УДК 519.651 + 517.518.823

© *В. И. Родионов, Н. В. Родионова*

ТОЧНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ И НЕВЯЗКИ ОПТИМАЛЬНОГО АППРОКСИМИРУЮЩЕГО СПЛАЙНА ПРОСТЕЙШЕГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Определяется параметрическое семейство конечномерных пространств специальных квадратичных сплайнов лагранжевого типа. В каждом пространстве в качестве решения начально-граничной задачи для простейшего уравнения теплопроводности предлагается оптимальный сплайн, дающий наименьшую невязку, представляющую собой норму в пространстве L_2. Для коэффициентов этого сплайна и для его невязки получены точные формулы. Формула для коэффициентов сплайна представляет собой линейную форму от конечных разностей дискретно заданных начальных и граничных условий исходной задачи. Формула для невязки представляет собой положительно определенную квадратичную форму от этих же величин. Коэффициенты обеих форм вычислимы через многочлены Чебышева. Проведены компьютерные исследования качества аппроксимации в зависимости от параметров семейства.

Ключевые слова: интерполяция, аппроксимирующий сплайн, невязка, многочлены Чебышева.

Введение

Пусть точки $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$ таковы, что векторы $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$ (где $\Delta x_i \doteq x_i - x_0$) попарно ортогональны, а числа p_{ij}, $i, j = 0, 1, \ldots, n$, таковы, что $p_{ij} = p_{ji}$. В семействе всех квадратичных полиномов вида $P(\xi) = (A\xi, \xi) + (b, \xi) + c$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, существует ровно один такой, что: 1) матрица A симметрична; 2) $P(\frac{1}{2}x_r + \frac{1}{2}x_s) = p_{rs}$ для всех $r, s = 0, 1, \ldots, n$. Согласно [1] он представим в виде

$$P(\xi) = 2\sum_{i,j}(p_{ij} - p_{i0} - p_{0j} + p_{00})\varphi_i(\xi)\varphi_j(\xi) - \sum_k (p_{kk} - 4p_{k0} + 3p_{00})\varphi_k(\xi) + p_{00}, \tag{0.1}$$

где $\varphi_k(\xi) \doteq (\xi - x_0, \Delta x_k)/||\Delta x_k||^2$, $k = 1, \ldots, n$. Мы применяем формулу (0.1) при численном решении задач математической физики, а в настоящей работе изучается начально-граничная задача для простейшего уравнения теплопроводности (здесь $n = 2$, $\xi = (\xi_1, \xi_2) = (t, x) \in \mathbb{R}^2$):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad u(0, x) = \phi(x), x \in [0, 1]; \quad u(t, 0) = \alpha(t),\ u(t, 1) = \beta(t),\ t \geqslant 0. \tag{0.2}$$

(Предполагается выполненным естественное требование: $\alpha(0) = \phi(0)$, $\beta(0) = \phi(1)$.) Выбор в пользу этой задачи обусловлен лишь тем, что для нее удается свести матрицу системы линейных уравнений относительно коэффициентов оптимального аппроксимирующего сплайна к трехдиагональному виду. Данное обстоятельство позволяет получать точные формулы, необходимые для анализа качества аппроксимации в зависимости от исходных параметров.

§ 1. Постановка задачи построения оптимального аппроксимирующего сплайна

Пусть $\tau > 0$, и через Ω обозначим прямоугольник $[0, 2\tau] \times [0, 1]$. Пусть, далее, $h = \dfrac{1}{2N}$, где $N \in \mathbb{N}$, а точки $(\tau_i, h_j) \in \Omega$ таковы, что $\tau_i = i\tau$, $i = 0, 1, 2$, $h_j = jh$, $j = 0, 1, \ldots, 2N$. Сетка $\{(\tau_i, h_j)\}$ порождает следующие две триангуляции множества Ω :

$$\Omega \cap \big\{ \{ t = 0 \} \cup \{ t = 2\tau \} \cup \{ x = h_j \}_{j=0}^{2N} \cup \{ x + \tfrac{h}{\tau} t = h_{2k} \}_{k=1}^{N} \big\}, \tag{1.1}$$

$$\Omega \cap \big\{ \{ t = 0 \} \cup \{ t = 2\tau \} \cup \{ x = h_j \}_{j=0}^{2N} \cup \{ x - \tfrac{h}{\tau} t = h_{2k-2} \}_{k=1}^{N} \big\}. \tag{1.2}$$

Условно называем их левой и правой триангуляциями соответственно.

Зафиксируем числа u_{ij}, $i=0,1,2$, $j=0,1,\ldots,2N$, такие, что $u_{0j}=\phi(h_j)$ для всех $j=0,1,\ldots,2N$, $u_{10}=\alpha(\tau_1)$, $u_{20}=\alpha(\tau_2)$, $u_{1,2N}=\beta(\tau_1)$, $u_{2,2N}=\beta(\tau_2)$. Каждому узлу сетки $\{(\tau_i,h_j)\}$ сопоставим значение u_{ij}. Тогда на каждом треугольнике обеих триангуляций (1.1) и (1.2) явно вычислимы полиномы вида (0.1), причем значения полиномов двух смежных треугольников совпадают на их общей границе. Последнее обстоятельство позволяет, в частности, определить однозначные непрерывные функции $u_{_L}\colon\Omega\to\mathbb{R}$ и $u_{_R}\colon\Omega\to\mathbb{R}$, «склеенные» из полиномов, построенных на треугольниках левой и правой триангуляций (1.1) и (1.2) соответственно. Эти функции, в свою очередь, порождают функции $u_\lambda\doteq\lambda u_{_L}+(1-\lambda)u_{_R}$, $\lambda\in[0,1]$, которые мы называем специальными аппроксимирующими сплайнами. Разнообразие таких сплайнов определяется лишь наборами чисел u_{ij}, $i=1,2$, $j=1,\ldots,2N-1$, и параметром $\lambda\in[0,1]$. Это означает, что при фиксированном значении λ аппроксимирующие сплайны образуют конечномерное линейное пространство размерности $4N-2$. Обозначим его $\sigma_\lambda(\Omega)$.

Определим оператор $\Delta\colon\sigma_\lambda(\Omega)\to\mathrm{L}_2(\Omega)$ следующим образом. Сплайн $u\in\sigma_\lambda(\Omega)$ имеет частные производные любого порядка во всех точках множества Ω, за исключением множества меры нуль:

$$\Omega\cap\Big\{\,\{\,t=0\,\}\cup\{\,t=2\tau\,\}\cup\{\,x=h_j\,\}_{j=0}^{2N}\cup\{\,x+\tfrac{h}{\tau}\,t=h_{2k}\,\}_{k=1}^{N}\cup\{\,x-\tfrac{h}{\tau}\,t=h_{2k-2}\,\}_{k=1}^{N}\Big\}. \qquad (1.3)$$

Пусть $(\Delta u)(t,x)\doteq 0$ во всех точках множества (1.3), а в остальных точках прямоугольника Ω полагаем $(\Delta u)(t,x)\doteq\frac{\partial u}{\partial t}-\gamma^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Таким образом, в качестве приближенного решения исходной задачи (0.2) можно принять оптимальный аппроксимирующий сплайн $u^*\in\sigma_\lambda(\Omega)$ задачи

$$J=J(u)\doteq\|\,\Delta u\,\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)}\to\min,\quad u\in\sigma_\lambda(\Omega), \qquad (1.4)$$

решение которой, в конечном счете, сводится к поиску чисел u^*_{ij}, $i=1,2$, $j=1,\ldots,2N-1$, реализующих минимум функционала J и порождающих оптимальное решение $u^*\in\sigma_\lambda(\Omega)$.

Числа u^*_{ij} удовлетворяют системе уравнений $\partial J/\partial u_{ij}=0$, $i=1,2$, $j=1,\ldots,2N-1$, и мы переходим к детальному обсуждению вопроса о ее однозначной разрешимости.

§ 2. Процедура построения аппроксимирующих сплайнов

При фиксированном $\lambda\in[0,1]$ будем применять обозначения $\mu\doteq 1-\lambda$ и $\omega\doteq\lambda-\mu$. Очевидно, $\mu\in[0,1]$, а $\omega\in[-1,1]$. Зафиксируем, далее, числа u_{ij}, $i=0,1,2$, $j=0,1,\ldots,2N$, и введем вспомогательные обозначения:

$$\begin{gathered}x_j\doteq u_{2j}-u_{0j},\quad y_j\doteq u_{2j}-2\,u_{1j}+u_{0j},\quad j=0,1,\ldots,2N,\\ X_k\doteq x_{2k-2}-2\,x_{2k-1}+x_{2k},\quad Y_k\doteq\lambda\mu\,y_{2k-2}+2\,(1-\lambda\mu)\,y_{2k-1}+\lambda\mu\,y_{2k},\\ Z_k\doteq u_{0,2k-2}-2\,u_{0,2k-1}+u_{0,2k},\quad k=1,\ldots,N.\end{gathered}$$

Очевидно, $u_{1j}=u_{0j}+(x_j-y_j)/2$ и $u_{2j}=u_{0j}+x_j$ для всех $j=0,1,\ldots,2N$.

Сетка $\{(\tau_i,h_j)\}$ и матрица (u_{ij}) позволяют определить следующие четыре серии полиномов ($k=1,\ldots,N$), порождающие сплайны $u_{_L}\colon\Omega\to\mathbb{R}$, $u_{_R}\colon\Omega\to\mathbb{R}$ и $u_\lambda\colon\Omega\to\mathbb{R}$.

1. Совокупность точек сетки $\{(\tau_i,h_j)\}$ и элементов матрицы (u_{ij}):

$$\begin{array}{lll}(\tau_2,h_{2k-2}) & & \\ (\tau_1,h_{2k-2}) & (\tau_1,h_{2k-1}) & \\ (\tau_0,h_{2k-2}) & (\tau_0,h_{2k-1}) & (\tau_0,h_{2k})\end{array}\quad\text{и}\quad\begin{array}{lll}u_{2,2k-2} & & \\ u_{1,2k-2} & u_{1,2k-1} & \\ u_{0,2k-2} & u_{0,2k-1} & u_{0,2k}\end{array} \qquad (2.1)$$

порождают квадратичный полином вида (0.1)

$$P^{1k}(t,x)=a^{1k}_{11}\Big(\frac{t}{2\tau}\Big)^2+2\,a^{1k}_{12}\,\frac{t}{2\tau}\,\frac{x-h_{2k-2}}{2h}+a^{1k}_{22}\Big(\frac{x-h_{2k-2}}{2h}\Big)^2+b^{1k}_1\,\frac{t}{2\tau}+b^{1k}_2\,\frac{x-h_{2k-2}}{2h}+c^{1k},$$

удовлетворящий на элементах (2.1) условию $P^{1k}(\tau_i, h_j) = u_{ij}$. Легко проверить, что

$$\begin{gathered}
a_{11}^{1k} = 2\,(u_{2,2k-2} - 2\,u_{1,2k-2} + u_{0,2k-2}) = 2\,y_{2k-2},\\
a_{12}^{1k} = a_{21}^{1k} = 2\,(u_{1,2k-1} - u_{1,2k-2} - u_{0,2k-1} + u_{0,2k-2}) = x_{2k-1} - x_{2k-2} - y_{2k-1} + y_{2k-2},\\
a_{22}^{1k} = 2\,(u_{0,2k} - 2\,u_{0,2k-1} + u_{0,2k-2}) = 2\,Z_k,\\
b_1^{1k} = -u_{2,2k-2} + 4\,u_{1,2k-2} - 3\,u_{0,2k-2} = x_{2k-2} - 2\,y_{2k-2},\\
b_2^{1k} = -u_{0,2k} + 4\,u_{0,2k-1} - 3\,u_{0,2k-2}, \qquad c^{1k} = u_{0,2k-2}.
\end{gathered}$$

2. Совокупность точек сетки $\{(\tau_i, h_j)\}$ и элементов матрицы (u_{ij}) :

$$\begin{matrix}
(\tau_2, h_{2k-2}) & (\tau_2, h_{2k-1}) & (\tau_2, h_{2k}) \\
 & (\tau_1, h_{2k-1}) & (\tau_1, h_{2k}) \\
 & & (\tau_0, h_{2k})
\end{matrix}
\quad \text{и} \quad
\begin{matrix}
u_{2,2k-2} & u_{2,2k-1} & u_{2,2k} \\
 & u_{1,2k-1} & u_{1,2k} \\
 & & u_{0,2k}
\end{matrix}
\tag{2.2}$$

порождают квадратичный полином вида (0.1)

$$P^{2k}(t,x) = a_{11}^{2k}\left(\frac{2\tau-t}{2\tau}\right)^2 + 2\,a_{12}^{2k}\,\frac{2\tau-t}{2\tau}\,\frac{h_{2k}-x}{2h} + a_{22}^{2k}\left(\frac{h_{2k}-x}{2h}\right)^2 + b_1^{2k}\,\frac{2\tau-t}{2\tau} + b_2^{2k}\,\frac{h_{2k}-x}{2h} + c^{2k},$$

