УДК 533.6.011.3

© *Ю. М. Сметанин*

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ПОЛИСИЛЛОГИЗМОВ В ОРТОГОНАЛЬНОМ БАЗИСЕ ПОСРЕДСТВОМ ИСЧИСЛЕНИЯ КОНСТИТУЕНТНЫХ МНОЖЕСТВ

В статье обосновывается необходимость применения альтернативного Аристотелевскому ортогонального базиса силлогистики и выборе в качестве инструмента для решения задач взамен алгебре логики расширенной алгебры множеств. Сформулирован алгоритм построения всех возможных классов интерпретаций решения в терминах множеств конечной меры. Проведены компьютерные эксперименты по решению классических задач Буля, Шредера, Порецкого. При этом получены дополнительные результаты к имеющимся решениям.

Ключевые слова: силлогистика, полисиллогизм, алгебра, множества, ортогональный базис силлогистики, базис Аристотеля.

> ...если со времени Аристотеля логика не подверглась никаким изменениям, — и в самом деле при рассмотрении новых учебников логики мы убеждаемся, что изменения сводятся часто больше всего лишь к сокращениям, — то мы отсюда должны сделать скорее тот вывод, что она тем более нуждается в полной переработке...
>
> Г. В. Ф. Гегель «Наука логики»
>
> Любое логическое утверждение можно интерпретировать в виде соотношения между множествами.
>
> Б. А. Кулик «Что такое дедукция?»

Введение

Исследования по силлогистике и полисиллогистике в последнее время в связи с переосмыслением путей развития логики опять находятся в центре внимания. Хорошее представление о состоянии дел дают ссылки и публикации сайта `http://logic.ru`, работы Смирнова В. А. Маркина В. И., Кулика Б. А., Лобанова В. И., в которых поднимается много острых вопросов и предлагаются новые подходы к решению классических задач. В данной публикации предлагается новый подход к решению полисиллогизмов и эффективный алгоритм, ориентированный на применение ЭВМ. Он основан на исчислении конституентных множеств, получаемых из терминов силлогизма.

§ 1. Множества

Для обозначения конечных множеств общепринято фигурными скобками ограничивать совокупность элементов, например, запись $S = \{a, b, c\}$ означает, что множество S состоит из элементов a, b и c. Соотношение принадлежности элемента a множеству S *обозначается* $a \in S$. Противоположным по смыслу соотношению принадлежности является соотношение непринадлежности, обозначаемое символом «$\notin$». Запись $a \notin S$ означает, что элемент a не принадлежит множеству S. Вообще говоря, можно обойтись без соотношений принадлежности (непринадлежности) элемента множеству, для этого достаточно рассматривать элемент $\boldsymbol{a}$ как единичное множество $\{\boldsymbol{a}\}$. В этом случае можно говорить об отношении включения $\{a\} \subset S$ либо равенства. В расширенной алгебре множеств предполагается, что любая *система множеств* содержит в себе два так называемых несобственных множества: *пустое множество* (обозначается «$\varnothing$») и *универсальное множество* (или *универсум*). Универсум будем обозначать буквой $\boldsymbol{U}$. Пустое множество является подмножеством любого множества. Таким образом, основными соотношениями алгебры множеств являются соотношения $(\in, \notin, \subset, \not\subset, \subseteq, =, \neq)$. Они, за исключением первых двух, отражены на рис. 1 и 2. Как отмечается в работах Б. А. Кулика [3, 4], когда в математике речь идет о «чистой» алгебре, то есть об алгебре без соотношений, то это не совсем верно. Любая алгебра прямо или косвенно начинается с определения основы — основного множества S и с определения (или хотя бы разъяснения) таких свойств объектов, для которых справедливо соотношение принадлежности к S. Поэтому далее правильнее будет говорить не об алгебре, а об алгебраической системе. Основные соотношения алгебры множеств приведены во многих публикациях (см., например, [3–6]). Отметим также, что некоторые математики, например, Н. Бурбаки и К°, категорически не различают $\subset$ и $\subseteq$.

К «чистой» алгебре относят алгебру Кантора [5] $< U, \cup, \cap, ^{-} >$. При исследовании вопроса о том, какие множества будут порождены в этой алгебре из первоначально заданных n произвольных подмножеств $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (**будем называть их порождающими**) и универсума U, вводится важное понятие конституенты. Обозначим $X_i^{\sigma_i} = \begin{cases} X_i, & \text{если } \sigma_i = 1, \\ \overline{X}_i, & \text{если } \sigma_i = 0. \end{cases}$ Для $i = 1, 2, \ldots,$ n, где n— число различных подмножеств носителя U, $n = |U|$. Множество $\prod\limits_{i=1}^{n} X_i^{\sigma_i} = X_1^{\sigma_1} X_2^{\sigma_2} \ldots X_n^{\sigma_n}$ вида, где $\sigma_i = 0$ или $\sigma_i = 1$, назовем конституентой. Общее число конституент не превосходит 2^n, так как каждой конституенте можно сопоставить двоичный набор $\prod\limits_{i=1}^{n} x_i^{\sigma_i} = x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_n^{\sigma_n}$ длины n, где $x_i^{\sigma_1}$ есть характеристическая функция множества $X_i^{\sigma_1}$, $x_i^{\sigma_i} = \begin{cases} x_i, & \text{если } \sigma_i = 1, \\ \overline{x}_i, & \text{если } \sigma_i = 0. \end{cases}$ Характеристическая функция множества X ставит в соответствие любому элементу универсума e булеву переменную x, которая равна 1, если e принадлежит множеству X либо равна 0, если e не принадлежит X [2]. Этот набор будем называть булевой конституентой, или характеристической функцией конституенты. Число двоичных наборов равно 2^n. Каждому набору и соответствующей конституенте присвоим номер, равный десятичному значению двоичного числа, изображенного набором, читаемого слева направо. Например, контституенте $X_1^1 X_2^0 X_3^1$ соответствует двоичное число 101 и десятичное 5, получаемое из рассмотрения соответствующей ей характеристической функции (булевой конституенты). Упрощенно сама конституента может быть записана как $X_1 X'_2 X_3$. Сопоставленные таким образом каждой конституенте двоичные и десятичные номера назовем правильной нумерацией конституент системы множеств $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Для конституент и произвольных подмножеств универсума существуют важные соотношения [5]. Заметим, что номер, присваиваемый конституенте, зависит от упорядочения порождающих множеств $X_1, X_2, \ldots, X_n$, например, для трех множеств X_1, X_2, X_3 с естественным порядком 1,2,3 номер конституенты $X_1 X'_2 X_3$ будет равен 5, а для порядка 2,1,3 будет равен 3.

1. Пересечение двух различных конституент пусто.

