УДК 517.925+517.938.5

© *А. В. Болсинов, А. В. Борисов, И. С. Мамаев*

МЕТОДЫ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В НЕГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМАХ

В работе рассматривается проблема гамильтонизации неголономных систем, как интегрируемых, так и неинтегрируемых. Этот вопрос является важным при качественном исследовании этих систем и позволяет определить возможные динамические эффекты. Первая часть работы посвящена представлению в конформно гамильтоновой форме интегрируемых систем. Во второй части доказывается существование конформно гамильтонового представления в окрестности периодического решения для произвольной (в том числе интегрируемой) системы, сохраняющей инвариантную меру. Общие конструкции всюду иллюстрируются примерами из неголономной механики.

Ключевые слова: конформно гамильтонова система, неголономная система, инвариантная мера, периодическая траектория, инвариантный тор, интегрируемая система.

Введение

Настоящая работа посвящена проблеме гамильтонизации неголономных систем. Хотелось бы в самой общей постановке попытаться найти препятствия к гамильтонизации или, напротив, доказать, что гамильтоново представление существует. Если рассматривать систему в целом, то такого сорта вопросы довольно сложны. Однако проблема гамильтонизации может быть естественным образом поставлена в более локальном контексте, т. е. в окрестности положения равновесия, замкнутой траектории или интегрального многообразия.

Приводимые ниже теоретические результаты мы будем иллюстрировать на примере двух систем неголономной механики.

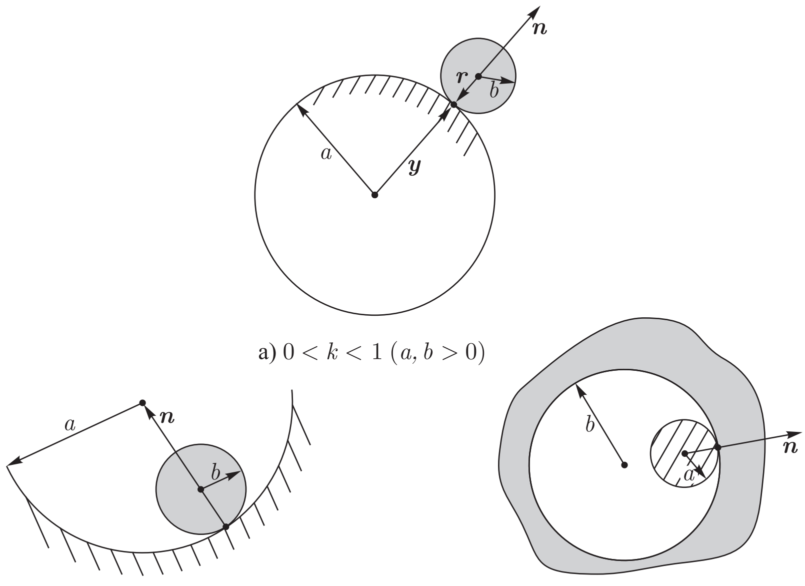
§ 1. Шар Чаплыгина на сфере

Эта задача с различных позиций рассматривалась в [2] и является обобщением классической задачи Чаплыгина о качении шара по плоскости [3]. Пусть динамически несимметричное уравновешенное твердое тело со сферической поверхностью (шар Чаплыгина) катится без проскальзывания по поверхности неподвижной сферы радиуса a; в зависимости от знаков кривизны возможны три варианта обката (см. рис. 1). Выберем подвижную систему координат, связанную с главными осями шара, и обозначим через $\boldsymbol{\omega}$, m, $\mathbf{I} = \mathrm{diag}(I_1, I_2, I_3)$, b соответственно угловую скорость, массу, тензор инерции и радиус шара. Угловой момент шара относительно точки касания Q имеет вид

$$\boldsymbol{M} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + D\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{n}), \qquad D = mb^2, \tag{1.1}$$

где $\boldsymbol{n}$ — вектор нормали к сфере в точке контакта (см. рис. 1). Полное фазовое пространство системы представляет собой $T(SO(3) \times S^2)$. Положим, что потенциальная энергия шара зависит лишь от положения его центра; тогда, используя неголономную связь — отсутствие проскальзывания (т. е. скорость точки контакта равна нулю), можно получить уравнения движения редуцированной системы в следующей замкнутой форме:

$$\dot{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{\omega} + k\boldsymbol{n} \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{n}}, \qquad \dot{\boldsymbol{n}} = k\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{\omega}, \qquad k = \frac{a}{a+b}, \tag{1.2}$$



b) $k > 1$ $(a > 0,\ b > 0,\ |b| < a)$ c) $k < 0$ $(a < 0,\ b > 0,\ |a| < b)$

Рис. 1. Схема качения шара (обозначен серым цветом) по неподвижному сферическому основанию (обозначено штриховкой) при различных знаках радиусов кривизны a , b .

