УДК 519.651 + 517.518.823

© *В. И. Родионов*

О ПРИМЕНЕНИИ СПЕЦИАЛЬНЫХ МНОГОМЕРНЫХ СПЛАЙНОВ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СТЕПЕНИ В ЧИСЛЕННОМ АНАЛИЗЕ

Приведены обоснование и процедура построения специальных многомерных сплайнов произвольной степени лагранжевого типа, названных λ-сплайнами. Они строятся из многомерных интерполяционных алгебраических многочленов фиксированной степени, заданных на симплексах специальной триангуляции области определения исходной функции.

Ключевые слова: интерполяция, аппроксимация, многомерный сплайн, симплекс, барицентрическая система координат.

§ 1. S-базисы пространства n-мерных полиномов степени не выше m

Точки $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$ такие, что векторы $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$ (где $\Delta x_j \doteq x_j - x_0$) линейно независимы, порождают симплекс, который будем обозначать в виде $\langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle$. Через $\{ e_1, \ldots, e_n \}$ обозначим стандартный базис в $\mathbb{R}^n$. (Заметим, что векторы $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$ также образуют базис этого пространства.) Очевидно, квадратная матрица $X = \big(X_{kj} \big)$ порядка n, состоящая из скалярных произведений $X_{kj} \doteq (e_k, \Delta x_j)$, обратима, то есть существует квадратная матрица $Y = \big(Y_{ik} \big)$ такая, что $YX = E_n = XY$ (где E_n — единичная матрица порядка n), следовательно, для всех $i, j \in K$ справедливы равенства

$$\sum_{k\in K} Y_{ik} X_{kj} = \sum_{k\in K} Y_{ik} \, (e_k, \Delta x_j) = \delta_{ij}, \qquad \sum_{k\in K} X_{ik} Y_{kj} = \sum_{k\in K} (e_i, \Delta x_k) \, Y_{kj} = \delta_{ij},$$

где $K \doteq \{ 1, \ldots, n \}$, δ_{ij} — символ Кронекера. Для каждого $i \in K$ определим линейную функцию $\varphi_i(\xi) \doteq \sum\limits_{k\in K} Y_{ik} \, (e_k, \xi - x_0)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, и пусть $\varphi_0(\cdot) \doteq 1 - \sum\limits_{i\in K} \varphi_i(\cdot)$.

Через $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n$ обозначим барицентрические координаты точки $\xi \in \mathbb{R}^n$ относительно вершин симплекса $\mathrm{S} \doteq \langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle$, то есть выполнены равенства $\sum\limits_{j\in N} \mu_j = 1$, $\sum\limits_{j\in N} \mu_j \, x_j = \xi$, где $N \doteq \{ 0, 1, \ldots, n \} = \{ 0 \} \cup K$. Покажем, что $\varphi_i(\xi) = \mu_i$ для всех $i \in N$. Действительно, так как $\xi - x_0 = \sum\limits_{j\in N} \mu_j \, x_j - \sum\limits_{j\in N} \mu_j \, x_0 = \sum\limits_{j\in K} \mu_j \, \Delta x_j$, то

$$\varphi_i(\xi) = \sum_{k\in K} Y_{ik} \sum_{j\in K} \mu_j \, (e_k, \Delta x_j) = \sum_{j\in K} \mu_j \sum_{k\in K} Y_{ik} \, (e_k, \Delta x_j) = \sum_{j\in K} \mu_j \, \delta_{ij} = \mu_i, \qquad i \in K,$$

$$\varphi_0(\xi) = 1 - \sum_{i\in K} \varphi_i(\xi) = 1 - \sum_{i\in K} \mu_i = \mu_0.$$

Как следствие, справедливы равенства

$$\xi = x_0 + \sum_{j\in K} \varphi_j(\xi) \, \Delta x_j, \qquad \xi = x_0 + \sum_{j\in K} \varphi_j(\xi) \, x_j - \sum_{j\in K} \varphi_j(\xi) \, x_0 = \sum_{j\in N} \varphi_j(\xi) \, x_j. \tag{1}$$

Таким образом, барицентрические координаты точки $\xi \in \mathbb{R}^n$ представляют собой совокупность чисел $(\varphi_0(\xi), \varphi_1(\xi), \ldots, \varphi_n(\xi))$. В частности, $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$ для всех $i, j \in N$ и, следовательно, $\varphi_i(\xi) = 0$ — это уравнение грани $\operatorname{conv} \big\{ x_k \colon k \in N \backslash \{i\} \big\}$ симплекса S.

Зафиксируем целое неотрицательное число m и введем в рассмотрение частично упорядоченное множество мультииндексов:

$$N_m \doteq N(m) \doteq \Big\{ \alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \colon \alpha_i \in \mathbb{Z}, \ \alpha_i \geqslant 0, \ \sum_{i\in N} \alpha_i = m \Big\},$$

где по определению полагаем $\alpha \leqslant \beta$, если $\alpha_i \leqslant \beta_i$ для всех $i \in K$ (очевидно, если $\alpha \leqslant \beta$, то $\alpha_0 \geqslant \beta_0$). Согласно [1, с. 20] справедливо равенство $\operatorname{card} N_m = \binom{n+m}{m}$.

Для любого $\alpha \in N_m$ полагаем $x_\alpha \doteq \frac{1}{m} \sum\limits_{i \in N} \alpha_i\, x_i$. Очевидно, $x_\alpha \in \operatorname{conv} \{ x_k \colon k \in N \}$, а так как числа $\frac{1}{m}\, \alpha_i$, $i \in N$, — это барицентрические координаты точки x_α, то $\varphi_i(x_\alpha) = \frac{1}{m}\, \alpha_i$.

