МАТЕМАТИКА

УДК 517.977

© *М. Н. Виноградова*

О ПОИМКЕ ДВУХ УБЕГАЮЩИХ В ЗАДАЧЕ ПРОСТОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Рассматривается задача простого преследования группой преследователей двух убегающих при равных динамических возможностях всех участников и с фазовыми ограничениями на состояния убегающих в предположении, что убегающие используют одно и то же управление. Получены достаточные условия поимки.

Ключевые слова: дифференциальная игра, фазовые ограничения, кусочно-программные стратегии, контрстратегии.

Введение

В теории дифференциальных игр хорошо известна задача преследования группой преследователей и задача уклонения от группы преследователей одного убегающего [1–8]. Естественным обобщением указанных задач является ситуация конфликтного взаимодействия, когда в игре участвуют две группы — преследователей и убегающих. Целью группы преследователей является поимка заданного числа убегающих, цель группы убегающих — противоположна [6–15].

К настоящему времени работы, посвященные условиям поимки двух и более убегающих, практически отсутствуют. В работе [10] рассмотрена задача простого преследования группы убегающих при условии, что убегающие используют программные стратегии, а каждый преследователь ловит не более одного убегающего. Были получены необходимые и достаточные условия поимки заданного числа убегающих. Общая линейная задача преследования группой преследователей двух убегающих без фазовых ограничений рассматривалась в [15].

В данной работе для задачи простого преследования получены достаточные условия поимки группой преследователей двух убегающих, при условии что убегающие используют одно и то же управление и не покидают пределы выпуклого многогранного множества.

Работа примыкает к исследованиям [16–18].

§ 1. Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^k$ ($k \geqslant 2$) рассматривается дифференциальная игра Γ $n+2$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и двух убегающих E_1, E_2. Законы движения каждого из преследователей P_i и каждого из убегающих E_j имеют вид $(i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, 2)$

$$\dot{x}_i(t) = u_i(t), \quad u_i \in V; \quad \dot{y}_j(t) = v(t), \quad v \in V; \quad x_i,\, y_j,\, u_i,\, v \in \mathbb{R}^k. \tag{1}$$

При $t = 0$ заданы начальные условия

$$x_i(0) = x_i^0, \quad y_j(0) = y_j^0, \tag{2}$$

причём $x_i^0 \neq y_j^0$, V — строго выпуклый компакт в $\mathbb{R}^k$ с гладкой границей.

Предполагается, что убегающие в процессе игры не покидают пределы выпуклого множества

$$D = \{y : y \in \mathbb{R}^k, \langle p_s, y\rangle \leqslant \mu_s,\, s = 1, \ldots, r\},$$

где $p_1, \ldots, p_r$ — единичные вектора, $\mu_1, \ldots, \mu_s$ — вещественные числа такие, что $\operatorname{int} D \neq \varnothing$.

Пусть $T > 0$ и σ — некоторое конечное разбиение

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_q < t_{q+1} = T$$

отрезка $[0, T]$.

Определение 1. *Кусочно-программной стратегией* W убегающих E_j, соответствующей разбиению σ, называется семейство отображений c^l $(l = 0, 1, \ldots, q)$, ставящих в соответствие величинам

$$(t_l, x_i(t_l), y_j(t_l), \min_{t \in [0, t_l]} \min_i \|x_i(t) - y_j(t)\|) \tag{3}$$

измеримую функцию $v(t)$, определенную для $t \in [t_l, t_{l+1})$ и такую, что $v(t) \in V$, $y_j(t) \in D$, $t \in [t_l, t_{l+1})$.

Определение 2. *Кусочно-программной контрстратегией* U_i преследователя P_i, соответствующей разбиению σ, называется семейство отображений b_i^l $(l = 0, 1, \ldots, q)$, ставящих в соответствие величинам (3) и управлению $v(t)$, $t \in [t_l, t_{l+1})$ измеримую функцию $u_i(t)$, определенную для $t \in [t_l, t_{l+1})$ и такую, что $u_i(t) \in V$, $t \in [t_l, t_{l+1})$.