удовлетворящий на элементах (2.2) условию $P^{2k}(\tau_i, h_j) = u_{ij}$. Легко проверить, что

$$\begin{gathered}
a_{11}^{2k} = 2\,(u_{0,2k} - 2\,u_{1,2k} + u_{2,2k}) = 2\,y_{2k},\\
a_{12}^{2k} = a_{21}^{2k} = 2\,(u_{1,2k-1} - u_{1,2k} - u_{2,2k-1} + u_{2,2k}) = -x_{2k-1} + x_{2k} - y_{2k-1} + y_{2k},\\
a_{22}^{2k} = 2\,(u_{2,2k-2} - 2\,u_{2,2k-1} + u_{2,2k}) = 2\,(X_k + Z_k),\\
b_1^{2k} = -u_{0,2k} + 4\,u_{1,2k} - 3\,u_{2,2k} = -x_{2k} - 2\,y_{2k},\\
b_2^{2k} = -u_{2,2k-2} + 4\,u_{2,2k-1} - 3\,u_{2,2k}, \qquad c^{2k} = u_{2,2k}.
\end{gathered}$$

3. Совокупность точек сетки $\{(\tau_i, h_j)\}$ и элементов матрицы (u_{ij}):

$$\begin{matrix}
 & & (\tau_2, h_{2k}) \\
 & (\tau_1, h_{2k-1}) & (\tau_1, h_{2k}) \\
(\tau_0, h_{2k-2}) & (\tau_0, h_{2k-1}) & (\tau_0, h_{2k})
\end{matrix}
\quad \text{и} \quad
\begin{matrix}
 & & u_{2,2k} \\
 & u_{1,2k-1} & u_{1,2k} \\
u_{0,2k-2} & u_{0,2k-1} & u_{0,2k}
\end{matrix}
\tag{2.3}$$

порождают квадратичный полином вида (0.1)

$$P^{3k}(t,x) = a_{11}^{3k}\left(\frac{t}{2\tau}\right)^2 + 2\,a_{12}^{3k}\,\frac{t}{2\tau}\,\frac{h_{2k}-x}{2h} + a_{22}^{3k}\left(\frac{h_{2k}-x}{2h}\right)^2 + b_1^{3k}\,\frac{t}{2\tau} + b_2^{3k}\,\frac{h_{2k}-x}{2h} + c^{3k},$$

удовлетворящий на элементах (2.3) условию $P^{3k}(\tau_i, h_j) = u_{ij}$. Легко проверить, что

$$\begin{gathered}
a_{11}^{3k} = 2\,(u_{2,2k} - 2\,u_{1,2k} + u_{0,2k}) = 2\,y_{2k},\\
a_{12}^{3k} = a_{21}^{3k} = 2\,(u_{1,2k-1} - u_{1,2k} - u_{0,2k-1} + u_{0,2k}) = x_{2k-1} - x_{2k} - y_{2k-1} + y_{2k},\\
a_{22}^{3k} = 2\,(u_{0,2k-2} - 2\,u_{0,2k-1} + u_{0,2k}) = 2\,Z_k,\\
b_1^{3k} = -u_{2,2k} + 4\,u_{1,2k} - 3\,u_{0,2k} = x_{2k} - 2\,y_{2k},\\
b_2^{3k} = -u_{0,2k-2} + 4\,u_{0,2k-1} - 3\,u_{0,2k}, \qquad c^{3k} = u_{0,2k}.
\end{gathered}$$

4. Совокупность точек сетки $\{(\tau_i, h_j)\}$ и элементов матрицы (u_{ij}):

$$\begin{matrix}
(\tau_2, h_{2k-2}) & (\tau_2, h_{2k-1}) & (\tau_2, h_{2k}) \\
(\tau_1, h_{2k-2}) & (\tau_1, h_{2k-1}) & \\
(\tau_0, h_{2k-2}) & &
\end{matrix}
\quad \text{и} \quad
\begin{matrix}
u_{2,2k-2} & u_{2,2k-1} & u_{2,2k} \\
u_{1,2k-2} & u_{1,2k-1} & \\
u_{0,2k-2} & &
\end{matrix}
\tag{2.4}$$

порождают квадратичный полином вида (0.1)

$$P^{4k}(t,x) = a_{11}^{4k}\Big(\frac{2\tau-t}{2\tau}\Big)^2 + 2\,a_{12}^{4k}\,\frac{2\tau-t}{2\tau}\,\frac{x-h_{2k-2}}{2h} + a_{22}^{4k}\Big(\frac{x-h_{2k-2}}{2h}\Big)^2 + b_1^{4k}\,\frac{2\tau-t}{2\tau} + b_2^{4k}\,\frac{x-h_{2k-2}}{2h} + c^{4k},$$

удовлетворяющий на элементах (2.4) условию $P^{4k}(\tau_i,h_j) = u_{ij}$. Легко проверить, что

$$\begin{gathered}
a_{11}^{4k} = 2\,(u_{0,2k-2} - 2\,u_{1,2k-2} + u_{2,2k-2}) = 2\,y_{2k-2},\\
a_{12}^{4k} = a_{21}^{4k} = 2\,(u_{1,2k-1} - u_{1,2k-2} - u_{2,2k-1} + u_{2,2k-2}) = -x_{2k-1} + x_{2k-2} - y_{2k-1} + y_{2k-2},\\
a_{22}^{4k} = 2\,(u_{2,2k} - 2\,u_{2,2k-1} + u_{2,2k-2}) = 2\,(X_k + Z_k),\\
b_1^{4k} = -u_{0,2k-2} + 4\,u_{1,2k-2} - 3\,u_{2,2k-2} = -x_{2k-2} - 2\,y_{2k-2},\\
b_2^{4k} = -u_{2,2k} + 4\,u_{2,2k-1} - 3\,u_{2,2k-2}, \qquad c^{4k} = u_{2,2k-2}.
\end{gathered}$$

Через Ω^{1k} обозначим выпуклую оболочку точек сетки $\{(\tau_i,h_j)\}$, входящих в совокупность (2.1), а через Ω^{2k} — выпуклую оболочку точек, входящих в совокупность (2.2). Возможность непрерывной стыковки полиномов, определенных на двух соседних треугольниках левой триангуляции (1.1), позволяет определить однозначную непрерывную функцию

$$u_{{}_L}(t,x) \doteq \begin{cases} P^{1k}(t,x), & \text{если } k \text{ такое, что } (t,x)\in\Omega^{1k},\\ P^{2k}(t,x), & \text{если } k \text{ такое, что } (t,x)\in\Omega^{2k}.\end{cases} \tag{2.5}$$

Обозначим, далее, через Ω^{3k} выпуклую оболочку точек, входящих в совокупность (2.3), а через Ω^{4k} — выпуклую оболочку точек, входящих в совокупность (2.4). Правая триангуляция (1.2) также порождает однозначную непрерывную функцию

$$u_{{}_R}(t,x) \doteq \begin{cases} P^{3k}(t,x), & \text{если } k \text{ такое, что } (t,x)\in\Omega^{3k},\\ P^{4k}(t,x), & \text{если } k \text{ такое, что } (t,x)\in\Omega^{4k}.\end{cases} \tag{2.6}$$

§ 3. Точная формула для функционала невязок аппроксимирующих сплайнов

При фиксированном $\lambda\in[0,1]$ сплайны (2.5) и (2.6) порождают сплайн $u_\lambda \doteq \lambda\,u_{{}_L} + \mu\,u_{{}_R}$. Пусть, далее, $G^{1k}\doteq\Omega^{1k}\cap\Omega^{3k}$, $G^{2k}\doteq\Omega^{2k}\cap\Omega^{4k}$, $G^{3k}\doteq\Omega^{3k}\cap\Omega^{2k}$, $G^{4k}\doteq\Omega^{4k}\cap\Omega^{1k}$ для всех k, и для каждого $\ell=1,\ldots,4$ определим интегралы $J^{\ell k}\doteq\displaystyle\int_{G^{\ell k}}(\Delta u_\lambda)^2(\xi)\,d\xi$. Тогда, очевидно,

$$J = J(u_\lambda) = \|\,\Delta u_\lambda\,\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} = \int_\Omega(\Delta u_\lambda)^2(\xi)\,d\xi = \sum_{k=1}^N\sum_{\ell=1}^4 J^{\ell k}.$$

Далее будем применять обозначения $\nu\doteq\frac{h}{3\tau}$, $\theta\doteq\gamma^2\frac{\tau}{h^2}$ и легко проверяемую формулу

$$\int_0^s du\int_{-u}^u dv\,\Big(\frac{pu}{s}+\frac{qv}{s}+r\Big)^2 = \frac{s^2}{18}\big[\,p^2+3q^2+2\,(2p+3r)^2\,\big], \qquad p,q,r,s\in\mathbb{R},\ \ s\neq 0. \tag{3.1}$$

Зафиксируем индексы ℓ,k и полагаем далее, что $(t,x)\in\operatorname{int}G^{\ell k}$.

1. Если $\ell=1$, то для всех $f\in\mathrm{C}(\Omega)$ имеет место цепочка равенств

$$\int_{G^{1k}} f(\xi)\,d\xi = \int_0^\tau dt\int_{h_{2k-2}+\frac{h}{\tau}t}^{h_{2k}-\frac{h}{\tau}t} dx\,f(t,x) = \frac{\tau}{h}\int_0^h du\int_{-u}^u dv\ f(\tau-\tfrac{\tau}{h}u,\ h_{2k-2}+h+v) \tag{3.2}$$

(здесь и ниже применяем замену $t=\tau-\frac{\tau}{h}u$, $x=h_{2k-2}+h+v$), и

$$\begin{aligned}
(\Delta u_\lambda)(t,x) &= \lambda\,(\Delta u_{{}_L})(t,x) + \mu\,(\Delta u_{{}_R})(t,x) = \lambda\,(\Delta P^{1k})(t,x) + \mu\,(\Delta P^{3k})(t,x) = \\
&= \lambda\,\Big(\,a_{11}^{1k}\,\frac{t}{2\tau^2} + a_{12}^{1k}\,\frac{x-h_{2k-2}}{2\tau h} + b_1^{1k}\,\frac{1}{2\tau} - a_{22}^{1k}\,\frac{\gamma^2}{2h^2}\,\Big) + \\
&+ \mu\,\Big(\,a_{11}^{3k}\,\frac{t}{2\tau^2} + a_{12}^{3k}\,\frac{h_{2k}-x}{2\tau h} + b_1^{3k}\,\frac{1}{2\tau} - a_{22}^{3k}\,\frac{\gamma^2}{2h^2}\Big) = \frac{1}{2\tau}\,\Big(\,\frac{pu}{h}+\frac{qv}{h}+r\,\Big),
\end{aligned}$$

где
$$p \doteq -\lambda\, a_{11}^{1k} - \mu\, a_{11}^{3k}, \quad q \doteq \lambda\, a_{12}^{1k} - \mu\, a_{12}^{3k},$$
$$r \doteq \lambda\,(\, a_{11}^{1k} + a_{12}^{1k} + b_1^{1k} - \theta\, a_{22}^{1k}\,) + \mu\,(\, a_{11}^{3k} + a_{12}^{3k} + b_1^{3k} - \theta\, a_{22}^{3k}\,).$$
Согласно (3.1) и (3.2) имеет место цепочка равенств
$$J^{1k} = \int_{G^{1k}} (\Delta u_\lambda)^2(\xi)\, d\xi = \frac{1}{4\tau h} \int_0^h du \int_{-u}^{u} dv \Big(\frac{pu}{h} + \frac{qv}{h} + r \Big)^2 = \frac{\nu}{24}\,[\,(A^{1k})^2 + 3\,(B^{1k})^2 + 2\,(C^{1k})^2\,],$$
где $A^{1k} \doteq p$, $B^{1k} \doteq q$, $C^{1k} \doteq 2p + 3r$. Другими словами,
$$A^{1k} = -\lambda\, a_{11}^{1k} - \mu\, a_{11}^{3k} = -2\lambda\, y_{2k-2} - 2\mu\, y_{2k},$$
$$B^{1k} = \lambda\, a_{12}^{1k} - \mu\, a_{12}^{3k} = -\lambda\, x_{2k-2} + \omega\, x_{2k-1} + \mu\, x_{2k} + \lambda\, y_{2k-2} - \omega\, y_{2k-1} - \mu\, y_{2k},$$
$$C^{1k} = \lambda\,(\, a_{11}^{1k} + 3\, a_{12}^{1k} + 3\, b_1^{1k} - 3\theta\, a_{22}^{1k}\,) + \mu\,(\, a_{11}^{3k} + 3\, a_{12}^{3k} + 3\, b_1^{3k} - 3\theta\, a_{22}^{3k}\,) =$$
$$= 3\, x_{2k-1} - \lambda\, y_{2k-2} - 3\, y_{2k-1} - \mu\, y_{2k} - 6\theta\, Z_k.$$

