4} \approx 0.0287; \quad \lambda_4 = \left[ \frac{1}{2}(3 - \sqrt[3]{2})^3 \right]^{1/4} \approx 1.2740.$$

Расширенная диаграмма в пространстве  $(\ell, h, \lambda)$  порождает дополнительное разбиение камер диаграмм Смейла  $\mathbb{A} - \mathbb{H}$  на 29 камер, при этом камеры  $\mathbb{C}, \mathbb{D}, \mathbb{F}, \mathbb{G}$  не разбиваются, остальные имеют следующее разбиение:  $\mathbb{A}_1 - \mathbb{A}_{13}, \mathbb{B}_1 - \mathbb{B}_3, \mathbb{E}_1 - \mathbb{E}_6, \mathbb{H}_1 - \mathbb{H}_3$ . В каждой из образованных 29 камер сохраняется граф Фоменко.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пересечение кривых  $\Delta_j$  с основной диаграммой состоит из вырожденных точек ранга 0, то есть особых точек диаграмм Смейла. Поэтому трансформации множеств  $\Delta_j \cap \Sigma_{LH}$  по  $\lambda$  уже учтены. Для классификации расширенных диаграмм нужно добавить значения  $\lambda$ , при которых перестраивается множество  $\Delta_0 \cup \Delta_1 \cup \Delta_3$ . Тройных пересечений в этом множестве нет. Самопересечение в плоскости  $(\ell, h)$  имеет только кривая  $\Delta_0$  при  $\lambda \leq \lambda_*$ . Условия пересечений  $\Delta_0 \cap \Delta_1$  и  $\Delta_0 \cap \Delta_3$  новых разделяющих значений также не дают. Рассмотрим

точки пересечения  $\Delta_1 \cap \Delta_3$ . Перепишем (5) в явном виде

$$\Delta_1: \ell = \pm \frac{2}{3\sqrt{3}} \left( h - \frac{\lambda^2}{2} \right)^{3/2}, \quad \frac{\lambda^2}{2} \leq h \leq h^*, \quad (9)$$

где  $h_*$  отвечает отмеченному выше граничному значению  $s_*$ . Система (8), (9) без учета ограничений имеет решения

$$h = \frac{1}{2} \left( 3\lambda^{2/3} + \lambda^2 \right), \quad \ell^2 = \frac{\lambda^2}{2}; \quad (10)$$

$$h = \frac{1}{4} \left[ 2\lambda^2 - 3\lambda^{2/3} + 3\sqrt{3(2 - \lambda^{4/3})} \right], \quad \ell^2 = \frac{1}{8} \left[ 4\lambda^2 - 9\lambda^{2/3} + 3\sqrt{3(2 - \lambda^{4/3})} \right]. \quad (11)$$

