МЕХАНИКА 2010. Вып. 4

УДК 531.3

© *А. В. Борисов, С. Г. Луценко, И. С. Мамаев*

ДИНАМИКА КОЛЕСНОГО ЭКИПАЖА НА ПЛОСКОСТИ[1]

В работе рассматривается задача о движении колесного экипажа на плоскости в случае, когда одна из колесных пар фиксирована, а также случай движения колесного экипажа на плоскости в случае двух свободных колесных пар. Указан способ получения уравнений движения для экипажа с произвольной геометрией. Определены возможные виды движения экипажа с фиксированной колесной парой.

Ключевые слова: неголономная связь, динамика системы, колесный экипаж, система Чаплыгина.

Введение

Задачи, связанные с динамикой колесного экипажа, появились практически одновременно с изобретением автомобиля. Под колесным экипажем в этой статье понимается упрощенная модель автомобиля — две колесные пары, присоединенные к каркасу. В общем случае считается, что обе колесные пары могут вращаться в горизонтальной плоскости независимо от каркаса. Также рассмотрен частный случай — одна из колесных пар закреплена перпендикулярно к мосту.

Одна из первых работ, где систематически рассмотрены задачи, связанные с динамикой колесного экипажа, принадлежит Рокару [3], в ней же Рокар сформулировал гипотезу бокового увода колеса. В работе [1] получено уравнение движения колесного экипажа и рассмотрены вопросы устойчивости системы при торможении. В работе [2] проинтегрирована и исследована задача о движении экипажа с одной фиксированной колесной парой, решены задачи об условиях возникновения заноса и поведении системы при резком торможении. В работе [5] получены уравнения движения колесного экипажа в случае закрепленной колесной пары.

В настоящее время решено множество задач, так или иначе связанных с динамикой колесного экипажа, но все они рассматривают лишь поведение системы в некоторых частных случаях. Не проводится исследование всех возможных траекторий движения колесного экипажа. Поэтому представляется интересным получить уравнения движения и, проведя их анализ, определить типичные траектории движения.

§ 1. Системы Чаплыгина

Пусть система описывается обобщенными координатами $q = (q_1, \ldots, q_n)$, $x = (x_1, \ldots, x_m)$ так, что при этом:

1. неинтегрируемые связи, наложенные на нее, представляются в форме
$$\dot{x}_i = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha}(q)\dot{q}_\alpha, \qquad i = 1, \ldots, m; \tag{1}$$
2. функция Лагранжа свободной системы, то есть без учета связей (1), не зависит явно от координат x_i, а только от скоростей $\dot{x}_i$
$$L = L(\dot{x}, q, \dot{q}). \tag{2}$$

[1]Работа выполнена при поддержке: ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, мероприятие 1.1. ГК 02.740.11.0195; гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях ВПО №11.G34.31.0039.

Обозначим функцию Лагранжа после подстановки в (2) связей как

$$\widehat{L}(q,\dot{q}) = L(\dot{x},q,\dot{q})\Big|_{\dot{x}=\mathbf{A}(q)\dot{q}}, \qquad A(q) = \|a_{i\alpha}(q)\|. \tag{3}$$

Справедливо следующее простое предположение

Предположение 1. *Уравнения движения системы с лагранжианом* (2) *при учете связей* (1) *представляются в виде*

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial\widehat{L}}{\partial\dot{q}_\alpha}\Big) - \frac{\partial\widehat{L}}{\partial q_\alpha} = \sum_{\beta=1}^{n} S_{\alpha\beta}\dot{q}_\beta, \qquad \dot{x}_i = \sum_{\beta=1}^{n} a_{i\beta}(q)\dot{q}_\beta, \qquad i=1,\ldots,m,\ \alpha=1,\ldots,n,\\ S_{\alpha\beta} = -S_{\beta\alpha} = \sum_{i=1}^{m}\Big(\frac{\partial a_{i\alpha}}{\partial q_\beta} - \frac{\partial a_{i\beta}}{\partial q_\alpha}\Big)\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_i}\Big|_{\dot{x}=\mathbf{A}\dot{q}}.\end{gathered} \tag{4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем уравнения движения системы (2) с неопределенными множителями, соответствующими связям:

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_i}\Big) = \sum_j \lambda_j\frac{\partial f_j}{\partial\dot{x}_j}, \qquad \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}\Big) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \sum_j \lambda_j\frac{\partial f_j}{\partial\dot{q}_j},\\ f_j = \dot{x}_j - \sum_\beta a_{j\beta}(q)\dot{q}_\beta, \qquad i,j=1,\,\ldots,m, \qquad \alpha,\beta=1,\,\ldots,n.\end{gathered} \tag{5}$$

Отсюда находим

$$\lambda_i = \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_i}\Big).$$

Подставляя это соотношение в уравнение для q_α в (5) и пользуясь соотношениями

$$\frac{\partial\widehat{L}}{\partial\dot{q}_\alpha} = \sum_i\frac{\partial L}{\partial x_i}a_{i\alpha} + \frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}, \qquad \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \sum_{i,\beta}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_i}\frac{\partial a_{i\beta}}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\beta + \frac{\partial L}{\partial q_\alpha},$$

после несложных упрощений получим уравнения (4). □

§ 2. Колесный экипаж

2.1. Общий формализм

В качестве примера системы Чаплыгина рассмотрим модель тележки с вращающейся осью (или осями). Будем предполагать, что имеется жесткий каркас, к которому крепятся две подвижные рамы с жестко укрепленными на них колесными парами, рамы могут вращаться вокруг вертикальных осей, прикрепленных к каркасу (см. рис. 1).

Обозначим точки крепления колесных пар к каркасу (которые могут не совпадать с центрами колесных пар) — O_1, O_2, а углы поворота всей системы и колесных пар соответственно φ, θ_1, θ_2 (см. рис. 1). Пусть, кроме того, (x,y) — координаты фиксированной на каркасе точки O, и ψ_{ij} — углы поворота вокруг своих осей.

Связи. Уравнения связей, которые заключаются в отсутствии проскальзывания в точках контакта колес с опорной поверхностью, имеют вид (то есть скорости колес в точках контакта с опорой равны нулю):

$$\begin{gathered}\boldsymbol{v} + \dot{\varphi}\mathbf{J_z r_i} + (\dot{\varphi}+\dot{\theta}_i)\mathbf{J}_z\mathbf{r}_{ij} + h\dot{\psi}_{ij}\mathbf{n}_i = 0, \qquad i,j=1,2,\\ \boldsymbol{v} = (\dot{x},\dot{y}), \qquad \mathbf{r}_i = (\pm b_i\cos\varphi, \pm b_i\sin\varphi), \qquad \mathbf{n}_i = \big(\cos(\theta_i+\varphi), \sin(\theta_i+\varphi)\big),\\ \mathbf{r}_{ik} = \begin{pmatrix}\cos(\theta_i+\varphi) & -\sin(\theta_i+\varphi)\\ \sin(\theta_i+\varphi) & \cos(\theta_i+\varphi)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d_i\\ (-1)^{k+1}a_{ik}\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{J}_z = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\end{gathered} \tag{1}$$

МЕХАНИКА 2010. Вып. 4

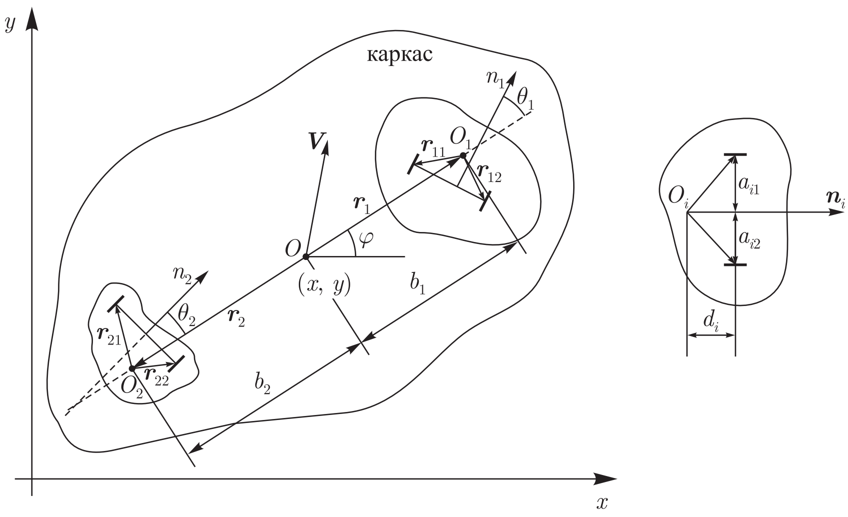

Рис. 1.