Полагаем, далее, $\varphi_k^{[0]}(\xi) \doteq 1$ и $\varphi_k^{[\ell]}(\xi) \doteq \prod\limits_{i=1}^{\ell} \big(m\, \varphi_k(\xi) + 1 - i \big)$ для любого $\ell \in \mathbb{N}$. Наконец, для любого $\alpha \in N_m$ полагаем $\varphi^\alpha(\xi) \doteq \prod\limits_{k \in N} \frac{1}{\alpha_k!}\, \varphi_k^{[\alpha_k]}(\xi)$. Другими словами, при $m \in \mathbb{N}$ для любого $\alpha \in N_m$ определен n-мерный полином степени m

$$\varphi^\alpha(\xi) = \prod_{k \in N\colon \alpha_k > 0} \frac{1}{\alpha_k!} \prod_{i=1}^{\alpha_k} \big(m\, \varphi_k(\xi) + 1 - i \big), \qquad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Зафиксируем мультииндексы $\alpha, \beta \in N_m$. Если $\alpha \neq \beta$, то найдется индекс $k \in N$ такой, что $\alpha_k > \beta_k$, следовательно, $\varphi_k^{[\alpha_k]}(x_\beta) = \prod\limits_{i=1}^{\alpha_k} \big(m\, \varphi_k(x_\beta) + 1 - i \big) = \prod\limits_{i=1}^{\alpha_k} \big(\beta_k + 1 - i \big) = 0$ (так как один из сомножителей равен нулю), поэтому $\varphi^\alpha(x_\beta) = 0$. Если же $\alpha = \beta$, то при $\alpha_k > 0$

$$\varphi_k^{[\alpha_k]}(x_\beta) = \prod_{i=1}^{\alpha_k} \big(m\, \varphi_k(x_\beta) + 1 - i \big) = \prod_{i=1}^{\alpha_k} \big(\beta_k + 1 - i \big) = \prod_{i=1}^{\alpha_k} \big(\alpha_k + 1 - i \big) = \alpha_k!,$$

поэтому $\varphi^\alpha(x_\beta) = 1$. Таким образом, $\varphi^\alpha(x_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$ для любых $\alpha, \beta \in N_m$.

Покажем, что совокупность $\big\{ \varphi^\alpha(\xi) \big\}_{\alpha \in N(m)}$ состоит из линейно независимых многочленов. Действительно, предположив, что $\sum\limits_{\alpha \in N(m)} C_\alpha \varphi^\alpha(\xi) \equiv 0$ для некоторого набора чисел C_α, мгновенно получаем, что $0 = \sum\limits_{\alpha \in N(m)} C_\alpha \varphi^\alpha(x_\beta) = \sum\limits_{\alpha \in N(m)} C_\alpha \delta_{\alpha\beta} = C_\beta$ для любого $\beta \in N_m$.

Через $\mathrm{P}_m[\xi]$ обозначим конечномерное пространство полиномов переменной $\xi \in \mathbb{R}^n$ степени не выше m. (Степенью монома $\xi^\alpha \doteq \prod\limits_{i \in K} \xi_i^{\alpha_i}$, где $\alpha \in N_m$, называется сумма $\sum\limits_{i \in K} \alpha_i$, а степенью полинома — максимум из степеней его мономов. Совокупность таких мономов образует базис пространства $\mathrm{P}_m[\xi]$, поэтому $\dim \mathrm{P}_m[\xi] = \binom{n+m}{m}$.) Очевидно, $\varphi^\alpha(\xi) \in \mathrm{P}_m[\xi]$ для любого $\alpha \in N_m$, следовательно, совокупности $\big\{ \xi^\alpha \big\}_{\alpha \in N(m)}$ и $\big\{ \varphi^\alpha(\xi) \big\}_{\alpha \in N(m)}$, каждая из которых состоит ровно из $\binom{n+m}{m}$ линейно независимых функций, являются базисами пространства $\mathrm{P}_m[\xi]$. Первый базис называем далее *стандартным*, а второй — S-*базисом*, подчеркивая его происхождение от симплекса S.

Приведенные построения позволяют легко получить известное [5, 6] утверждение о лагранжевой интерполяции функций многих переменных.

Теорема 1 (см. [5, 6]). *Пусть заданы симплекс* $\mathrm{S} \doteq \langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle$ *и функция* $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. *В пространстве* $\mathrm{P}_m[\xi]$ *существует ровно один полином* P *такой, что* $P(x_\alpha) = F(x_\alpha)$ *для всех* $\alpha \in N_m$ *(где* $x_\alpha \doteq \frac{1}{m} \sum\limits_{i \in N} \alpha_i\, x_i$*). Этот многочлен представим в виде*

$$P(\xi) = \sum_{\alpha \in N(m)} F(x_\alpha)\, \varphi^\alpha(\xi). \tag{3}$$

Действительно, $P(x_\beta) = \sum\limits_{\alpha \in N(m)} F(x_\alpha)\, \varphi^\alpha(x_\beta) = \sum\limits_{\alpha \in N(m)} F(x_\alpha)\, \delta_{\alpha\beta} = F(x_\beta)$ для всех $\beta \in N_m$, а единственность имеет место постольку, поскольку $\big\{ \varphi^\alpha(\xi) \big\}_{\alpha \in N(m)}$ — это S-базис в $\mathrm{P}_m[\xi]$.

Замечание 1. Пусть $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — полином степени не выше m, то есть $F(\xi) \in \mathrm{P}_m[\xi]$. Для него справедливо представление $F(\xi) = \sum\limits_{\alpha \in N(m)} F_\alpha \varphi^\alpha(\xi)$, поэтому для любого $\beta \in N_m$ имеют место равенства $F(x_\beta) = \sum\limits_{\alpha \in N(m)} F_\alpha \varphi^\alpha(x_\beta) = \sum\limits_{\alpha \in N(m)} F_\alpha \delta_{\alpha\beta} = F_\beta$ и тождество $F(\xi) \equiv \sum\limits_{\alpha \in N(m)} F(x_\alpha)\, \varphi^\alpha(\xi)$.