2. Если $\ell = 2$, то для всех $f \in \mathrm{C}(\Omega)$ имеет место цепочка равенств
$$\int_{G^{2k}} f(\xi)\, d\xi = \int_\tau^{2\tau} dt \int_{h_{2k} - \frac{h}{\tau} t}^{h_{2k-2} + \frac{h}{\tau} t} dx\, f(t,x) = \frac{\tau}{h} \int_0^h du \int_{-u}^{u} dv\ f(\tau + \tfrac{\tau}{h}\, u,\ h_{2k-2} + h + v) \qquad (3.3)$$
(здесь и ниже применяем замену $t = \tau + \frac{\tau}{h}\, u$, $x = h_{2k-2} + h + v$), и
$$(\Delta u_\lambda)(t,x) = \lambda\,(\Delta u_{{}_L})(t,x) + \mu\,(\Delta u_{{}_R})(t,x) = \lambda\,(\Delta P^{2k})(t,x) + \mu\,(\Delta P^{4k})(t,x) =$$
$$= \lambda \Big(a_{11}^{2k}\, \frac{t - 2\tau}{2\tau^2} + a_{12}^{2k}\, \frac{x - h_{2k}}{2\tau h} - b_1^{2k}\, \frac{1}{2\tau} - a_{22}^{2k}\, \frac{\gamma^2}{2h^2} \Big) +$$
$$+ \mu \Big(a_{11}^{4k}\, \frac{t - 2\tau}{2\tau^2} - a_{12}^{4k}\, \frac{x - h_{2k-2}}{2\tau h} - b_1^{4k}\, \frac{1}{2\tau} - a_{22}^{4k}\, \frac{\gamma^2}{2h^2} \Big) = \frac{1}{2\tau} \Big(\frac{pu}{h} + \frac{qv}{h} + r \Big),$$
где
$$p \doteq \lambda\, a_{11}^{2k} + \mu\, a_{11}^{4k}, \quad q \doteq \lambda\, a_{12}^{2k} - \mu\, a_{12}^{4k},$$
$$r \doteq -\lambda\,(\, a_{11}^{2k} + a_{12}^{2k} + b_1^{2k} + \theta\, a_{22}^{2k}\,) - \mu\,(\, a_{11}^{4k} + a_{12}^{4k} + b_1^{4k} + \theta\, a_{22}^{4k}\,).$$
Согласно (3.1) и (3.3) имеет место цепочка равенств
$$J^{2k} = \int_{G^{2k}} (\Delta u_\lambda)^2(\xi)\, d\xi = \frac{1}{4\tau h} \int_0^h du \int_{-u}^{u} dv \Big(\frac{pu}{h} + \frac{qv}{h} + r \Big)^2 = \frac{\nu}{24}\,[\,(A^{2k})^2 + 3\,(B^{2k})^2 + 2\,(C^{2k})^2\,],$$
где $A^{2k} \doteq p$, $B^{2k} \doteq q$, $C^{2k} \doteq 2p + 3r$. Другими словами,
$$A^{2k} = \lambda\, a_{11}^{2k} + \mu\, a_{11}^{4k} = 2\mu\, y_{2k-2} + 2\lambda\, y_{2k},$$
$$B^{2k} = \lambda\, a_{12}^{2k} - \mu\, a_{12}^{4k} = -\mu\, x_{2k-2} - \omega\, x_{2k-1} + \lambda\, x_{2k} - \mu\, y_{2k-2} - \omega\, y_{2k-1} + \lambda\, y_{2k},$$
$$C^{2k} = -\lambda\,(\, a_{11}^{2k} + 3\, a_{12}^{2k} + 3\, b_1^{2k} + 3\theta\, a_{22}^{2k}\,) - \mu\,(\, a_{11}^{4k} + 3\, a_{12}^{4k} + 3\, b_1^{4k} + 3\theta\, a_{22}^{4k}\,) =$$
$$= 3\, x_{2k-1} - 6\theta\, X_k + \mu\, y_{2k-2} + 3\, y_{2k-1} + \lambda\, y_{2k} - 6\theta\, Z_k.$$

3. Если $\ell = 3$, то для всех $f \in \mathrm{C}(\Omega)$ имеет место цепочка равенств
$$\int_{G^{3k}} f(\xi)\, d\xi = \int_{h_{2k-2} + h}^{h_{2k}} dx \int_{\frac{\tau}{h}(h_{2k} - x)}^{\frac{\tau}{h}(x - h_{2k-2})} dt\, f(t,x) = \frac{h}{\tau} \int_0^\tau du \int_{-u}^{u} dv\ f(\tau + v,\ h_{2k-2} + h + \tfrac{h}{\tau}\, u) \qquad (3.4)$$
(здесь и ниже применяем замену $t = \tau + v$, $x = h_{2k-2} + h + \frac{h}{\tau}\, u$), и
$$(\Delta u_\lambda)(t,x) = \lambda\,(\Delta u_{{}_L})(t,x) + \mu\,(\Delta u_{{}_R})(t,x) = \lambda\,(\Delta P^{2k})(t,x) + \mu\,(\Delta P^{3k})(t,x) =$$

$$= \lambda \Big(a_{11}^{2k}\, \frac{t-2\tau}{2\tau^2} + a_{12}^{2k}\, \frac{x-h_{2k}}{2\tau h} - b_1^{2k}\, \frac{1}{2\tau} - a_{22}^{2k}\, \frac{\gamma^2}{2h^2} \Big) +$$
$$+ \mu \Big(a_{11}^{3k}\, \frac{t}{2\tau^2} + a_{12}^{3k}\, \frac{h_{2k}-x}{2\tau h} + b_1^{3k}\, \frac{1}{2\tau} - a_{22}^{3k}\, \frac{\gamma^2}{2h^2} \Big) = \frac{1}{2\tau} \Big(\frac{pu}{\tau} + \frac{qv}{\tau} + r \Big),$$

где

$$p \doteq \lambda\, a_{12}^{2k} - \mu\, a_{12}^{3k}, \quad q \doteq \lambda\, a_{11}^{2k} + \mu\, a_{11}^{3k},$$
$$r \doteq -\lambda \,(\, a_{11}^{2k} + a_{12}^{2k} + b_1^{2k} + \theta\, a_{22}^{2k}\,) + \mu \,(\, a_{11}^{3k} + a_{12}^{3k} + b_1^{3k} - \theta\, a_{22}^{3k}\,).$$

Согласно (3.1) и (3.4) имеет место цепочка равенств

$$J^{3k} = \int_{G^{3k}} (\Delta u_\lambda)^2(\xi)\, d\xi = \frac{h}{4\tau^3} \int_0^\tau du \int_{-u}^{u} dv \Big(\frac{pu}{\tau} + \frac{qv}{\tau} + r \Big)^2 = \frac{\nu}{24} \,[\, (A^{3k})^2 + 3\,(B^{3k})^2 + 2\,(C^{3k})^2 \,],$$

где $A^{3k} \doteq p$, $B^{3k} \doteq q$, $C^{3k} \doteq 2p + 3r$. Другими словами,

$$A^{3k} = \lambda\, a_{12}^{2k} - \mu\, a_{12}^{3k} = -x_{2k-1} + x_{2k} - \omega\, y_{2k-1} + \omega\, y_{2k}, \quad B^{3k} = \lambda\, a_{11}^{2k} + \mu\, a_{11}^{3k} = 2\, y_{2k},$$
$$C^{3k} = -\lambda \,(\, 3\, a_{11}^{2k} + a_{12}^{2k} + 3\, b_1^{2k} + 3\theta\, a_{22}^{2k}\,) + \mu \,(\, 3\, a_{11}^{3k} + a_{12}^{3k} + 3\, b_1^{3k} - 3\theta\, a_{22}^{3k}\,) =$$
$$= x_{2k-1} + 2\, x_{2k} - 6\theta\lambda\, X_k + \omega\, y_{2k-1} - \omega\, y_{2k} - 6\theta\, Z_k.$$

4. Если $\ell = 4$, то для всех $f \in \mathrm{C}(\Omega)$ имеет место цепочка равенств

$$\int_{G^{4k}} f(\xi)\, d\xi = \int_{h_{2k-2}}^{h_{2k-2}+h} dx \int_{\frac{\tau}{h}\,(x-h_{2k-2})}^{\frac{\tau}{h}\,(h_{2k}-x)} dt\, f(t,x) = \frac{h}{\tau} \int_0^\tau du \int_{-u}^{u} dv\ f(\tau{+}v,\, h_{2k-2}{+}h{-}\tfrac{h}{\tau}\,u) \tag{3.5}$$

(здесь и ниже применяем замену $t = \tau{+}v$, $x = h_{2k-2}{+}h{-}\frac{h}{\tau}\,u$), и

$$(\Delta u_\lambda)(t,x) = \lambda\,(\Delta u_{_L})(t,x) + \mu\,(\Delta u_{_R})(t,x) = \lambda\,(\Delta P^{1k})(t,x) + \mu\,(\Delta P^{4k})(t,x) =$$
$$= \lambda \Big(a_{11}^{1k}\, \frac{t}{2\tau^2} + a_{12}^{1k}\, \frac{x-h_{2k-2}}{2\tau h} + b_1^{1k}\, \frac{1}{2\tau} - a_{22}^{1k}\, \frac{\gamma^2}{2h^2} \Big) +$$
$$+ \mu \Big(a_{11}^{4k}\, \frac{t-2\tau}{2\tau^2} - a_{12}^{4k}\, \frac{x-h_{2k-2}}{2\tau h} - b_1^{4k}\, \frac{1}{2\tau} - a_{22}^{4k}\, \frac{\gamma^2}{2h^2} \Big) = \frac{1}{2\tau} \Big(\frac{pu}{\tau} + \frac{qv}{\tau} + r \Big),$$

где

$$p \doteq -\lambda\, a_{12}^{1k} + \mu\, a_{12}^{4k}, \quad q \doteq \lambda\, a_{11}^{1k} + \mu\, a_{11}^{4k},$$
$$r \doteq \lambda \,(\, a_{11}^{1k} + a_{12}^{1k} + b_1^{1k} - \theta\, a_{22}^{1k}\,) - \mu \,(\, a_{11}^{4k} + a_{12}^{4k} + b_1^{4k} + \theta\, a_{22}^{4k}\,).$$

Согласно (3.1) и (3.5) имеет место цепочка равенств

$$J^{4k} = \int_{G^{4k}} (\Delta u_\lambda)^2(\xi)\, d\xi = \frac{h}{4\tau^3} \int_0^\tau du \int_{-u}^{u} dv \Big(\frac{pu}{\tau} + \frac{qv}{\tau} + r \Big)^2 = \frac{\nu}{24} \,[\, (A^{4k})^2 + 3\,(B^{4k})^2 + 2\,(C^{4k})^2 \,],$$

где $A^{4k} \doteq p$, $B^{4k} \doteq q$, $C^{4k} \doteq 2p + 3r$. Другими словами,

$$A^{4k} = -\lambda\, a_{12}^{1k} + \mu\, a_{12}^{4k} = x_{2k-2} - x_{2k-1} - \omega\, y_{2k-2} + \omega\, y_{2k-1}, \quad B^{4k} = \lambda\, a_{11}^{1k} + \mu\, a_{11}^{4k} = 2\, y_{2k-2},$$
$$C^{4k} = \lambda \,(\, 3\, a_{11}^{1k} + a_{12}^{1k} + 3\, b_1^{1k} - 3\theta\, a_{22}^{1k}\,) - \mu \,(\, 3\, a_{11}^{4k} + a_{12}^{4k} + 3\, b_1^{4k} + 3\theta\, a_{22}^{4k}\,) =$$
$$= 2\, x_{2k-2} + x_{2k-1} - 6\theta\mu\, X_k + \omega\, y_{2k-2} - \omega\, y_{2k-1} - 6\theta\, Z_k.$$

Таким образом, функционал J приобретает вид

$$J = \frac{\nu}{24} \sum_{m=1}^{N} \sum_{\ell=1}^{4} \,[\, (A^{\ell m})^2 + 3\,(B^{\ell m})^2 + 2\,(C^{\ell m})^2 \,], \tag{3.6}$$

где значения $A^{\ell m}, B^{\ell m}, C^{\ell m}$ вычислимы через величины x_j, y_j, $j = 0, 1, \ldots, 2N$, которые, в свою очередь, вычислимы через исходный массив u_{ij}, $i = 0, 1, 2$, $j = 0, 1, \ldots, 2N$.