2. Множество X_i равно сумме (объединению) конституент, каждая из которых в качестве i-го множителя содержит X_i.

3. Сумма (объединение) всех конституент равна универсуму.

4. Каждое непустое множество, образованное из множеств $X_1, X_2, \ldots, X_n$ с помощью операций алгебры Кантора, является суммой некоторого числа конституент.

5. Из n множеств в алгебре $< U, \cup, \cap, ^{-} >$ можно образовать не более чем 2^{2^n} непустых подмножеств.

6. Если универсум, образованный конституентами множеств $X_1, X_2, \ldots, X_n$, содержит 2^n элементов и все конституенты не пусты, то каждая из них в силу того, что они не пересекаются и число их равно 2^n, является одноэлементным множеством.

Отметим следующие важные свойства алгебры Кантора, на которые не обращают внимания, а именно — на связь множества пустых (непустых) конституент с бинарными отношениями между множествами $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Эта связь заключается в том, что множество пустых (непустых) конституент полностью определяется набором отношений между всевозможными парами порождающих множеств и их дополнений $X_1, X_2, \ldots, X_n, X'_1, X'_2, \ldots, X'_n$.

Свойство 1. Если все не совпадающие множества находятся в отношении $IO(X,Y)$ (см. рис. 2 — отношение G_{15}), то все конституенты будут не пустыми множествами. Иными словами, каждое отношение $IO(X,Y)$ влечет непустоту конституент, содержащих произведения $X'Y'$, $X'Y$, XY', XY.

Свойство 2. Если имеет место отношение $A(X_i, X_j)$ (см. отношение G_{13} на рис. 2), то пустыми будут все конституенты содержащие произведение $X_i X'{}_j$.

Свойство 3. Если имеет место отношение $Eq(X_i, X_j)$ (см. отношение G_9 на рис. 2) пустыми будут конституенты, содержащие произведения вида $X'_i Xj$ и X_i, X'_j.

Доказательство вытекает из диаграмм Лобанова [6] (см. рис. 2, 3 и работу [10], в которой систематизированы Жергонновы булевы отношения).

Таким образом, «чистая» алгебра Кантора на самом деле является алгебраической системой, множество отношений которой неявно задается выбором системы порождающих множеств $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Ранее несколько с другой точки зрения «нечистота» алгебры Кантора отмечена в работах Б. А. Кулика.

§ 2. Жергонновы отношения, классические, расширенные и дополненные

В силлогистике большим достижением явилось введение Жергонном соотношений между двумя множествами (см. рис. 1), которые назвали соотношениями Жергонна. Эти отношения — явная теоретико-множественная интерпретация силлогизмов, которую имел в виду сам Аристотель.

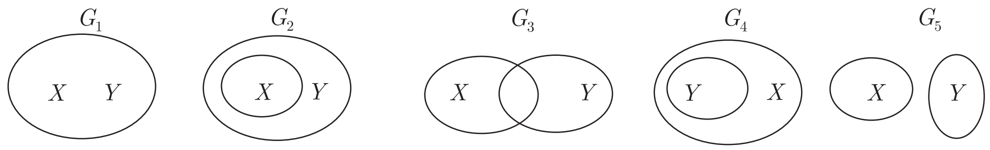

Рис. 1. Классические Жергонновы отношения

Это классические Жергонновы отношения для ситуации, когда рассматриваются два не совпадающих с универсумом и не пустых множества X и Y. Далее они перенумерованы для установления их соответствия с операциями (функциями, соотношениями) алгебры логики. G_1 обозначено как G_9, G_2 — как G_4, G_3 — как G_{15}, G_4 — как G_{11}, G_5 — как G_{14}. На рис. 2 они изображены на фоне универсума в виде диаграмм Лобанова В. И. при этом к ним добавлены еще два G_7 и G_6, расширяющих классические отношения (см. работу [6]). В рамках показаны номера непустых конституент. Оставшиеся девять соотношений между множествами можно регулярным способом выразить, начиная с $G_0(X = \varnothing; Y = \varnothing; U = \varnothing)$. К нему добавляется еще восемь: $G_8(X = \varnothing; Y = \varnothing)$; $G_4(X = \varnothing; Y = U)$; $G_2(X = U; Y = \varnothing)$; $G_1(X = U; Y = U)$; $G_{10}(X \neq \varnothing; X \neq U; Y = \varnothing)$; $G_5(X \neq \varnothing; X \neq U; Y = U)$; $G_{12}(X = \varnothing; Y \neq \varnothing; Y \neq U)$; $G_3(X = U; Y \neq \varnothing; Y \neq U)$. Соотношению G_0 нельзя сопоставить никакую диаграмму Лобанова. Эта комбинация отбрасывается как невозможная.

Напомним коротко результаты работы [6], в которой был введен ортогональный базис силлогистики в форме следующих суждений:

1. $A(X,Y)$ — все X есть Y, в смысле $X \subset Y$ (общеутвердительное суждение);
2. $Eq(X,Y)$ — множество X совпадает с множеством Y;

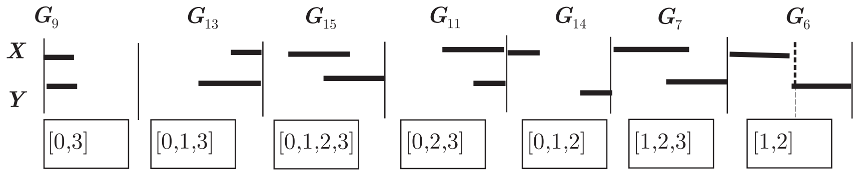

Рис. 2. Расширенные Жергонновы отношения

3. $E(X,Y)$ — ни один элемент множества X не является элементом множества Y (все X не есть Y). Это общеотрицательное суждение может быть выражено через общеутвердительные $A(X,\overline{Y})$ или $A(Y,\overline{X})$;

4. $IO_1(X,Y)$ — (некоторые X есть Y) и (некоторые X не есть Y), и (X, объединенное с Y, не есть универсум);

5. $IO_2(X,Y)$ — (некоторые X есть Y) и (некоторые X не есть Y), и (X, объединенное с Y, совпадает с универсумом). Это суждение можно выразить как $A(\overline{X},Y)$ или $A(\overline{Y},X)$.

Таким образом, в качестве базиса можно использовать только три функтора: $A(X,Y)$, $Eq(X,Y)$, $IO_1(X,Y)$. Далее $IO_1(X,Y)$ обозначается как $IO(X,Y)$.
Свяжем с показанными на рисунке 2 множествами следующие суждения:

1. $G_9(X,Y) = Eq(X,Y)$; $U = XY + X'Y'$ — множество X совпадает (равно) с множеством Y.