§ 2. Прямая и обратная матрицы перехода от стандартного базиса к S-базису

Пусть $F(\xi) \doteq \xi^\alpha$ для некоторого $\alpha \in N_m$. В силу первой формулы (1) для любого $\beta \in N_m$ имеем $(x_\beta)_i = (e_i, x_\beta) = (e_i, x_0) + \sum\limits_{j\,\in K} \varphi_j(x_\beta)\,(e_i, \Delta x_j) = (e_i, x_0) + \frac{1}{m}\sum\limits_{j\,\in K} X_{ij}\,\beta_j$, поэтому

$$F(x_\beta) = \prod_{i\,\in K} (e_i, x_\beta)^{\alpha_i} = \prod_{i\,\in K} \big[\,(e_i, x_0) + \tfrac{1}{m}\sum_{j\,\in K} X_{ij}\,\beta_j\,\big]^{\alpha_i},$$

следовательно, в силу замечания 1 справедливо равенство

$$\xi^\alpha = \sum_{\beta\in N(m)} \prod_{i\,\in K} \big[\,(e_i, x_0) + \tfrac{1}{m}\sum_{j\,\in K} X_{ij}\,\beta_j\,\big]^{\alpha_i}\,\varphi^\beta(\xi). \tag{4}$$

Формула (4) позволяет переходить от базиса $\big\{\,\xi^\alpha\big\}_{\alpha\in N(m)}$ к S-базису $\big\{\,\varphi^\alpha(\xi)\,\big\}_{\alpha\in N(m)}$. Для обратного перехода можно воспользоваться формулой Тейлора $F(\xi) \equiv \sum\limits_{\alpha\in N(m)} \frac{D^\alpha F(0)}{\alpha!}\,\xi^\alpha$, где $F(\xi) \in \mathrm{P}_m[\xi]$, $\alpha! \doteq \alpha_1!\ldots\alpha_n!$, а $D^\alpha \doteq \frac{\partial^{\,\alpha_1+\ldots+\alpha_n}}{\partial\xi_1^{\alpha_1}\ldots\partial\xi_n^{\alpha_n}}$ — оператор дифференцирования. Достаточно взять $F(\xi) \doteq \varphi^\beta(\xi)$ для каждого $\beta \in N_m$. Однако аналитическая процедура вычисления частных производных практически дословно повторяет предлагаемый ниже комбинаторный способ решения и далее не обсуждается. Введем в рассмотрение совокупности полиномов $\big\{\,\psi^\alpha(\xi)\,\big\}_{\alpha\in N(m)}$ и $\big\{\,\chi^\alpha(\xi)\,\big\}_{\alpha\in N(m)}$ из $\mathrm{P}_m[\xi]$, где $\psi^\alpha(\xi) \doteq \prod\limits_{i\,\in K} \varphi_i^{\alpha_i}(\xi)$ и $\chi^\alpha(\xi) \doteq \prod\limits_{i\,\in N} \varphi_i^{\alpha_i}(\xi)$.

1. Для мультииндексов $\alpha, \beta \in N_m$ таких, что $\alpha_0 \leqslant \beta_0$, определим числа

$$V_{\alpha\beta} \doteq \sum_{z\,\in M_{\alpha\beta}} \prod_{i\,\in K} \frac{\alpha_i!}{z_{i0}!}\,(e_i, x_0)^{z_{i0}} \cdot \prod_{i,j\,\in K} \frac{1}{z_{ij}!}\,X_{ij}^{z_{ij}},$$

$$W_{\alpha\beta} \doteq \sum_{z\,\in M_{\alpha\beta}} \prod_{i\,\in K} \frac{\alpha_i!}{z_{i0}!}\,\varphi_i^{z_{i0}}(0) \cdot \prod_{i,j\,\in K} \frac{1}{z_{ij}!}\,Y_{ij}^{z_{ij}}\,,$$

где через $M_{\alpha\beta}$ обозначено множество квадратных матриц порядка $1+n$:

$$M_{\alpha\beta} \doteq \left\{\begin{array}{c|l} z = \big(\,z_{ij}\big) & z_{ij} \in \mathbb{Z},\; z_{ij} \geqslant 0\ \ (\forall\, i, j \in N\,),\; z_{00} = \alpha_0,\; z_{0j} = 0\ \ (\forall\, j \in K\,) \\ & \sum\limits_{j\,\in N} z_{ij} = \alpha_i\ \ (\forall\, i \in K\,),\ \sum\limits_{i\,\in K} z_{ij} = \beta_j\ \ (\forall\, j \in K\,) \end{array}\right\}.$$

Покажем, что для любого $\alpha \in N_m$ имеют место равенства

$$\xi^\alpha = \sum_{\substack{\beta\,\in N(m)\\ \beta_0\geqslant\alpha_0}} V_{\alpha\beta}\,\psi^\beta(\xi)\,, \qquad \psi^\alpha(\xi) = \sum_{\substack{\beta\,\in N(m)\\ \beta_0\geqslant\alpha_0}} W_{\alpha\beta}\,\xi^\beta. \tag{5}$$

Действительно, в силу равенств (1) и $\varphi_i(\xi) - \varphi_i(0) = \sum\limits_{j\,\in K} Y_{ij}\,(e_j, \xi)$ для любого $i \in K$ имеем

$$\xi_i = (e_i, \xi) = (e_i, x_0) + \sum_{j\,\in K} X_{ij}\,\varphi_j(\xi)\,, \qquad \varphi_i(\xi) = \varphi_i(0) + \sum_{j\,\in K} Y_{ij}\,\xi_j, \tag{6}$$

следовательно, в силу второго равенства (6) справедлива цепочка равенств

$$\psi^\alpha(\xi) = \prod_{i\,\in K} \varphi_i^{\alpha_i}(\xi) = \prod_{i\,\in K} \big[\,\varphi_i(0) + \sum_{j\,\in K} Y_{ij}\,\xi_j\,\big]^{\alpha_i} = \prod_{i\,\in K}\ \sum_{\nu^i\in N(\alpha_i)} \frac{\alpha_i!}{\prod\limits_{j\,\in N} \nu_j^i!} \cdot \varphi_i^{\nu_0^i}(0) \prod_{j\,\in K} (\,Y_{ij}\,\xi_j\,)^{\nu_j^i} =$$

$$= \sum_{\substack{\nu^1\in N(\alpha_1)\\ \cdots\\ \nu^n\in N(\alpha_n)}} \prod_{i\,\in K} \frac{\alpha_i!}{\nu_0^i!}\,\varphi_i^{\nu_0^i}(0) \cdot \prod_{i,j\,\in K} \frac{1}{\nu_j^i!}\,Y_{ij}^{\nu_j^i} \cdot \prod_{j\,\in K} \xi_j^{\beta_j},$$