где U — потенциал внешних сил, a — радиус неподвижной сферы (заметим, что радиусы подвижной и неподвижной сфер необходимо брать с соответствующим знаком, см. рис. 1), а угловая скорость выражается через момент с помощью соотношения (1.1) по формуле

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{A}\boldsymbol{M} + \Lambda\mathbf{A}\boldsymbol{n},$$
$$\mathbf{A} = (\mathbf{I} + D\mathbf{E})^{-1}, \quad \Lambda = \frac{(\mathbf{A}\boldsymbol{M}, \boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})D^{-1} - (\boldsymbol{n}, \mathbf{A}\boldsymbol{n})}.$$

Система (1.2) обладает инвариантной мерой $\rho\, d\boldsymbol{M}\, d\boldsymbol{n}$ с плотностью

$$\rho = \big((\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})D^{-1} - (\boldsymbol{n}, \mathbf{A}\boldsymbol{n})\big)^{-1/2}$$

и допускает два (общих) первых интеграла — геометрический и энергию:

$$F_0 = (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}) = 1,$$
$$H = \frac{1}{2}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\omega}) + U(\boldsymbol{n}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{M}, \mathbf{A}\boldsymbol{M}) + \frac{1}{2}D\Lambda(\mathbf{A}\boldsymbol{M}, \boldsymbol{n}) + U(\boldsymbol{n}). \tag{1.3}$$

При $U \equiv 0$ и произвольном k имеется еще один интеграл

$$F_1 = (\boldsymbol{M}, \boldsymbol{M}). \tag{1.4}$$

§ 2. Резиновый шар на сфере

Эта задача была впервые рассмотрена в работе [11] и более подробно изучена в [10, 12]. Рассмотрим, как и выше, движение динамически несимметричного уравновешенного шара по поверхности неподвижной сферы, используя те же обозначения для соответствующих величин, что и выше (см. рис. 1). Мы предполагаем, что при движении мгновенная скорость точки контакта и проекция угловой скорости шара на нормаль к сфере равны нулю. Эта модель движения отличается от классической неголономной модели качения при проскальзывании, в которой предполагается, что равна нулю только скорость точки контакта.

Как и выше, выберем подвижную систему координат, связанную с главными осями, жестко связанными с шаром. При этом кинематические уравнения, описывающие эволюцию нормали $\boldsymbol{n}$, совпадают с предыдущими (1.2), а динамические уравнения удобнее выписать через угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$. Окончательно для движения в потенциальном силовом поле, зависящем лишь от нормали $U(\boldsymbol{n})$, получим

$$\begin{gathered}\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega} + \lambda\boldsymbol{n} + k\boldsymbol{n}\times\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{n}}, \quad \dot{\boldsymbol{n}} = k\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\omega},\\ \mathbf{J} = \mathbf{I} + mb^2\mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = \|\delta_{ij}\|,\end{gathered} \tag{2.1}$$

где

$$\lambda = -\frac{(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}, \mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{n}) + \left(k\boldsymbol{n}\times\dfrac{\partial U}{\partial\boldsymbol{n}}, \mathbf{J}\boldsymbol{n}\right)}{(\boldsymbol{n}, \mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{n})}.$$

Система (2.1) обладает инвариантной мерой

$$(\boldsymbol{n}, \mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{n})^{\frac{1}{2k}}\, d\boldsymbol{\omega}\, d\boldsymbol{n}. \tag{2.2}$$

Мера (2.2) была найдена в работе [10].

Связь

$$F_1 = (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{n}) = 0 \tag{2.3}$$

также можно рассматривать как дополнительный частный интеграл. При этом уравнения (2.1) обладают также интегралами энергии и геометрическим:

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) + U(\boldsymbol{n}), \quad F_0 = (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}) = 1. \tag{2.4}$$