2. $G_{13}(X,Y) = A(X,Y)$ — множество X есть собственное подмножество Y или событие X влечет наступление события Y либо $U = XY + X'Y + X'Y'$. Другими словами, все X есть Y тогда и только тогда, когда произвольный элемент универсума e удовлетворяет только одному из соотношений $e \notin X$ и $e \notin Y$ либо $e \notin X$ и $e \in Y$, либо $e \in X$ и $e \in Y$.

3. $G_{15}(X,Y) = IO(X,Y)$ либо $U = XY + XY' + X'Y + X'Y'$ — существует разбиение универсума на 4 непустых подмножества XY, XY', $X'Y$, $X'Y'$. По-другому можно сказать, что (некоторые X есть Y) и (некоторые X не есть Y), и (некоторые Y не есть X), и (некоторые не X не есть Y).

4. $G_{11} = A(X',Y')$ либо $U = XY + XY' + X'Y'$;

5. $G_{14} = A(X,Y')$ все X не есть Y либо $U = XY' + X'Y + X'Y'$;

6. $G_7 = A(X',Y)$ либо $U = XY' + XY + X'Y$.

7. $G_6 = Eq(X,Y')$ либо $U = XY' + X'Y$.

Остальные возможные соотношения для пустых и совпадающих с универсумом множеств X и Y показаны на рис. 3.

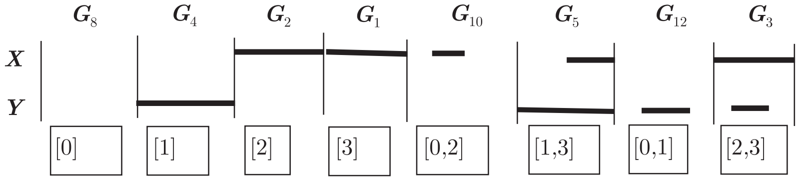

Рис. 3. Дополнение расширенных Жергонновых отношений

Дополнение расширенных Жергонновых соотношений (G_8, G_4, G_2, G_1, G_{10}, G_5, G_{12}, G_3) будем называть вырожденными соотношениями, так как они подразумевают, что хотя бы одно из множеств X или Y совпадает с пустым множеством либо с универсумом. Сопоставим каждому из остальных соотношений, подобно тому, как это делается при установлении изоморфизма алгебры логики и алгебры множеств, булеву функцию $g_i(x,y)$ от двух переменных x и y и формулу (формулы) алгебры логики. Переменные x и y связаны с множествами X и Y следующим образом: они являются характеристическими функциями этих множеств или индикаторами [2]. Далее характеристические функции x и y будем называть характеристическими переменными множеств X и Y.

Определение 1. Булевы переменные x, y являются характеристическими переменными множеств X и Y, если они определены следующим образом:

$$x = \begin{cases} 1, \text{ если } e \in X, \\ 0, \text{ если } e \notin X, \end{cases} \quad y = \begin{cases} 1, \text{ если } e \in Y, \\ 0, \text{ если } e \notin Y, \end{cases} \quad \text{где } e \text{ — произвольный элемент универсума.}$$

Зафиксируем какой-нибудь порядок множеств носителей алгебраической системы Кантора, например, $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Такую алгебраическую систему будем называть заданной.

Определение 2. Базисом заданной алгебраической системы (системы с фиксированным порядком порождающих множеств) будем называть множеством непустых конституент данной системы.

Определение 3. Базовым множеством номеров (БМН или BSN) заданной алгебраической системы назовем множество номеров непустых конституент, представленное в десятичном либо в двоичном виде.

БМН Жергонновых отношений показаны в рамках на рис. 2 и 3. Предполагается, что порождающие множества X и Y упорядочены по алфавиту. Способ присвоения номеров указан в предыдущем разделе. Имеется взаимнооднозначное соответствие между базисом алгебраической системы и ее БМН. Приведем пример построения базового множества номеров. Пусть задана система трех непустых множеств X_1, X_2, X_3. Причем $U = \{a, b, d, e, r, q, t\}$, $X_1 = \{a, b, e\}$, $X_2 = \{a, b, e, q, d\}$, $X_3 = \{a, b, q, r\}$. Данная система несет следующие соотношения $IO(X_1, X_3)$, $IO(X_2, X_3)$, $A(X_1, X_2)$. Нумерация конституент системы трех множеств, упорядоченных по порядку номеров, есть $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Рассмотрим линейную диаграмму 1 для этой системы соотношений, изображенную ниже.

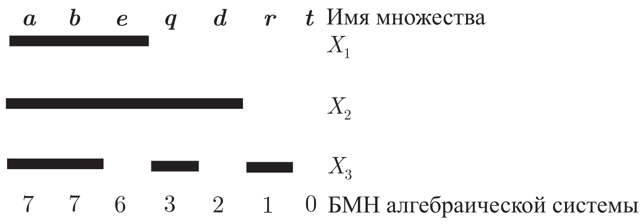

Диаграмма 1. Изображение системы множеств X_1, X_2, X_3

Из диаграммы 1 видно, что $BSN = \{0, 1, 2, 6, 7\}$.

Рассмотрим две алгебраические системы S_s и S_b. $S_s = \{Ob_s, Op_s, Rel\}$. Здесь O_b есть система множеств, состоящая из конечного числа множеств $X_1, X_2, \ldots, X_n$, имеющих конечную меру и вложенных в универсум U. $Op =$ это операции $< \cup, \cap, ^- >$, Rel — это отношения $\{\subset, \not\subset, =, \neq\}$. Этой системе можно поставить в гомоморфное соответствие булеву алгебраическую систему $S_b = \{Ob_b, Op_b, Rel_b\}$. Здесь $Ob_b = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ — множество характеристических функций системы множеств $X_1, X_2, \ldots, X_n$, которые принимают значения булевых констант из множества [0,1], сопоставляемого универсуму U. Имеется взаимно однозначное соответствие между конституентой системы S и полным дизъюнктом системы S_b. Пусть $Op_b = \{\vee, \wedge, \neg\}$ — логические операции, которым в русском языке соответствуют логические связки «или», «и», «не», $Rel_b = \{=, \leqslant\}$. При этом $x_i \leqslant x_j$ тогда и только тогда, когда

$x_i = x_j$ либо $x_i = 0$ и $x_j = 1$. Отношения принадлежности элемента множеству не отражаются из алгебраической системы S_s в систему S_b. Также при установлении соответствий между x_i и X_i теряются различия между элементами множества. Кроме этого, теряются различия между отношением строгой и нестрогой принадлежности множеств. Отношению множеств $X \subset Y$ соответствует единственная булева операция — импликация, в то время, как обратное соответствие неоднозначно, импликации $x \to y$, где x, y характеристические функции (индикаторы) множеств X и Y соответствует одно из двух соотношений $X \subset Y$, либо $X = Y$.

