

УДК 532.527, 532.5.013

© *А. В. Васькина***НОВЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ В СИСТЕМЕ ТРЕХ ТОЧЕЧНЫХ ВИХРЕЙ В КРУГОВОЙ ОБЛАСТИ И ИХ УСТОЙЧИВОСТЬ¹**

В работе применяется топологический подход для поиска и анализа устойчивости относительных равновесий для системы трех вихрей равной интенсивности в круговой области. Показано, что система трех вихрей допускает редукцию на одну степень свободы. Найдены две новые стационарные конфигурации — равнобедренная и коллинеарная несимметричная, построены бифуркационные диаграммы, проведен анализ устойчивости для этих случаев.

Ключевые слова: точечный вихрь, редукция, уравнения движения, бифуркационная диаграмма, относительные равновесия.

Введение

Поиск и анализ устойчивости стационарных вихревых конфигураций — классическая проблема, которой, начиная с Дж. Дж. Томсона, посвящено много исследований. В большинстве работ рассматриваются вихри на плоскости, меньшее количество посвящено движению вихрей внутри круговой области [4, 6, 13].

Впервые задачу о движении точечных вихрей в круге рассмотрел А. Гринхилл в 1877 г. [12]. С помощью метода зеркальных отражений он исследовал движение одного и двух вихрей внутри круговой области. В 1931 году Т. Хавелок в работе [13] продолжил исследования устойчивости стационарных конфигураций вихрей внутри круга. Он поставил и исследовал вопрос о линейной устойчивости полигональных конфигураций вихрей равных интенсивностей внутри круговой области. Это исследование обобщает анализ устойчивости аналогичных конфигураций вихрей на плоскости, выполненный еще Дж. Дж. Томсоном [17]. Среди современных исследований движения вихрей внутри круга следует также указать работы [8, 16].

В работе [4] предложено при анализе устойчивости использовать бифуркационные диаграммы системы. К сожалению, этот метод не получил должного распространения, хотя он тесно связан с топологическим анализом [1, 5, 10]. С помощью методов, развитых в работах [1, 2, 3], будем применять топологический подход для поиска и анализа устойчивости относительных равновесий для системы трех вихрей равной интенсивности в круговой области.

§ 1. Уравнения движения и редукция по симметрии**Гамильтонова формулировка**

Рассмотрим движение $N = 3$ вихрей в идеальной несжимаемой жидкости, ограниченной абсолютно гладкими стенками в форме кругового цилиндра радиуса R .

Уравнения движения можно представить в гамильтоновой форме [15]:

$$\dot{x}_k = \{H, x_k\}, \quad \dot{y}_k = \{H, y_k\}, \quad \{x_k, y_j\} = -\frac{1}{\Gamma_k} \delta_{kj}. \quad (1.1)$$

¹Работа выполнена при поддержке гранта «Ведущие научные школы» (грант НШ-8784.2010.1), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (ГК 02.740.11.0195), ФЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (2009–2010 гг.) (№ 2.1.1/554), гранта Правительства РФ для господдержки научных исследований под руководством ведущих ученых в российских ОУВПО (№ 11.Г34.31.0039).

Приведем здесь вид гамильтониана в полярных координатах (r_k, φ_k) , которым будем пользоваться в дальнейшем:

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{k,j=1,k<j}^N \Gamma_k \Gamma_j \ln \frac{r_k^2 + r_j^2 - 2r_k r_j \cos(\varphi_k - \varphi_j)}{R^4 + r_k^2 r_j^2 - 2R^2 r_k r_j \cos(\varphi_k - \varphi_j)} + \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^N \Gamma_k^2 \ln(R^2 - r_k^2). \quad (1.2)$$

Эту величину будем также называть энергией системы вихрей. Представление системы в гамильтоновой форме позволяет использовать для поиска относительных равновесий и анализа их устойчивости топологические методы анализа гамильтоновых систем, восходящие к Смейлу [10] и получившие дальнейшее развитие в ряде работ [11, 5]. В данном исследовании будем в основном использовать результаты работы [1].