§ 4. Точная формула для градиента функционала невязок аппроксимирующих сплайнов

1. Имеют место равенства

$$\frac{\partial J}{\partial x_{2k-1}}=\frac{\nu}{12}\sum_{\ell=1}^{4}\Big[A^{\ell k}\,\frac{\partial A^{\ell k}}{\partial x_{2k-1}}+3\,B^{\ell k}\,\frac{\partial B^{\ell k}}{\partial x_{2k-1}}+2\,C^{\ell k}\,\frac{\partial C^{\ell k}}{\partial x_{2k-1}}\Big],\quad k=1,\ldots,N,$$

$$\sum_{\ell=1}^{4}A^{\ell k}\,\frac{\partial A^{\ell k}}{\partial x_{2k-1}}=-A^{3k}-A^{4k}=-X_k+\omega\,(\,y_{2k-2}-y_{2k}\,),$$

$$\sum_{\ell=1}^{4}B^{\ell k}\,\frac{\partial B^{\ell k}}{\partial x_{2k-1}}=\omega\,(\,B^{1k}-B^{2k}\,)=-\omega^2\,X_k+\omega\,(\,y_{2k-2}-y_{2k}\,),$$

$$\begin{gathered}\sum_{\ell=1}^{4}C^{\ell k}\,\frac{\partial C^{\ell k}}{\partial x_{2k-1}}=3\,C^{1k}+(3+12\theta)\,C^{2k}+(1+12\theta\lambda)\,C^{3k}+(1+12\theta\mu)\,C^{4k}=\\=3\,(\,C^{1k}+C^{2k}\,)+(\,C^{3k}+C^{4k}\,)+6\theta\,(\,2\,C^{2k}+C^{3k}+C^{4k}\,)+6\theta\,\omega\,(\,C^{3k}-C^{4k}\,)=\\=3\,[\,6\,x_{2k-1}-6\theta\,X_k-\omega\,(\,y_{2k-2}-y_{2k}\,)-12\theta\,Z_k\,]+\\+[\,2\,(\,x_{2k-2}+x_{2k-1}+x_{2k}\,)-6\theta\,X_k+\omega\,(\,y_{2k-2}-y_{2k}\,)-12\theta\,Z_k\,]+\\+6\theta\,[\,2\,(\,x_{2k-2}+4\,x_{2k-1}+x_{2k}\,)-18\theta\,X_k+y_{2k-2}+6\,y_{2k-1}+y_{2k}-24\theta\,Z_k\,]+\\+6\theta\,\omega\,[\,-2\,(\,x_{2k-2}-x_{2k}\,)-6\theta\,\omega\,X_k-\omega\,(\,y_{2k-2}-2\,y_{2k-1}+y_{2k}\,)\,].\end{gathered}$$

Приведя подобные члены перед степенями ω^m, $m=0,1,2,$ а затем воспользовавшись равенством $\omega^2=1-4\lambda\mu$, получим

$$\begin{gathered}\frac{12}{\nu}\,\frac{\partial J}{\partial x_{2k-1}}=4\,(1+6\theta)\,x_{2k-2}+8\,(5+12\theta)\,x_{2k-1}+4\,(1+6\theta)\,x_{2k}-\\-(\,1+48\theta+216\theta^2\,)\,X_k+12\theta\,(\,y_{2k-2}+6\,y_{2k-1}+y_{2k}\,)-96\theta\,(1+3\theta)\,Z_k-\\-24\theta\,\omega\,[\,x_{2k-2}-x_{2k}\,]-3\,\omega^2\,[\,(\,1+24\theta^2\,)\,X_k+4\theta\,(\,y_{2k-2}-2\,y_{2k-1}+y_{2k}\,)\,]=\\=\sigma_1+\sigma_2+48\theta\,Y_k-96\theta\,(1+3\theta)\,Z_k,\end{gathered}$$

где, как уже отмечалось, $Y_k=\lambda\mu\,y_{2k-2}+2\,(1-\lambda\mu)\,y_{2k-1}+\lambda\mu\,y_{2k}$, а

$$\begin{gathered}\sigma_1\doteq 4(1+6\theta)x_{2k-2}+8(5+12\theta)x_{2k-1}+4(1+6\theta)x_{2k}=-4(5+12\theta)X_k+24\,(1+3\theta)[x_{2k-2}+x_{2k}],\\ \sigma_2\doteq-\,(1+48\theta+216\theta^2)X_k-24\theta\omega[x_{2k-2}-x_{2k}]-3(1-4\lambda\mu)(1+24\theta^2)X_k.\end{gathered}$$

После приведения подобных членов в сумме $\sigma_1+\sigma_2$ получим равенство

$$\begin{gathered}\sigma_1+\sigma_2=24(1+2\theta+2\theta\mu)x_{2k-2}+24\,(1+2\theta+2\theta\lambda)x_{2k}-24[1+4\theta+12\theta^2-\frac{1}{2}\lambda\mu(1+24\theta^2)]X_k=\\=24r(\mu)x_{2k-2}+24r(\lambda)x_{2k}-24[R+4\theta^2(1-\lambda\mu)]X_k.\end{gathered}$$

Здесь и далее используем обозначения: $r(\lambda)\doteq 1+2\theta+2\theta\lambda$, $r\doteq r(\frac{1}{2})=1+3\theta$,

$$R\doteq 1+4\theta+8\theta^2-\frac{1}{2}\,(1+16\theta^2)\,\lambda\mu=\frac{7}{8}+4\theta+6\theta^2+\Big(\frac{1}{8}+2\theta^2\Big)\,\omega^2>0.$$

Очевидно, $r(\lambda)=r+\theta\,\omega$, а $r(\mu)=r-\theta\,\omega$. Таким образом, для всех $k=1,\ldots,N$ имеем

$$\frac{1}{\nu}\,\frac{\partial J}{\partial x_{2k-1}}=2\,r(\mu)\,x_{2k-2}+2\,r(\lambda)\,x_{2k}-2\,[\,R+4\theta^2\,(1-\lambda\mu)\,]\,X_k+4\theta\,Y_k-8\theta r\,Z_k. \qquad (4.1)$$

2. Имеют место равенства

$$\frac{\partial J}{\partial y_{2k-1}} = \frac{\nu}{12} \sum_{\ell=1}^{4} \Big[A^{\ell k} \frac{\partial A^{\ell k}}{\partial y_{2k-1}} + 3\, B^{\ell k} \frac{\partial B^{\ell k}}{\partial y_{2k-1}} + 2\, C^{\ell k} \frac{\partial C^{\ell k}}{\partial y_{2k-1}} \Big], \quad k = 1, \ldots, N,$$

$$\sum_{\ell=1}^{4} A^{\ell k} \frac{\partial A^{\ell k}}{\partial y_{2k-1}} = \omega\,(-A^{3k} + A^{4k}) = \omega\,[\,x_{2k-2} - x_{2k} - \omega\,(\,y_{2k-2} - 2\,y_{2k-1} + y_{2k}\,)\,],$$

$$\sum_{\ell=1}^{4} B^{\ell k} \frac{\partial B^{\ell k}}{\partial y_{2k-1}} = \omega\,(-B^{1k} - B^{2k}) = \omega\,[\,x_{2k-2} - x_{2k} - \omega\,(\,y_{2k-2} - 2\,y_{2k-1} + y_{2k}\,)\,],$$

$$\sum_{\ell=1}^{4} C^{\ell k} \frac{\partial C^{\ell k}}{\partial y_{2k-1}} = 3\,(-C^{1k} + C^{2k}) + \omega\,(\,C^{3k} - C^{4k}\,) =$$

$$= 3\,[-6\theta\, X_k + y_{2k-2} + 6\,y_{2k-1} + y_{2k}\,] + \omega\,[-2\,x_{2k-2} + 2\,x_{2k} - 6\theta\,\omega\, X_k - \omega\,(\,y_{2k-2} - 2\,y_{2k-1} + y_{2k}\,)\,].$$

Приведя подобные члены перед степенями ω^m, $m = 0, 1, 2$, получим

$$\frac{12}{\nu} \frac{\partial J}{\partial y_{2k-1}} = -36\theta\, X_k + 6\,(\,y_{2k-2} + 6\,y_{2k-1} + y_{2k}\,) + \omega^2\,[-12\theta\, X_k - 6\,(\,y_{2k-2} - 2\,y_{2k-1} + y_{2k}\,)\,] =$$

$$= -48\theta\,(1-\lambda\mu)\, X_k + 24\,[\,\lambda\mu\, y_{2k-2} + 2\,(1-\lambda\mu)\, y_{2k-1} + \lambda\mu\, y_{2k}\,],$$

$$\frac{1}{\nu} \frac{\partial J}{\partial y_{2k-1}} = -4\theta\,(1-\lambda\mu) X_k + 2\, Y_k, \quad k = 1, \ldots, N. \tag{4.2}$$

3. Имеют место равенства

$$\frac{\partial J}{\partial x_{2k}} = \frac{\nu}{12} \sum_{\ell=1}^{4} \Big[A^{\ell k} \frac{\partial A^{\ell k}}{\partial x_{2k}} + 3\, B^{\ell k} \frac{\partial B^{\ell k}}{\partial x_{2k}} + 2\, C^{\ell k} \frac{\partial C^{\ell k}}{\partial x_{2k}} \Big] +$$

$$+ \frac{\nu}{12} \sum_{\ell=1}^{4} \Big[A^{\ell,k+1} \frac{\partial A^{\ell,k+1}}{\partial x_{2k}} + 3\, B^{\ell,k+1} \frac{\partial B^{\ell,k+1}}{\partial x_{2k}} + 2\, C^{\ell,k+1} \frac{\partial C^{\ell,k+1}}{\partial x_{2k}} \Big], \quad k = 1, \ldots, N-1,$$

$$\sum_{\ell=1}^{4} A^{\ell k} \frac{\partial A^{\ell k}}{\partial x_{2k}} = A^{3k} = -x_{2k-1} + x_{2k} - \omega\, y_{2k-1} + \omega\, y_{2k},$$

$$\sum_{\ell=1}^{4} B^{\ell k} \frac{\partial B^{\ell k}}{\partial x_{2k}} = \mu\, B^{1k} + \lambda\, B^{2k} = \frac{1}{2}\,(B^{1k} + B^{2k}\,) + \frac{1}{2}\,\omega\,(-B^{1k} + B^{2k}\,) =$$

$$= \frac{1}{2}\,[-x_{2k-2} + x_{2k} + \omega\,(\,y_{2k-2} - 2\,y_{2k-1} + y_{2k}\,)\,] + \frac{1}{2}\,\omega\,[\,\omega\, X_k - y_{2k-2} + y_{2k}\,],$$

$$\sum_{\ell=1}^{4} C^{\ell k} \frac{\partial C^{\ell k}}{\partial x_{2k}} = -6\theta\, C^{2k} + (2 - 6\theta\lambda)\, C^{3k} - 6\theta\mu\, C^{4k} =$$

$$= 2\, C^{3k} - 3\theta\,(\,2\, C^{2k} + C^{3k} + C^{4k}\,) + 3\theta\,\omega\,(-C^{3k} + C^{4k}\,) =$$

$$= 2\,[\,x_{2k-1} + 2\,x_{2k} - 3\theta\, X_k - 3\theta\,\omega\, X_k + \omega\, y_{2k-1} - \omega\, y_{2k} - 6\theta\, Z_k\,] -$$

$$-3\theta\,[\,2\,(\,x_{2k-2} + 4\,x_{2k-1} + x_{2k}\,) - 18\theta\, X_k + y_{2k-2} + 6\,y_{2k-1} + y_{2k} - 24\theta\, Z_k\,] +$$

$$+ 3\theta\,\omega\,[\,2\,(\,x_{2k-2} - x_{2k}\,) + 6\theta\,\omega\, X_k + \omega\,(\,y_{2k-2} - 2\,y_{2k-1} + y_{2k}\,)\,].$$

Приведя подобные члены перед степенями ω^m, $m = 0, 1, 2$, получим

$$\sum_{\ell=1}^{4} \Big[A^{\ell k} \frac{\partial A^{\ell k}}{\partial x_{2k}} + 3\, B^{\ell k} \frac{\partial B^{\ell k}}{\partial x_{2k}} + 2\, C^{\ell k} \frac{\partial C^{\ell k}}{\partial x_{2k}} \Big] = -\frac{3}{2}(1 + 8\theta) x_{2k-2} + 3\,(1 - 16\theta) x_{2k-1} +$$

$$+ \frac{3}{2}(7 - 8\theta) x_{2k} - 12\theta(\,1 - 9\theta) X_k - 6\theta(\,y_{2k-2} + 6 y_{2k-1} + y_{2k}) - 24\theta(1 - 6\theta) Z_k +$$

$$+ 24\theta\omega\,[\,x_{2k-1} - x_{2k}] + \omega^2 \Big[\frac{3}{2} X_k + 36\theta^2 X_k + 6\theta(y_{2k-2} - 2\,y_{2k-1} + y_{2k}) \Big] =$$

$$= \sigma_1 + \sigma_2 - 24\theta Y_k - 24\theta\,(1 - 6\theta)\, Z_k,$$

где

$$\sigma_1 \doteq -\frac{3}{2}(1+8\theta)x_{2k-2}+3(1-16\theta)x_{2k-1}+\frac{3}{2}(7-8\theta)x_{2k}=-\frac{3}{2}(1+8\theta)X_k-72\theta x_{2k-1}+12x_{2k},$$

$$\sigma_2 \doteq -12\theta(1-9\theta)X_k+24\theta\omega[x_{2k-1}-x_{2k}]+\frac{3}{2}(1-4\lambda\mu)(1+24\theta^2)\,X_k.$$