Установленный факт отсутствия изоморфизма между S_s и S_b показывает, что повсеместно используемая булева модель рассуждений в естественном языке неадекватна модели рассуждений на основе Аристотелевского базиса и, тем более, модели рассуждений на основе ортогонального базиса. **Поэтому дальнейшие поиски алгоритмов решения полисиллогизмов будем проводить в алгебраической системе S_s.** Этот вывод можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема 1. *Множество непустых конституент алгебраической системы S_s и (в случае ее заданности) БМН(S_s) полностью определяется отношениями типа Eq, A, IO между каждой парой порождающих множеств и их дополнений $X_1, X_2, \ldots, X_n, X_1', X_2', \ldots, X_n'$.*

Теорема 2. *Количество отношений Eq, A, IO, определяющих ее базис и БМН равно $n \times \times (n-1)/2$. Эти соотношения естественно назвать инвариантом данной системы посылок потому, что он не зависит от заданного порядка порождающих множеств.*

Доказательство. Количество отношений между X_1 и $X_2, \ldots, X_n, X_1', X_2', \ldots, X_n'$ равно $n-1$, так как, задав $Rel(X1, Xi)$, мы автоматически определяем/задаем $Rel(X'_1, X_i)$, $Rel(X_1, X'_i)$ и $Rel(X'_1, X'_i)$. Соответственно, число отношений между X_2 другими множествами, за исключением X_1, равно $n-2$ и так далее, суммируя арифметическую прогрессию, получаем $n*(n-1)/2$.

Отметим, что Кулик Б. А. [3] вводит понятие инварианта как замыкание отношения $\subseteq$, что неприемлемо, с нашей точки зрения, из-за неразличения строгого и нестрогого включения. Введем сокращенные обозначения для операций $< \cup, \cap, ^- >$ в виде $< +, \cdot, ' >$, тогда конституенте $X_1 \cap \overline{X}_2 \cap X_3$ будет соответствовать сокращенная запись $X_1 X_2' X_3$, при этом точку иногда будем опускать. Сформулируем выводы, следующие из сопоставления расширенных и дополненных Жергонновых соотношений (см. рис. 2, 3).

Вывод 1. На фоне непустого универсума U расширенные и дополненные Жергонновы отношения сопоставляются с пятнадцатью логическими функциями индикаторов множеств X и Y, которые правильнее было бы назвать бинарными отношениями. При этом 4 основных соотношения $(\subset, \not\subset, =, \neq)$ между множествами многозначно сопоставлены функциям (бинарным отношениям) алгебры логики. Диаграммам отношений можно однозначно сопоставить булевы функции от индикаторов множеств X и Y (переменных x и y), совпадающие с 15 операциями алгебры логики без тождественно ложной операции [9, 10]. При рассмотрении рис. 2 и 3 выявлены следующие равносильности:

1. $Eq(X, Y) \equiv X = Y \equiv G_1 \oplus G_8 \oplus G_9 \equiv [3] \oplus [0] \oplus [0, 3] \equiv (X'Y = \varnothing)(XY' = \varnothing)$;
2. $Eq(X', Y) \equiv (X' = Y) \equiv (X = Y') \equiv G_2 \oplus G_4 \oplus G_6 \equiv [2] \oplus [1] \oplus [1, 2] \equiv (X'Y' = \varnothing)(XY = \varnothing)$;
3. $A(X, Y) \equiv X \subset Y \equiv G_4 \oplus G_5 \oplus G_{12} \oplus G_{13} \equiv [1] \oplus [1, 3] \oplus [0, 1] \oplus [0, 1, 3] \equiv (XY' = \varnothing)(X'Y \neq \neq \varnothing)$;
4. $A(X', Y) \equiv X' \subset Y \equiv G_1 \oplus G_3 \oplus G_5 \oplus G_7 \equiv [3] \oplus [2, 3] \oplus [1, 3] \oplus [1, 2, 3] \equiv (X'Y' = \varnothing)(XY \neq \varnothing)$;
5. $A(X, Y') \equiv X \subset Y' \equiv G_8 \oplus G_{10} \oplus G_{12} \oplus G_{14} \equiv [0] \oplus [0, 2] \oplus [0, 1] \oplus [0, 1, 2] \equiv (XY = \varnothing)(X'Y' \neq \varnothing)$;
6. $A(X', Y') \equiv X' \subset Y' \equiv G_2 \oplus G_3 \oplus G_{10} \oplus G_{11} \equiv [2] \oplus [2, 3] \oplus [0, 2] \oplus [0, 2, 3] \equiv (X'Y = = \varnothing)(XY' \neq \varnothing)$;
7. $IO(X, Y) \equiv G_{15} \equiv [0, 1, 2, 3] \equiv (X'Y' \neq \varnothing)(X'Y \neq \varnothing)(XY' \neq \varnothing)(XY \neq \varnothing)$.

Знак $\oplus$ обозначает сложение по модулю 2. Расширенные Жергонновы отношения G_9, G_{13}, G_{15}, G_{11}, G_{14}, G_7, G_6 выполняются в предположении, что $(X \neq \varnothing)\cdot(Y \neq \varnothing)\cdot(X, Y \subset U)$. Эти отношения входят в равносильности 1–7 по одному разу. Вырожденные отношения G_8, G_4, G_2, G_1, G_{10}, G_5, G_{12}, G_3, входят в соотношения 1–6 по два раза. То есть всем вырожденным соотношениям можно поставить по два отношения между множествами X и Y.

Вывод 2. При формальном переходе к формулам алгебры логики, построенным на совокупности значений характеристических переменных, теряется различение между Аристотелевым общеутвердительным суждением AXY (все X есть $Y \equiv X \subseteq Y$) и суждением $A(X,Y)$ (где X есть собственное подмножество Y) ортогонального базиса. И тот, и другой функтор формально должны отображаться в формулу $x' + y$. Это является еще одним убедительным аргументом в пользу перехода к ортогональному базису. Различение восстановлено в таблице истинности, но уже с использованием троичной логики (см. также [8]). Таблица истинности для соотношения нестрогого включения или соотношения в трехзначной логике приведена ниже $X \subseteq Y = (X \subset Y) \oplus (X = Y)$. Третья логическая константа $\boldsymbol{i}$ в ней имеет значение «может быть».

Таблица 1 истинности для соотношения нестрогого включения

X	y	$x \Longrightarrow y$
0	0	1
0	1	$\boldsymbol{i}$
1	0	0
1	1	1

Вывод 3. Различение между общеутвердительным суждением Аристотеля и общеутвердительным суждением ортогонального базиса (см. также [3, стр. 30]) в терминах множеств заключается в том, что $A(X,Y) \equiv X \subset Y \equiv X' + Y = U \quad AXY \equiv (X \subset Y) \oplus (X = Y) \equiv$ $\equiv (X' + Y = U) \oplus (X'Y + XY' = \varnothing)$ (доказательство приведено ниже, в § 3).