где $\beta_j \doteq \sum\limits_{i\in K} \nu_j^i$ при всех $j \in K$. Пусть $\beta_0 \doteq \alpha_0 + \sum\limits_{i\in K} \nu_0^i$. Тогда

$$\sum_{j\in N} \beta_j = \alpha_0 + \sum_{i\in K} \nu_0^i + \sum_{i,j\in K} \nu_j^i = \alpha_0 + \sum_{i\in K} \Big[\, \nu_0^i + \sum_{j\in K} \nu_j^i \,\Big] = \alpha_0 + \sum_{i\in K} \alpha_i = m\,, \qquad \beta_0 \geqslant \alpha_0,$$

поэтому мультииндекс $\beta \doteq (\,\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n\,)$ принадлежит N_m, причем $\beta_0 \geqslant \alpha_0$. Таким образом, введя в рассмотрение квадратные матрицы $z = \big(\, z_{ij}\,\big)$ такие, что $z_{00} = \alpha_0$, $z_{0j} = 0$ для всех $j \in K$ и $z_{ij} = \nu_j^i$ для всех $(i,j) \in K \times N$, получаем

$$\psi^\alpha(\xi) = \sum_{\substack{\beta\in N(m)\\ \beta_0\geqslant\alpha_0}} \Big[\, \sum_{z\in M_{\alpha\beta}} \prod_{i\in K} \frac{\alpha_i!}{z_{i0}!}\, \varphi_i^{z_{i0}}(0) \cdot \prod_{i,j\in K} \frac{1}{z_{ij}!}\, Y_{ij}^{z_{ij}} \,\Big]\, \xi^\beta = \sum_{\substack{\beta\in N(m)\\ \beta_0\geqslant\alpha_0}} W_{\alpha\beta}\, \xi^\beta.$$

Доказательство первого равенства (5) дословно повторяет предыдущие выкладки, требуется лишь в соответствии с (6) заменить величины $\varphi_i(0)$ и Y_{ij} на (e_i, x_0) и X_{ij} соответственно.

Замечание 2. В силу первой формулы (5) произвольный полином $P(\xi) = \sum\limits_{\alpha\in N(m)} P_\alpha \xi^\alpha$ из пространства $\mathrm{P}_m[\xi]$ допускает представление в виде линейной комбинации функций из совокупности $\big\{\, \psi^\alpha(\xi)\,\big\}_{\alpha\in N(m)}$. Значит, она является базисом пространства $\mathrm{P}_m[\xi]$.

2. Пусть мультииндексы $\alpha, \beta \in N_m$ таковы, что $\alpha \leqslant \beta$. Покажем, что числа

$$C_{\alpha\beta} \doteq (-1)^{\alpha_0-\beta_0}\, \frac{\alpha_0!}{\beta_0! \prod\limits_{i\in K} (\beta_i-\alpha_i)!}\,, \qquad D_{\alpha\beta} \doteq \frac{\alpha_0!}{\beta_0! \prod\limits_{i\in K} (\beta_i-\alpha_i)!}$$

удовлетворяют тождествам $\sum\limits_{\substack{\kappa\in N(m)\\ \alpha\leqslant\kappa\leqslant\beta}} C_{\alpha\kappa} D_{\kappa\beta} = \delta_{\alpha\beta}$, $\sum\limits_{\substack{\kappa\in N(m)\\ \alpha\leqslant\kappa\leqslant\beta}} D_{\alpha\kappa} C_{\kappa\beta} = \delta_{\alpha\beta}$. Действительно, так как $\alpha_0 - \kappa_0 = \sum\limits_{i\in K} (\kappa_i - \alpha_i)$ для любых $\alpha, \kappa \in N_m$, то

$$C_{\alpha\kappa} D_{\kappa\beta} = (-1)^{\alpha_0-\kappa_0}\, \frac{\alpha_0!}{\kappa_0! \prod\limits_{i\in K} (\kappa_i-\alpha_i)!}\, \frac{\kappa_0!}{\beta_0! \prod\limits_{i\in K} (\beta_i-\kappa_i)!} = \frac{\alpha_0!}{\beta_0! \prod\limits_{i\in K} (\beta_i-\alpha_i)!} \prod_{i\in K} (-1)^{\kappa_i-\alpha_i} \binom{\beta_i-\alpha_i}{\kappa_i-\alpha_i},$$

$$\frac{\beta_0!}{\alpha_0!} \prod_{i\in K} (\beta_i-\alpha_i)! \sum_{\substack{\kappa\in N(m)\\ \alpha\leqslant\kappa\leqslant\beta}} C_{\alpha\kappa} D_{\kappa\beta} = \sum_{\substack{\kappa\in N(m)\\ \alpha\leqslant\kappa\leqslant\beta}} \prod_{i\in K} (-1)^{\kappa_i-\alpha_i} \binom{\beta_i-\alpha_i}{\kappa_i-\alpha_i} =$$

$$= \prod_{i\in K} \sum_{\kappa_i=\alpha_i}^{\beta_i} (-1)^{\kappa_i-\alpha_i} \binom{\beta_i-\alpha_i}{\kappa_i-\alpha_i} = \prod_{i\in K} \delta_{\alpha_i\beta_i} = \begin{cases} 0, & \alpha\neq\beta \\ 1, & \alpha=\beta \end{cases}.$$

Второе тождество доказывается аналогично.