Обозначим данную игру Γ.

Определение 3. В игре Γ происходит *поимка*, если существует $T > 0$ и для любого разбиения σ отрезка $[0, T]$, для любых стратегий E_1, E_2 существуют конечные стратегии $U_1, \ldots, U_n$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$, моменты времени τ_1, τ_2, номера $l, s \in \{1, \ldots, n\}$ такие, что $x_l(\tau_1) = y_1(\tau_1)$, $x_s(\tau_2) = y_2(\tau_2)$.

От систем (1) перейдем к системе

$$\dot{z}_{ij} = u_i - v, \quad z_{ij}(0) = z_{ij}^0 = x_i^0 - y_j^0. \tag{4}$$

Введем следующие обозначения:

$$I_0 = \{1, \ldots, n\},\ d = \max\{|v|, v \in V\},\ \lambda(a, v) = \sup\{\lambda \geqslant 0 \mid -\lambda a \in V - v\},\ c = y_1^0 - y_2^0.$$

§ 2. Достаточные условия поимки

Определение 4 (см. [19]). Векторы $a_1, a_2, \ldots, a_s$ образуют положительный базис пространства $\mathbb{R}^k$, если для любого $x \in \mathbb{R}^k$ существуют положительные вещественные числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ такие, что

$$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_s a_s.$$

Теорема 1. *Пусть существуют множества* $J_1, J_2 \subset \{1, \ldots, n\}$, $I_1, I_2 \subset I_0 \setminus (J_1 \cup J_2)$, $I_1 \cap I_2 = \varnothing$ *такие, что наборы*

$$\{z_{i1}^0,\ i \in J_1,\ p_1, \ldots, p_r,\ -c\},\ \{z_{i2}^0,\ i \in J_2,\ p_1, \ldots, p_r,\ c\},$$
$$\{z_{l1}^0,\ l \in J_1 \setminus (J_1 \cap J_2),\ z_{s2}^0,\ s \in J_2 \setminus (J_1 \cap J_2),\ z_{\alpha 1}^0,\ \alpha \in I_1,\ z_{\beta 2}^0,\ \beta \in I_2,\ p_1, \ldots, p_r\}$$

образуют положительный базис, причем $|J_1| \geqslant k$, $|J_2| \geqslant k$, $|J_1^0| + |J_2^0| \geqslant k + 1$, *где* $J_1^0 = (I_1 \cup J_1) \setminus (J_1 \cap J_2)$, $J_2^0 = (I_2 \cup J_2) \setminus (J_1 \cap J_2)$.

Тогда в игре Γ *происходит поимка.*

Доказательство. **1.** $J_1 \cap J_2 = \varnothing$. Так как

$$\{z_{i1}^0,\ i \in J_1,\ p_1, \ldots, p_r,\ -c\}, \quad \{z_{i2}^0,\ i \in J_2,\ p_1, \ldots, p_r,\ c\}$$

образуют положительный базис, то существуют положительные числа γ_{i1}, $i \in J_1$, γ_{i2}, $i \in J_2$, α_s^1, α_s^2 такие, что

$$\sum_{i \in J_1} \gamma_{i1} z_{i1}^0 + \sum_{s=1}^r \alpha_s^1 p_s - c = 0, \quad \sum_{i \in J_2} \gamma_{i1} z_{i2}^0 + \sum_{s=1}^r \alpha_s^2 p_s + c = 0.$$