После приведения подобных членов в сумме $\sigma_1+\sigma_2$ получим равенство

$$\sigma_1+\sigma_2=-24\,(\,2\theta+2\theta\mu\,)\,x_{2k-1}+12\,[\,1+2\theta-4\theta\lambda\,]\,x_{2k}+12\,[-2\theta+12\theta^2-\frac{1}{2}\,\lambda\mu\,(1+24\theta^2)\,]\,X_k=$$
$$=24\,[\,1-r(\mu)\,]\,x_{2k-1}+12\,[\,1+2\theta-4\theta\lambda\,]\,x_{2k}+12\,[\,R-1-6\theta+4\theta^2\,(1-\lambda\mu)\,]\,X_k.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{12}\sum_{\ell=1}^{4}\Big[\,A^{\ell k}\,\frac{\partial A^{\ell k}}{\partial x_{2k}}+3\,B^{\ell k}\,\frac{\partial B^{\ell k}}{\partial x_{2k}}+2\,C^{\ell k}\,\frac{\partial C^{\ell k}}{\partial x_{2k}}\,\Big]=$$
$$=2\,[\,1-r(\mu)\,]\,x_{2k-1}+[\,1+2\theta-4\theta\lambda\,]\,x_{2k}+[\,R-1-6\theta+4\theta^2\,(1-\lambda\mu)\,]\,X_k-2\theta\,Y_k-2\theta\,(1-6\theta)\,Z_k.$$

Проведя аналогичные выкладки, получим равенство

$$\frac{1}{12}\sum_{\ell=1}^{4}\Big[\,A^{\ell,k+1}\,\frac{\partial A^{\ell,k+1}}{\partial x_{2k}}+3\,B^{\ell,k+1}\,\frac{\partial B^{\ell,k+1}}{\partial x_{2k}}+2\,C^{\ell,k+1}\,\frac{\partial C^{\ell,k+1}}{\partial x_{2k}}\,\Big]=[\,1+2\theta-4\theta\mu\,]\,x_{2k}+$$
$$+2\,[\,1-r(\lambda)\,]\,x_{2k+1}+[\,R-1-6\theta+4\theta^2\,(1-\lambda\mu)\,]\,X_{k+1}-2\theta\,Y_{k+1}-2\theta\,(1-6\theta)\,Z_{k+1}.$$

Таким образом, для всех $k=1,\ldots,N-1$ имеет место равенство

$$\frac{1}{\nu}\,\frac{\partial J}{\partial x_{2k}}=2\,[\,1-r(\mu)\,]\,x_{2k-1}+2\,x_{2k}+2\,[\,1-r(\lambda)\,]\,x_{2k+1}+$$
$$+[\,R-1-6\theta+4\theta^2\,(1-\lambda\mu)\,]\,(\,X_k+X_{k+1}\,)-2\theta\,(\,Y_k+Y_{k+1}\,)-2\theta\,(1-6\theta)\,(\,Z_k+Z_{k+1}\,). \tag{4.3}$$

4. Имеют место равенства

$$\frac{\partial J}{\partial y_{2k}}=\frac{\nu}{12}\sum_{\ell=1}^{4}\Big[\,A^{\ell k}\,\frac{\partial A^{\ell k}}{\partial y_{2k}}+3\,B^{\ell k}\,\frac{\partial B^{\ell k}}{\partial y_{2k}}+2\,C^{\ell k}\,\frac{\partial C^{\ell k}}{\partial y_{2k}}\,\Big]+$$
$$+\frac{\nu}{12}\sum_{\ell=1}^{4}\Big[\,A^{\ell,k+1}\,\frac{\partial A^{\ell,k+1}}{\partial y_{2k}}+3\,B^{\ell,k+1}\,\frac{\partial B^{\ell,k+1}}{\partial y_{2k}}+2\,C^{\ell,k+1}\,\frac{\partial C^{\ell,k+1}}{\partial y_{2k}}\,\Big],\quad k=1,\ldots,N-1,$$

$$\sum_{\ell=1}^{4}A^{\ell k}\,\frac{\partial A^{\ell k}}{\partial y_{2k}}=-2\mu\,A^{1k}+2\lambda\,A^{2k}+\omega\,A^{3k}=(-A^{1k}+A^{2k}\,)+\omega\,(\,A^{1k}+A^{2k}+A^{3k}\,)=$$
$$=2\,[\,y_{2k-2}+y_{2k}\,]+\omega\,[-x_{2k-1}+x_{2k}-\omega\,(\,2\,y_{2k-2}+y_{2k-1}-3\,y_{2k}\,)\,],$$

$$\sum_{\ell=1}^{4}B^{\ell k}\,\frac{\partial B^{\ell k}}{\partial y_{2k}}=-\mu\,B^{1k}+\lambda\,B^{2k}+2\,B^{3k}=\frac{1}{2}\,(-B^{1k}+B^{2k}+4\,B^{3k}\,)+\frac{1}{2}\,\omega\,(\,B^{1k}+B^{2k}\,)=$$
$$=\frac{1}{2}\,[\,\omega\,X_k-y_{2k-2}+9\,y_{2k}\,]+\frac{1}{2}\,\omega\,[-x_{2k-2}+x_{2k}+\omega\,(\,y_{2k-2}-2\,y_{2k-1}+\,y_{2k}\,)\,],$$

$$\sum_{\ell=1}^{4}C^{\ell k}\,\frac{\partial C^{\ell k}}{\partial y_{2k}}=-\mu\,C^{1k}+\lambda\,C^{2k}-\omega\,C^{3k}=\frac{1}{2}\,(-C^{1k}+C^{2k}\,)+\frac{1}{2}\,\omega\,(\,C^{1k}+C^{2k}-2\,C^{3k}\,)=$$
$$=\frac{1}{2}\,[-6\theta\,X_k+y_{2k-2}+6\,y_{2k-1}+\,y_{2k}\,]\,+\,\frac{1}{2}\,\omega\,[\,4\,(\,x_{2k-1}-x_{2k}\,)+$$
$$+6\theta\,\omega\,X_k-\omega\,(\,y_{2k-2}+2\,y_{2k-1}-3\,y_{2k}\,)\,].$$

Приведя подобные члены перед степенями ω^m, $m=0,1,2$, получим

$$\sum_{\ell=1}^{4}\Big[\,A^{\ell k}\,\frac{\partial A^{\ell k}}{\partial y_{2k}}+3\,B^{\ell k}\,\frac{\partial B^{\ell k}}{\partial y_{2k}}+2\,C^{\ell k}\,\frac{\partial C^{\ell k}}{\partial y_{2k}}\,\Big]=$$
$$=-6\theta\,X_k+\frac{3}{2}\,y_{2k-2}+6\,y_{2k-1}+\frac{33}{2}\,y_{2k}+\omega^2\Big[6\theta\,X_k-\frac{3}{2}\,y_{2k-2}-6\,y_{2k-1}+\frac{15}{2}\,y_{2k}\Big]=$$
$$=6\,[-4\theta\lambda\mu\,X_k+\lambda\mu\,y_{2k-2}+4\lambda\mu\,y_{2k-1}+(4-5\lambda\mu)\,y_{2k}\,].$$

Проведя аналогичные выкладки, получим равенство

$$\sum_{\ell=1}^{4}\Big[\,A^{\ell,k+1}\,\frac{\partial A^{\ell,k+1}}{\partial y_{2k}}+3\,B^{\ell,k+1}\,\frac{\partial B^{\ell,k+1}}{\partial y_{2k}}+2\,C^{\ell,k+1}\,\frac{\partial C^{\ell,k+1}}{\partial y_{2k}}\,\Big]=$$
$$=6\,[-4\theta\lambda\mu\,X_{k+1}+(4-5\lambda\mu)\,y_{2k}+4\lambda\mu\,y_{2k+1}+\lambda\mu\,y_{2k+2}\,].$$

Таким образом,

$$\frac{1}{\nu}\,\frac{\partial J}{\partial y_{2k}}=-2\theta\,\lambda\mu\,(\,X_k+X_{k+1}\,)+$$
$$+\frac{1}{2}\,\lambda\mu\,y_{2k-2}+2\,\lambda\mu\,y_{2k-1}+(\,4-5\lambda\mu\,)\,y_{2k}+2\,\lambda\mu\,y_{2k+1}+\frac{1}{2}\,\lambda\mu\,y_{2k+2},\quad k=1,\dots,N-1. \tag{4.4}$$

§ 5. Система линейных алгебраических уравнений для коэффициентов оптимального аппроксимирующего сплайна

Вычислив четыре линейные комбинации из частных производных (4.1)–(4.4)

$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial J}{\partial y_{2k-1}},\qquad \frac{1}{2}\,\frac{\partial J}{\partial x_{2k-1}}-\theta\,\frac{\partial J}{\partial y_{2k-1}},\qquad -\lambda\mu\,\frac{\partial J}{\partial y_{2k-1}}+2\,(1-\lambda\mu)\,\frac{\partial J}{\partial y_{2k}}-\lambda\mu\,\frac{\partial J}{\partial y_{2k+1}},$$
$$\frac{1}{2}\,[\,R-r(\lambda)\,]\,\frac{\partial J}{\partial x_{2k-1}}+R\,\frac{\partial J}{\partial x_{2k}}+\frac{1}{2}\,[\,R-r(\mu)\,]\,\frac{\partial J}{\partial x_{2k+1}}+\theta\,r(\lambda)\,\frac{\partial J}{\partial y_{2k-1}}+\theta\,r(\mu)\,\frac{\partial J}{\partial y_{2k+1}}$$

(две первые комбинации — для всех $k=1,\dots,N$, а две вторые — для всех $k=1,\dots,N-1$) и приравняв их нулю, получим итоговую систему уравнений

$$\lambda\mu\,y_{2k-2}+2\,(1-\lambda\mu)\,y_{2k-1}+\lambda\mu\,y_{2k}=2\theta\,(1-\lambda\mu)\,(x_{2k-2}-2\,x_{2k-1}+x_{2k}),\quad k=1,\dots,N, \tag{5.1}$$
$$[\,r(\mu)-R\,]\,x_{2k-2}+2R\,x_{2k-1}+[\,r(\lambda)-R\,]\,x_{2k}=4\theta r\,Z_k,\quad k=1,\dots,N, \tag{5.2}$$
$$\lambda\mu\,(1-3\lambda\mu)\,y_{2k-2}+2\left(4-9\lambda\mu+3\lambda^2\mu^2\right)y_{2k}+\lambda\mu\,(1-3\lambda\mu)\,y_{2k+2}=0,\quad k=1,\dots,N-1, \tag{5.3}$$
$$[\,R-r(\lambda)r(\mu)\,]\,x_{2k-2}+[\,4R-r^2(\lambda)-r^2(\mu)\,]\,x_{2k}+[\,R-r(\lambda)r(\mu)\,]\,x_{2k+2}=$$
$$=2\theta\,[\,3R-2r\,r(\lambda)\,]\,Z_k+2\theta\,[\,3R-2r\,r(\mu)\,]\,Z_{k+1},\quad k=1,\dots,N-1. \tag{5.4}$$

Совокупность уравнений (5.4) имеет самостоятельный характер: ее уравнения связывают между собой лишь переменные вида x_{2m}. Очевидно, матрица системы уравнений (5.4) имеет трехдиагональный вид, и ниже мы установим, что система однозначно разрешима. В частности, справедливы явные формулы (7.4), кроме того, для решения системы (5.4) применим метод прогонки. Аналогичным образом однозначно разрешима система (5.3), содержащая лишь переменные вида y_{2m}: если $\lambda\mu=0$, то имеем $y_{2k}=0$ для всех $k=1,\dots,N{-}1$, а во всех остальных случаях матрица системы является трехдиагональной. Для величин y_{2k} справедливы явные формулы (7.1), кроме того, для решения системы применим метод прогонки. Из уравнений (5.2) легко находим все значения x_{2k-1}. Наконец, из уравнений (5.1) вычисляем значения y_{2k-1}. Полученные значения позволяют, в конечном счете, найти искомые величины u^*_{ij}, поскольку для всех $j=1,\dots,2N-1$ справедливы формулы

$$u^*_{1j}=u_{0j}+(x_j-y_j)/2=\phi(h_j)+(x_j-y_j)/2,\quad u^*_{2j}=u_{0j}+x_j=\phi(h_j)+x_j.$$

§ 6. Некоторые вспомогательные утверждения о многочленах Чебышева

Зафиксируем числа $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ и составим матрицу $A(x) = \big(A_{ij}(x)\big)$ порядка n такую, что $A_{ij}(x) = \delta_{i,j+1} + 2x\,\delta_{ij} + \delta_{i,j-1}$, где δ_{ij} — символ Кронекера. Пусть $U_n(x) \doteq \det\big(A_{ij}(x)\big)$. Составим, далее, матрицу $B(x) = \big(B_{ij}(x)\big)$ порядка n такую, что

$$B_{ij}(x) \doteq (-1)^{i+j} \begin{cases} U_{i-1}(x)\,U_{n-j}(x), & \text{если } i \leqslant j, \\ U_{j-1}(x)\,U_{n-i}(x), & \text{если } i \geqslant j. \end{cases}$$