Зафиксируем мультииндекс $\alpha \in N_m$. Имеет место цепочка равенств

$$\varphi_0^{\alpha_0}(\xi) = (-1)^{\alpha_0} \big[-1 + \varphi_1(\xi) + \ldots + \varphi_n(\xi) \big]^{\alpha_0} = \sum_{\kappa\in N(\alpha_0)} \frac{\alpha_0!}{\prod\limits_{i\in N} \kappa_i!}\, (-1)^{\alpha_0+\kappa_0} \prod_{i\in K} \varphi_i^{\kappa_i}(\xi).$$

Если $\beta_0 \doteq \kappa_0$ и $\beta_i \doteq \alpha_i + \kappa_i$ для всех $i \in K$, то $\sum\limits_{i\in N} \beta_i = \sum\limits_{i\in N} \kappa_i + \sum\limits_{i\in K} \alpha_i = \alpha_0 + \sum\limits_{i\in K} \alpha_i = m$, поэтому мультииндекс $\beta \doteq (\,\beta_0, \beta_1 \ldots, \beta_n\,)$ принадлежит N_m, причем $\beta \geqslant \alpha$. Следовательно,

$$\varphi_0^{\alpha_0}(\xi) = \sum_{\substack{\beta\in N(m)\\ \beta\geqslant\alpha}} (-1)^{\alpha_0-\beta_0}\, \frac{\alpha_0!}{\beta_0! \prod\limits_{i\in K} (\beta_i-\alpha_i)!} \prod_{i\in K} \varphi_i^{\beta_i-\alpha_i}(\xi) = \sum_{\substack{\beta\in N(m)\\ \beta\geqslant\alpha}} C_{\alpha\beta} \prod_{i\in K} \varphi_i^{\beta_i-\alpha_i}(\xi)\,.$$

Покажем, что функции $\chi^\alpha(\xi)$ и $\psi^\alpha(\xi)$ связаны соотношениями

$$\chi^\alpha(\xi) = \sum_{\substack{\beta\in N(m)\\ \beta\geqslant\alpha}} C_{\alpha\beta}\, \psi^\beta(\xi), \qquad \psi^\alpha(\xi) = \sum_{\substack{\beta\in N(m)\\ \beta\geqslant\alpha}} D_{\alpha\beta}\, \chi^\beta(\xi). \tag{7}$$

Действительно, для любого $\alpha\in N_m$ имеем

$$\chi^{\alpha}(\xi)=\prod_{i\in N}\varphi_i^{\alpha_i}(\xi)=\varphi_0^{\alpha_0}(\xi)\prod_{i\in K}\varphi_i^{\alpha_i}(\xi)=\sum_{\substack{\beta\in N(m)\\ \beta\geqslant\alpha}}C_{\alpha\beta}\prod_{i\in K}\varphi_i^{\beta_i}(\xi)=\sum_{\substack{\beta\in N(m)\\ \beta\geqslant\alpha}}C_{\alpha\beta}\,\psi^{\beta}(\xi),$$

$$\sum_{\substack{\beta\in N(m)\\ \beta\geqslant\alpha}}D_{\alpha\beta}\,\chi^{\beta}(\xi)=\sum_{\substack{\beta\in N(m)\\ \beta\geqslant\alpha}}\sum_{\substack{\kappa\in N(m)\\ \kappa\geqslant\beta}}D_{\alpha\beta}\,C_{\beta\kappa}\,\psi^{\kappa}(\xi)=$$

$$=\sum_{\substack{\kappa\in N(m)\\ \kappa\geqslant\alpha}}\sum_{\substack{\beta\in N(m)\\ \alpha\leqslant\beta\leqslant\kappa}}D_{\alpha\beta}\,C_{\beta\kappa}\,\psi^{\kappa}(\xi)=\sum_{\substack{\kappa\in N(m)\\ \kappa\geqslant\alpha}}\delta_{\alpha\kappa}\psi^{\kappa}(\xi)=\psi^{\alpha}(\xi).$$

Замечание 3. В силу второй формулы (7) произвольный полином $P(\xi)=\sum\limits_{\alpha\in N(m)}P_{\alpha}\psi^{\alpha}(\xi)$ из пространства $\mathrm{P}_m[\xi]$ допускает представление в виде линейной комбинации функций из совокупности $\{\,\chi^{\alpha}(\xi)\,\}_{\alpha\in N(m)}$. Значит, она является базисом пространства $\mathrm{P}_m[\xi]$.

3. Зафиксируем мультииндекс $\alpha\in N_m$. Согласно [1, с. 43] при $\alpha_k>0$ имеет место равенство $\prod\limits_{i=1}^{\alpha_k}\big(\,m\,\varphi_k(\xi)+1-i\,\big)=\sum\limits_{\gamma_k=0}^{\alpha_k}s(\alpha_k,\gamma_k)\,m^{\gamma_k}\varphi_k^{\gamma_k}(\xi)$, где $s(n,k)$ — числа Стирлинга 1-го рода. Поскольку принято считать, что $s(0,0)=1$, то в силу (2) имеет место цепочка равенств

$$\prod_{k\in N}\alpha_k!\;\varphi^{\alpha}(\xi)=\prod_{k\in N}\sum_{\gamma_k=0}^{\alpha_k}s(\alpha_k,\gamma_k)\,m^{\gamma_k}\varphi_k^{\gamma_k}(\xi)=\sum_{\substack{\gamma_0=0,\dots,\alpha_0\\ \gamma_1=0,\dots,\alpha_1\\ \dots\\ \gamma_n=0,\dots,\alpha_n}}\prod_{k\in N}s(\alpha_k,\gamma_k)\prod_{k\in N}m^{\gamma_k}\prod_{k\in N}\varphi_k^{\gamma_k}(\xi)$$

или, в компактной форме, $\prod\limits_{k\in N}\alpha_k!\;\varphi^{\alpha}(\xi)=\sum\limits_{0\preceq\gamma\preceq\alpha}s(\alpha,\gamma)\,m^{|\,\gamma\,|}\prod\limits_{k\in N}\varphi_k^{\gamma_k}(\xi)$. Здесь использованы следующие определения и обозначения: $\preceq$ — отношение частичного порядка на множестве всех мультииндексов $\alpha\doteq(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, где по определению полагаем $\gamma\preceq\alpha$, если $\gamma_i\leqslant\alpha_i$ для всех $i\in N$; полагаем также $s(\alpha,\gamma)\doteq\prod\limits_{k\in N}s(\alpha_k,\gamma_k)$ и $|\,\gamma\,|\doteq\sum\limits_{k\in N}\gamma_k$.