Следовательно, $\sum\limits_{i\in J_1}\gamma_{i1}z_{i1}^0+\sum\limits_{i\in J_2}\gamma_{i1}z_{i2}^0+\sum\limits_{s=1}^{r}(\alpha_s^1+\alpha_s^2)p_s=0$. Обозначим $p_0=\sum\limits_{s=1}^{r}(\alpha_s^1+\alpha_s^2)p_s$, $\mu_0=\sum\limits_{s=1}^{r}(\alpha_s^1+\alpha_s^2)\mu_s$, $D_0=\{y\mid \langle p_0,y\rangle\leqslant\mu_0\}$. Считаем, что $p_0\neq 0$. Случай $p_0=0$ рассматривается аналогично. Тогда $D\subset D_0$ и набор

$$\{z_{i1}^0,\ i\in J_1,\ z_{i2}^0,\ i\in J_2,\ p_0\} \tag{5}$$

образует положительный базис пространства $\mathbb{R}^k$.

Пусть V — произвольная стратегия убегающих. Следовательно, $y_1(t),\,y_2(t)\in D$ для всех $t\geqslant 0$, а значит $y_1(t),\,y_2(t)\in D_0$ и поэтому $\langle p_0,y_1(t)\rangle\leqslant\mu_0$, $\langle p_0,y_2(t)\rangle\leqslant\mu_0$. Отсюда имеем

$$\int_0^t\langle p_0,v(\tau)\rangle\,d\tau=\langle p_0,y_1(t)\rangle-\langle p_0,y_1^0\rangle\leqslant\mu_0-\langle p_1,y_1^0\rangle=\mu_{01}.$$

Аналогично,

$$\int_0^t\langle p_0,v(\tau)\rangle\,d\tau=\langle p_0,y_2(t)\rangle-\langle p_0,y_2^0\rangle\leqslant\mu_0-\langle p_0,y_2^0\rangle=\mu_{02}.$$

Так как (5) образуют положительный базис и V — строго выпуклый компакт с гладкой границей, то число ([8])

$$\delta=\min_{v\in D_1(0)}\max\{\max_{l\in J_1}\lambda(z_l^0,v),\ \max_{l\in J_2}\lambda(z_l^0,v),\ \langle p_0,v\rangle\}$$

положительно.

Пусть $T_1(t),\,T_2(t)$ два подмножества $[0,t]$ такие, что

$$T_1(t)=\{\tau|\tau\in[0,t],\langle p_0,v(\tau)\rangle<\delta\},\quad T_2(t)=\{\tau|\tau\in[0,t],\langle p_0,v(\tau)\rangle\geqslant\delta\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\mu_{01}\geqslant\int_0^t\langle p_0,v(\tau)\rangle\,d\tau&=\int_{T_1(t)}\langle p_0,v(\tau)\rangle\,d\tau+\int_{T_2(t)}\langle p_0,v(\tau)\rangle\,d\tau\\&\geqslant\delta\mu(T_2(t))-d\mu(T_1(t)).\end{aligned}$$

С другой стороны, $\mu(T_2(t))+\mu(T_1(t))=t$, где μ — мера Лебега. Из этих соотношений следует, что

$$\mu(T_1(t))\geqslant\frac{t\delta-\mu_{01}}{d+\delta}.$$

Аналогично,

$$\mu(T_1(t))\geqslant\frac{t\delta-\mu_{02}}{d+\delta}.$$

Поэтому

$$\mu(T_1(t))\geqslant\frac{t\delta-\mu^0}{d+\delta},$$

где $\mu^0=\max\{\mu_{01},\mu_{02}\}$.

Задаем управление преследователей следующим образом:

$$u_i(t)=v(t)-\lambda(z_{i1}^0,v(t))z_{i1}^0,\quad i\in J_1,$$

$$u_i(t)=v(t)-\lambda(z_{i2}^0,v(t))z_{i2}^0,\quad i\in J_2,$$

управление остальных преследователей задаем произвольно.