Легко проверить равенство $U_{n+2}(x) = 2x\,U_{n+1}(x) - U_n(x)$ (достаточно разложить определитель $U_{n+2}(x)$ по элементам первой строки). Очевидно, $U_1(x) = 2x$, $U_2(x) = 4x^2 - 1$, поэтому все функции $U_n(x)$ — это многочлены Чебышева 2-го рода [2, с. 96]. Доопределим последовательность значениями $U_0(x) \doteq 1$ и $U_{-1}(x) \doteq 0$. При $x \in (-1,1)$ имеет место представление $U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\Theta}{\sin\Theta}$, $\cos\Theta = x$, причем при $n \geqslant 0$ функция

$$U_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \binom{n-k}{k} (2x)^{n-2k}, \quad x \in \mathbb{R},$$

является аналитическим продолжением данной функции [3, с. 67]. В силу элементарного тригонометрического тождества $\sin(n+1)\Theta\,\sin(m+1)\Theta - \sin n\Theta\,\sin m\Theta = \sin(n+m+1)\Theta\,\sin\Theta$ при всех $n \geqslant 0$, $m \geqslant 0$ справедливо тождество

$$U_n(x)\,U_m(x) - U_{n-1}(x)\,U_{m-1}(x) = U_{n+m}(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{6.1}$$

Теорема 1. *Справедливы равенства* $A(x)\,B(x) = U_n(x)\,E_n = B(x)\,A(x)$, *где* E_n — *единичная матрица порядка* $n \geqslant 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для элементов $C_{ij}(x)$ матрицы $C(x) \doteq A(x)\,B(x)$ имеем

$$C_{ij}(x) = \sum_k A_{ik}(x)B_{kj}(x) = \sum_k \delta_{i,k+1}\,B_{kj}(x) + 2x\sum_k \delta_{ik}\,B_{kj}(x) + \sum_k \delta_{i,k-1}\,B_{kj}(x), \quad i,j = 1,\ldots,n.$$

1. Если $i = j = 1$, то $C_{11}(x) = 2x\,B_{11}(x) + B_{21}(x) = U_0(x)\,\big(2x\,U_{n-1}(x) - U_{n-2}(x)\big) = U_n(x)$.
2. Если $j > i = 1$, то $C_{1j}(x) = 2x\,B_{1j}(x) + B_{2j}(x) = (-1)^{1+j}\,\big(2x\,U_0(x) - U_1(x)\big)\,U_{n-j}(x) = 0$.
3. Если $i = j = n$, то $C_{nn}(x) = B_{n-1,n}(x) + 2x\,B_{nn}(x) = \big(-U_{n-2}(x) + 2x\,U_{n-1}(x)\big)\,U_0(x) = U_n(x)$.
4. Если $j < i = n$, то $C_{nj}(x) = B_{n-1,j}(x) + 2x\,B_{nj}(x) = (-1)^{n+j}\,U_{j-1}(x)\,\big(-U_1(x) + 2x\,U_0(x)\big) = 0$.
5. Если $2 \leqslant i \leqslant n-1$, $i < j$, то $C_{ij}(x) = B_{i-1,j}(x) + 2x\,B_{ij}(x) + B_{i+1,j} =$
$$= (-1)^{i+j}\,\big(-U_{i-2}(x) + 2x\,U_{i-1}(x) - U_i(x)\big)\,U_{n-j}(x) = 0.$$
6. Если $2 \leqslant i \leqslant n-1$, $j < i$, то $C_{ij}(x) = B_{i-1,j}(x) + 2x\,B_{ij}(x) + B_{i+1,j}(x) =$
$$= (-1)^{i+j}\,U_{j-1}(x)\,\big(-U_{n+1-i}(x) + 2x\,U_{n-i}(x) - U_{n-1-i}(x)\big) = 0.$$
7. Пусть, наконец, $2 \leqslant i = j \leqslant n-1$. В силу (6.1) имеет место цепочка равенств

$$\begin{aligned} C_{ii}(x) &= B_{i-1,i}(x) + 2x\,B_{ii}(x) + B_{i+1,i}(x) = \\ &= -U_{i-2}(x)\,U_{n-i}(x) + U_{i-1}(x)\,\big(2x\,U_{n-i}(x) - U_{n-1-i}(x)\big) = \\ &= -U_{i-2}(x)\,U_{n-i}(x) + U_{i-1}(x)\,U_{n+1-i}(x) = U_n(x). \end{aligned}$$

Таким образом, $C_{ij}(x) = U_n(x)\,\delta_{ij}$ для всех $i,j = 1,\ldots,n$, то есть $A(x)\,B(x) = U_n(x)\,E_n$. Равенство $B(x)\,A(x) = U_n(x)\,E_n$ следует из общей теории ассоциативных колец.

Замечание 1. Далее мы используем также многочлены Чебышева 1-го рода $T_n(x)$. При $n \in \mathbb{N}$ и $x \in (-1,1)$ имеет место представление $T_n(x) = \cos n\Theta$, $\cos\Theta = x$, а функция

$$T_n(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} (2x)^{n-2k}, \quad x \in \mathbb{R},$$

является аналитическим продолжением этой функции [3, с. 62]. Согласно [3, с. 67] имеет место тождество $2\,T_{n+1}(x) = U_{n+1}(x) - U_{n-1}(x)$, поэтому

$$T_{n+1}(x) = x\,U_n(x) - U_{n-1}(x). \tag{6.2}$$

§ 7. Точные формулы для коэффициентов оптимального аппроксимирующего сплайна

Известно, что все нули многочленов $U_n(\cdot)$ лежат в интервале $(-1,1)$ (см. [2, с. 96]), поэтому вне этого интервала имеем $U_n(\cdot) \neq 0$. Зафиксируем $x \notin (-1,1)$, числа ξ_0, ξ_{n+1} и вектор $\eta \in \mathbb{R}^n$. Они порождают систему уравнений $\xi_{k-1}+2x\,\xi_k+\xi_{k+1} = \eta_k$, $k = 1,\ldots,n$, относительно неизвестных $\xi_1,\ldots,\xi_n$. Обозначим $\sigma_j \doteq \eta_j - \delta_{1j}\,\xi_0 - \delta_{nj}\,\xi_{n+1}$, $j = 1,\ldots,n$, $\xi \doteq (\xi_1,\ldots,\xi_n)$, $\sigma \doteq (\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$, тогда система принимает вид $A(x)\,\xi = \sigma$. В силу теоремы 1 имеем равенство $U_n(x)\,\xi = B(x)\,\sigma$, а так как $U_n(x) \neq 0$, то для всех $k = 1,\ldots,n$ справедлива цепочка равенств

$$\xi_k = \frac{1}{U_n(x)}\sum_{j=1}^n B_{kj}(x)\,\sigma_j = \frac{1}{U_n(x)}\Big(\sum_{j=1}^n B_{kj}(x)\,\eta_j - \sum_{j=1}^n B_{kj}(x)\,\delta_{1j}\,\xi_0 - \sum_{j=1}^n B_{kj}(x)\,\delta_{nj}\,\xi_{n+1}\Big) =$$
$$= \frac{1}{U_n(x)}\Big((-1)^k U_{n-k}(x)\,\xi_0 - (-1)^{n-k}U_{k-1}(x)\,\xi_{n+1} + \sum_{j=1}^n B_{kj}(x)\,\eta_j\Big).$$

При $\lambda\mu = 0$ система (5.3) имеет тривиальный вид $y_{2k} = 0$, а при $\lambda\mu \neq 0$ для нее справедливо представление $y_{2k-2} + 2x\,y_{2k} + y_{2k+2} = 0$, $k = 1,\ldots,n \doteq N-1$, в котором использовано обозначение $x \doteq \dfrac{4-9\lambda\mu+3\lambda^2\mu^2}{\lambda\mu\,(1-3\lambda\mu)} \geqslant 15+8\sqrt{3}$ (где $\lambda \in (0,1)$), поэтому для всех $k = 1,\ldots,n$ имеем

$$y_{2k} = \begin{cases} \dfrac{1}{U_n(x)}\big((-1)^k U_{n-k}(x)\,y_0 - (-1)^{n-k}U_{k-1}(x)\,y_{2N}\big), & \text{если} \quad \lambda\mu \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad \lambda\mu = 0. \end{cases} \tag{7.1}$$

В системе (5.4) наряду с параметрами R и r будем использовать обозначения $P \doteq 2r\,\theta\,\omega$, $Q \doteq 3R-2r^2$, $S \doteq R-2\theta^2\omega^2$. Легко проверить, что для коэффициентов этой системы справедливы равенства: $4R-r^2(\lambda)-r^2(\mu) = Q+S$, $R-r(\lambda)r(\mu) = \frac{1}{2}(Q-S)$, $3R-2r\,r(\lambda) = Q-P$, $3R-2r\,r(\mu) = Q+P$. Следовательно, для системы (5.4) имеет место представление

$$(Q-S)\,x_{2k-2} + 2\,(Q+S)\,x_{2k} + (Q-S)\,x_{2k+2} = 2Q\,w_k, \tag{7.2}$$

в котором использованы обозначения: $z_k \doteq 2\theta\,Z_k$, $w_k \doteq (1-P/Q)\,z_k + (1+P/Q)\,z_{k+1}$.

Соотношения $Q = \frac{5}{8} + \big(\frac{3}{8}+6\theta^2\big)\omega^2 > 0$ и $Q - S = -4\theta - \big(\frac{1}{4}+6\theta^2\big)(1-\omega^2) < 0$ очевидны, поэтому $y \doteq \frac{Q+S}{Q-S} = -1+\frac{2Q}{Q-S} < -1$, $\frac{2Q}{Q-S} = 1+y$, а система (7.2) (эквивалентная системе (5.4)) принимает вид $x_{2k-2} + 2y\,x_{2k} + x_{2k+2} = (1+y)\,w_k$, $k = 1,\ldots,n \doteq N-1$. Следовательно,

$$x_{2k} = \frac{1}{U_n(y)}\Big((-1)^k U_{n-k}(y)\,x_0 - (-1)^{n-k}U_{k-1}(y)\,x_{2N} + (1+y)\sum_{j=1}^n B_{kj}(y)\,w_j\Big), \tag{7.3}$$

$$x_{2k} = \frac{1}{U_n(y)}\Big((-1)^k U_{n-k}(y)\,x_0 - (-1)^{n-k}U_{k-1}(y)\,x_{2N} + 2\theta\,(1+y)\sum_{j=1}^n B_{kj}(y)\big[(1-P/Q)\,Z_j + (1+P/Q)\,Z_{j+1}\big]\Big). \tag{7.4}$$

Таким образом, в терминах введенных в работе обозначений справедлива

Теорема 2. *Система уравнений* (5.1)–(5.4) *имеет единственное решение. При этом решения уравнений* (5.3) *и* (5.4) *допускают явное представление для величин* y_{2k} *и* x_{2k} *в виде* (7.1) *и* (7.4) *соответственно, что, в свою очередь, позволяет сначала явно вычислить из уравнений* (5.2) *величины* x_{2k-1}, *а затем из уравнений* (5.1) — *величины* y_{2k-1}.