Поскольку $1=\sum\limits_{k\in N}\varphi_k(\xi)$, то для любого целого неотрицательного числа p справедливы равенства $1=\Big[\sum\limits_{k\in N}\varphi_k(\xi)\Big]^p=\sum\limits_{\nu:\,|\,\nu\,|=p}\dfrac{p!}{\prod\limits_{k\in N}\nu_k!}\prod\limits_{k\in N}\varphi_k^{\nu_k}(\xi)$. В частности, если $0\preceq\gamma\preceq\alpha$, то

$$1=\sum_{\nu:\,|\,\nu\,|=m-|\,\gamma\,|}\frac{(m-|\,\gamma\,|)!}{\prod\limits_{k\in N}\nu_k!}\prod_{k\in N}\varphi_k^{\nu_k}(\xi),\qquad \prod_{k\in N}\varphi_k^{\gamma_k}(\xi)=\sum_{\nu:\,|\,\nu\,|=m-|\,\gamma\,|}\frac{(m-|\,\gamma\,|)!}{\prod\limits_{k\in N}\nu_k!}\prod_{k\in N}\varphi_k^{\nu_k+\gamma_k}(\xi).$$

Если $\beta_k\doteq\nu_k+\gamma_k,\ \ k\in N$, то $\sum\limits_{k\in N}\beta_k=m$, поэтому мультииндекс $\beta\doteq(\,\beta_0,\beta_1\dots,\beta_n\,)$ принадлежит множеству N_m, причем $\beta\succeq\gamma$. Следовательно,

$$\prod_{k\in N}\varphi_k^{\gamma_k}(\xi)=\sum_{\substack{\beta\in N(m)\\ \beta\succeq\gamma}}\frac{(m-|\,\gamma\,|)!}{\prod\limits_{k\in N}(\beta_k-\gamma_k)!}\;\chi^{\beta}(\xi),$$

$$\varphi^{\alpha}(\xi)=\frac{1}{\prod\limits_{k\in N}\alpha_k!}\sum_{0\preceq\gamma\preceq\alpha}s(\alpha,\gamma)\,m^{|\,\gamma\,|}\sum_{\substack{\beta\in N(m)\\ \beta\succeq\gamma}}\frac{(m-|\,\gamma\,|)!}{\prod\limits_{k\in N}(\beta_k-\gamma_k)!}\;\chi^{\beta}(\xi)=$$

$$=\frac{1}{\prod\limits_{k\in N}\alpha_k!}\sum_{\beta\in N(m)}\Big[\sum_{0\preceq\gamma\preceq\min\{\alpha,\beta\}}\frac{(m-|\,\gamma\,|)!}{\prod\limits_{k\in N}(\beta_k-\gamma_k)!}\,s(\alpha,\gamma)\,m^{|\,\gamma\,|}\Big]\;\chi^{\beta}(\xi).\tag{8}$$

Таким образом, последовательное применение формул (8), (7) и (5) позволяет выразить любую функцию $\varphi^{\alpha}(\xi)$ из базиса $\{\,\varphi^{\alpha}(\xi)\,\}_{\alpha\in N(m)}$ через функции из базиса $\{\,\xi^{\alpha}\}_{\alpha\in N(m)}$.

§ 3. Явное представление многомерных сплайнов лагранжевого типа

Зафиксируем функцию $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, индекс $r \in N$ и два симплекса $\mathrm{S} \doteq \langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle$, $\mathrm{S}' \doteq \langle x'_0, x'_1, \ldots, x'_n \rangle$, такие, что $x_i = x'_i$ для всех $i \in N \backslash \{r\}$. Симплексы порождают в пространстве $\mathrm{P}_m[\xi]$ два базиса — S-базис $\bigl\{ \varphi^\alpha(\xi) \bigr\}_{\alpha \in N(m)}$ и S$'$-базис $\bigl\{ \varphi'^\alpha(\xi) \bigr\}_{\alpha \in N(m)}$ и два полинома вида (3) — $P(\xi) = \sum\limits_{\alpha \in N(m)} F(x_\alpha)\, \varphi^\alpha(\xi)$ и $P'(\xi) = \sum\limits_{\alpha \in N(m)} F(x'_\alpha)\, \varphi'^\alpha(\xi)$, где использованы обозначения $x_\alpha \doteq \frac{1}{m} \sum\limits_{i \in N} \alpha_i\, x_i$ и $x'_\alpha \doteq \frac{1}{m} \sum\limits_{i \in N} \alpha_i\, x'_i$.

Общую грань $\operatorname{conv} \bigl\{ x_i \colon i \in N \backslash \{r\} \bigr\} = \operatorname{conv} \bigl\{ x'_i \colon i \in N \backslash \{r\} \bigr\}$ симплексов S и S$'$ обозначим через Γ. Очевидно, барицентрические координаты $(\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n)$ точки $\xi \in \Gamma$ относительно вершин симплекса S таковы, что $\mu_r = 0$, $\sum\limits_{k \in N} \mu_k = 1$ и $\xi = \sum\limits_{k \in N} \mu_k\, x_k$, а в силу (2) имеем

$$\varphi^\alpha(\xi) = \prod_{k \in N \colon \alpha_k > 0} \frac{1}{\alpha_k!} \prod_{i=1}^{\alpha_k} \bigl(m\mu_k + 1 - i \bigr), \quad \forall \alpha \in N_m.$$

Аналогично, если $(\mu'_0, \mu'_1, \ldots, \mu'_n)$ — барицентрические координаты точки $\xi \in \Gamma$ относительно вершин симплекса S$'$, то $\mu'_r = 0$, $\sum\limits_{k \in N} \mu'_k = 1$ и $\xi = \sum\limits_{k \in N} \mu'_k\, x'_k$, поэтому

$$\xi = \sum_{k \in N} \mu'_k\, x'_k = \sum_{k \in N \backslash \{r\}} \mu'_k\, x'_k = \sum_{k \in N \backslash \{r\}} \mu'_k\, x_k = \sum_{k \in N} \mu'_k\, x_k.$$

Поскольку $\xi = \sum\limits_{k \in N} \mu_k\, x_k$, то $\mu'_k = \mu_k$ для всех $k \in N$. Следовательно, для любого $\alpha \in N_m$

$$\varphi'^\alpha(\xi) = \prod_{k \in N \colon \alpha_k > 0} \frac{1}{\alpha_k!} \prod_{i=1}^{\alpha_k} \bigl(m\mu'_k + 1 - i \bigr) = \prod_{k \in N \colon \alpha_k > 0} \frac{1}{\alpha_k!} \prod_{i=1}^{\alpha_k} \bigl(m\mu_k + 1 - i \bigr) = \varphi^\alpha(\xi).$$