Первый интеграл и редукция

Уравнения движения вихрей (1.1) допускают один дополнительный первый интеграл движения — *момент завихренности*

$$I = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \Gamma_k r_k^2. \quad (1.3)$$

Существование этого интеграла является следствием инвариантности уравнений движения относительно поворотов вокруг центра круга.

Для качественного анализа этой системы, нахождения относительных равновесий и анализа их устойчивости выполним редукцию по симметрии; для этого перейдем к новым переменным $\rho_k, \psi_k, k = 1, \dots, 3, I = \rho_3$ по формулам

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \varphi_1 - \varphi_3, & \psi_2 &= \varphi_2 - \varphi_3, & \psi_3 &= \varphi_3, \\ \rho_1 &= \Gamma_1 r_1^2 / 2, & \rho_2 &= \Gamma_2 r_2^2 / 2, & I &= (\Gamma_1 r_1^2 + \Gamma_2 r_2^2 + \Gamma_3 r_3^2) / 2, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $\psi_k \in (-\pi, \pi), k = 1, \dots, 3$ — угловые переменные. Новые координаты являются каноническими $\{\rho_1, \psi_1\} = \{\rho_2, \psi_2\} = \{I, \psi_3\} = 1$, остальные скобки равны нулю. Так как в данной работе рассматриваются лишь равные интенсивности, то всюду в дальнейшем без ограничения общности будем полагать

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = 1, \quad R = 1.$$

При этом области изменения переменных и интеграла момента задаются явно следующим образом:

$$0 < \rho_k < 1/2, \quad 0 < I < 3/2, \quad -\pi < \psi_k < \pi, \quad k = 1, \dots, 3.$$

Выразив из (1.4) координаты вихрей и подставив их в гамильтониан (1.2), получим:

$$\begin{aligned} H &= -\frac{3}{4\pi} \ln 2 + \frac{1}{4\pi} [\ln(1 - 2\rho_1) + \ln(1 - 2\rho_2) + \ln(1 - 2(I - \rho_1 - \rho_2))] - \\ &- \frac{1}{4\pi} \left[\ln \frac{\rho_1 + \rho_2 - 2\sqrt{\rho_1 \rho_2} \cos(\psi_1 - \psi_2)}{1 + 4\rho_1 \rho_2 - 4\sqrt{\rho_1 \rho_2} \cos(\psi_1 - \psi_2)} + \ln \frac{I - \rho_1 - 2\sqrt{\rho_2(I - \rho_1 - \rho_2)} \cos \psi_2}{1 + 4\rho_2(I - \rho_1 - \rho_2) - 4\sqrt{\rho_2(I - \rho_1 - \rho_2)} \cos \psi_2} + \right. \\ &\quad \left. + \ln \frac{I - \rho_2 - 2\sqrt{\rho_1(I - \rho_1 - \rho_2)} \cos \psi_1}{1 + 4\rho_1(I - \rho_1 - \rho_2) - 4\sqrt{\rho_1(I - \rho_1 - \rho_2)} \cos \psi_1} \right]. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Таким образом, функция Гамильтона не зависит от ψ_3 и переменная ψ_3 — циклическая. Уравнения движения, описывающие эволюцию переменных $\rho_1, \rho_2, \psi_1, \psi_2$, отделяются и представляются в канонической форме:

$$\dot{\rho}_k = \frac{\partial H(I, \rho_1, \rho_2, \psi_1, \psi_2)}{\partial \psi_k}, \quad \dot{\psi}_k = -\frac{\partial H(I, \rho_1, \rho_2, \psi_1, \psi_2)}{\partial \rho_k}, \quad k = 1, 2. \quad (1.6)$$

Таким образом, была выполнена редукция исходной системы к гамильтоновой системе с двумя степенями свободы (1.6), параметрически зависящей от I .

§ 2. Известные стационарные конфигурации и их устойчивость

Известны две стационарные конфигурации трех вихрей в круговой области:

- *равносторонний треугольник (томсоновская конфигурация)* (рис. 1a);
- *симметричная коллинеарная конфигурация* (рис. 1b).