§ 8. Точная формула для невязки оптимального аппроксимирующего сплайна

Пусть J^* — значение функционала J на решении системы (5.1)–(5.4) (другими словами, J^* — это минимальное значение J в пространстве аппроксимирующих сплайнов $\sigma_\lambda(\Omega)$). Зафиксируем это решение и введем следующие обозначения:

$$P_k \doteq \frac{1}{2}\,(x_{2k-2}+x_{2k}),\quad p_k \doteq \frac{1}{2}\,(x_{2k-2}-x_{2k}),\quad Q_k \doteq \frac{1}{2\,(1-\lambda\mu)}(y_{2k-2}+y_{2k}),\quad q_k \doteq \frac{1}{2}\,(y_{2k-2}-y_{2k}),$$

$$S_k \doteq \frac{r}{R}\,(P_k-z_k)-\frac{\theta\,\omega}{R}\,p_k,\quad T_k \doteq \frac{P}{R}\,(P_k-z_k)+\frac{S}{R}\,p_k,\quad V_k \doteq \frac{Q}{R}\,(P_k-z_k)+\frac{P}{R}\,p_k.$$

В силу (5.2) имеет место равенство $x_{2k-1}=P_k-S_k$, поэтому $X_k=2S_k$. Из соотношений (5.1) получаем равенство $y_{2k-1}=-\lambda\mu\,Q_k+2\theta\,S_k$, поэтому для величин $A^{\ell k}$, $B^{\ell k}$, $C^{\ell k}$ имеем:

$$\begin{array}{l|l|l}
A^{1k}=-2\lambda\,y_{2k-2}-2\mu\,y_{2k}, & B^{1k}=-(\omega S_k-q_k)-(T_k-\omega Q_k), & C^{1k}=(-S_k+V_k-\omega q_k)-\omega^2 Q_k,\\
A^{2k}=2\mu\,y_{2k-2}+2\lambda\,y_{2k}, & B^{2k}=(\omega S_k-q_k)-(T_k-\omega Q_k), & C^{2k}=(-S_k+V_k-\omega q_k)+\omega^2 Q_k,\\
A^{3k}=(S_k-\omega q_k)-(T_k-\omega Q_k), & B^{3k}=2y_{2k}, & C^{3k}=(S_k+V_k+\omega q_k)-(2T_k+\omega Q_k),\\
A^{4k}=(S_k-\omega q_k)+(T_k-\omega Q_k), & B^{4k}=2y_{2k-2}, & C^{4k}=(S_k+V_k+\omega q_k)+(2T_k+\omega Q_k).
\end{array}$$

Таким образом, имеет место цепочка равенств

$$\frac{24}{\nu}\,J^*=\sum_{k=1}^{N}\sum_{\ell=1}^{4}(A^{\ell k})^2+3\sum_{k=1}^{N}\sum_{\ell=1}^{4}(B^{\ell k})^2+2\sum_{k=1}^{N}\sum_{\ell=1}^{4}(C^{\ell k})^2=$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\Big(\,4\,(\lambda\,y_{2k-2}+\mu\,y_{2k})^2+4\,(\mu\,y_{2k-2}+\lambda\,y_{2k})^2+2\,(S_k-\omega q_k)^2+2\,(T_k-\omega Q_k)^2+$$

$$+6\,(\omega S_k-q_k)^2+6\,(T_k-\omega Q_k)^2+12\,y_{2k}^2+12\,y_{2k-2}^2+$$

$$+4\,(-S_k+V_k-\omega q_k)^2+4\,\omega^4 Q_k^2+4\,(S_k+V_k+\omega q_k)^2+4\,(2T_k+\omega Q_k)^2\Big)=\sigma_x+\sigma_y,$$

где

$$\sigma_x \doteq \sum_{k=1}^{N}\big(\,2S_k^2+2T_k^2+6\omega^2 S_k^2+6T_k^2+8S_k^2+8V_k^2+16T_k^2\,\big),$$

$$\sigma_y \doteq \sum_{k=1}^{N}\Big(\,4\,(\lambda\,y_{2k-2}+\mu\,y_{2k})^2+4\,(\mu\,y_{2k-2}+\lambda\,y_{2k})^2+2\omega^2 q_k^2+2\omega^2 Q_k^2+$$

$$+6q_k^2+6\omega^2 Q_k^2+12y_{2k}^2+12y_{2k-2}^2+4\omega^2 q_k^2+4\omega^4 Q_k^2+4\omega^2 q_k^2+4\omega^2 Q_k^2\,\Big)=$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\Big(\,4\,(\lambda\,y_{2k-2}+\mu\,y_{2k})^2+4\,(\mu\,y_{2k-2}+\lambda\,y_{2k})^2+$$

$$+12\,(y_{2k-2}^2+y_{2k}^2)+8\,(2-5\lambda\mu)\,q_k^2+16\omega^2(1-\lambda\mu)Q_k^2\Big)=$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\Big(\,4\,(\lambda\,y_{2k-2}+\mu\,y_{2k})^2+4\,(\mu\,y_{2k-2}+\lambda\,y_{2k})^2+12\,(y_{2k-2}^2+y_{2k}^2)+$$

$$+2\,(2-5\lambda\mu)\,(y_{2k-2}-y_{2k})^2+\frac{4\omega^2}{1-\lambda\mu}\,(y_{2k-2}+y_{2k})^2\Big)=$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\Big(\,6\,\frac{4-9\lambda\mu+3\lambda^2\mu^2}{1-\lambda\mu}\,y_{2k-2}^2+12\lambda\mu\,\frac{1-3\lambda\mu}{1-\lambda\mu}\,y_{2k-2}y_{2k}+6\,\frac{4-9\lambda\mu+3\lambda^2\mu^2}{1-\lambda\mu}\,y_{2k}^2\Big).$$

В силу равенства (5.3) имеем $2\,(4-9\lambda\mu+3\lambda^2\mu^2)\,y_{2k} = -\lambda\mu\,(1-3\lambda\mu)\,(y_{2k-2}+y_{2k+2})$, поэтому

$$\sigma_y = \frac{1}{1-\lambda\mu}\Big(\,6\,(4-9\lambda\mu+3\lambda^2\mu^2)\,y_0^2 - 3\lambda\mu\,(1-3\lambda\mu)\sum_{k=2}^{N} y_{2k-2}\,(y_{2k-4}+y_{2k})\Big)+$$

$$+\,12\lambda\mu\,\frac{1-3\lambda\mu}{1-\lambda\mu}\sum_{k=1}^{N} y_{2k-2}y_{2k}+$$

$$+\,\frac{1}{1-\lambda\mu}\Big(-3\lambda\mu\,(1-3\lambda\mu)\sum_{k=1}^{N-1} y_{2k}\,(y_{2k-2}+y_{2k+2}) + 6\,(4-9\lambda\mu+3\lambda^2\mu^2)\,y_{2N}^2\Big).$$

В итоге, после массовых сокращений, получаем формулу

$$\sigma_y = \frac{6}{1-\lambda\mu}\Big(\,(4-9\lambda\mu+3\lambda^2\mu^2)\,(\,y_0^2+y_{2N}^2) + \lambda\mu\,(1-3\lambda\mu)\,(\,y_0y_2+y_{2N-2}y_{2N})\,\Big)$$

и замечаем, что при $\lambda\mu=0$ имеет место равенство $\sigma_y = 24\,(\,y_0^2+y_{2N}^2)$, а при $\lambda\mu\neq 0$ выражение зависит лишь от величин y_2 и y_{2N-2}. В силу формулы (7.1) для них справедливы равенства $y_2 = \dfrac{1}{U_n(x)}\,(-U_{n-1}(x)\,y_0+(-1)^n\,y_{2N})$, $y_{2N-2} = \dfrac{1}{U_n(x)}\,(\,(-1)^n\,y_0-U_{n-1}(x)\,y_{2N})$. Наконец, в силу формулы (6.2) получаем, что

$$\sigma_y = \frac{6\lambda\mu\,(1-3\lambda\mu)}{1-\lambda\mu}\,\frac{1}{U_n(x)}\,\Big(\,T_N(x)\,y_0^2 + 2\,(-1)^n\,y_0y_{2N} + T_N(x)\,y_{2N}^2\,\Big)$$

— положительно определенная квадратичная форма от исходных конечных разностей

$$y_0 = u_{20}-2\,u_{10}+u_{00} = \alpha(2\tau)-2\,\alpha(\tau)+\alpha(0),\quad y_{2N} = u_{2,2N}-2\,u_{1,2N}+u_{0,2N} = \beta(2\tau)-2\,\beta(\tau)+\beta(0).$$

Заметим еще, что имеет место представление

$$\sigma_y = \begin{cases} 6\,\dfrac{4-9\lambda\mu+3\lambda^2\mu^2}{1-\lambda\mu}\,\dfrac{1}{x\,U_n(x)}\,\Big(\,T_N(x)\,y_0^2 + 2\,(-1)^n\,y_0y_{2N} + T_N(x)\,y_{2N}^2\,\Big), & \text{если } \lambda\mu\neq 0,\\ 24\,(\,y_0^2+y_{2N}^2), & \text{если } \lambda\mu=0, \end{cases} \tag{8.1}$$

а так как $T_N(x)\sim x\,U_n(x)$ при $x\to\infty$, то при $\lambda\mu\to 0$ имеем $x\to\infty$ и $\sigma_y\to 24\,(\,y_0^2+y_{2N}^2)$.

Возвращаясь к сумме σ_x, получаем цепочку равенств

$$\sigma_x = 8\sum_{k=1}^{N}\Big(\,(2-3\lambda\mu)\,S_k^2+3T_k^2+V_k^2\,\Big) = \frac{24}{R}\sum_{k=1}^{N}\Big(\,Q\,(P_k-z_k)^2+2P\,(P_k-z_k)\,p_k+S\,p_k^2\,\Big) =$$

$$= \frac{24}{R}\sum_{k=1}^{N}\Big(\,Q\,(P_k^2-2P_kz_k+z_k^2)+2P\,(P_kp_k-p_kz_k)+S\,p_k^2\,\Big) =$$

$$= \frac{6}{R}\sum_{k=1}^{N}\Big(\,Q\,(x_{2k-2}^2+2\,x_{2k-2}x_{2k}+x_{2k}^2)-4Q\,(x_{2k-2}+x_{2k})\,z_k+4Q\,z_k^2+$$

$$+\,2P\,(x_{2k-2}^2-x_{2k}^2)-4P\,(x_{2k-2}-x_{2k})\,z_k+S\,(x_{2k-2}^2-2\,x_{2k-2}x_{2k}+x_{2k}^2)\Big).$$

Введем обозначение $\sigma \doteq \frac{R}{6}\,\sigma_x-2P\,(\,x_0^2-x_{2N}^2)$. Равенство $\sum\limits_{k=1}^{N}(\,x_{2k-2}^2-x_{2k}^2) = x_0^2-x_{2N}^2$ очевидно, следовательно, имеет место равенство

$$\sigma = \sum_{k=1}^{N}\Big(\,(Q+S)\,x_{2k-2}^2+2\,(Q-S)\,x_{2k-2}x_{2k}+(Q+S)\,x_{2k}^2-4(Q+P)\,x_{2k-2}z_k-4(Q-P)x_{2k}z_k+4Q\,z_k^2\Big).$$

В силу (7.2) имеем $(Q+S)\,x_{2k} = -\frac{1}{2}\,(Q-S)\,(x_{2k-2}+x_{2k+2}) + Q\,w_k$, $k=1,\ldots,N-1$, поэтому

$$\sigma = \Big(\,(Q+S)\,x_0^2 - \frac{1}{2}\,(Q-S)\sum_{k=2}^{N}(x_{2k-4}+x_{2k})\,x_{2k-2} + Q\sum_{k=2}^{N}x_{2k-2}w_{k-1}\Big) +$$

$$+2(Q-S)\sum_{k=1}^{N}x_{2k-2}x_{2k} + \Big(-\frac{1}{2}\,(Q-S)\sum_{k=1}^{N-1}(x_{2k-2}+x_{2k+2})\,x_{2k} + Q\sum_{k=1}^{N-1}x_{2k}w_k + (Q+S)\,x_{2N}^2\,\Big) -$$

$$-\,4\,\Big\{(Q+P)\sum_{k=1}^{N}x_{2k-2}z_k + (Q-P)\sum_{k=1}^{N}x_{2k}z_k\Big\} + 4Q\sum_{k=1}^{N}z_k^2.$$

Выражение, стоящее в фигурных скобках, равно $(Q+P)\,x_0z_1 + (Q-P)\,x_{2N}\,z_N + Q\sum\limits_{k=1}^{N-1}x_{2k}w_k$, следовательно, после приведения подобных членов и массовых сокращений, получаем

$$\sigma = (Q+S)\,(\,x_0^2 + x_{2N}^2) + (Q-S)\,(x_0x_2 + x_{2N-2}x_{2N}) -$$

$$-4\,(Q+P)\,x_0z_1 - 4\,(Q-P)\,x_{2N}\,z_N - 2Q\sum_{k=1}^{N-1}x_{2k}w_k + 4Q\sum_{k=1}^{N}z_k^2,$$

$$\frac{R}{6}\,\sigma_x = (Q+S+2P)\,x_0^2 + (Q+S-2P)\,x_{2N}^2 + (Q-S)\,(x_0x_2 + x_{2N-2}x_{2N}) -$$

$$-4\,(Q+P)\,x_0z_1 - 4\,(Q-P)\,x_{2N}\,z_N - 2Q\sum_{k=1}^{N-1}x_{2k}w_k + 4Q\sum_{k=1}^{N}z_k^2$$

и замечаем, что эти выражения зависят от величин $x_2, x_4, \ldots, x_{2N-2}$ линейно. Осталось лишь применить формулы (7.3), в соответствии с которыми имеем частные равенства

$$x_2 = \frac{1}{U_n(y)}\Big(-U_{n-1}(y)\,x_0 + (-1)^n\,x_{2N} + (1+y)\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}U_{n-j}(y)\,w_j\Big),$$

$$x_{2N-2} = \frac{1}{U_n(y)}\Big(\,(-1)^n\,x_0 - U_{n-1}(y)\,x_{2N} + (1+y)\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}U_{j-1}(y)\,w_j\Big)$$

(воспользовались равенствами $B_{1j}(y) = (-1)^{j-1}U_{n-j}(y)$, $B_{nj}(y) = (-1)^{n-j}U_{j-1}(y)$).