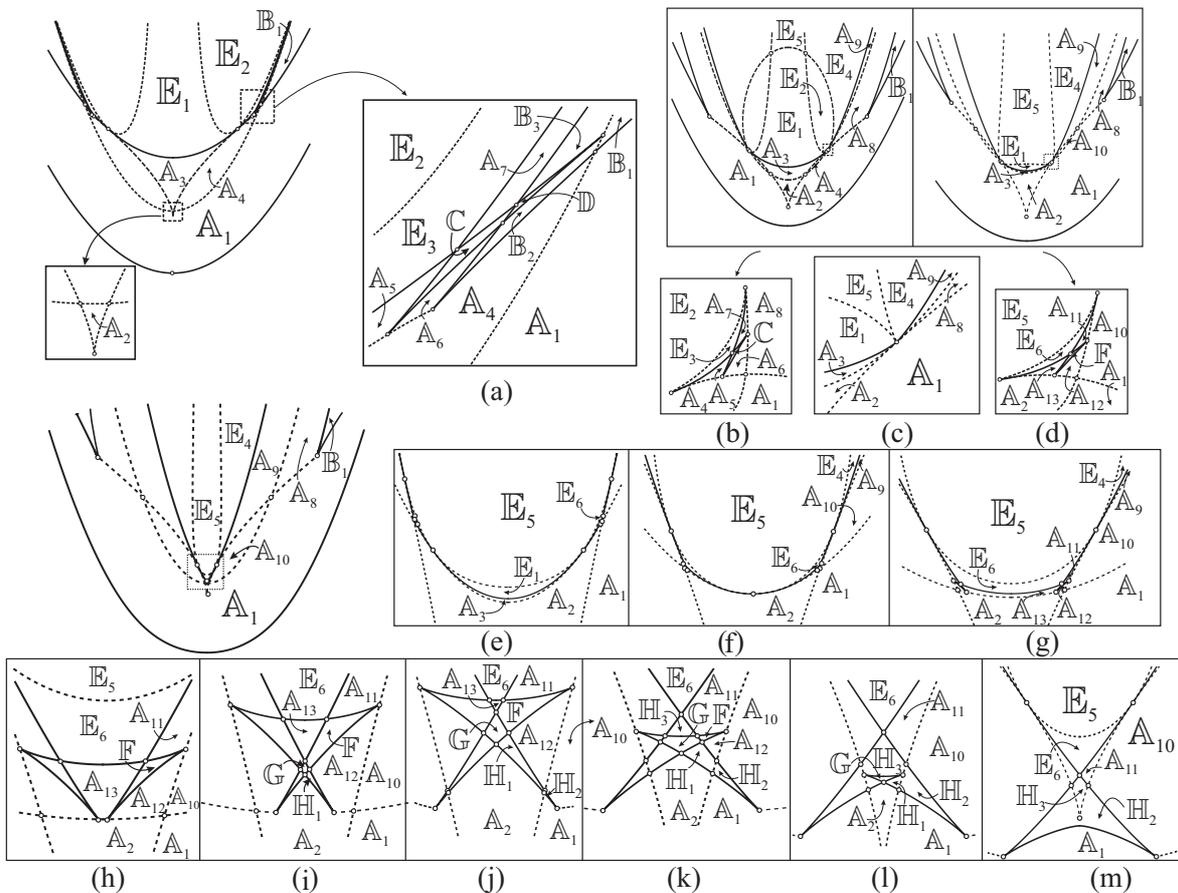


Рис. 5. Камеры диаграмм Смейла–Фоменко

Пара точек (10) существует всегда и удовлетворяет всем ограничениям. Рассмотрим решение (11), вещественное при всех  $\lambda < 2^{3/4}$ . Проверим выполнение условий по  $h$  на кривой  $\Delta_1$ . Полагая в (11)  $h = h_*$ , придем к уравнению

$$1 + 48\lambda^{4/3} + 12\lambda^{8/3} - 8\lambda^4 - 6\sqrt{3(2 - \lambda^{4/3})}(\lambda^{2/3} + 4\lambda^2) = 0,$$

которое имеет трехкратный корень  $\lambda_*$  и простой корень  $\lambda_3$  в интервале  $(\lambda_1, \lambda_*)$ . Условие  $h \leq h_*$  выполнено при  $\lambda \geq \lambda_3$ . Корень  $\lambda_*$  на это неравенство не влияет, его появление связано с особой точкой на кривой  $\delta_2$ . Проверим выполнение в точках (11) условий по  $h$  на кривой  $\Delta_3$ . Имеем

$$h - h^* = \frac{1}{4} \left[ \lambda^2 - 9\lambda^{2/3} + 3\sqrt{3(2 - \lambda^{4/3})} \right].$$

Эта величина неотрицательна при  $\lambda \leq (3/2)^{3/4} \approx 1.3554$ , и тем более при  $\lambda \leq \lambda^*$ . Пусть  $\lambda > \lambda^*$ . Тогда должна быть неотрицательна величина

$$\ell^2 - (\ell^*)^2 = \frac{1}{8} \left[ 3\lambda^{2/3}(1 + \lambda^{4/3}) + 3\sqrt{3}\sqrt{2 - \lambda^{4/3}} - (4 + \lambda^{4/3})^{3/2} \right].$$

Правая часть имеет трехкратный корень  $\lambda_*$ , не влияющий на неотрицательность, и простой корень  $\lambda_4$ . Итак, пара точек пересечения кривых  $\Delta_1$  и  $\Delta_3$ , определяемых уравнениями (11), существует при  $\lambda_3 \leq \lambda \leq \lambda_4$ . Все разделяющие значения найдены. Строя соответствующие диаграммы, выявим все новые камеры.  $\square$

Иллюстрации, позволяющие увидеть необходимые детали диаграмм Смейла–Фоменко и обозначения камер, показаны на рис. 5: (a)  $\lambda < \lambda_1$ ; (b)–(d) — переход через  $\lambda_*$ , исчезновение камер  $A_4 - A_7, C, E_2, E_3$  и рождение новых камер  $A_{10} - A_{13}, E_6, F$ ; (e)–(g) — переход через  $\lambda = 1$ , исчезновение камер  $A_3$  и  $E_1$ ; (h)  $1 < \lambda < \lambda^*$ ; (i)  $\lambda^* < \lambda < \lambda_4$ ; (j)  $\lambda_4 < \lambda < \lambda_5$ ; (k)  $\lambda_5 < \lambda < \lambda_2$ ; (l)  $\lambda_2 < \lambda < \sqrt{2}$ ; (m)  $\lambda > \sqrt{2}$ .