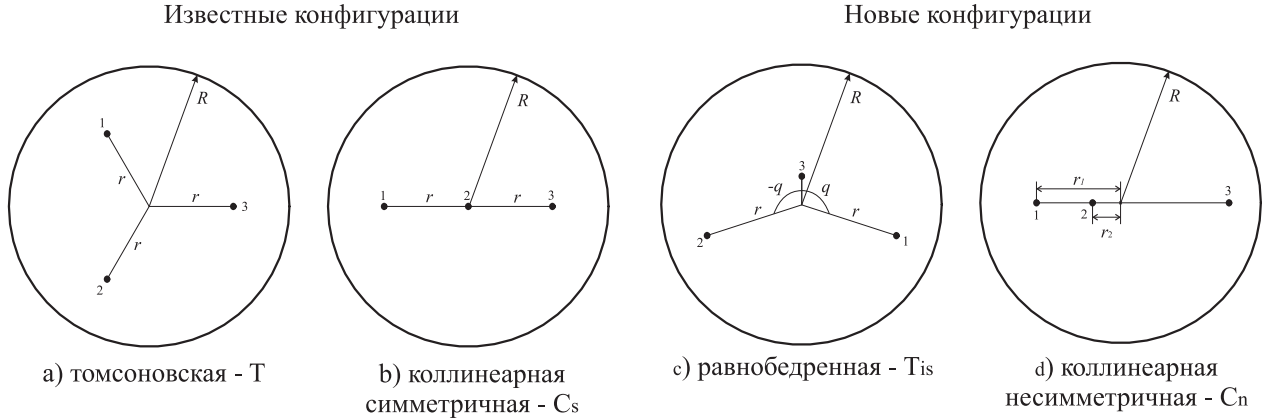


Рис. 1. Известные и новые стационарные конфигурации трех вихрей в круге

Подобные конфигурации существуют и в общей задаче N одинаковых вихрей (равносторонний полигон и симметричная относительно центра коллинеарная конфигурация). Результаты по их устойчивости содержатся в работах [13, 6]. В работе [6] отмечено, что в случае трех вихрей имеется изолированное значение параметра, при котором томсоновская конфигурация теряет устойчивость. Рассмотрим устойчивость этих конфигураций с точки зрения топологического подхода и бифуркационного анализа.

Типы критических точек и их устойчивость

Напомним основные принципы анализа устойчивости неподвижных точек гамильтоновых систем. Для заданной неподвижной точки z_0 естественным образом возникает две матрицы:

- $\mathbf{B} = \left\| \left\| \frac{\partial H}{\partial z_i \partial z_j} \right\| \right\|_{z=z_0}$ – матрица квадратичной части гамильтониана;
- $\mathbf{A} = \left\| \left\| \frac{\partial \dot{z}_k}{\partial z_j} \right\| \right\|_{z=z_0} = \left\| \mathbf{JB} \right\|_{z=z_0}$ – матрица линеаризации векторного поля в окрестности неподвижной точки, где \mathbf{J} – кососимметрическая матрица пуассоновой структуры.

В связи с этим с неподвижными точками системы связаны два инварианта, играющие ключевую роль при исследовании устойчивости.

1. *индекс* квадратичной части гамильтониана, то есть симметрической 4×4 матрицы \mathbf{B} (обозначим его ind), который принимает значения 0, 1, 2, 3, 4, что соответствует количеству отрицательных собственных чисел матрицы \mathbf{B} ;
2. *тип особой точки* в зависимости от собственных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ линеаризации векторного поля (то есть матрицы \mathbf{A}), который принимает одно из следующих значений:
 - *центр-центр* ($\lambda_{1,2} = \pm iA, \lambda_{3,4} = \pm iB$),
 - *седло-центр* ($\lambda_{1,2} = \pm iA, \lambda_{3,4} = \pm B$),
 - *седло-седло* ($\lambda_{1,2} = \pm A, \lambda_{3,4} = \pm B$),
 - *фокус-фокус* ($\lambda_{1,2,3,4} = \pm A \pm iB$),
 где A, B – вещественные числа.

Индекс квадратичной части H связан с устойчивостью неподвижных точек и их типом следующим образом [7]:

1) если в неподвижной точке индекс квадратичной части H $\text{ind} = 0$ или $\text{ind} = 4$, то неподвижная точка устойчива и является точкой типа центр–центр (*достаточное условие устойчивости*);

2) если в неподвижной точке индекс квадратичной части H нечетное число ($\text{ind} = 1, 3$), то неподвижная точка неустойчива и является точкой типа седло–центр (*достаточное условие неустойчивости*);

3) если в неподвижной точке $\text{ind} = 2$, то она устойчива только если является неподвижной точкой типа центр–центр. При этом устойчивость устанавливается при помощи КАМ-теоремы и требует выполнения некоторых дополнительных условий [9].