где b_i, a_{ij}, d_i — некоторые константы, определяющие конфигурацию системы, h — радиус колес, векторы r_i, r_{ij}, n_i указаны на рис. 1.

Замечание. Произведение $\mathbf{J}_z r$ эквивалентно проекции на плоскость x, y векторного произведения $e_z \times r$.

Система (1) содержит восемь линейных уравнений относительно девяти неизвестных $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{\varphi}$, $\dot{\theta}_i$, $\dot{\psi}_{ij}$. Можно показать, что (если одновременно $\theta_1 + \frac{\pi}{2}$ и $\theta_2 + \frac{\pi}{2}$) среди них лишь шесть линейно независимых, и, кроме того, связи можно записать в форме (1) следующим образом:

$$
\begin{gathered}
\dot{\psi}_{11} = \frac{-(b_1+b_2)\cos\theta_2\dot{\varphi} - \big(d_1\cos(\theta_1-\theta_2) - a_{11}\sin(\theta_1-\theta_2)\big)(\dot{\varphi}+\dot{\theta}_1) + d_2(\dot{\varphi}+\dot{\theta}_2)}{h\sin(\theta_1-\theta_2)},\\
\dot{\psi}_{12} = \frac{-(b_1+b_2)\cos\theta_2\dot{\varphi} - \big(d_1\cos(\theta_1-\theta_2) - a_{12}\sin(\theta_1-\theta_2)\big)(\dot{\varphi}+\dot{\theta}_1) + d_2(\dot{\varphi}+\dot{\theta}_2)}{h\sin(\theta_1-\theta_2)},\\
\dot{\psi}_{21} = \frac{-(b_1+b_2)\cos\theta_2\dot{\varphi} - d_1(\dot{\varphi}+\dot{\theta}_1) + \big(d_2\cos(\theta_1-\theta_2) - a_{21}\sin(\theta_1-\theta_2)\big)(\dot{\varphi}+\dot{\theta}_2)}{h\sin(\theta_1-\theta_2)},\\
\dot{\psi}_{22} = \frac{-(b_1+b_2)\cos\theta_2\dot{\varphi} - d_1(\dot{\varphi}+\dot{\theta}_1) + \big(d_2\cos(\theta_1-\theta_2) - a_{22}\sin(\theta_1-\theta_2)\big)(\dot{\varphi}+\dot{\theta}_2)}{h\sin(\theta_1-\theta_2)},\\
\dot{x} = \frac{\big(b_1\cos\theta_1\cos(\varphi+\theta_2) + b_2\cos\theta_2\cos(\varphi+\theta_1)\big)\dot{\varphi} + d_1\cos(\varphi+\theta_2)(\dot{\varphi}+\dot{\theta}_1) - d_2\cos(\varphi+\theta_1)(\dot{\varphi}+\dot{\theta}_2)}{\sin(\theta_1-\theta_2)},\\
\dot{y} = \frac{\big(b_1\cos\theta_1\sin(\varphi+\theta_2) + b_2\cos\theta_2\sin(\varphi+\theta_1)\big)\dot{\varphi} + d_1\sin(\varphi+\theta_2)(\dot{\varphi}+\dot{\theta}_1) - d_2\sin(\varphi+\theta_1)(\dot{\varphi}+\dot{\theta}_2)}{\sin(\theta_1-\theta_2)}.
\end{gathered}
\tag{2}
$$

Кинетическая энергия. Кинетическую энергию этой системы без учета связей можно выписать, суммируя кинетические энергии отдельных частей так, что окончательно находим:

$$
\begin{gathered}
T = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I_0\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}I_1(\dot{\varphi}+\dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2}I_2(\dot{\varphi}+\dot{\theta}_2)^2 + \frac{1}{2}(I_{11}\dot{\psi}_{11}^2 + I_{12}\dot{\psi}_{12}^2 + I_{21}\dot{\psi}_{21}^2 + I_{22}\dot{\psi}_{22}^2)+\\
+M(v_yR_x - v_xR_y)\dot{\varphi} + m_1(v_yR_x^{(1)} - v_xR_y^{(1)})(\dot{\varphi}+\dot{\theta}_1) + m_2(v_yR_x^{(2)} - v_xR_y^{(2)})(\dot{\varphi}+\dot{\theta}_2)+\\
+m_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{R}^{(1)})\dot{\varphi}(\dot{\varphi}+\theta_1) + m_2(\mathbf{r}_2, \mathbf{R}^{(2)})\dot{\varphi}(\dot{\varphi}+\theta_2),\\
I_0 = I_0^{(0)} + m_1r_1^2 + m_2r_2^2, \qquad I_1 = I_1^{(0)} + m_{11}r_{11}^2 + m_{12}r_{12}^2, \qquad I_2 = I_2^{(0)} + m_{21}r_{21}^2 + m_{22}r_{22}^2,\\
\mathbf{R} = \frac{m_0\mathbf{R}^{(0)} + m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{M},
\end{gathered}
\tag{3}
$$

где M, m_1, m_2, m_{ij} — массы всей системы, рам с колесами и колес соответственно; $I_0^{(0)}$ — момент инерции каркаса (без рам) относительно точки O; $I_1^{(0)}$, $I_2^{(0)}$ — моменты инерции рам

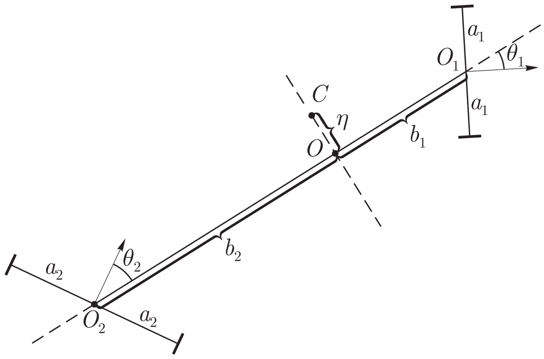

Рис. 2. Схема симметричной тележки и используемые обозначения. В случае, когда задняя ось закреплена $\theta_2 = \theta_0 = \mathrm{const}, \quad \theta_1 = \theta$

без колес относительно осей O_1, O_2; I_{ij} — моменты инерции колес; $\mathbf{R}^{(0)}$ — вектор из точки O в центр масс каркаса; $\mathbf{R}^{(i)}$ — векторы из точек O_i в центры масс рам с колесами.

Мы не будем приводить уравнения движения для самого общего случая, а рассмотрим ряд наиболее употребительных и проясняющих примеров.

2.2. Симметричная тележка с закрепленной осью

Рассмотрим движение тележки, подчиненной следующим дополнительным условиям:

– точки закрепления колесных пар O_1, O_2 совпадают с центрами масс этих пар и с серединами осей, несущих колеса:
$$d_1 = d_2 = 0, \qquad a_{11} = a_{12} = a_1, \qquad a_{21} = a_{22} = a_2;$$

– одна ось (которую назовем задней) закреплена под фиксированным углом:
$$\theta_2 = \theta_0 = \mathrm{const}, \qquad \theta_1 = \theta;$$

– точка O на прямой O_1O_2 выбирается на перпендикуляре к этой прямой, проходящей через центр масс системы C, так что:
$$\mathbf{R} = (-\eta \sin\varphi, \eta\cos\varphi), \qquad |CO| = \eta;$$

– колеса имеют один и тот же момент инерции:
$$I_{ij} = m_w h^2, \qquad i, j = 1, 2.$$

Уравнения движения и первые интегралы. Обозначим $\theta_1 = \theta$, тогда уравнения связей в этом случае представляются в форме

$$\begin{gathered}
\dot{x} = \frac{\dot{\varphi}}{\sin(\theta-\theta_0)}(b_1\cos\theta_1\cos(\varphi+\theta_0) + b_2\cos\theta_0\cos(\varphi+\theta)),\\
\dot{y} = \frac{\dot{\varphi}}{\sin(\theta-\theta_0)}(b_1\cos\theta\sin(\varphi+\theta_0) + b_2\cos\theta_0\sin(\varphi+\theta)),\\
h\dot{\psi}_{11/12} = -\frac{\dot{\varphi}}{\sin(\theta-\theta_0)}(b_1+b_2)\cos\theta_0 {}^{+}/{-} a_1(\dot{\theta}+\dot{\varphi}),\\
h\dot{\psi}_{21/22} = -\frac{\dot{\varphi}}{\sin(\theta-\theta_0)}(b_1+b_2)\cos\theta {}^{+}/{-} a_2\dot{\varphi}.
\end{gathered} \tag{4}$$