§ 3. Определение соотношений между множествами посредством сравнения их конституент с пустым множеством

Теорема 3.

$$X \subset Y \equiv (XY' = \varnothing) \cdot (X'Y \neq \varnothing) \equiv (X' + Y = U) \cdot (X'Y \neq \varnothing).$$

Доказательство. Соотношение $X \subset Y$ выполняется в Жергонновых отношениях $G_4(X,Y)$, $G_5(X,Y)$, $G_{12}(X,Y)$, $G_{13}(X,Y)$, с БМН [1], [1,3], [0,1], [0,1,3] — необходимым и достаточным признаком соотношения строгого включения является пустота конституенты с номером 2, то есть $(XY' = \varnothing)$, и непустота конституенты с номером 1. Этим требованиям удовлетворяют только 4 отношения из вышепречисленных 15-ти . Это отмечено в выводе 1 и проиллюстрировано в таблице 1 из работы [10].

Теорема 4.

$$X = Y \equiv (X'Y = \varnothing)(XY' = \varnothing).$$

Доказательство следует из рассмотрения случаев выполнения данного соотношения. Итак, имеем

$$X = Y \equiv G_1(X,Y) \oplus G_8(X,Y) \oplus G_9(X,Y) \equiv$$
$$\equiv (X'Y = \varnothing)(XY' = \varnothing)\{(XY \neq \varnothing)(X'Y' = \varnothing)\oplus$$
$$\oplus (XY = \varnothing)(X'Y' \neq \varnothing) \oplus (XY \neq \varnothing)(X'Y' \neq \varnothing)\}.$$

В дизъюнкции, заключенной в фигурные скобки, не хватает до логической единицы слагаемого $(XY = \varnothing)(X'Y' = \varnothing)$, но такое соотношение при непустом универсуме для равенства не может быть истинным. Следовательно, выражение в фигурных скобках равно логической единице. Теорема доказана. Второе доказательство следует из рассмотрения БМН [3], [0], [0,3], необходимым и достаточным признаком выполнения соотношения равенства является пустота конституент с номерами 1 и 2, то есть $(X'Y = \varnothing) \cdot (XY' = \varnothing)$, что и требовалось доказать.

Теорема 5.

$$X \subseteq Y \equiv (X \subset Y) \oplus (X = Y) \Leftrightarrow (XY' = \varnothing) \oplus \{(X'Y = \varnothing) \cdot (XY' = \varnothing)\}.$$

Доказательство следует из теорем 3 и 4. Смотри также свойства 1–3 в § 1.

Теорема 6.

$$IO(X,Y) \equiv (X'Y' \neq \varnothing)(X'Y \neq \varnothing)(XY' \neq \varnothing)(XY \neq \varnothing).$$

Доказательство следует из линейной диаграммы (см. рис. 2).

Эти результаты являются основой для алгоритма решения полисиллогизмов, который ориентирован на применение компьютера.

§ 4. Алгоритм решения полисиллогизмов

Определение терминов. В конкретном рассуждении каждое множество обозначается каким-то именем (символом или набором символов). Эти имена мы будем называть **терминами** рассуждения. Условимся, что терминами являются обозначения пустого множества и универсума, а также обозначения дополнений множеств. Если из множества всех терминов исключить термины $\varnothing$ и U, то оставшиеся термины мы назовем **базовыми терминами** суждения. В отношении $\mathrm{Rel(X,Y)}$ будем называть множество X левой частью, а Y — правой.

Определение суждения. Суждением называется выраженное с помощью базовых терминов отношение включения, равенства или IO, в левой части и правой части которого содержится множество, выраженное как пересечение, объединение, дополнения множеств, представленных некоторыми базовыми терминами. Множество в левой части называется **субъектом суждения**, множество базовых терминов, представленных в правой части, и само отношение $A(\_,Y)$, $Eq(\_,Y)$, $IO(,Y)$, — **предикатами суждения**.

Рассуждением или полисиллогизмом назовем список суждений, разделенный на два класса. Первый класс называется посылками, второй — заключениями. Будем говорить, что рассуждение (полисиллогизм) является правильным, если из множества посылок логически следует каждый элемент заключения.

Очевидно, список посылок задает отношения между порождающими множествами в алгебраической системе Кантора. Эти отношения могут противоречить или не противоречить отношениям, задаваемым на порождающих множествах множеством заключений.

Поставим задачу 1 и 2.

Задача 1. Доказать логическое следование всех заключений силлогизма из данных посылок.

Задача 2. Рассматривая посылки силлогизма как отношения на порождающей алгебраическую систему системе терминов, найти максимальное множество следствий, каждое из которых логически следует из множества посылок. Это множество естественно назвать **решением полисиллогизма**.

П. С. Порецкий, Ч. Л. Доджсон (Л. Керрол), А. Д. Закревский, Б. А. Кулик и В. И Лобанов. разработали оригинальные методы решения полисиллогизмов. Наша новая методика, основанная на ортогональном базисе, на начальном этапе совпадает с их методиками, так как, прежде всего, нужно определиться с терминами, из которых состоит система посылок, ввести для них обозначения и выбрать универсум. При этом, как показано в работе [6], использование ортогонального базиса исключает подмену терминов и неоднозначное толкование посылок. В качестве примера рассмотрим 1-ю задачу Порецкого [8, стр. 279].

Между птицами зоосада существует 5 соотношений, выраженных в форме суждений:

1. Птицы певчие — крупные или обладающие качеством Y.
2. Птицы, не имеющие качества Y, — или не крупные, или не имеют качества X.
3. Птицы певчие в соединении с крупными объединяют всех птиц с качеством X.
4. Каждая некрупная птица есть певчая или обладающая качеством X.
5. Между птицами с качеством X совсем нет таких птиц с качеством Y, которые, не будучи певчими, были бы крупные.

Определить, **были ли птицы качества X певчими или нет —** $A(X,S)$. Узнать, содержится ли множество птиц качества X в множестве птиц качества Y — $A(X,Y)$. Найти, были ли среди птиц качества X птицы качества Y и наоборот — $IO(X,Y)$. Пусть X — множество птиц качества X, Y — множество птиц качества Y, S — множество певчих птиц, G — множество крупных птиц. Здесь заданы 4 термина G, S, X, Y и дополнительно указаны соотношения между элементами данных множеств, которые указывают на наличие дополнительных свойств каждого термина, наличествующих у других терминов. Универсум U — это все птицы зоосада, при этом неявно подразумевается, что U есть сумма конституент множеств-терминов G, S, X, Y. В ортогональном базисе силлогистики суждения задачи Порецкого будут (при замене AXY на $A(X,Y)$) выглядеть так:

$$P1.A(S,Y\cup G)\quad P2.A(\overline{Y},\overline{X}\cup\overline{G})$$
$$P3.A(X,S\cup G)\quad P4.A(\overline{G},S\cup X)$$
$$P5.E(X,Y\cap\overline{S}\cap G)=A(X,\overline{Y\cap\overline{S}\cap G})$$

На этом общая часть всех известных автору методик заканчивается.