Таким образом, во многих случаях для анализа устойчивости неподвижных точек достаточно вычислить индекс квадратичной части H , и лишь если он равен 2, необходимо уточнить тип точки, анализируя собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ матрицы \mathbf{A} .

Как правило, собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ линеаризации векторного поля, то есть корни характеристического полинома

$$\chi(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \lambda^4 + a\lambda^2 + b, \quad (2.1)$$

являются сложными функциями параметров системы (содержащими радикалы). С другой стороны, коэффициенты характеристического полинома a, b вычисляются существенно проще, поэтому удобнее области, соответствующие различным типам особых точек, изображать на плоскости коэффициентов характеристического полинома (см. рис. 2b, c).

Будем выполнять анализ устойчивости с использованием бифуркационной диаграммы системы (которая фактически определяет условия существования неподвижных точек) следующим образом.

1. Построим бифуркационную диаграмму системы на плоскости значений первых интегралов I, H .

2. Расставим на бифуркационных кривых индекс квадратичной части H (см. рис. 2a).

Тем самым устанавливается устойчивость (неустойчивость) всех относительных равновесий системы, за исключением тех положений равновесия, которые соответствуют отрезкам (ветвям) бифуркационных кривых с индексом два ($\text{ind} = 2$). Для них выполним следующее.

3. На плоскости коэффициентов $(b(I), a(I))$ характеристического полинома (2.1) построим кривые, соответствующие ветвям бифуркационной диаграммы $\text{ind} = 2$, и определим тип неподвижной точки. Нанесем новые точки бифуркаций на бифуркационные кривые. Для тех участков кривых, которые соответствуют типу центр–центр для доказательства устойчивости необходимо проверить условия закручивания и отсутствия резонансов третьего и четвертого порядка.

Таким образом, после такого анализа бифуркационная диаграмма позволит ответить на вопросы, касающиеся существования, типа, числа и устойчивости относительных равновесий рассматриваемой системы.

Критические точки и бифуркационные кривые

Томсоновская (равносторонняя) конфигурация, которую будем обозначать буквой T , соответствует двум семействам критических точек гамильтониана (1.5), определяемых соотношениями:

$$\begin{aligned} 1 \text{ семейство: } \rho_1 = \rho_2 = \frac{I}{3}, \quad \psi_1 = \frac{2\pi}{3}, \quad \psi_2 = -\frac{2\pi}{3}, \\ 2 \text{ семейство: } \rho_1 = \rho_2 = d\frac{I}{3}, \quad \psi_1 = -\frac{2\pi}{3}, \quad \psi_2 = \frac{2\pi}{3}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где I — величина интеграла момента, является параметром семейства, она связана с расстоянием от вихрей до центра круга соотношением $r = \sqrt{\frac{2}{3}}I$. Эти два решения соответствуют зеркально-симметричным конфигурациям.

Коллинеарная симметричная конфигурация, которую обозначим C_s , определяет три семейства критических точек, различающихся номером вихря в центре круга:

$$\begin{aligned} 1 \text{ семейство: } & \rho_1 = \frac{I}{2}, \quad \rho_2 = 0, \quad \psi_1 = \pi, \\ 2 \text{ семейство: } & \rho_1 = 0, \quad \rho_2 = \frac{I}{2}, \quad \psi_2 = \pi, \\ 3 \text{ семейство: } & \rho_1 = \rho_2 = \frac{I}{2}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

где I — параметр семейства, связан с расстоянием от нецентральных вихрей до центра круга соотношением $r = \sqrt{I}$.

