

УДК 532.5.013

© *Н. Н. Ердакова*

ТОМСОНОВСКИЕ КОНФИГУРАЦИИ В ДИНАМИКЕ ДВУХ ВИХРЕЙ В КОЛЬЦЕВОЙ ОБЛАСТИ¹

Для задачи двух точечных вихрей в кольце получено представление гамильтониана через эллиптические функции и исследована устойчивость томсоновской конфигурации.

Ключевые слова: точечный вихрь, томсоновская конфигурация, эллиптические функции, устойчивость.

Введение

Задача о движении двух вихрей в кольцевой области была подробно рассмотрена в [9]: получен гамильтониан системы в форме рядов, численно построены бифуркационные диаграммы при равных по модулю интенсивностях вихрей, выполнена классификация относительных хореографий возможных движений вихрей. Кроме того, аналогичное представление гамильтониана в форме рядов получено в более ранних работах [1, 3, 4, 8]. Полученное в [9] представление гамильтониана вызывает вычислительные трудности при нахождении стационарных точек и исследованиях устойчивости. Для решения этих проблем удобно воспользоваться представлением гамильтониана через эллиптические функции.

В данной работе мы выразим гамильтониан системы двух вихрей в кольцевой области через логарифмы θ_1 -функции и проведем более подробное аналитическое исследование условий существования устойчивых томсоновских конфигураций вихрей в зависимости от отношения внутреннего и внешнего радиусов кольца. Отметим, что полученная в работе функция Гамильтона без труда обобщается на систему n вихрей в кольце и может быть применена для других исследований.

§ 1. Представление гамильтониана системы через эллиптические функции

Уравнения движения двух вихрей в кольцевой области могут быть записаны в гамильтоновой форме

$$\dot{x}_\alpha = \{x_\alpha, H\} = \frac{1}{\Gamma_\alpha} \frac{\partial H}{\partial y_\alpha}, \quad \dot{y}_\alpha = \{y_\alpha, H\} = -\frac{1}{\Gamma_\alpha} \frac{\partial H}{\partial x_\alpha} \quad (1.1)$$

со скобкой Пуассона

$$\{x_\alpha, y_\beta\} = \frac{1}{\Gamma_\alpha} \delta_{\alpha\beta}, \quad (1.2)$$

где x_α, y_α — декартовы координаты вихрей, Γ_α — их интенсивности, $\alpha, \beta = 1, 2$, — номер вихря.

Гамильтониан системы, полученный в работе [9], представляется в форме:

$$H = H_0 + \frac{\Gamma_1^2}{4\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{R^2}{r_1^2} q^{2k} \right) \left(1 - \frac{r_1^2}{R^2} q^{2k} \right) + \frac{\Gamma_2^2}{4\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{R^2}{r_2^2} q^{2k} \right) \left(1 - \frac{r_2^2}{R^2} q^{2k} \right) - \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{4\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \ln \frac{R^4 (r_2^2 - 2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) q^{2k} + r_1^2 q^{4k}) (r_1^2 - 2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) q^{2k} + r_2^2 q^{4k})}{(R^4 - 2R^2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) q^{2k} + r_1^2 r_2^2 q^{4k}) (R^4 q^{4k} - 2R^2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) q^{2k} + r_1^2 r_2^2)}, \quad (1.3)$$

¹Работа выполнена при поддержке гранта «Ведущие научные школы» (грант НШ-8784.2010.1), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (ГК 02.740.11.0195), ФЦП «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 гг.)» (№ 2.1.1/554), гранта Правительства РФ для господдержки научных исследований под руководством ведущих ученых в российских ОУВПО (№ 11.G34.31.0039).

где H_0 — гамильтониан системы двух вихрей в цилиндре:

$$H_0 = -\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{4\pi} \ln(r_1^2 + r_2^2 - 2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)) + \frac{\Gamma_1^2}{4\pi} \ln(R^2 - r_1^2) + \\ + \frac{\Gamma_2^2}{4\pi} \ln(R^2 - r_2^2) + \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{4\pi} \ln(r_1^2 r_2^2 - 2R^2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + R^4), \quad (1.4)$$

$\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ — радиус-векторы вихрей, $q = \frac{r}{R}$ — отношение внутреннего и внешнего радиусов кольца (см. рис. 1).