§ 3. Гамильтонизация в окрестности двумерного инвариантного многообразия

Рассмотрим систему (1.2) при $k = 1$ и $U = 0$, которая описывает качение без проскальзывания динамически несимметричного уравновешенного шара по неподвижной горизонтальной плоскости. В этом случае к интегралам (1.3) и (1.4) добавляется интеграл площадей

$$F_2 = (\boldsymbol{M}, \boldsymbol{n}).$$

На многообразии $\mathcal{M}^4 = \{F_0 = 1, F_2 = 0\}$ выберем независимые переменные z_1, z_2, h, f и определим пуассонову структуру (ранга 4) следующим образом:

$$\begin{gathered}\{z_1, z_2\} = 0, \quad \{h, f\} = 0,\\ \{z_1, h\} = \frac{\Psi(z_2)}{\Delta}\sqrt{P(z_1)}, \quad \{z_2, h\} = -\frac{\Psi(z_1)}{\Delta}\sqrt{P(z_2)},\\ \{z_1, f\} = -\frac{\psi(z_2)}{\Delta}\sqrt{P(z_1)}, \quad \{z_2, f\} = \frac{\psi(z_1)}{\Delta}\sqrt{P(z_2)},\\ \Delta = \Psi(z_1)\psi(z_2) - \Psi(z_2)\psi(z_1), \quad P(z) = \frac{\Psi^2(z)}{z^2}R(z).\end{gathered}$$

В этом случае уравнения движения (**??**) представляются в конформно гамильтоновой форме

$$\begin{gathered}\frac{dz_k}{d\tau} = \lambda(z_1, z_2)\{z_k, H\}, \quad H = h,\\ \lambda(z_1, z_k) = \frac{\Psi(z_1)\Psi(z_2)(z_1 - z_2)}{\Delta z_1 z_2}.\end{gathered}$$

Конформно гамильтоново представление в первоначальных физических переменных $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{n})$ указано в [1].

§ 4. Гамильтонизация в окрестности периодической траектории

В этом разделе мы рассмотрим системы, которые не являются интегрируемыми, для них типично хаотическое поведение. В работах [4, 7, 8, 9] приведено несколько примеров (неголономных) неинтегрируемых систем, которые могут быть сведены к потоку на четырехмерном многообразии, который сохраняет меру и обладает первым интегралом. Для качественного анализа подобных систем часто используется сечение Пуанкаре, с помощью которого на поверхности уровня первого интеграла строится двумерное отображение, сохраняющее площадь (в подходящих переменных). Таким образом анализ этого потока сводится к изучению семейства двумерных отображений, параметризуемых значением постоянной первого интеграла. Такое представление позволяет использовать хорошо известные (численные) методы исследования хаоса, применяемые, как правило, для гамильтоновых систем с $1\frac{1}{2}$ и 2 степенями свободы.

С другой стороны, известно, что всякое двумерное сохраняющее площадь отображение (гомотопное тождественному) аналитическим образом вкладывается в гамильтонов поток (возможно, с неоднозначным гамильтонианом).

Возникает естественный вопрос: *можно ли исходную систему на четырехмерном многообразии представить в гамильтоновой форме, где первый интеграл берется в качестве гамильтониана*?

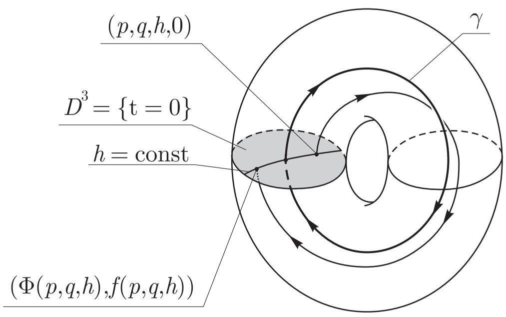


Рис. 2. Схематическое изображение *четырехмерной* окрестности периодической траектории γ и иллюстрация *трехмерного* отображения Пуанкаре, описанного в доказательстве (граница окрестности, изображенная в виде тора, в общем случае неинвариантна относительно потока).

Тот факт, что система имеет первый интеграл H, приводит к тому, что трехмерное отображение Пуанкаре записывается в виде

$$\begin{aligned}\widetilde{p} &= \widetilde{p}(p,q,h),\\ \widetilde{q} &= \widetilde{q}(p,q,h),\\ \widetilde{h} &= h,\end{aligned}$$

где $(\widetilde{p},\widetilde{q},\widetilde{h})=\Phi(p,q,h)$ — координаты образа точки при отображении Пуанкаре.

Сохранение меры приводит к тому, что при каждом фиксированном h двумерное отображение Пуанкаре сохраняет площадь на каждом двумерном сечении $\{h=\mathrm{const}, t=0\}$. Без ограничения общности, мы можем считать, что p,q — канонические координаты, а

$$\widetilde{p}=\widetilde{p}(p,q,h), \quad \widetilde{q}=\widetilde{q}(p,q,h)$$

— семейство симплектических диффеоморфизмов, где h играет роль параметра. Можно сказать тем самым, что наша динамическая система в окрестности рассматриваемой траектории полностью характеризуется этим семейством симплектических отображений Φ_h и еще (положительной) функцией $f(p,q,h)$, которая, впрочем, может меняться совершенно произвольным образом при замене параметра на траекториях (поэтому в итоге она никакой роли при наших построениях играть не должна, раз мы интересуемся гамильтоновостью с точностью до конформного множителя). Отметим, что при изменении параметра t на траекториях координаты (p,q,h) остаются прежними.