В работе [26] также фигурируют 29 камер, однако, там нет упоминания об условиях существования вырожденных критических точек ранга 1 (критических окружностей) на кривых  $\Delta_1, \Delta_3$ , приведенных в (5), (8), без учета которых количество камер с непустыми интегральными многообразиями должно быть равно 31. В работе [11] написано следующее: «Число критических окружностей на каждом критическом уровне интеграла  $K$  определим с помощью соотношений П.В. Харламова [22, 27]». Однако в работе [27] этот вопрос не затрагивается, а извлечь условия существования движений непосредственно из работ [16, 21, 22] без дополнительных преобразований (например, к алгебраической форме с последующим детальным анализом полученных многочленов) невозможно. Остается сожалеть, что мотивировки выводов [26] и соответствующая классификация камер Смейла–Фоменко так и не были предъявлены (работа [26] в части случая Ковалевской–Яхья имеется в общем доступе [http://iamm.ac.donetsk.ua/upload/iblock/c60/chapter\\_9.pdf](http://iamm.ac.donetsk.ua/upload/iblock/c60/chapter_9.pdf)).

#### § 4. Классификация графов Фоменко

Имея всю информацию по условиям существования и классификации особых точек в критических подсистемах, можем построить все *типичные* графы Фоменко следуя одному алгоритму. Пусть фиксировано значение  $\lambda$  и типичная точка  $(\ell, h)$  в одной из камер Смейла–Фоменко. Пусть  $\tau_{\ell, h}$  — соответствующая прямая, параллельная оси  $Ok$ . Как легко видеть, ее пересечение с допустимой областью  $J(P^5) \subset \mathbb{R}^3(\ell, h, k)$  есть эффективно вычисляемый отрезок  $[k_{\min}, k_{\max}]$ . А именно, значение  $k_{\min}$  отвечает единственной точке пересечения с образом подсистемы  $\mathcal{M}_2$ , что на  $(S, L)$ -диаграмме соответствует единственному отрицательному корню по  $s$  уравнения

$$s^3 - \left(h - \frac{\lambda^2}{2}\right)s^2 + \ell^2 = 0. \quad (12)$$

Значение  $k_{\max}$  отвечает точке пересечения с подсистемой  $\mathcal{M}_1$  в одной из областей  $a_1, a_{12}$ , что на  $(S, L)$ -диаграмме соответствует единственному отрицательному корню по  $s$  уравнения

$$4\lambda^2 s^3 - 2\left(h + \frac{\lambda^2}{2} - 2\ell^2\right)s + 1 = 0. \quad (13)$$

Из уравнений (12), (13) находим и все остальные значения  $s$  в точках пересечения с подсистемами  $\mathcal{M}_j$ . Как видим, в целом по трем подсистемам таких точек не более шести. В каждой из них находим атом из приведенных выше таблиц, а критические значения  $K$ , полученные из соответствующих уравнений особых поверхностей  $\Pi_j$ , упорядочиваем по возрастанию. Получаем всю последовательность атомов в графе Фоменко с учетом их ориентации по возрастанию  $K$ . Графически эту процедуру удобно изображать на так называемых изоэнергетических бифуркационных диаграммах, то есть сечениях бифуркационной диаграммы  $\Sigma$  плоскостями  $h = \text{const}$ , в силу их очевидной компактности. Такие сечения исследованы в [4], где указаны условия существования критических движений в системах  $\mathcal{M}_j$  в зависимости от параметра  $h$ . В качестве