Поскольку $Q-S = \frac{2}{1+y}\,Q$ и $Q+S = \frac{2y}{1+y}\,Q$, то

$$\frac{R}{12}\,\sigma_x = \Big(\frac{y}{1+y}\,Q + P\Big)\,x_0^2 + \Big(\frac{y}{1+y}\,Q - P\Big)\,x_{2N}^2 + \frac{1}{1+y}\,Q\,(x_0x_2 + x_{2N-2}x_{2N}) -$$

$$-2\,(Q+P)\,x_0z_1 - 2\,(Q-P)\,x_{2N}\,z_N - Q\sum_{k=1}^{N-1}x_{2k}w_k + 2Q\sum_{k=1}^{N}z_k^2 =$$

$$= \Big(\frac{y}{1+y}\,Q + P\Big)\,x_0^2 + \Big(\frac{y}{1+y}\,Q - P\Big)\,x_{2N}^2 - 2\,(Q+P)\,x_0z_1 - 2\,(Q-P)\,x_{2N}\,z_N +$$

$$+\frac{1}{1+y}\,Q\,x_0\,\frac{1}{U_n(y)}\Big(-U_{n-1}(y)\,x_0 + (-1)^n\,x_{2N}\,\Big) + Q\,x_0\,\frac{1}{U_n(y)}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}U_{n-j}(y)\,w_j +$$

$$+\frac{1}{1+y}\,Q\,x_{2N}\,\frac{1}{U_n(y)}\Big(\,(-1)^n\,x_0 - U_{n-1}(y)\,x_{2N}\,\Big) + Q\,x_{2N}\,\frac{1}{U_n(y)}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}U_{j-1}(y)\,w_j -$$

$$-Q\,x_0\,\frac{1}{U_n(y)}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}U_{n-k}(y)\,w_k + Q\,x_{2N}\,\frac{1}{U_n(y)}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}U_{k-1}(y)\,w_k -$$

$$-\frac{1}{U_n(y)}\,Q\,(1+y)\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}B_{kj}(y)\,w_kw_j + 2Q\sum_{k=1}^{N}z_k^2.$$

Приведя подобные члены, получаем равенство

$$\frac{R}{12}\,\sigma_x = \Big(\,Q\,\frac{y\,U_n(y)-U_{n-1}(y)}{(1+y)\,U_n(y)}+P\,\Big)\,x_0^2+\Big(\,Q\,\frac{y\,U_n(y)-U_{n-1}(y)}{(1+y)\,U_n(y)}-P\,\Big)\,x_{2N}^2+$$
$$+Q\,\frac{2}{(1+y)\,U_n(y)}\,(-1)^n x_0x_{2N}+\frac{2}{U_n(y)}\,x_0\,\Big\{\,Q\,\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}U_{n-k}(y)\,w_k-U_n(y)\,(Q+P)\,z_1\,\Big\}+$$
$$+\frac{2}{U_n(y)}\,x_{2N}\,\Big\{\,Q\,\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}U_{k-1}(y)\,w_k-U_n(y)\,(Q-P)\,z_N\,\Big\}-$$
$$-\,Q\,\frac{1+y}{U_n(y)}\,\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}B_{ij}(y)\,w_iw_j+2Q\,\sum_{k=1}^{N}z_k^2.$$

Поскольку $Qw_k=(Q-P)\,z_k+(Q+P)\,z_{k+1}$ и $U_{-1}(y)=0$, то для выражений, стоящих в фигурных скобках (обозначим их через σ_1 и σ_2 соответственно), справедливы равенства

$$\sigma_1=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}U_{n-k}(y)\,(Q-P)\,z_k+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}U_{n-k}(y)\,(Q+P)\,z_{k+1}-U_n(y)\,(Q+P)\,z_1=$$
$$=\sum_{k=1}^{N}(-1)^{k-1}U_{n-k}(y)\,(Q-P)\,z_k+\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k-1}U_{n-k}(y)\,(Q+P)\,z_{k+1}=$$
$$=\sum_{k=1}^{N}(-1)^{k-1}U_{n-k}(y)\,(Q-P)\,z_k+\sum_{k=1}^{N}(-1)^{k}U_{N-k}(y)\,(Q+P)\,z_k=$$
$$=P\,\sum_{k=1}^{N}(-1)^k\,\big(\,U_{N-k}(y)+U_{n-k}(y)\,\big)\,z_k+Q\,\sum_{k=1}^{N}(-1)^k\,\big(\,U_{N-k}(y)-U_{n-k}(y)\,\big)\,z_k,$$

$$\sigma_2=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}U_{k-1}(y)\,(Q-P)\,z_k-U_n(y)\,(Q-P)\,z_N+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}U_{k-1}(y)\,(Q+P)\,z_{k+1}=$$
$$=\sum_{k=1}^{N}(-1)^{n-k}U_{k-1}(y)\,(Q-P)\,z_k+\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}U_{k-1}(y)\,(Q+P)\,z_{k+1}=$$
$$=\sum_{k=1}^{N}(-1)^{n-k}U_{k-1}(y)\,(Q-P)\,z_k+\sum_{k=1}^{N}(-1)^{N-k}U_{k-2}(y)\,(Q+P)\,z_k=$$
$$=P\,\sum_{k=1}^{N}(-1)^{N-k}\,\big(\,U_{k-1}(y)+U_{k-2}(y)\,\big)\,z_k+Q\,\sum_{k=1}^{N}(-1)^{n-k}\,\big(\,U_{k-1}(y)-U_{k-2}(y)\,\big)\,z_k.$$

Применив тождество (6.2), то есть $y\,U_n(y)-U_{n-1}(y)=T_{n+1}(y)=T_N(y)$, получаем, что

$$\frac{R}{12}\,\sigma_x=P\,(\,x_0^2-x_{2N}^2)+Q\,\frac{1}{(1+y)\,U_n(y)}\,\big(\,T_N(y)\,x_0^2+2\,(-1)^n x_0x_{2N}+T_N(y)\,x_{2N}^2\,\big)+$$
$$+\frac{2}{U_n(y)}\,x_0\,\Big(\,P\,\sum_{k=1}^{N}(-1)^k\,\big(\,U_{N-k}(y)+U_{n-k}(y)\,\big)\,z_k+Q\,\sum_{k=1}^{N}(-1)^k\,\big(\,U_{N-k}(y)-U_{n-k}(y)\,\big)\,z_k\,\Big)+$$
$$+\frac{2}{U_n(y)}\,x_{2N}\,\Big(\,P\,\sum_{k=1}^{N}(-1)^{N-k}\,\big(\,U_{k-1}(y)+U_{k-2}(y)\,\big)\,z_k+Q\,\sum_{k=1}^{N}(-1)^{n-k}\,\big(\,U_{k-1}(y)-U_{k-2}(y)\,\big)\,z_k\,\Big)-$$
$$-\,Q\,\frac{1+y}{U_n(y)}\,\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}B_{ij}(y)\,w_iw_j+2Q\,\sum_{k=1}^{N}z_k^2.$$

Поскольку $w_k = 2\theta\,[\,(1-P/Q)\,Z_k + (1+P/Q)\,Z_{k+1}]$, то

$$\begin{aligned}\sigma_x = \frac{P}{R}\,\frac{12}{U_n(y)}\Big\{\,U_n(y)\,(\,x_0^2 - x_{2N}^2)+ \qquad (8.2)\\ + 4\theta\,x_0\sum_{k=1}^{N}(-1)^k\big(\,U_{N-k}(y)+U_{n-k}(y)\,\big)\,Z_k + 4\theta\,x_{2N}\sum_{k=1}^{N}(-1)^{N-k}\big(\,U_{k-1}(y)+U_{k-2}(y)\,\big)\,Z_k\Big\}+\\ + \frac{Q}{R}\,\frac{12}{U_n(y)}\Big\{\,\frac{1}{1+y}\big(\,T_N(y)\,x_0^2 + 2\,(-1)^n x_0 x_{2N} + T_N(y)\,x_{2N}^2\,\big) + 8\theta^2 U_n(y)\sum_{k=1}^{N}Z_k^2+\\ + 4\theta\,x_0\sum_{k=1}^{N}(-1)^k\big(\,U_{N-k}(y)-U_{n-k}(y)\,\big)\,Z_k + 4\theta\,x_{2N}\sum_{k=1}^{N}(-1)^{n-k}\big(\,U_{k-1}(y)-U_{k-2}(y)\,\big)\,Z_k\Big)-\\ - 4\theta^2(1+y)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}B_{ij}(y)\,[\,(1-P/Q)\,Z_i + (1+P/Q)\,Z_{i+1}]\,[\,(1-P/Q)\,Z_j + (1+P/Q)\,Z_{j+1}]\Big\}\end{aligned}$$

— положительно определенная квадратичная форма от исходных конечных разностей

$$x_0 = u_{20} - u_{00} = \alpha(2\tau) - \alpha(0), \quad x_{2N} = u_{2,2N} - u_{0,2N} = \beta(2\tau) - \beta(0),$$
$$Z_k = u_{0,2k-2} - 2\,u_{0,2k-1} + u_{0,2k} = \phi(h_{2k-2}) - 2\,\phi(h_{2k-1}) + \phi(h_{2k}), \quad k = 1, \ldots, N.$$

Таким образом, в терминах введенных в работе обозначений справедлива

Теорема 3. *Минимум J^* функционала J достигается на решении системы* (5.1)–(5.4), *и для него имеет место точная формула $J^* = \frac{\nu}{24}\,(\sigma_x+\sigma_y)$, где величины σ_x и σ_y вычислимы по формулам* (8.2) *и* (8.1) *соответственно.*

§ 9. Компьютерные исследования качества аппроксимации

Последнее утверждение позволяет провести исследование на качество аппроксимации при разных N и λ. При фиксированном $\lambda \in [0,1]$ определена последовательность $\{\,J_N\,\}$, где J_N — это значение J^*, вычисленное при заданном $N \in \mathbb{N}$. При выполнении определенных условий на функции α, β и ϕ имеем $J_N \to 0$, поэтому полученная формула позволяет при заданной точности вычислений $\varepsilon > 0$ решить неравенство $\sqrt{J_N} < \varepsilon$ (например, программным образом) и получить априори достаточное количество узлов сетки $\{\,(\tau_i, h_j)\,\}$.

Пусть, например, $\gamma = 1$, $\tau = 0.1$, функции α, β, ϕ — линейные, причем старшие коэффициенты функций α и β — одинаковые и равны по 0.9. Если $\varepsilon = 10^{-3}$, а $\lambda = 0.5$, то достаточно взять $N = 14$.

При фиксированном $N \in \mathbb{N}$ определена аналитическая функция $\lambda \to J(\lambda)$, где $J(\lambda)$ — это значение J^*, вычисленное при заданном $\lambda \in [0,1]$. В условиях предыдущего примера полагаем $N=14$, а λ — любое. В результате вычислений имеем значения

$J(0.0) = 0.0028867$, $J(0.1) = 0.0025362$, $J(0.2) = 0.0020595$,

$J(0.3) = 0.0014592$, $J(0.4) = 0.0007530$, $J(0.5) = 0.0000009$

(функция $\lambda \to J(\lambda)$ имеет ровно два интервала монотонности, причем $J(1-\lambda) = J(\lambda)$). Мы обнаруживаем ярко выраженный минимум функции, расположенный в точке $\lambda = 0.5$, и «желанный» эффект: значение $\lambda = 0.5$ имеет безусловный приоритет.

У нас есть основание полагать, что процедуры конструирования сплайнов посредством формулы (0.1) и их «усреднения» с помощью параметра λ, близкого к значению 0.5, применимы не только для функционала из задачи (1.4), но и для функционала $J(u) \doteq \|\,Du\,\|^2_{L_2(\Omega)}$, порожденного произвольным дифференциальным оператором D. Вычислительные эксперименты подтверждают это наблюдение, однако в отличие от задачи (1.4) здесь мы не имеем возможности точных вычислений: минимизацию функционала приходится осуществлять методом градиентного спуска.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Родионов В. И. Об аппроксимации функций многих переменных специальными сплайнами // Трехмерная визуализация научной, технической и социальной реальности. Кластерные технологии моделирования: Сб. докл. Междунар. конф. Ижевск: УдГУ, 2009. — С. 164–168.
2. Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены. — М.: Наука, 1976. — 328 с.
3. Риордан Дж. Комбинаторные тождества. — М.: Наука, 1982. — 256 с.

Поступила в редакцию 06.04.10

V. I. Rodionov, N. V. Rodionova

Exact formulas for coefficients and residual of optimal approximate spline of simplest heat conduction equation

We defined the parameter family of finite-dimensional spaces of special quadratic splines of Lagrange's type. In each space as solution to the initial-boundary problem for the simplest heat conduction equation we propose optimal spline, which gives the smallest residual, which is a norm in the space L_2. We obtained exact formulas for coefficients of this spline and its residual. The formula for coefficients of this spline is a linear form of finite differences discrete given initial and boundary conditions of the original problem. The formula for the residual is a positive definite quadratic form of these quantities. The coefficients of both forms are computable via Chebyshev's polynomials. We exercised the computer study of the quality of approximation depending on parameters of the family.

Keywords: interpolation, approximate spline, residual, Chebyshev's polynomials.

Mathematical Subject Classifications: 41A15

Родионов Виталий Иванович, декан факультета информационных технологий и вычислительной техники, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 6), E-mail: rodionov@uni.udm.ru

Родионова Надежда Витальевна, аспирант, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 6), E-mail: rodionov@uni.udm.ru