Вследствие симметрии относительно перестановки номеров вихрей (что выполняется лишь в случае равных интенсивностей $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3$) все пять семейств критических точек для томсоновской и коллинеарной симметричной конфигураций определяют лишь две бифуркационные кривые на плоскости интегралов I, H , которые можно представить в форме:

$$\begin{aligned} \text{томсоновская: } & H(I) = \frac{3}{4\pi} \ln \frac{1 - \left(\frac{2I}{3}\right)^3}{2I}, \\ \text{коллинеарная: } & H(I) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{(1 - I^2)^2}{4I^3}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

На рис. 2а представлена бифуркационная диаграмма для томсоновской (T) и коллинеарной (C_s) конфигураций. Области изменения интеграла момента (1.3) определяются неравенствами: $0 \leq I \leq \frac{3}{2}$ — для томсоновской конфигурации; $0 \leq I \leq 1$ — для коллинеарной конфигурации. Левая граница ($I = 0$) соответствует случаям, когда все вихри находятся в центре круга, правая граница ($I = \frac{3}{2}$ и $I = 1$) соответствует случаям, когда вихри касаются границ круга (кроме центрального вихря для коллинеарной конфигурации).

Устойчивость томсоновской конфигурации. Расставим индексы квадратичной части гамильтониана H (1.5) на ветви бифуркационной диаграммы, соответствующей томсоновской конфигурации. Точки смены индекса (точки бифуркации) находятся из уравнения $\det \mathbf{B} = 0$, которое в данном случае имеет вид [6]:

$$5p^6 + 9p^5 + 5p^3 + 9p^2 - 1 = 0, \quad p = r^2 = \frac{2}{3}I. \tag{2.5}$$

В области изменения интеграла момента $0 \leq I \leq \frac{3}{2}$ лежит лишь один корень этого уравнения $I_1^T \approx 0.456$. Вычисление индекса слева от точки бифуркации дает $\text{ind} = 0$, справа — $\text{ind} = 2$ (рис. 2а). При $I > I_1^T$, где $\text{ind} = 2$, следует уточнить устойчивость, пользуясь линеаризацией векторного поля.

Построим на плоскости коэффициентов характеристического полинома (2.1) кривую $(a(I), b(I))$, соответствующую семейству томсоновских конфигураций (2.4) (рис. 2б). При $I_1^T < I < I_2^T$ она располагается в области, соответствующей неподвижной точке типа центр–центр. Значение I_2^T находится из уравнения $a^2(I) - 4b(I) = 0$, и оно равно $I_2^T \approx 0.482$. При $I > I_2^T$ кривая лежит в области, соответствующей неподвижной точке типа фокус–фокус.

Таким образом, томсоновская конфигурация:

- 1) устойчива по Ляпунову при $0 < I < I_1^T$;
- 2) устойчива в линейном приближении при $I_1^T < I < I_2^T$;
- 3) неустойчива при значении интеграла момента $I_2^T < I < \frac{3}{2}$.

Также в работе [6] исследована устойчивость томсоновской конфигурации в резонансных случаях $I = I_1^T$, $I = I_2^T$ и показано, что она:

- 4) неустойчива в случае $I = I_1^T$;
- 5) устойчива по Раусу при $I = I_2^T$.

са. Кроме того, естественно ожидать, что для новых конфигураций симметрия уменьшится, но не пропадет полностью.

Возможные конфигурации, которые удовлетворяют этим требованиям, — это *равнобедренная* и *коллинеарная несимметричная* конфигурации (рис. 1с, d).

Равнобедренная конфигурация

В окрестности каждой из двух томсоновских конфигураций (которые отличаются четностью перестановки номеров вихрей) могут появиться три равнобедренные конфигурации, различающиеся номером вихря при вершине.

Вследствие симметрии исходной системы относительно перестановок номеров вихрей достаточно рассмотреть одну из этих шести конфигураций. Таким образом, искомое семейство критических точек приведенного гамильтониана (1.5) будем искать в виде

$$\rho_1 = \rho_2 = \frac{r^2}{2}, \quad \psi_1 = -\psi_2 = q. \tag{3.1}$$

Обозначим подмногообразие, определенное этими соотношениями, как

$$M_{is} = \{(\rho_1, \rho_2, \psi_1, \psi_2) \mid \rho_2 = \frac{r^2}{2}, \psi_1 = -\psi_2 = q\}. \tag{3.2}$$