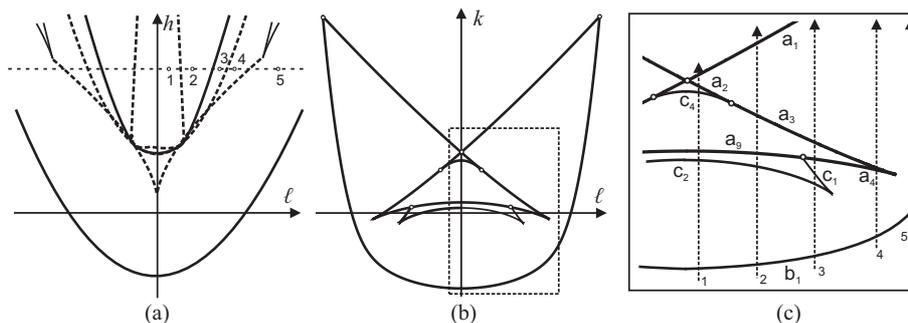


Рис. 6. Диаграммы и пути для графов Фоменко ( $\lambda = 0.8, h = 2.5$ )

примера рассмотрим «среднее» значение  $\lambda = 0.8$  и пусть  $h = 2.5$ . На рис. 6,а изображена соответствующая диаграмма Смейла–Фоменко. Заданный уровень  $h$  при возрастании  $\ell$  от нуля пересекает пять камер  $\mathbb{E}_5, \mathbb{E}_4, \mathbb{A}_9, \mathbb{A}_8, \mathbb{A}_1$  (значения  $\ell$  в этих камерах занумерованы цифрами 1, ..., 5). В  $h$ -сечении диаграммы  $\Sigma(\lambda)$  (рис. 6,б) графы Фоменко определяются бифуркациями вдоль прямых  $\ell = \text{const}$  при возрастании  $k$  (пять пунктирных стрелок на рис. 6,с):

- 1)  $\mathbb{E}_5 : b_1 \rightarrow c_2 \rightarrow a_9 \rightarrow c_4 \rightarrow a_2 \rightarrow a_1 \Leftrightarrow A_+ \rightarrow B_+ \rightarrow (A_+, A_-) \rightarrow C_2 \rightarrow A_- \rightarrow A_-$
- 2)  $\mathbb{E}_4 : b_1 \rightarrow c_2 \rightarrow a_9 \rightarrow a_3 \rightarrow a_1 \Leftrightarrow A_+ \rightarrow B_+ \rightarrow (A_+, A_-) \rightarrow B_- \rightarrow A_-$
- 3)  $\mathbb{A}_9 : b_1 \rightarrow c_2 \rightarrow c_1 \rightarrow a_4 \rightarrow a_3 \rightarrow a_1 \Leftrightarrow A_+ \rightarrow B_+ \rightarrow A_- \rightarrow A_+ \rightarrow B_- \rightarrow A_-$
- 4)  $\mathbb{A}_8 : b_1 \rightarrow a_4 \rightarrow a_3 \rightarrow a_1 \Leftrightarrow A_+ \rightarrow A_+ \rightarrow B_- \rightarrow A_-$
- 5)  $\mathbb{A}_1 : b_1 \rightarrow a_1 \Leftrightarrow A_+ \rightarrow A_-$

Применив описанную процедуру ко всем камерам, получим полную классификацию графов Фоменко, указанную в табл. 5. Поясним используемую терминологию и обозначения в таблице. Столбец «Граф» указывает группу графа Фоменко и (в скобках) его номер. Под графом Фоменко мы понимаем класс эквивалентных молекул в смысле [6]. Молекула изоэнергетического многообразия  $Q_{\ell,h}^3$  — это, во-первых, собственно граф, то есть топологическое пространство, полученное из  $Q_{\ell,h}^3$  отождествлением всех точек на каждой связной компоненте интегрального многообразия вида  $Q_{\ell,h}^3 \cap \{K = \text{const}\}$ ; вершинами графа объявляются точки, полученные из компонент, содержащих критические точки  $K$  на  $Q_{\ell,h}^3$ . Во-вторых, каждая вершина снабжается обозначением атома, который возникает в окрестности критической точки (или нескольких атомов, если на связной компоненте несколько критических точек). Вопрос в том, какие молекулы считать эквивалентными. В [6] две молекулы считаются совпадающими (в переводе — *identical*), если существует гомеоморфизм графов, переводящий ребра в ребра, вершины в вершины, который может быть распространен и на сами атомы (в очевидном смысле). Применяя это понятие, получаем девять групп эквивалентных графов Фоменко. Они показаны на рис. 7,а. Стрелкой на графе обозначено направление к «голове» (то есть к «внешней», объемлющей окружности «восьмерки») в несимметричных атомах  $B$ .