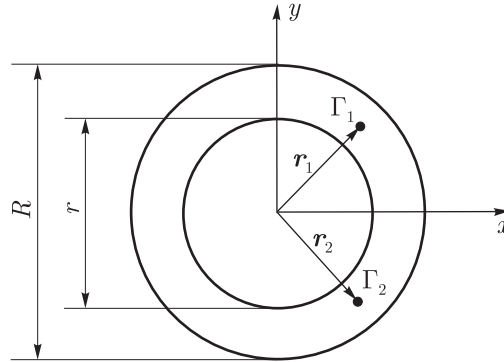


Рис. 1. Два точечных вихря с интенсивностями Γ_1 и Γ_2 и радиус-векторами \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 внутри кольцевой области

Для представления гамильтониана (1.3) через θ_1 -функции [5]

$$\theta_1(q, v) = 2Gq^{\frac{1}{4}} \sin v \prod_{n=1}^{\infty} (1 - 2q^{2n} \cos 2v + q^{4n}), \quad G = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}) = \text{const} \quad (1.5)$$

рассмотрим преобразование одного из его членов — числителя выражения, стоящего под логарифмом в последнем слагаемом:

$$R^4 \left(r_2^2 - 2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)q^{2k} + r_1^2 q^{4k} \right) \left(r_1^2 - 2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)q^{2k} + r_2^2 q^{4k} \right) = \\ = R^4 \left(r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)q^{2k} + r_1^2 q^{4k} \right) \left(r_1^2 - 2r_1 r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)q^{2k} + r_2^2 q^{4k} \right). \quad (1.6)$$

Используя представление $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} + e^{-i(\varphi_1 - \varphi_2)}}{2}$, разлагаем (1.6) на множители и группируем следующим образом:

$$R^4 \left(r_2 - r_1 q^{2k} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \right) \left(r_2 - r_1 q^{2k} e^{-i(\varphi_1 - \varphi_2)} \right) \left(r_1 - r_2 q^{2k} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \right) \left(r_1 - r_2 q^{2k} e^{-i(\varphi_1 - \varphi_2)} \right) = \\ = R^4 r_1^2 r_2^2 \left(1 - \frac{r_1}{r_2} q^{2k} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \right) \left(1 - \frac{r_2}{r_1} q^{2k} e^{-i(\varphi_1 - \varphi_2)} \right) \left(1 - \frac{r_1}{r_2} q^{2k} e^{-i(\varphi_1 - \varphi_2)} \right) \left(1 - \frac{r_2}{r_1} q^{2k} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \right) = \\ = R^4 r_1^2 r_2^2 \left[1 - 2q^{2k} \left(\frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} + \frac{r_2}{r_1} e^{-i(\varphi_1 - \varphi_2)} \right) + q^{4k} \right] \left[1 - 2q^{2k} \left(\frac{r_1}{r_2} e^{-i(\varphi_1 - \varphi_2)} + \frac{r_2}{r_1} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \right) + q^{4k} \right]. \quad (1.7)$$

Обозначая

$$\frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} + \frac{r_2}{r_1} e^{-i(\varphi_1 - \varphi_2)} \doteq \cos \psi_{12}, \quad \text{где } \psi_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + i \ln \frac{r_1}{r_2}, \quad \psi_{12}^* = \varphi_1 - \varphi_2 - i \ln \frac{r_1}{r_2},$$

приводим выражение (1.6) к виду:

$$R^4 r_1^2 r_2^2 \left(1 - 2q^{2k} \cos \psi_{12} + q^{4k} \right) \left(1 - 2q^{2k} \cos \psi_{12}^* + q^{4k} \right). \quad (1.8)$$

Сравнивая полученное выражение (1.8) с выражением для θ_1 -функции (1.5), приводим рассмотренный член гамильтониана к выражению через эллиптические функции, зависящие от параметров $q, \psi_{12}, \psi_{12}^*$:

$$\begin{aligned} -\frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{4\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(R^4 (r_2^2 - 2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) q^{2k} + r_1^2 q^{4k}) (r_1^2 - 2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) q^{2k} + r_2^2 q^{4k}) \right) = \\ = -\frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{4\pi} \ln \left(\frac{\theta_1(\psi_{12}/2)}{2Gq^{\frac{1}{4}} \sin(\psi_{12}/2)} \frac{\theta_1(\psi_{12}^*/2)}{2Gq^{\frac{1}{4}} \sin(\psi_{12}^*/2)} \prod_{k=1}^{\infty} R^4 r_1^2 r_2^2 \right). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Проведя аналогичным образом преобразования остальных членов гамильтониана и используя в подлогарифмических выражениях следующие замены:

$$\gamma_1 = i \ln \left(\frac{R^2}{r_1^2} \right), \quad \gamma_2 = i \ln \left(\frac{R^2}{r_2^2} \right), \quad \psi_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + i \ln \frac{r_1}{r_2}, \quad \chi_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + i \ln \frac{r_1 r_2}{R^2}, \quad (1.10)$$

выражаем функцию Гамильтона (1.3) через θ_1 -функции:

$$\begin{aligned} H = H_0 + \frac{\Gamma_1^2}{4\pi} \ln \frac{\theta_1(\gamma_1/2)}{2Gq^{\frac{1}{4}} \sin(\gamma_1/2)} + \frac{\Gamma_2^2}{4\pi} \ln \frac{\theta_1(\gamma_2/2)}{2Gq^{\frac{1}{4}} \sin(\gamma_2/2)} - \\ - \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{4\pi} \left(\ln \frac{\theta_1(\psi_{12}/2)}{2Gq^{\frac{1}{4}} \sin(\psi_{12}/2)} + \ln \frac{\theta_1(\psi_{12}^*/2)}{2Gq^{\frac{1}{4}} \sin(\psi_{12}^*/2)} - \ln \frac{\theta_1(\chi_{12}/2)}{2Gq^{\frac{1}{4}} \sin(\chi_{12}^*/2)} - \ln \frac{\theta_1(\chi_{12}^*/2)}{2Gq^{\frac{1}{4}} \sin(\chi_{12}^*/2)} \right), \end{aligned} \quad (1.11)$$

где H_0 — гамильтониан системы двух вихрей в цилиндре, ψ_{12}^*, χ_{12}^* — величины, комплексно сопряженные к ψ_{12}, χ_{12} .

Используя логарифмические свойства θ_1 -функции [5], для дальнейших расчетов удобнее ввести новую функцию $Y_e(q, v)$ и ее первую и вторую производные по параметру v , определяемые следующим образом:

$$\begin{aligned} Y_e(q, v) \doteq \ln \left(\frac{\theta_1(v/2)}{2Gq^{\frac{1}{4}} \sin(v/2)} \right) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{2k} (1 - \cos kv)}{(1 - q^{2k})k}, \quad (1.12) \\ Y_e'(q, v) \doteq \frac{\partial Y_e}{\partial v} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{2k} \sin kv}{1 - q^{2k}}, \quad Y_e''(q, v) \doteq \frac{\partial Y_e'}{\partial v} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{2k} k \cos kv}{1 - q^{2k}}. \end{aligned}$$

В новых обозначениях гамильтониан представляется следующим компактным образом:

$$H = H_0 + \frac{\Gamma_1^2}{4\pi} Y_e(q, \gamma_1) + \frac{\Gamma_2^2}{4\pi} Y_e(q, \gamma_2) - \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{4\pi} (Y_e(q, \psi_{12}) + Y_e(q, \psi_{12}^*) - Y_e(q, \chi_{12}) - Y_e(q, \chi_{12}^*)). \quad (1.13)$$

Такое представление гамильтониана в виде быстро сходящихся рядов делает его наиболее удобным для вычислений и без труда обобщается на произвольное число вихрей.

Заметим, что выражение гамильтониана остается действительным, так как из определенных (1.12) следует, что $Y_e(q, \gamma^*) = Y_e^*(q, \gamma)$.

§ 2. Томсоновская конфигурация и ее устойчивость

Напомним, что данная система допускает дополнительный первый интеграл движения [7] — *момент завихренности*

$$I = \Gamma_1 r_1^2 + \Gamma_2 r_2^2. \quad (2.1)$$

Томсоновская конфигурация движения двух вихрей в кольцевой области представляет собой вращение вихрей равной интенсивности по одной окружности, при котором они находятся

на одной прямой с центром кольца по разные стороны от него (см. подробнее [2]). Используя (2.1) и полагая $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 1$, находим выражения для модуля радиус-вектора и разности углов вихрей:

$$a \doteq r_1 = r_2 = \sqrt{I/2}, \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \pi. \quad (2.2)$$

Также без ограничения общности положим $R = 1$.