Решать будем задачу 2. На персональной странице автора в Интернете приведены 32 компьютерных решения, отражающие все возможные смыслы формулировки задачи на русском языке, включая посылки в форме $P1-P5$. Они приведены в виде конфигураций терминов из которых можно генерировать различные заключения.

Рассмотрим конечную систему непустых множеств, конечной меры

$$\aleph_1\aleph_2\ldots\aleph_n. \tag{1}$$

Будем считать , что они отражают материальную сущность задачи, включая отношения (в данном случае можно считать, что это множества классов птиц в зоосаде числом 4). Зададим на всех парах множеств системы (1) множество $\boldsymbol{R}$ бинарных отношений в форме функторов ортогонального базиса силлогистики $\boldsymbol{IO(\aleph_i,\aleph_j)}$.

Выберем перестановку (порядок) порождающих множеств $\pi=i_1,i_2,\ldots,i_n$. Построим модель теперь уже заданной системы, сопоставив множествам $\aleph_1\aleph_2\ldots\aleph_n$ заданную систему числовых множеств

$$M_1M_2\ldots M_n. \tag{2}$$

конечной меры с тем же порядком порождающих элементов $\pi=i_1,i_2,\ldots,i_n$. Пусть U — универсум системы (2) и каждое из множеств $\boldsymbol{M}_i$ имеет меру 2^{n-1}. Те же самые отношения зададим на соответствующих множествах системы (2). На системах (1) и (2) определены стандартные операции объединения, пересечения, дополнения до универсума $\{\cup,\cap,^-\}$, которые для простоты далее будем обозначать символами $\{+,\cdot,'\}$. Тогда выражению $M_1\cap\overline{M}_2\cap M_3$

будет соответствовать сокращенная запись $M_1M'_2M_3$. Там, где это не будет вызывать разночтений, знак пересечения будем опускать. Универсум системы (1) Ω равен сумме всех конституент порождающих множеств (1). Точно также определяется универсум системы (2). Между множествами из (1) и (2) устанавливается взаимно однозначное соответствие. Например, если множества из (1) конечные, то им ставятся в соответствие отрезки, разбивающие множества составляющие (2), на соответствующее число частей. Число всевозможных заданных систем типа (1) и соответствующих им систем типа (2) равно $\boldsymbol{n}!$

Утверждение 1. *Алгебраическая система* (1) *изоморфна системе* (2). *Для различных способов задания систем* (1) *и* (2) *можно построить* $\boldsymbol{n}!$ *изоморфизмов.*

Утверждение 2. *Любая конституента системы* 1 *и* 2 *является непустым множеством.*

Принцип наглядного изображения системы (2) проиллюстрирован на примере 5 множеств M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, каждая из $2^5 = 32$ конституент изображена в виде столбца из 0 и 1, причем их набор в столбце соответствует данной конституенте и ее номеру. Эту же систему из 5 множеств X с заданным для любой пары соотношением $IO(X_i, X_j)$ можно изобразить в виде диаграммы Лобанова, при этом каждое множество X_i изобразим как объединение отрезков единичной длины (меры) ([0,1), [1,2), [2,3)... $[\,2^5-1, 2^5\,]$ (см. рис. 4). Внизу приписана нумерация конституент соответствующего «единичного» множества — конституенты. Система этих конституентных множеств является «базисом», из которого получаются все остальные подмножества, порождаемые системой множеств (2). Используя нумерацию конституент, можно любое множество, составленное из объединения конституент, изображать как базовое множество их номеров БМН. В частности, конституенты системы из 5 множеств с заданными отношениями $IO(M_iM_j)$ можно изобразить как БМН$=\{0, 1, 2 \dots 31\}$.

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	M_1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	M_2
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	M_3
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	M_4
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	M_5
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	БМН

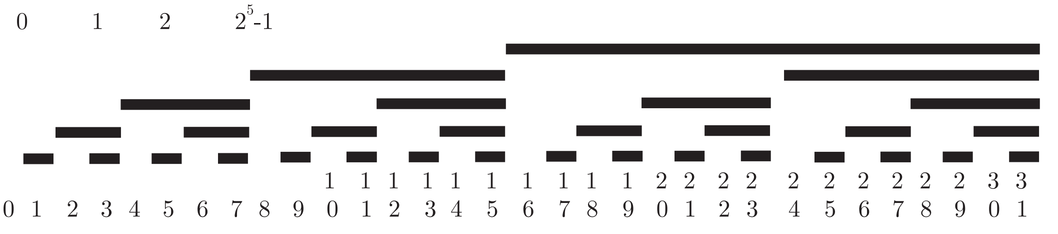

Рис. 4. Система множеств (2) с заданными отношениями $IO(X_iX_j)$

Можно говорить не только о БМН системы множеств — БМН(U), но и о БМН каждого из них. Например, БМН(M3)=[4..7,12..15,20..23,28..31].

Определение 4. Рассмотрим крайний случай изоморфизма когда каждое множество M_i имеет конечное число элементов, равное в этом случае каждая его конституента есть одноэлементное множество. Переименуем элементы универсума номерами конституент, которые содержат эти элементы. Получится заданная система, которую будем называть **канонической. Каноническая система обладает уникальным свойством БМН каждой конституенты определяет ее состав, а БМН канонической системы совпадает с ее универсумом. Это очень удобно в вычислительном отношении.**

Теорема 7. *Для канонической системы, наряду с отношением* $IO(X_i, Y_j)$, *выполняются соотношения* $IO(X'_i, Y_j)$, $IO(X_i, Y'_j)$, $IO(X'_i, Y'_j)$. *Наряду с соотношением* $A(X, Y)$, *выполняются соотношения* $A(Y', X)$, $A(Y', X')$, $A\big(X, (Y')'\big)$. *Наряду с соотношением* $Eq(X, Y)$ — $Eq(X', Y')$, $Eq\big(X, (Y')'\big)$, $Eq((X)', Y)$. *Доказательство вытекает из регулярного способа построения множеств системы (см. рис.* 1, 2, 4) .