Пусть, далее, $R \doteq \{ \alpha \in N_m \colon \alpha_r = 0 \}$. Если $\alpha \in N_m \backslash R$, то $\alpha_r > 0$, а так как $\mu_r = 0$, то $\prod\limits_{i=1}^{\alpha_r} \bigl(m\mu_r + 1 - i \bigr) = \prod\limits_{i=1}^{\alpha_r} \bigl(1 - i \bigr) = 0$, поэтому $\varphi^\alpha(\xi) = 0$ и, как следствие, $\varphi'^\alpha(\xi) = 0$. Таким образом, для любого $\xi \in \Gamma$ имеем $P(\xi) = \sum\limits_{\alpha \in R} F(x_\alpha)\, \varphi^\alpha(\xi)$ и $P'(\xi) = \sum\limits_{\alpha \in R} F(x'_\alpha)\, \varphi'^\alpha(\xi)$.

Для любого $\alpha \in R$ имеет место цепочка равенств

$$x_\alpha = \tfrac{1}{m} \sum_{i \in N} \alpha_i\, x_i = \tfrac{1}{m} \sum_{i \in N \backslash \{r\}} \alpha_i\, x_i = \tfrac{1}{m} \sum_{i \in N \backslash \{r\}} \alpha_i\, x'_i = \tfrac{1}{m} \sum_{i \in N} \alpha_i\, x'_i = x'_\alpha\,,$$

поэтому $P(\xi) = \sum\limits_{\alpha \in R} F(x_\alpha)\, \varphi^\alpha(\xi) = \sum\limits_{\alpha \in R} F(x'_\alpha)\, \varphi'^\alpha(\xi) = P'(\xi)$ для любого $\xi \in \Gamma$.

Таким образом, значения полиномов $P(\cdot)$ и $P'(\cdot)$ совпадают на общей грани

$$\operatorname{conv} \bigl\{ x_i \colon i \in N \backslash \{r\} \bigr\} = \operatorname{conv} \bigl\{ x'_i \colon i \in N \backslash \{r\} \bigr\}$$

двух «смежных» симплексов $\mathrm{S} \doteq \langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle$ и $\mathrm{S}' \doteq \langle x'_0, x'_1, \ldots, x'_n \rangle$. (Допускается, что симплексы «касаются» не только внешним образом.)

Последнее утверждение предоставляет нам возможность осуществлять непрерывную стыковку полиномов вида (3), заданных на смежных (внешним образом) симплексах. Данное обстоятельство позволяет аппроксимировать функции многих переменных сплайнами, построенными в соответствии с формулой (3) на произвольной триангулированной области из $\mathbb{R}^n$. Аналогичные частные результаты получены ранее в работах [2, 3].

§ 4. Применение в численном анализе специальных 3-мерных сплайнов

Прямоугольный n-мерный параллелепипед Ω назовем базовым элементом (в [4, с. 313] при $n=3$ он называется «суперэлементом»). Для упрощения изложения полагаем, что Ω — это единичный куб $ABCDA'B'C'D'$ в 3-мерном пространстве с вершинами:

$$\begin{array}{c|cccccccc} & A & B & C & D & A' & B' & C' & D' \\ \hline \xi_1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \xi_2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \xi_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\ . \tag{9}$$

Он состоит из пяти симплексов: $\Omega_1 \doteq \langle A', A, B', C' \rangle$, $\Omega_2 \doteq \langle B, A, B', D \rangle$, $\Omega_3 \doteq \langle C, A, C', D \rangle$, $\Omega_4 \doteq \langle D', B', C', D \rangle$, $\Omega_5 \doteq \langle A, B', C', D \rangle$. Если, например, $\xi \in \Omega_1$ или $\xi \in \Omega_5$, то

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ \varphi_1(\xi) = 1-\xi_3,\ \varphi_2(\xi) = \xi_1,\ \varphi_3(\xi) = \xi_2,\ \varphi_0(\xi) = -\xi_1+\xi_2+\xi_3,$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ Y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ \varphi_1(\xi) = \frac{1}{2}(\xi_1-\xi_2+\xi_3),\ \varphi_2(\xi) = \frac{1}{2}(-\xi_1+\xi_2+\xi_3),$$

$$\varphi_3(\xi) = \frac{1}{2}(\xi_1+\xi_2-\xi_3),\ \varphi_0(\xi) = 1-\frac{1}{2}(\xi_1+\xi_2+\xi_3)$$

соответственно. Аналогичные вычисления применимы для остальных Ω_q, $q=2,3,4$.

Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$. Две функции $F, F' \colon \Omega \to \mathbb{R}$ назовем эквивалентными ($F \sim F'$), если $F(x^q_\alpha) = F'(x^q_\alpha)$ для всех $q=1,\ldots,5$ и $\alpha \in N_m$. Здесь $x^q_\alpha \doteq \frac{1}{m}\sum\limits_{i\in N}\alpha_i\, x^q_i$, где x^q_i — это вершины симплекса Ω_q. Очевидно, каждый класс эквивалентных функций порождает свои собственные пять полиномов $P_q \colon \Omega_q \to \mathbb{R}$ вида (3) и непрерывную функцию (сплайн) $u^{[F]} \colon \Omega \to \mathbb{R}$ такую, что $u^{[F]}(\xi) = P_q(\xi)$ для всех $\xi \in \Omega_q$. (Индекс в обозначении $u^{[F]}$ подчеркивает зависимость сплайна от исходного класса эквивалентности $[F]$.)