Для анализа устойчивости движения вихрей равной интенсивности перейдем к переменным

$$I = r_2^2 + r_1^2 = 2a^2, \quad \rho = \frac{r_1^2 - r_2^2}{2a^2}, \quad (2.3)$$

$$\Phi = \varphi_2 + \varphi_1, \quad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2,$$

где I — момент завихренности системы, гамильтониан (1.13) не зависит от Φ . Для томсоновской конфигурации

$$\rho = 0, \quad \varphi = \pi. \quad (2.4)$$

Вследствие того, что Φ — циклическая переменная для анализа устойчивости томсоновской конфигурации, на каждом фиксированном уровне $I = \text{const}$ достаточно проанализировать знакоопределенность квадратичной части гамильтониана по отношению к переменным ρ, φ [6]. Вычислим матрицу \mathbf{B} для квадратичной формы гамильтониана в окрестности стационарной точки (2.4):

$$\mathbf{B} = \left\| \left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial^2 H}{\partial \rho^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial \rho \partial \varphi} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial \varphi \partial \rho} & \frac{\partial^2 H}{\partial \varphi^2} \end{array} \right\| \right\|_{\rho=0, \varphi=\pi}. \quad (2.5)$$

Матрица \mathbf{B} в данном случае диагональная

$$\mathbf{B} = \left\| \left\| \begin{array}{cc} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{array} \right\| \right\|, \quad (2.6)$$

где

$$\lambda_1(a, q) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{(1 - a^2)^2}{2(1 + a^2)^2} + Y_e''(\pi + i \ln a^2) + Y_e''(\pi - i \ln a^2) - 2Y_e''(\pi) \right], \quad (2.7)$$

а

$$\lambda_2(a, q) = \frac{1}{4\pi} \left[-\frac{7a^6 - 3a^4 + 5a^2 - 1}{8(a^2 - 1)^2(a^2 + 1)} - \frac{1}{2}iY_e'(i \ln a^2) + \frac{1}{4}iY_e'(\pi - i \ln a^2) - \frac{1}{4}iY_e'(\pi + i \ln a^2) - \frac{1}{2}Y_e''(i \ln a^2) + \frac{1}{2}Y_e''(\pi) \right]. \quad (2.8)$$

Как показало численное построение графика функции $\lambda_1(a, q)$, собственное значение $\lambda_1 > 0$ при любых значениях a и q .

После несложных преобразований получаем следующее выражение для λ_2 :

$$\lambda_2(a, q) = \frac{1}{4\pi} \left[-\frac{7a^6 - 3a^4 + 5a^2 - 1}{8(a^2 - 1)^2(a^2 + 1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{2k} (k \cos(k\pi) + \cos(k\pi) \sinh(k \ln a^2) - k \cosh(k \ln a^2) + \sinh(k \ln a^2))}{1 - q^{2k}} \right]. \quad (2.9)$$

На плоскости параметров (a, q) уравнение

$$\lambda_2(a, q) = 0 \quad (2.10)$$

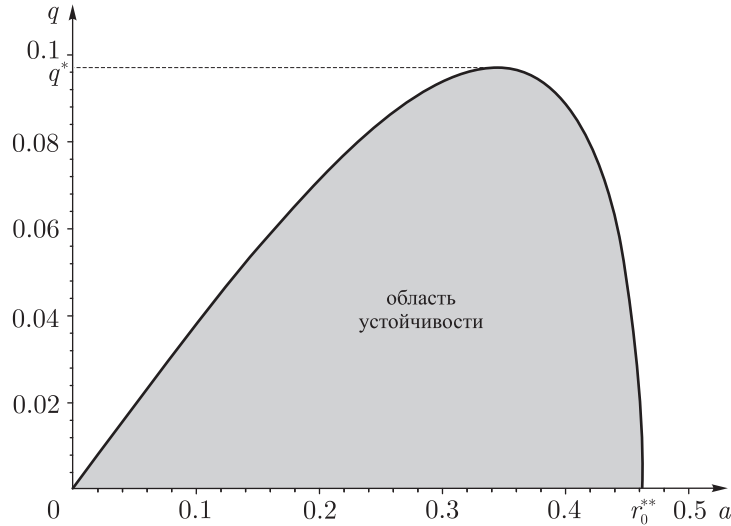


Рис. 2. Зависимость критических значений радиусов томсоновских конфигураций двух вихрей в кольце от отношения внутреннего и внешнего радиусов. Область устойчивости располагается под кривой

задает бифуркационную кривую, изображенную на рис. 2, при пересечении которой происходит смена устойчивости томсоновской конфигурации. Область устойчивости находится под этой кривой.