Итак, мы имеем хорошую модель, описывающую поведение системы в окрестности рассматриваемой периодической траектории с уже введенными локальными координатами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борисов А. В., Мамаев И. С., Марихин В. Г. Явное интегрирование одной неголономной задачи // Докл. РАН, 2008, т. 422, вып. 4, с. 475–478.
2. Борисов А. В., Фёдоров Ю. Н. О двух видоизмененных интегрируемых задачах динамики // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ., 1995, вып. 6, с. 102–105.
3. Чаплыгин С. А. О катании шара по горизонтальной плоскости // Матем. сб., 1903, т. 24, вып. 1, с. 139–168. 2002,
4. Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. Stability of steady rotations in the nonholonomic Routh problem // Regul. Chaotic Dyn., 2008, vol. 13, no. 4, pp. 239–249.
5. Borisov A. V., Mamaev I. S. Conservation laws, hierarchy of dynamics and explicit integration of nonholonomic systems // Regul. Chaotic Dyn., 2008, vol. 13, no. 5, pp. 443–490.
6. Borisov A. V., Mamaev I. S. Isomorphism and Hamilton representation of some nonholonomic systems // Siberian Math. J., 2007, vol. 48, no. 1, pp. 26–36; см. также arXiv: nlin.-SI/0509036 v. 1 (Sept. 21, 2005).
7. Borisov A. V., Mamaev I. S. Rolling of a non-homogeneous ball over a sphere without slipping and twisting // Regul. Chaotic Dyn., 2007, vol. 12, no. 2, pp. 153–159.
8. Borisov A. V., Mamaev I. S. The rolling motion of a rigid body on a plane and sphere: Hierarchy of dynamics // Regul. Chaotic Dyn., 2002, vol. 7, no. 2, pp. 177–200.
9. Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A. The rolling motion of a ball on a surface: New integrals and hierarchy of dynamics // Regul. Chaotic Dyn., 2002, vol. 7, no. 2, pp. 201–219.
10. Ehlers K., Koiller J. Rubber rolling: Geometry and dynamics of $2-3-5$ distributions // In Proceedings IUTAM symposium 2006 on Hamiltonian Dynamics, Vortex Structures, Turbulence, at the Steklov Institute, Moscow, to appear.
11. Ehlers K., Koiller J., Montgomery R., Rios P. Nonholonomic systems via moving frames: Cartan equivalence and Chaplygin Hamiltonization // The breadth of symplectic and Poisson geometry: Festschrift in honor of Alain Weinstein / J. E. Marsden, T. S. Ratiu. (Progr. Math., vol. 232.) Boston: Birkhäuser, 2005. P. 75–120.
12. Koiller J., Ehlers K. Rubber rolling over a sphere // Regul. Chaotic Dyn., 2007, vol. 12, no. 2, pp. 127–152.

Поступила в редакцию 01.09.08

A. V. Bolsinov, A. V. Borisov, I. S. Mamaev
On the computer methods in nonholonomic systems

Hamiltonisation problem for non-holonomic systems, both integrable and non-integrable, is considered. This question is important for qualitative analysis of such systems and allows one to determine possible dynamical effects. The first part is devoted to the representation of integrable systems in a conformally Hamiltonian form. In the second part, the existence of a conformally Hamiltonian representation in a neighbourhood of a periodic solution is proved for an arbitrary measure preserving system (including integrable). General consructions are always illustrated by examples from non-holonomic mechanics.

Keywords: conformally Hamiltonian system, nonholonomic system, invariant measure, periodic trajectory, invariant torus, integrable system.

Mathematical Subject Classifications: 37Jxx

Болсинов Алексей Викторович, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119899, Россия, г. Москва, Воробьевы горы, School of Mathematics, Loughborough University, United Kingdom,

КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ 2010. Вып. 4

LE11 3TU, Loughborough, Leicestershire, E-mail: A.Bolsinov@lboro.ac.uk

Борисов Алексей Владимирович, Институт компьютерных исследований, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1, E-mail:borisov@rcd.ru

Мамаев Иван Сергеевич, Институт компьютерных исследований, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1, E-mail: mamaev@rcd.ru