Номер группы указан первым в столбце «Граф». Группы  $f_1 - f_6$  соответствуют типам графов  $W_1 - W_6$ , найденным в работе [11]. Группы  $f_7 - f_9$  являются новыми. В группах  $f_7, f_8$  атомы  $B$  не соединены «голова в голову», как в группе  $f_3$  и в типе  $W_3$  [11, 26]. Группа  $f_9$  могла бы соответствовать графу  $W_7$  работ [11, 26], так как графы, рассматриваемые в чистом виде как топологические пространства, здесь гомеоморфны. Но, если следовать трактовке графа  $W_7$  по его изображению в [11, 26], то в  $f_9$  в отличие от  $W_7$  ребро из атома  $C_2$  идет в «ногу», а не в «голову» атома  $B$ , что порождает иное слоение Лиувилля. Если вдобавок различать графы Фоменко по их ориентации в направлении возрастания значений интеграла  $K$ , а также по устойчивому количеству критических точек на уровнях (то есть такому количеству, которое не изменяется при возмущении уровня, когда точка  $(\ell, h)$  движется внутри камеры), то получим 22 графа, показанных на рис. 7,б. Горизонтальным пунктиром отмечены устойчивые уровни, содержащие два атома.

Таблица 5

Камера	Время жизни по $\lambda$	Выход на $\lambda = 0/\ell = 0$	Последовательность дуг	Граф	Меченая молекула
$A_1$	$0 \leq \lambda < +\infty$	Да/Да	$b_1 \rightarrow a_1$	1(1)	$A$ [19, Табл. 3], [20, Табл. 8]
$A_2$	$0 < \lambda < +\infty$	Нет/Да	$b_1 \rightarrow a_6 \rightarrow a_2 \rightarrow a_1$	2(2)	$B$ [20, Табл. 8]
$A_3$	$0 \leq \lambda < 1$	Да/Да	$b_1 \rightarrow c_6 \rightarrow c_7 \rightarrow$ $\rightarrow a_6 \rightarrow a_2 \rightarrow a_1$	3(6)	$C$ [19, Табл. 3], [20, Табл. 8]
$A_4$	$0 \leq \lambda < \lambda_*$	Да/Нет	$b_1 \rightarrow c_6 \rightarrow c_7 \rightarrow a_1$	2(3)	$B$ [19, Табл. 3]
$A_5$	$0 \leq \lambda < \lambda_*$	Да/Нет	$b_1 \rightarrow c_6 \rightarrow a_8 \rightarrow$ $\rightarrow a_7 \rightarrow c_7 \rightarrow a_1$	6(9)	$J$ [19, Табл. 3]
$A_6$	$0 < \lambda < \lambda_*$	Нет/Нет	$b_1 \rightarrow a_4 \rightarrow a_3 \rightarrow$ $\rightarrow c_6 \rightarrow c_7 \rightarrow a_1$	7(16)	
$A_7$	$0 < \lambda < \lambda_*$	Нет/Нет	$b_1 \rightarrow a_4 \rightarrow c_8 \rightarrow$ $\rightarrow c_9 \rightarrow a_3 \rightarrow a_1$	6(9)	
$A_8$	$0 < \lambda < +\infty$	Нет/Нет	$b_1 \rightarrow a_4 \rightarrow a_3 \rightarrow a_1$	2(3)	
$A_9$	$0 < \lambda < +\infty$	Нет/Нет	$b_1 \rightarrow c_2 \rightarrow c_1 \rightarrow$ $\rightarrow a_4 \rightarrow a_3 \rightarrow a_1$	8(20)	
$A_{10}$	$\lambda > \lambda_*$	Нет/Нет	$b_1 \rightarrow c_2 \rightarrow c_1 \rightarrow a_1$	2(2)	
$A_{11}$	$\lambda > \lambda_*$	Нет/Нет	$b_1 \rightarrow c_2 \rightarrow a_{11} \rightarrow$ $\rightarrow a_{10} \rightarrow c_1 \rightarrow a_1$	6(10)	