Подставляя соотношения (3.2) в условия экстремальности гамильтониана (1.5), получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \rho_1} \Big|_{M_{is}} &= \frac{\partial H}{\partial \rho_2} \Big|_{M_{is}} = R_{is}(r, q, I) = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial \psi_1} \Big|_{M_{is}} &= \frac{\partial H}{\partial \psi_2} \Big|_{M_{is}} = \Psi_{is}(r, q, I) = 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Функции $R_{is}(r, q, I)$, $\Psi_{is}(r, q, I)$ довольно громоздки, поэтому здесь их не приводим. Решая эту систему методом продолжения по параметру относительно переменных r , q , получим два семейства (без учета перестановки вихрей) равнобедренных конфигураций, которые обозначим $T_{is}^{(1)}$, $T_{is}^{(2)}$, и укажем индекс полного гамильтониана (1.5) для каждой из ветвей (рис. 3). С учетом перестановок число семейств равнобедренных конфигураций необходимо умножить на 6.

Найденные равнобедренные конфигурации обладают следующими свойствами:

- семейство $T_{is}^{(1)}$ продолжается по обе стороны от точки бифуркации $C_1^{(T)}$, причем при $I > I_1^{(T)}$ оно продолжается вплоть до точки $C_2^{(Cs)}$, где сливается с семейством коллинеарных симметричных конфигураций, а при $I < I_1^{(T)}$ оно продолжается до точки возврата $I = I^{(T_{is})} \approx 0.442$, в которой рождается второе семейство равнобедренных конфигураций $T_{is}^{(2)}$;
- семейство $T_{is}^{(2)}$ при $I > I^{(T_{is})}$ продолжается до второй точки возврата при $I \rightarrow \frac{1}{2}$, в которой сливается с семейством коллинеарных несимметричных конфигураций (которое будет описано ниже);
- индекс квадратичной части гамильтониана для семейства $T_{is}^{(1)}$ всюду при $I \neq I_2^{(T)}$ равен 1;
- индекс квадратичной части гамильтониана для $T_{is}^{(2)}$ всюду равен 0;

Таким образом, в задаче трех одинаковых вихрей в круге существует два (с точностью до перестановки номеров вихрей) семейства равнобедренных стационарных конфигураций $T_{is}^{(1)}$, $T_{is}^{(2)}$. Причем конфигурации семейства $T_{is}^{(1)}$ — неустойчивы, конфигурации семейства $T_{is}^{(2)}$ — устойчивы (по Ляпунову).

Коллинеарная несимметричная конфигурация

В окрестности каждой из трех коллинеарных симметричных конфигураций, которые отличаются номером вихря в центре, появляются две коллинеарные несимметричные конфигурации, различающиеся четностью перестановки номеров вихрей и номером вихря, который находится по другую сторону от двух других вихрей относительно центра.