Алгоритм решения полисиллогизмов будем формулировать для канонической алгебраической системы множеств $\mathrm{X_1 X_2 \ldots X_n}$. Идея алгоритма заключается в модификации исходной канонической системы с терминами $\mathrm{X_1 X_2 \ldots X_n}$ и приведения ее к системе множеств, в которой выполняются соотношения между посылками силлогизма. Если при этом получается система пустых множеств $X_1 = X_2 = \ldots = X_n = \varnothing$ $(U = 0)$, то это означает, что система посылок противоречива и не соответствует никакой алгебраической системе из n множеств. Этот процесс можно назвать последовательной проверкой выполнимости каждой посылки. При этом справедливы утверждения 3–6.

Утверждение 3. *Введение посылки с предикатом* $IO(\_, Y)$ *не сужает БМН системы и, следовательно, не меняет отношений между любыми парами множеств.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применять посылку $IO(X, Y)$, где X и Y — подмножества, получаемые из терминов, можно только в том случае, когда между этими множествами уже существует это отношение. Если между ними существует одно из отношений $A(X, Y)$, $A(X', Y)$, $A(X, Y')$, $A(X', Y')$, $Eq(X, Y)$, $Eq(X, Y)$, $Eq(X, Y)$, $Eq(X, Y)$, то заменить их на $IO(X, Y) \equiv IO(X', Y) \equiv IO(X, Y') \equiv IO(X', Y')$ невозможно, так как при этом необходимо расширять исходный универсум. Например, БМН $(A(X, Y))$ заменить на БМН $(IO(X, Y))$. Поэтому мы рассматриваем полисиллогизмы с посылками типа включения либо равенства.

Утверждение 4. *Применение посылки с предикатом* $A(\_, Y)$ *сужает БМН исходной системы.*

Например, если проверяем выполнимость $A(X, Y)$, то из исходного БМН вычитается, согласно теореме 3, БМН множества $(X'Y)$.

Утверждение 5. *Применение посылки с предикатом* $Eq(\_, Y)$ *сужает БМН исходной системы.*

Например, если проверяем выполнимость $Eq(X, Y)$, то из исходного БМН вычитаем, согласно теореме 4, БМН множества $(X'Y + XY')$.

Утверждение 6. *Порядок проверки выполнимости посылок и операций сужения БМН порождающей системы множеств не меняет конечного БМН в силу коммутативности операции пересечения и объединения множеств.*

Рассмотрим пример сужения БМН канонической системы из трех множеств с исходными отношениями IO. Она изображена на диаграмме 2.

$$U = \{a, b, c, d, e, f, r, q, t\} \quad A = \{a, b, e, c, f\} \quad X_2 = \{a, b, e, q, d\} \quad X_2 = \{a, b, c, q, r\}$$

Заменяя $IO(X_1, X_2)$ на $A(X_1, X_2)$ мы получим другую систему с суженным БМН. Из исходной нужно убрать БМН (X_1, X'_2) =[7,6,5,4] [5,4,1,0]=[5,4], в результате чего получается диаграмма 1 с универсумом суженным по сравнению с универсумом диаграммы 2 за счет удаления множества элементов c, f, которое определяются как БМН $(X_1 X'_2)$ =[5,4].

Приведем **алгоритм решения полисиллогизмов**, определенных выше. Пусть заданы термины (множества), зафиксирован их порядок, например, $X_1 X_2 \ldots X_n$, и список суждений о них, определенных нами выше как посылки $P_1(V_1, Z_1), P_2(V_2, Z_2), \ldots, P_k(V_k, Z_K)$. Каждая

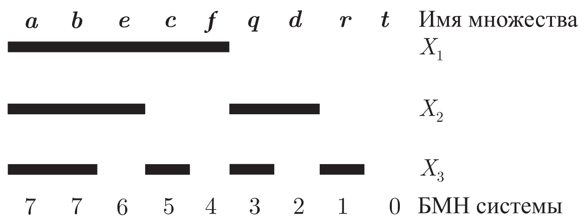

Диаграмма 2. Исходная для получения диаграммы 1 с суженным БМН

посылка может быть одного из двух видов: $A(V,Z)$ либо $Eq(V,Z)$, где V и Z — любые подмножества универсума. Порядок следования порождающих множеств определяет их БМН в канонической системе, определенной выше. Предлагаемый алгоритм для каждого из $n!$ упорядочений порождающей системы множеств строит интерпретацию следствий из посылок в форме суженного посылками универсума БМН. Пусть U — универсум канонической системы. Ur — суженный универсум, полученный в результате введения в каноническую систему посылок полисиллогизма.

Алгоритм построения универсума, удовлетворяющего всем посылкам:

Fin:=false;
Repeat
{*Шаг 1.*} **Выбрать очередную перестановку терминов (порождающих множеств)**
{*Шаг 2.*}
{*Для заданного порядка выполнить цикл по посылкам*}
for i := 1 to k do
If P[i] отношение включения (A) Then
Begin M^+[i] := V′[i]+ Z[i]; M^-[i]:= V[i] Z′[i];
if M^+[i] = ∅ Then Halt
End Else
Begin M^-[i] := V[i] Z′[i]+ V′[i] Z[i] End;
{*Шаг 3.*}
{*Произвести сужение универсума посылками*}
Ur:=U;
For i := 1 to k do Begin Ur: = Ur \ M^-[i]; If Ur = ∅ Then Halt End;
{*Шаг 4.*}
{*Произвести сужение БМН порождающих множеств посылками*}
For i := 1 to n do X[i] := Ur · X[i];
{*Шаг 5.*}
{*Перечислить следствия как все возможные СДНФ конституент либо результатов их минимизации*}
Перечисление следствий из посылок P[i](V[i],Z[i]), i = 1, k.
If все перестановки использованы Then fin:=True;
Until fin;

Остановка по оператору halt означает, что система посылок логически противоречива, это событие может рассматриваться как ситуация для применения уже не дедукции, а абдукции [3] (об этом в следующей публикации). На базе алгоритма была разработана программа для ЭВМ со следующими характеристиками: максимальное число терминов — 8, число посылок до — 32. Проанализируем результаты расчетов по программе, которые выложены по адресу `http://vvmi.udsu.ru/~gms1`, на примере задачи о птицах в зоосаде и других известных задач [8,11]. Приведем постановку задачи для ЭВМ. **ZAD NAME**: ПТИЦЫ В ЗООПАРКЕ **NUMBERVAL**:4 $GSXY$ **NUMBERPOS**:5 $A(S,Y+G)$ $A(Y\hat{}, X\hat{} + G\hat{})$ $A(X,S+G)$ $A(G\hat{}, S+X)$ $A(X,(Y*S\hat{}*G)\hat{})$ END
Ниже приведена одна из 24 интерпретаций универсума Ur, который удовлетворяет всем посылкам (остальные в Интернете).