$A_{12}$	$\lambda_* < \lambda < \lambda_2$	Нет/Нет	$b_1 \rightarrow a_6 \rightarrow a_2 \rightarrow$ $\rightarrow c_2 \rightarrow c_1 \rightarrow a_1$	7(17)	
$A_{13}$	$\lambda_* < \lambda < \lambda_5$	Нет/Да	$b_1 \rightarrow a_6 \rightarrow c_5 \rightarrow$ $\rightarrow c_3 \rightarrow a_2 \rightarrow a_1$	6(11)	$F$ [20, Табл. 8]
$B_1$	$0 \leq \lambda < +\infty$	Да/Нет	$b_2 \rightarrow a_3 \rightarrow a_1$	2(4)	$F$ [19, Табл. 3]
$B_2$	$0 < \lambda < \lambda_3$	Нет/Нет	$b_2 \rightarrow a_3 \rightarrow c_6 \rightarrow$ $\rightarrow c_7 \rightarrow a_1$	7(18)	
$B_3$	$0 \leq \lambda < \lambda_1$	Да/Нет	$b_2 \rightarrow c_8 \rightarrow c_9 \rightarrow$ $\rightarrow a_3 \rightarrow a_1$	6(15)	$G$ [19, Табл. 3]
$C$	$0 < \lambda < \lambda_*$	Нет/Нет	$b_1 \rightarrow a_4 \rightarrow c_8 \rightarrow$ $\rightarrow a_7 \rightarrow c_7 \rightarrow a_1$	6(12)	
$D$	$0 \leq \lambda < \lambda_1$	Да/Нет	$b_2 \rightarrow c_8 \rightarrow a_7 \rightarrow$ $\rightarrow c_7 \rightarrow a_1$	6(13)	$I$ [19, Табл. 3]
$E_1$	$0 \leq \lambda < 1$	Да/Да	$b_1 \rightarrow c_6 \rightarrow a_5 \rightarrow$ $\rightarrow c_4 \rightarrow a_2 \rightarrow a_1$	5(8)	$D$ [19, Табл. 3], [20, Табл. 8]
$E_2$	$0 \leq \lambda < \lambda_*$	Да/Нет	$b_1 \rightarrow c_6 \rightarrow a_5 \rightarrow$ $\rightarrow a_3 \rightarrow a_1$	4(7)	$E$ [19, Табл. 3]
$E_3$	$0 \leq \lambda < \lambda_*$	Да/Нет	$b_1 \rightarrow c_6 \rightarrow a_8 \rightarrow$ $\rightarrow c_9 \rightarrow a_3 \rightarrow a_1$	6(9)	$H$ [19, Табл. 3]
$E_4$	$0 < \lambda < +\infty$	Нет/Нет	$b_1 \rightarrow c_2 \rightarrow a_9 \rightarrow$ $\rightarrow a_3 \rightarrow a_1$	8(21)	
$E_5$	$0 < \lambda < +\infty$	Нет/Да	$b_1 \rightarrow c_2 \rightarrow a_9 \rightarrow$ $\rightarrow c_4 \rightarrow a_2 \rightarrow a_1$	9(22)	$E$ [20, Табл. 8]
$E_6$	$\lambda_* < \lambda < +\infty$	Нет/Да	$b_1 \rightarrow c_2 \rightarrow a_{11} \rightarrow$ $\rightarrow c_3 \rightarrow a_2 \rightarrow a_1$	6(11)	$G$ [20, Табл. 8]
$F$	$\lambda_* < \lambda < \lambda_2$	Нет/Нет	$b_1 \rightarrow a_6 \rightarrow c_5 \rightarrow$ $\rightarrow a_{10} \rightarrow c_1 \rightarrow a_1$	6(10)	
$G$	$\lambda_* < \lambda < \sqrt{2}$	Нет/Да	$b_1 \rightarrow a_6 \rightarrow c_5 \rightarrow$ $\rightarrow a_{10} \rightarrow a_{12}$	6(14)	$H$ [20, Табл. 8]
$H_1$	$\lambda_* < \lambda < \sqrt{2}$	Нет/Нет	$b_1 \rightarrow a_6 \rightarrow a_2 \rightarrow$ $\rightarrow c_2 \rightarrow a_{12}$	7(19)	
$H_2$	$\lambda_4 < \lambda < +\infty$	Нет/Да	$b_1 \rightarrow c_2 \rightarrow a_{12}$	2(5)	$J$ [20, Табл. 8]
$H_3$	$\lambda_5 < \lambda < +\infty$	Нет/Да	$b_1 \rightarrow c_2 \rightarrow a_{11} \rightarrow$ $\rightarrow a_{10} \rightarrow a_{12}$	6(14)	$I$ [20, Табл. 8]