Аналогичным образом базовый элемент Ω разбиваем на пять симплексов: $\overline{\Omega}_1 \doteq \langle D, D', C, B \rangle$, $\overline{\Omega}_2 \doteq \langle C', D', C, A' \rangle$, $\overline{\Omega}_3 \doteq \langle B', D', B, A' \rangle$, $\overline{\Omega}_4 \doteq \langle A, C, B, A' \rangle$, $\overline{\Omega}_5 \doteq \langle D', C, B, A' \rangle$. Две функции $F, F' \colon \Omega \to \mathbb{R}$ назовем эквивалентными ($F \dot{\sim} F'$), если $F(x^q_\alpha) = F'(x^q_\alpha)$ для всех $q=1,\ldots,5$ и $\alpha \in N_m$. Здесь $x^q_\alpha \doteq \frac{1}{m}\sum\limits_{i\in N}\alpha_i\, x^q_i$, где x^q_i — это вершины симплекса $\overline{\Omega}_q$. Каждый класс эквивалентных функций порождает свои собственные пять полиномов $\overline{P}_q \colon \overline{\Omega}_q \to \mathbb{R}$ вида (3) и непрерывную функцию (сплайн) $\overline{u}^{[F]} \colon \Omega \to \mathbb{R}$ такую, что $\overline{u}^{[F]}(\xi) = \overline{P}_q(\xi)$ для всех $\xi \in \overline{\Omega}_q$.

Легко проверить, что эквивалентности $\sim$ и $\dot{\sim}$ порождают одни и те же классы. Также легко заметить, что при каждом $q=1,\ldots,5$ между точками симплексов Ω_q и $\overline{\Omega}_q$ имеет место взаимно-однозначное соответствие: $(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \in \Omega_q \Leftrightarrow (1-\xi_1, 1-\xi_2, 1-\xi_3) \in \overline{\Omega}_q$. Это дает нам основание называть совокупности $\{\Omega_q\}$ и $\{\overline{\Omega}_q\}$ *сопряженными* триангуляциями базового элемента Ω. Для любого $\lambda \in [0,1]$ число $\overline{\lambda} \doteq 1-\lambda$ назовем также *сопряженным.* Тогда на базовом элементе Ω для любой функции $F \colon \Omega \to \mathbb{R}$ определен сплайн $u^{[F]}_\lambda \doteq \lambda\, u^{[F]} + \overline{\lambda}\,\overline{u}^{[F]}$ степени m, порожденный сопряженными парами $(\{\Omega_q\}, \{\overline{\Omega}_q\})$ и $(\lambda, \overline{\lambda})$.

Сплайны $u^{[F]}_\lambda$, которые мы называем λ*-сплайнами*, могут применяться при решении различных прикладных задач, в которых информация об исследуемых функциях $F \colon D \to \mathbb{R}$ носит дискретный, явный или неявный характер. Для дискретно заданной функции мы покрываем ее область определения $D \subset \mathbb{R}^3$ базовыми элементами, на каждом из них формируем варьируемый сплайн, а на заключительном этапе находим сплайн наилучшего приближения (методом наименьших квадратов). Геометрическая специфика множества D определяет собственный набор покрывающих его базовых элементов. Если, например, $m=2$, а область изменения переменных D состоит всего лишь из одного базового элемента (9), то необходимо варьировать 27 параметров: λ и 26 чисел u_α (значения сплайна в точках $\left(\frac{i}{2}, \frac{j}{2}, \frac{k}{2}\right)$, где $i,j,k \in \{0,1,2\}$,

$(i,j,k) \neq (1,1,1)$). Если же $m = 2$, а множество D состоит из N базовых элементов, «выстроенных в ряд», то общее количество параметров варьирования равно $10 + 17N$.

Для явно заданной функции F сплайн наилучшего приближения находим, минимизируя функционал невязки, представляющий собой норму пространства $\mathrm{L}_2(D)$. В случае неявно заданной функции, например, при решении той или иной задачи математической физики, в качестве функционала невязки также выступает норма, применяемая в пространстве $\mathrm{L}_2(D)$ (самостоятельно или в комбинации с другими нормами, учитывающими невязку на границе).

Преимущества предложенного метода заключаются в следующем. Формула (3) позволяет явно представить функционал невязки в виде положительно определенной квадратичной формы $J = J(u_\alpha)$ от параметров варьирования u_α, $\alpha \in \mathrm{A}$ (где A — некоторое множество мультииндексов), затем явно вычислить градиент $(\partial J/\partial u_\alpha,\ \alpha \in \mathrm{A})$, а на заключительном этапе применить метод градиентного спуска. Уместно отметить следующее важное обстоятельство: при градиентном спуске мы имеем точные формулы для перехода от одной точки к другой. В некоторых частных случаях за счет специфики задачи удается получить явные аналитические формулы как для решения задачи, так и для соответствующего функционала невязки. Опыт решения этих задач показывает принципиальную значимость варьирования по переменной λ. Компьютерное моделирование ряда других задач подтверждает существенное улучшение качества аппроксимации при правильно «подобранном» параметре λ. Заметим еще, что метод работает при всех $n, m \in \mathbb{N}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сачков В. Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики. — М.: Наука, 1982. — 384 с.
2. Родионов В. И. К вопросу о сплайн-аппроксимации функций нескольких переменных // Вестник Удмуртского университета. Математика. — 2007. — № 1. — С. 121–126.
3. Родионов В. И. Об одном семействе интерполяционных многочленов нескольких переменных // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2010. — Вып. 2. — С. 127–132.
4. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. — М.: Мир, 1984. — 428 с.
5. Nicolaides R. A. On a class of finite elements generated by Lagrange interpolation // SIAM J. Numer. Anal. — 1972. — № 9. — P. 435–445.
6. Nicolaides R. A. On a class of finite elements generated by Lagrange interpolation. II // SIAM J. Numer. Anal. — 1973. — № 10(1). — P. 182–189.

Поступила в редакцию 16.07.10

V. I. Rodionov

On application of special multivariate splines of any degree in the numerical analysis

We give the basis and procedure of construction of special multivariate splines of any degree of Lagrange's type, named by λ-splines. They are under construction from multivariate interpolated algebraic polynomials of the fixed degree set on simplexes of special triangulation of a range of definition of initial function.

Keywords: interpolation, approximation, multivariate spline, simplex, barycentric coordinate system.

Mathematical Subject Classifications: 41A15

Родионов Виталий Иванович, к. ф.-м. н., декан факультета информационных технологий и вычислительной техники, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4), E-mail: rodionov@uni.udm.ru