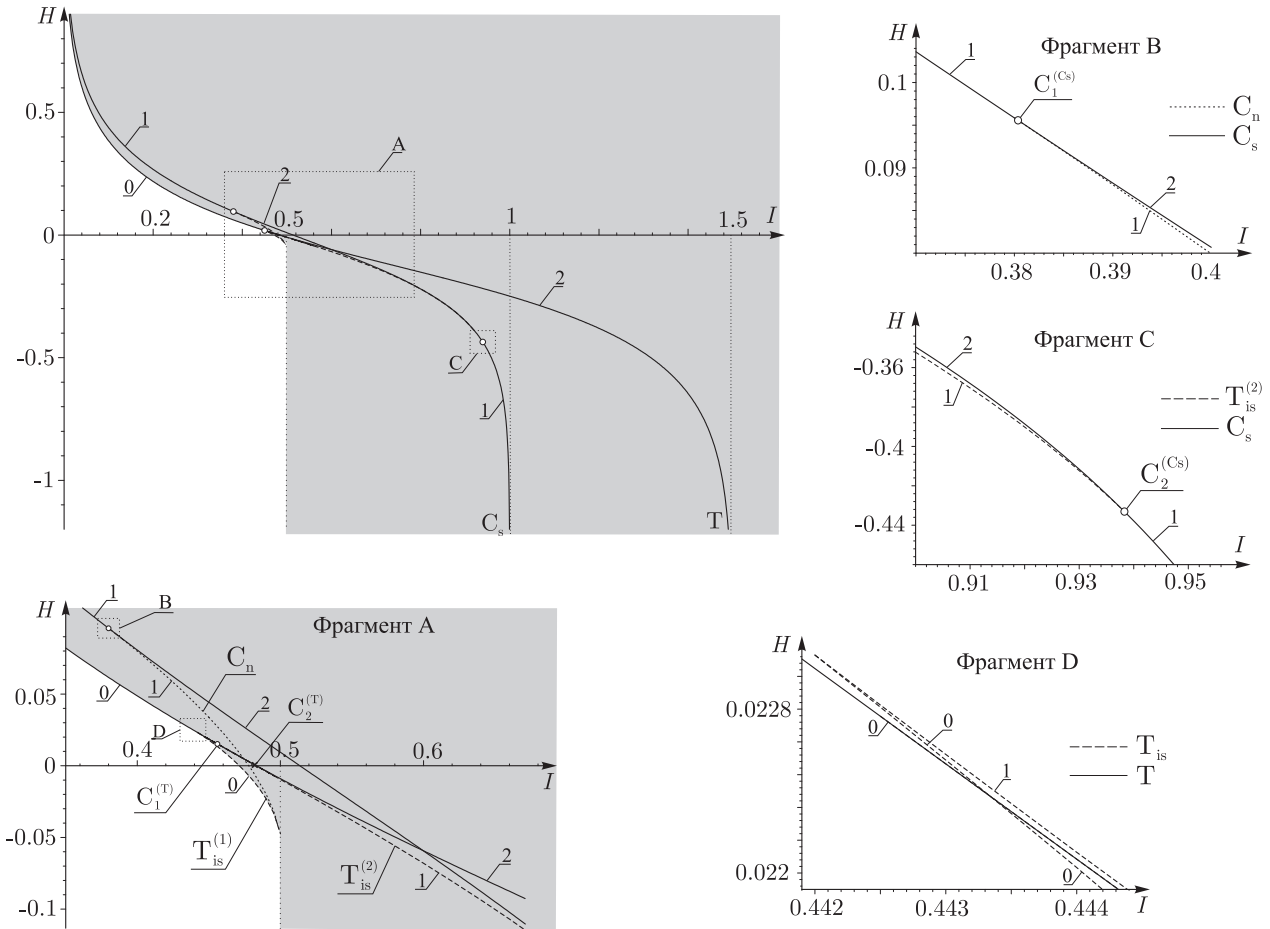


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма для стационарных конфигураций трех вихрей в круге (Т — томсоновская, C_s — коллинеарная симметричная, T_{is} — равнобедренная, C_n — коллинеарная несимметричная). Серым цветом отмечена ОВД

Вследствие симметрии исходной системы относительно перестановок номеров вихрей достаточно рассмотреть одну из этих шести конфигураций. Таким образом, искомое семейство критических точек приведенного гамильтониана (1.5) будем искать в виде

$$\rho_1 = \frac{r_1^2}{2}, \quad \rho_2 = \frac{r_2^2}{2}, \quad \psi_1 = \psi_2 = \pi. \quad (3.4)$$

Из условий экстремальности (аналогичным условиям (3.3)) в данном случае находим одно семейство критических точек (будем обозначать его C_n), соответствующее коллинеарным несимметричным конфигурациям. Для найденного семейства построим бифуркационную кривую на плоскости первых интегралов и укажем индекс квадратичной части гамильтониана (1.5) (рис. 3). С учетом перестановок число семейств коллинеарных несимметричных конфигураций необходимо также умножить на 6.

Найденные коллинеарные несимметричные конфигурации обладают следующими свойствами:

- семейство C_n рождается в точке $I = I_1^{(C_s)}$ и продолжается до точки возврата при $I \rightarrow \frac{1}{2}$, в которой оно сливается с семейством равнобедренных конфигураций $T_{is}^{(2)}$;
- индекс квадратичной части гамильтониана для C_n всюду равен 1.

Таким образом, в задаче трех одинаковых вихрей в круге существует одно (с точностью до перестановки номеров вихрей) семейство коллинеарных несимметричных стационарных конфигураций C_n , которые неустойчивы.