Подчеркнем явление, которое обычно при трактовке совпадения графов Фоменко не отмечается. Имеются *типичные* точки плоскости  $Oh$ , для которых существуют неустойчивые критические уровни  $K$ , то есть такие уровни с парами атомов, которые при малом изменении  $(\ell, h)$  внутри камеры распадаются на два. В этом случае, в отличие от распада сложного атома, молекулы остаются совпадающими (идентичными) в смысле [6]. В рассматриваемой задаче неустойчивыми являются уровни  $\ell = 0$ ,  $k = 1 + (h - \lambda^2/2)^2$ ,  $h > \lambda^2/2$ . Они присутствуют в

$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$	$f_7$	$f_8$	$f_9$

(a)

1	$A_1$	2	$A_2, A_{10}$	$A_4, A_8$	$B_1$	$H_2$	3	$A_3$	4	$E_2$	5	$E_1$
	1		2	3	4	5		6		7		8

6	$A_5, A_7, E_3$	$A_{11}, F$	$A_{13}, E_6$	$C$	$D$	$G, H_3$	$B_3$
	9	10	11	12	13	14	15

7	$A_6$	$A_{12}$	$B_2$	$H_1$	8	$A_9$	$E_4$	9	$E_5$
	16	17	18	19		20	21		22

(b)

Рис. 7. Группы графов и графы Фоменко

любом графе Фоменко вида  $W_{0,h}$  с  $h > \lambda^2/2$  (граничное значение  $h = \lambda^2/2$  задает изоэнергетическое многообразие с вырожденной критической точкой и здесь не рассматривается). Такие графы появляются в камерах  $A_2, A_3, A_{13}, E_1, E_5, E_6, G, H_3$  и отличаются тем, что на самый верхний уровень по  $k$  попадают сразу два атома  $A_-$  в первых шести случаях и четыре атома  $A_-$  — в двух последних. При малом возмущении  $\ell$  от нулевого значения без выхода за пределы камеры верхний уровень распадается на два, лежащие на нем атомы расходятся на разную высоту по  $k$ , в двух последних случаях парами — граф 14 на рис. 7, b.

Итак, полное описание грубой фазовой топологии приводит к девяти группам молекул, эквивалентных в смысле определения [6], в которых содержится 22 различных (по ориентации и количеству критических точек на уровнях) устойчивых и 6 неустойчивых графов Фоменко.

Очевидно, имеются совпадающие графы Фоменко даже для различных топологий изоэнергетических многообразий. Чтобы различать такие графы, необходимо применять тонкую классификацию [8, 6], то есть расставлять метки в молекулах. В последнем столбце табл. 5 для

большинства камер в расширенном пространстве параметров указаны меченые молекулы, полученные при исследовании частных случаев в работах [19, 20]. Там, где аналогов нет, метки для части переходов между атомами также можно найти деформируя молекулу к исследованной ранее, в которой такой переход сохраняется. Для окончательной тонкой классификации остается найти метки для тех отдельных переходов между дугами, которые не имеют известных аналогов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Yehia H. M. New integrable cases in the dynamics of rigid bodies // *Mech. Res. Commun.* 1986. Vol. 13. № 3. P. 169–172.
2. Рябов П. Е. Аналитическая классификация особенностей интегрируемого случая Ковалевской–Яхья // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки.* 2010. № 4. С. 25–30.
3. Харламова И. И., Рябов П. Е. Электронный атлас бифуркационных диаграмм гиростата Ковалевской–Яхья // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки.* 2011. № 2. С. 147–162.
4. Харламов М. П., Харламова И. И., Шведов Е. Г. Бифуркационные диаграммы на изоэнергетических уровнях гиростата Ковалевской–Яхья // *Механика твердого тела.* 2010. № 40. С. 77–90.
5. Фоменко А. Т. Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем // *Доклады АН СССР.* 1986. Т. 287. № 5. С. 1071–1075.
6. Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Ижевск: Изд-во РХД, 1999. Т. 1, 2.
7. Фоменко А. Т. Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю // *Функц. анализ и его прил.* 1988. Vol. 22. № 4. С. 38–51.
8. Фоменко А. Т., Цишанг Х. Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1990. Т. 54. № 3. С. 546–575.
9. Рябов П. Е. Бифуркационное множество задачи о движении твердого тела вокруг неподвижной точки в случае Ковалевской–Яхья: дис. ... канд. физ.-матем. наук / МГУ. Москва, 1997. 143 с.
10. Рябов П. Е., Харламов М. П. Бифуркации первых интегралов в случае Ковалевской–Яхья // *Regular and Chaotic Dynamics.* 1997. Т. 2. № 2. С. 25–40.
11. Гашененко И. Н. Интегральные многообразия и топологические инварианты одного случая движения гиростата // *Механика твердого тела.* 1997. № 29. С. 1–7.
12. Харламов М. П. Бифуркации совместных уровней первых интегралов в случае Ковалевской // *Прикладная математика и механика.* 1983. Т. 47. № 6. С. 922–930.
13. Харламов М. П. Топологический анализ классических интегрируемых систем в динамике твердого тела // *Доклады АН СССР.* 1983. Т. 273. № 6. С. 1322–1325.
14. Kharlamov M. P. Bifurcation diagrams of the Kowalevski top in two constant fields // *Regular and Chaotic Dynamics.* 2005. Vol. 10. № 4. P. 381–398.
15. Харламов М. П. Критические подсистемы гиростата Ковалевской в двух постоянных полях // *Нелинейная динамика.* 2007. Т. 3. № 3. С. 331–348.
16. Харламов П. В. Лекции по динамике твердого тела. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1965. 221 с.
17. Гашененко И. Н. Новый класс движений тяжелого гиростата // *Докл. АН СССР.* 1991. Т. 318. № 1. С. 66–68.
18. Харламов М. П. Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1988. 200 с.
19. Болсинов А. В., Рихтер П. Х., Фоменко А. Т. Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской // *Матем. сб.* 2000. Т. 191. № 2. С. 3–42.
20. Морозов П. В. Вычисление инвариантов Фоменко–Цишанга в интегрируемом случае Ковалевской–Яхья // *Матем. сб.* 2007. Т. 198. № 8. С. 59–82.
21. Харламова Е. И., Харламов П. В. Новое решение дифференциальных уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку, при условиях С. В. Ковалевской // *Доклады АН СССР.* 1969. Т. 189. № 5. С. 967–968.
22. Харламов П. В. Один случай интегрируемости уравнений движения твердого тела, имеющего неподвижную точку // *Механика твердого тела.* 1971. № 3. С. 57–64.
23. Oshemkov A. A. Fomenko invariants for the main integrable cases of the rigid body motion equations // *Adv. in Soviet Math.* 1991. Vol. 6. P. 67–146.