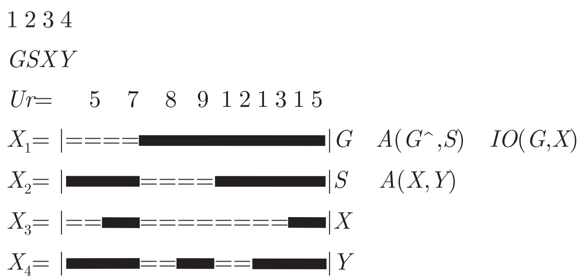

Диаграмма 3. Интерпретация решения задачи о птицах

Справа от диаграммы приведен инвариант. Теперь можно определить, были ли птиц качества X певчие или нет (ответ — да). То же можно узнать о птицах качества Y (ответ — нет). Определить, были ли среди птиц качества X птицы качества Y и наоборот (ответ — да). Что касается так называемых логических уравнений и систем, то для данного подхода это прошлый и позапрошлый век. Например, результаты, полученные Порецким [8, стр. 281],— $x = xs$; $y = gy + g's$; $y = y + x$ — тривиальным образом следуют из диаграммы, как и множество других, например, $y = (s + gs'x'y) \setminus gsx'y'$. Попробуем ответить на вопрос, какой должен быть инвариант системы порождающих множеств, чтобы $Y \subset S$. Для этого мы должны либо добавить шестую посылку $A(Y, S)$ в постановку задачи, что приведет к пустоте конституенты $GS'X'Y$, либо минимально «перестроить» Ur, убрав из него ту же конституенту. В результате мы получим новый инвариант. Ниже приводится первый класс из 24 интерпретаций и его инвариант, отличие — отсутствие $GS'X'Y$ и замена $IO(X, Y)$ на $A(S\hat{}, Y\hat{})$:

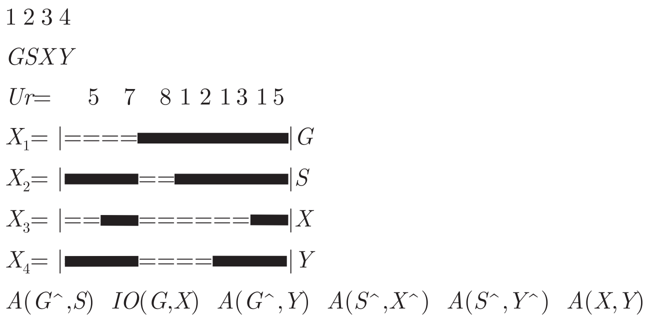

Диаграмма 4. Интерпретация модифицированной задачи

Что из этого следует? Во-первых, все множества единственным образом представляются в базисе из конституент; во-вторых, для проверки справедливости любого предполагаемого следствия достаточно его выразить в виде формулы алгебры множеств или в виде соотношения между некоторыми множествами, которые могут быть выражены в универсуме, и далее проверить его непосредственно на универсуме Ur; в-третьих, если мы хотим, чтобы что-то непременно следовало (имело место), а оно не следует из данных посылок (не присуще данному инварианту), то для получения требуемого следования можно убрать/прибавить минимально необходимое количество конституент, чтобы это что-то стало следствием. Этот, по существу, алгоритм абдукции будет изложен в следующей публикации.

Получены следующие результаты.

Построен и реализован эффективный алгоритм решения полисиллогизмов наиболее общего вида из всех известных автору.

Сформулирован новый подход для формализации рассуждений на основе ортогонального базиса силлогистики и исчисления конституентных множеств.

Найден в конструктивной форме инвариант системы посылок силлогизма.

Проведенные компьютерные эксперименты по решению классических задач показали состоятельность предлагаемой методики решения полисиллогизмов, в частности, получены дополнительные следствия в каждой задаче.

Главный вывод из этой и предшествующих работ в том, что идея введения автором **ортогонально базиса** оказалась чрезвычайно плодотворной и эффективной как для модернизации преподавания логики не математикам, так и для так называемого «искусственного интеллекта». Автор благодарен К. И. Валькову (ныне покойному) за его давние публикации и профессору Н. Н. Непейводе за содержательное обсуждение результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вальков К. И. Проекционное моделирование и автоматизация. Учебное пособие для факультета повышения квалификации. — Л.: ЛИСИ, 1985. – 86 с.
2. Нефедов В. Н., Осипова В. А. Курс дискретной математики: Учеб. Пособие. — М.: Изд-во МАИ, 1992. — 264 с.
3. Кулик Б. А. Логический анализ систем на основе алгебраического подхода: дисс. на соискание ученой степени доктора физ.-матем. наук. — Санкт-Петербург, 2008.
4. Кулик Б. А. Логические основы здравого смысла. / Под ред. Д. А. Поспелова. — СПб.: Политехника, 1997. — 131 с.: ил.
5. Горбатов В. А. Теория частично-упорядоченных систем. — М.: «Советское радио», 1976. — 336 с.
6. Сметанин Ю. М. Ортогональный базис силлогистики // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2009 г. — Вып. 4. — С. 155–166.
7. Закревский А. Д. К формализации полисиллогистики // Логический вывод. — М.: Наука, 1979. — 416 с.
8. Лобанов В. И. Русская вероятностная логика. — М.: «Русская правда», 2009. — 320 с.
9. Сметанин Ю. М. Ортогональный базис силлогистики, или какая логика нужна экономистам // Менеджмент: теория и практика. — 2009. — № 3–4. — С. 25–42.
10. Сметанин Ю. М. Сопоставление расширенной алгебры множеств и алгебры логики с точки зрения проблем полисиллогистики // Менеджмент: теория и практика. — 2010. — № 3–4. — С. 12–27.
11. Кузичев А. С. Диаграммы Венна. — М.: Наука, 1968. — 253 с.

Поступила в редакцию 15.11.10

Y. M. Smetanin

Algorithm for solving polisillogizm in the orthogonal basis by calculating the constituent sets

The article explains the need for orthogonal basis of syllogistics as an alternative to the basis of Aristotle and the need for the choice of extended algebra of sets as a tool for solving problems instead of logic algebra. An algorithm for constructing all possible classes of interpretations of solutions in terms of sets of finite measure has been formulated. Computer simulations to solve the classic tasks of Buhl, Schroeder, Poretsky have been conducted. At the same time additional results to existing solutions have been received.

Keywords: syllogistics, polisillogizm, algebra, sets, orthogonal basis of syllogistics, basis of Aristotle.

Mathematical Subject Classifications: 76G25

Сметанин Юрий Михайлович, к. ф.-м. н., доцент, зав. кафедрой высшей математики и информатики Института экономики и управления УдГУ, 426001, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4), каб. 425, РТ. 916063, E-mail: gms1234gms@rambler.ru