Из системы (4) получаем

$$z_{i1}(t)=z_{i1}^0(t)h_{i1}(t),\quad z_{i2}(t)=z_{i2}^0(t)h_{i2}(t),$$

где

$$h_{i1}(t) = 1 - \int_0^t \lambda(z_{i1}^0, v(\tau))\,d\tau, \quad i \in J_1,$$

$$h_{i2}(t) = 1 - \int_0^t \lambda(z_{i2}^0, v(\tau))\,d\tau, \quad i \in J_2,$$

$h_{ij}(t)$ — непрерывные функции и $h_{i1}(0) = 1$, $h_{i2}(0) = 1$.

Рассмотрим

$$\sum_{i\in J_1} h_{i1}(t) + \sum_{i\in J_2} h_{i2}(t) = |J_1| + |J_2| - \int_0^t \sum_{i\in J_1} \lambda_i(z_{i1}^0, v(\tau))\,d\tau - \int_0^t \sum_{i\in J_2} \lambda_i(z_{i2}^0, v(\tau))\,d\tau$$

$$\leqslant |J_1| + |J_2| - \int_0^t \max\{\max_{i\in J_1} \lambda_i(z_{i1}^0, v(\tau)), \max_{i\in J_2} \lambda_i(z_{i2}^0, v(\tau))\}\,d\tau.$$

Так как

$$\int_0^t \max\{\max_{i\in J_1} \lambda_i(z_{i1}^0, v(\tau)), \max_{i\in J_2} \lambda_i(z_{i2}^0, v(\tau))\}\,d\tau \geqslant \int_{T_1(t)} \max\{\max_{i\in J_1} \lambda_i(z_{i1}^0, v(\tau)), \max_{i\in J_2} \lambda_i(z_{i2}^0, v(\tau))\}\,d\tau$$

$$\geqslant \delta\mu(T_1(t)) \geqslant \delta\frac{t\delta - \mu^0}{d+\delta},$$

то

$$\sum_{i\in J_1} h_{i1}(t) + \sum_{i\in J_2} h_{i2}(t) \leqslant |J_1| + |J_2| - \frac{\delta^2 t - \delta\mu^0}{d+\delta}.$$

Из последнего неравенства следует, что существует номер r и момент T_0 такой, что

$$T_0 \leqslant t_0 = \frac{(|J_1| + |J_2|)(d+\delta) + \delta\mu^0}{\delta^2}$$

и одна из функций h_{ij} обратится в 0 в момент T_0.

Если $h_{r1}(T_0) = h_{s2}(T_0) = 0$ при некоторых $r \in J_1$, $s \in J_2$, то

$$x_r(T_0) = y_1(T_0), \quad x_s(T_0) = y_2(T_0),$$

следовательно, в игре Γ происходит поимка.

Пусть $h_{r1}(T_0) = 0$, $h_{s2}(T_0) \neq 0$ для всех $s \in J_2$. Тогда $x_r(T_0) = y_1(T_0)$.

Так как $z_{i2}^0 = \dfrac{1}{h_{i2}(T_0)} z_{i2}(T_0)$, $i \in J_2$ и

$$z_{r2}(T_0) = x_r(T_0) - y_2(T_0) = x_r(T_0) - y_1(T_0) + y_1(T_0) - y_2(T_0) = c,$$

то $\{z_{i2}(T_0),\, i \in J_2,\, z_{r2}(T_0),\, p_1, \ldots p_r\}$ составляют положительный базис. В силу [3] преследователи $\{P_i,\, i \in J_2,\, P_r\}$ ловят убегающего E_2. Отсюда следует, что в игре Γ происходит поимка.

2. $J_1 \cap J_2 \neq \varnothing$. Пусть $J = J_1 \cap J_2$, тогда $J_1^0 = I_1 \cup (J_1 \setminus J)$, $J_2^0 = I_2 \cup (J_2 \setminus J)$.