Точка пересечения кривой (2.10) с осью абсцисс определяется значением

$$a = r_0^{**} \approx 0.462,$$

которое получено Т. Хавелоком [10] (см. также [7]) как граница области устойчивости вихрей внутри круга (то есть при $q = 0$).

При $q \rightarrow 0$ бифуркационная кривая вблизи нуля ведет себя линейным образом, то есть отношение $\frac{q}{a} \rightarrow \text{const}$. Вычисляя предел λ_2 (2.9) при $q, a \rightarrow 0$ и условии $p = \frac{q}{a} \rightarrow \text{const}$, получим уравнение, определяющее тангенс угла наклона кривой (2.10) в нуле:

$$\frac{1 - 5p^2 - 13p^4 + 9p^6}{8(1 + p^2)(p^2 - 1)^2} = 0. \quad (2.11)$$

Решая численно (2.11), находим

$$p \approx 0.385403. \quad (2.12)$$

Замечание. Рассмотренный предельный переход справедлив и для случая $R \rightarrow \infty$. Рассматривая отношение $\left. \frac{r}{R} / \frac{a}{R} \right|_{R \rightarrow \infty}$ и полагая внутренний радиус $r = 1$, находим, что радиус томсоновской конфигурации вне цилиндрической области $a = \frac{1}{p} = \text{ctg } \alpha \approx 2.59468$, что совпадает с результатами, описанными подробно в [10].

Автор выражает искреннюю благодарность А. В. Борисову, В. В. Васькину, И. С. Мамаеву за постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Agostinelli C. Applicazione del metodo delle immagini alla determinazione del moto liquido piano in una corona circolare in cui si formano dei vortici puntiformi. Problemi elettrostatici corrispondenti // Rend. Ist. Lomb. Sci. Lett. (ser. 3). — 1942. — Vol. 6. — P. 669–689.
2. Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A. Absolute and relative choreographies in the problem of point vortices moving on a plane // Regul. Chaotic Dyn. — 2004. — Vol. 9, № 2. — P. 101–112.

3. Fetter A. Low-lying superfluid states in a rotating annulus // *Phys. Rev.* — 1967. — Vol. 153, № 1. — P. 285–296.
4. Lakaniemi M. On the dynamics of point vortices in a quantum gas confined in an annular region // arXiv:0708.1898v3.
5. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. — М.: Наука, 1979.
6. Борисов А. В., Болсинов А. В., Мамаев И. С. Топология и устойчивость интегрируемых систем // УМН. — 2010. — Т. 65, вып. 2(392). — С. 71–132.
7. Борисов А. В., Мамаев И. С. Математические методы динамики вихревых структур. — М.–Ижевск: Инст. компьютерн. иссл., 2005.
8. Зуева Т. И. Движение вихрей в кольцевой области // *Физика низких температур.* — 2000. — Т. 26, № 2. — С. 119–127.
9. Васькин В. В., Ердакова Н. Н. Динамика двух точечных вихрей в кольцевой области // *Нелинейная динамика.* — 2010. — Т. 6, № 3. — С. 531–547.
10. Havelock T. H. The stability of motion of rectilinear vortices in ring formation // *Phil. Mc.* — 1931. — Ser. 7, v. 11, № 70. — P. 617–633.

Поступила в редакцию 01.12.10

N. N. Erdakova

Thomson's configurations in dynamics of two vortices in an annular region

For the system of two point vortices in annulus the Hamiltonian is expressed in terms of elliptic functions. The stability of the Thomson configuration is studied.

Keywords: point vortex, Thomson configuration, elliptic functions, stability.

Mathematical Subject Classifications: 76M23, 34A05

Ердакова Надежда Николаевна, аспирант, кафедра теоретической физики, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4), E-mail: enn@rcd.ru