24. Ошемков А. А. Вычисление инвариантов Фоменко для основных интегрируемых случаев динамики твердого тела // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. 1993. Vol. 25. № 2. С. 23–109.
25. Москвин А. Ю. Топология слоения Лиувилля интегрируемого случая Дуллина–Матвеева на двумерной сфере // Матем. сборник. 2008. Vol. 199. № 3. С. 95–132.
26. Гашененко И. Н. Инвариантные многообразия и множества допустимых скоростей в динамике твердого тела: дис. . . . д-ра физ.-матем. наук / ИПММ НАН Украины. Донецк, 2008. 300 с.
27. Гашененко И. Н. Бифуркационное множество задачи о движении гиростата, подчиненного условиям Ковалевской // Механика твердого тела. 1995. № 27. С. 31–35.

Поступила в редакцию 01.11.11

*M. P. Kharlamov, P. E. Ryabov*

**Smale–Fomenko diagrams and rough topological invariants of the Kowalevski–Yehia case**

We present the complete analytical classification of the atoms arising at the critical points of rank 1 of the Kowalevski–Yehia gyrostat. To classify the Smale–Fomenko diagrams, all separating values of the gyrostatic momentum are found. We present a kind of constructor of the Fomenko graphs; its application gives the complete description of the rough topology of this integrable case. It is proved that there exists exactly nine groups of identical molecules (not considering the marks). These groups contain 22 stable types of graphs and 6 unstable ones with respect to the number of critical circles on the critical levels.

*Keywords:* gyrostat, Kowalevski–Yehia case, diagrams, topological invariants.

Mathematical Subject Classifications: 70E17, 70G40

Харламов Михаил Павлович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра математического моделирования, Волгоградский филиал Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации, 400131, Россия, г. Волгоград, ул. Гагарина, 8.

E-mail: mharlamov@vags.ru

Рябов Павел Евгеньевич, к. ф.-м. н., доцент, кафедра теории вероятностей и математической статистики, Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, 125468, Россия, г. Москва, Ленинградский просп., 49.

E-mail: orelryabov@mail.ru

Kharlamov Mikhail Pavlovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration, Volgograd Branch, ul. Gagarina, 8, Volgograd, 400131, Russia

Ryabov Pavel Evgen'evich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Financial University under the Government of the Russian Federation, Leningradskii prosp., 49, Moscow, 125468, Russia