§ 4. Заключение

Таким образом, была выполнена редукция исходной системы трех вихрей к гамильтоновой системе с двумя степенями свободы. Найдены две новые стационарные конфигурации, исследована их устойчивость, построена полная бифуркационная диаграмма для системы трех точечных вихрей равной интенсивности в круговой области.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болсинов А. В., Борисов А. В., Мамаев И. С. Топология и устойчивость II. Относительные равновесия // принято к печати в журнал *Regular and Chaotic Dynamics*.
2. Борисов А. В., Болсинов А. В., Мамаев И. С. Топология и устойчивость интегрируемых систем // УМН. — 2010. — Т. 65, вып. 2 (392). — С. 71–132.
3. Борисов А. В., Мамаев И. С. Математические методы динамики вихревых структур // М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. — 368 с.
4. Борисов А. В., Мамаев И. С., Килин А. А. Динамика точечных вихрей внутри и вне круговой области // В Сб. работ «Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей» (ред. Борисов А. В., Мамаев И. С., Соколовский М. А.). — М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. — С. 414–440.
5. Каток С. Б. Бифуркационные множества и интегральные многообразия в задаче о движении тяжелого твердого тела // УМН. — 1972. — Т. 27, вып. 2. — С. 126–132.
6. Куракин Л. Г. Об устойчивости томсоновских вихревых конфигураций внутри круговой области // Нелинейная динамика. — 2009. — Т. 5, № 3. — С. 295–317.
7. Маркеев А. П. Теоретическая механика: учебник для университетов. — М.: ЧеРо, 1999. — 572 с.
8. Милн-Томсон Л. М. Теоретическая гидродинамика // М.: Мир. — 1964. Пер. с англ. Milne-Thomson L. M. *Theoretical Hydrodynamics*. — 1968.
9. Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах // КАМ-теория и проблемы устойчивости. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. — 448 с.
10. Смейл С. Топология и механика // УМН. — 1972. — Т. 27, вып. 2 (164). — С. 77–133.
11. Татаринцов Я. В. Разделяющие переменные и новые топологические явления в голономных и неголономных системах // Труды семинара по векторн. и тензорн. анализу. — 1988. — Вып. 23. — С. 160–174.
12. Greenhill A. G. Plane vortex motion // *Quart. J. Pure Appl. Math.* — 1877/78. — Vol. 15, № 58. — P. 10–27.
13. Havelock T. H. The stability of motion of rectilinear vortices in ring formation // *Philos. Mag.* — 1931. — Vol. 11, № 70. — P. 617–633.
14. Helmholtz H. Uber Integrale hydrodinamischen Gleichungen welche den Wirbelbewegungen entsprechen // *J. rein. angew. Math.* — 1858. — Vol. 55. — P. 25–55 (см. также русский перевод с комментариями Чаплыгина С. А. в книге Гельмгольц Г. Основы вихревой теории. М.–Иж.: ИКИ. — 2002. — 82 с).
15. Lin C. C. On the motion of vortices in two dimensions. I, II // *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.* — 1941. — Vol. 27, № 2. — P. 570–577 (См. также: Lin C. C. On the motion of vortices in two dimensions. Univ. Toronto Press. — 1943).
16. Simakov N. N. Dynamics of two vortices in circular domain // *Reg. and Ch. Dynamics.* — 1998. — Vol. 3, N. 4. — P. 87–94.
17. Thomson J. J. A treatise on the motion of vortex rings // London: Macmillan. — 1883.

A. V. Vaskina

Stationary configurations for the system of three point vortices in circular domain and their stability

In this paper, topological approach are used for searching and stability analysis of relative equilibriums for the system of three point vortices of equal in magnitude intensities. It is shown that the system of three point vortices can be reduced by one degree of freedom. We find the two new stationary configurations (isosceles and non-symmetrical collinear), study their bifurcations. The stability analysis is performed for these cases.

Keywords: point vortex, reduction, equations of motion, bifurcational diagram, relative equilibriums.

Mathematical Subject Classifications: 76M23, 34A05

Васькина Анастасия Владимировна, м. н. с., лаборатория «Нелинейный анализ и конструирование новых средств передвижения», Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4), E-mail: anvask@gmail.com