Задаем управление преследователей следующим образом:

$$u_i(t) = v(t) - \lambda(z_{i1}^0, v(t)) z_{i1}^0, \quad i \in J_1^0,$$

$$u_i(t) = v(t) - \lambda(z_{i2}^0, v(t)) z_{i2}^0, \quad i \in J_2^0,$$

$$u_i(t) = v(t), \quad i \in J, \quad t \in [0, T].$$

Момент T будет указан позже. Управление остальных преследователей задаем произвольно.

Из системы (4) имеем:

$$z_{i1}(t) = z_{i1}^0 h_{i1}(t), \quad i \in J_1^0, \quad z_{i2}(t) = z_{i2}^0 h_{i2}(t), \quad i \in J_2^0,$$

$$z_{i1}(t)=z_{i1}^0,\quad z_{i2}(t)=z_{i2}^0,\quad i\in J,$$

где

$$h_{i1}(t)=1-\int_0^t\lambda(z_{i1}^0,v(\tau))\,d\tau,\quad i\in J_1^0,\quad h_{i2}(t)=1-\int_0^t\lambda(z_{i2}^0,v(\tau))\,d\tau, i\in J_2^0.$$

По условию векторы

$$\{z_{l1}^0,\, l\in J_1^0,\, z_{l2}^0,\, l\in J_2^0,\, p_1,\ldots,p_r\}$$

образуют положительный базис. Поэтому существуют положительные числа $\gamma_{l1}, l\in J_1^0$, $\gamma_{l2}, l\in J_2^0, \alpha_s$ такие, что

$$\sum_{l\in J_1^0}\gamma_{l1}^0 z_{l1}^0+\sum_{l\in J_2^0}\gamma_{l2}^0 z_{l2}^0+\sum_{s=1}^r\alpha_s p_s=0.$$

Обозначим

$$p_0=\sum_{s=1}^r\alpha_s p_s,\quad \mu_0=\sum_{s=1}^r\alpha_s\mu_s,\quad D_0=\{y\mid\langle p_0,y\rangle\leqslant\mu_0\}.$$

Получаем, что набор $\{z_{l1}^0,\, l\in J_1^0,\, z_{l2}^0,\, l\in J_2^0,\, p_0\}$ образует положительный базис и $D\subset D_0$. Проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям пункта 1, получаем, что существует момент T_0 такой, что в момент T_0 одна из функций $h_{i1}(i\in J_1^0), h_{i2}(i\in J_2^0)$ обратится в нуль. Пусть $h_{q1}(T_0)=0,\, q\in J_1^0,\, h_{s2}(T_0)\neq0$ для всех $s\in J_2^0$. Тогда $x_q(T_0)=y_1(T_0)$ и, кроме того,

$$z_{s2}^0=\frac{z_{s2}(T_0)}{h_{s2}(T_0)},\quad s\in J_2^0,\quad z_{l2}^0=z_{l2}(T),\quad l\in J,$$

$$z_{q2}(T_0)=x_q(T_0)-y_2(T_0)=x_q(T_0)-y_1(T_0)+y_1(T_0)-y_2(T_0)=c.$$

Поэтому набор $\{z_{s2}(T_0),\, s\in J_2,\, z_{q2}(T_0),\, p_1,\ldots,p_r\}$ образует положительный базис. В силу [3] в игре Γ происходит поимка. Теорема доказана. $\square$

Пример 1. Пусть $k=3,\, n=5,\, m=2,\, r=1$,

$$x_1^0=(3,0,0),\quad x_2^0=(-2,-2,0),\quad x_3^0=(1,3,10),\quad x_4^0=(-3,4,10),\quad x_5^0=(3,2,5),$$

$$p_1=(0,-1,0),\quad y_1^0=(0,0,1),\quad y_2^0=(0,0,2),\quad \mu_1=1.$$

В качестве J_1, J_2, I_1, I_2 возьмем множества

$$J_1=\{1,2,3\},\quad J_2=\{3,4,5\},\quad I_1=I_2=\varnothing.$$

Тогда наборы векторов

$$\{z_{11},\, z_{21},\, z_{31},\, p_1,\, -c\},\ \{z_{32},\, z_{42},\, z_{52},\, p_1,\, c\},\ \{z_{11},\, z_{21},\, z_{42},\, z_{52},\, p_1\}$$

образуют положительный базис. Таким образом, получаем, что условие теоремы выполнено. Следовательно, в данной игре происходит поимка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пшеничный Б. Н. Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. 1976. № 3. С. 145–146.
2. Черноусько Ф. Л. Одна задача уклонения от многих преследователей // Прикладная математика и механика. 1976. Т. 40. Вып. 1. С. 14–24.
3. Петров Н. Н. Простое преследование при наличии фазовых ограничений. Л., 1984. 16 с. Деп. в ВИНИТИ 27.03.84, № 1684–84.
4. Рихсиев Б. Б. Дифференциальные игры с простыми движениями. Ташкент: Фан, 1989. 187 с.
5. Петросян Л. А. Дифференциальные игры преследования. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1977. 222 с.

6. Чикрий А. А. Конфликтно-управляемые процессы. Киев: Наук. думка, 1992. 380 с.
7. Григоренко Н. Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990. 197 с.
8. Благодатских А. И., Петров Н. Н. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Изд-во Удмуртского университета, 2009. 266 с.
9. Петров Н. Н., Петров Н. Никандр. О дифференциальной игре «казаки–разбойники» // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19. № 8. С. 1366–1374.
10. Петров Н. Н., Прокопенко В. А. Об одной задаче преследования группы убегающих // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23. № 4. С. 724–726.
11. Чикрий А. А., Прокопович П. В. Линейная задача убегания при взаимодействии групп объектов // Прикладная математика и механика. 1994. Т. 58. Вып. 4. С. 12–21.
12. Чикрий А. А., Прокопович П. В. О задаче убегания при взаимодействии групп движущихся объектов // Кибернетика. 1989. № 5. С. 59–63.
13. Сатимов Н., Маматов М. Ш. О задаче преследования и уклонения от встречи в дифференциальных играх между группами преследователей и убегающих // ДАН Узб. ССР. 1983. № 4. С. 3–6.
14. Вагин Д. А., Петров Н. Н. Об одной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями // Прикладная математика и механика. 2002. № 2. С. 232–241.
15. Григоренко Н. Л. Преследование несколькими управляемыми объектами двух убегающих // ДАН СССР. 1985. Т. 282. № 5. С. 1051–1054.
16. Банников А. С. О задаче позиционной поимки одного убегающего группой преследователей // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 1. С. 3–7.
17. Петров Н. Н. К нестационарной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями // Математическая теория игр и ее приложения. 2010. Т. 2. Вып. 4. С. 74–83.
18. Банников А. С., Петров Н. Н. К нестационарной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 1. С. 40–51.
19. Петров Н. Н. Об управляемости автономных систем // Дифференциальные уравнения. 1968. Т. 4. № 4. С. 606–617.

Поступила в редакцию 19.09.11

M. N. Vinogradova
On the capture of two evaders in a simple pursuit–evasion problem with phase restrictions

A differential game of the group of persecutors and two evaders is considered at equal dynamic opportunities of all participants and under equal phase restrictions imposed on the states of evaders. Sufficient solvability conditions are derived proceeding on the assumption that the evaders use the same control.

Keywords: differential game, phase restrictions, piece–program strategy, counterstrategy.

Mathematical Subject Classifications: 49N70, 49N75

Виноградова Марина Николаевна, ассистент кафедры математики и информатики, филиал Удмуртского государственного университета в г. Воткинске, 427433, Россия, г. Воткинск, ул. Расковой, 1 а.
E-mail: mnvinogradova@mail.ru

Vinogradova Marina Nikolaevna, Assistant Lecturer, Department of Mathematics and Informatics, Udmurt State University Branch in Votkinsk, ul. Raskovoi, 1 a, Votkinsk, 427433, Russia.