После подстановки связей (4) в кинетическую энергию (3) находим:

$$\begin{gathered}\widehat{T}=\frac{1}{2}I_1^*(\dot\varphi+\dot\theta)^2+\frac{1}{2}g(\theta)\dot\varphi^2,\\ g(\theta)=\sin^{-2}(\theta-\theta_0)\big(J_0\sin^2(\theta-\theta_0)+J_1\cos^2\theta+J_2\cos^2\theta_0+J_3\cos\theta_0\cos\theta\sin(\theta_0-\theta)\big),\\ I_1^*=I_1+2m_wa_1^2,\qquad J_0=I_0+I_2+2m_wa_2^2-Mb_1b_2,\qquad J_3=2M\eta(b_1+b_2),\\ J_1=(b_1+b_2)\big(Mb_1+2m_w(b_1+b_2)\big),\qquad J_2=(b_1+b_2)\big(Mb_2+2m_w(b_1+b_2)\big).\end{gathered}\tag{5}$$

Для матрицы, определяющей неголономные члены в уравнениях (4), получим соответственно

$$\mathbf{S}=\begin{Vmatrix}0 & \frac{1}{2}\dot\varphi\frac{\partial g}{\partial\theta}\\ -\frac{1}{2}\dot\varphi\frac{\partial g}{\partial\theta} & 0\end{Vmatrix}.$$

Используя *предположение* 1, получим уравнения движения системы в следующей форме:

$$\ddot\theta=-\ddot\varphi=\frac{1}{2}\dot\varphi\dot\theta\frac{1}{g(\theta)}\frac{\partial g(\theta)}{\partial\theta}.\tag{6}$$

Эта система имеет очевидные интегралы движения:

$$\mathcal{W}=\dot\varphi+\dot\theta,\qquad \mathcal{E}=\frac{1}{2}g(\theta)\dot\varphi^2.\tag{7}$$

Особенность при $\theta=\theta_0\neq\pi/2$ в уравнениях связей (4) и уравнении (6) — несущественная, она появляется вследствие того, что из исходных уравнений связей (1) вытекает, что при $\theta=\theta_0$ обращается в ноль угловая скорость оси O_1O_2, то есть $\dot\varphi=0$. Эта особенность устраняется выбором новой независимой переменной

$$v_\varphi=\frac{\dot\varphi}{\sin(\theta-\theta_0)},$$

при этом в переменных v_φ, $\dot\theta$, θ уравнения движения не содержат сингулярностей.

Качественный анализ при $\theta_0=0$. Построим подробный качественный анализ динамики тележки, когда задняя ось закреплена под прямым углом к прямой O_1O_2.

Замечание. Хотя уравнения (6) можно проинтегрировать в квадратурах [5], из них практически невозможно сделать каких-либо выводов о характере движения, поэтому при анализе мы их не применяем.

Приведенная система. В пространстве переменных $z=(v_\varphi,\dot\theta,\theta)$, $\theta \mod 2\pi$, траектория определяется пересечением поверхностей уровня первых интегралов (7), которые представляются в форме

$$\begin{gathered}\dot\theta+v_\varphi\sin\theta=\omega,\qquad (1+A\sin^2\theta-B\sin\theta\cos\theta)v_\varphi^2=2\epsilon,\\ A=\frac{J_0-J_1}{J_1+J_2}=\frac{I_0+I_2+Mb_2^2+2m_wa_2^2-(M+2m_w)(b_1+b_2)^2}{(M+4m_w)(b_1+b_2)^2},\\ B=\frac{J_3}{J_1+J_2}=\frac{2M\eta}{(M+4m_w)(b_1+b_2)},\end{gathered}\tag{8}$$

где ω, ϵ — константы первых интегралов.

Считая, что масса колеса много меньше массы всей системы, то есть $m_w\ll M$, можно найти области определения констант A, B. Преобразуем равенство для константы A из (8):

$$A=\frac{I_0+I_2}{M(b_1+b_2)^2}+\frac{b_2^2}{(b_1+b_2)^2}-1.\tag{9}$$

Величина второго слагаемого в (9) принадлежит интервалу $(0, 1)$, тогда из равенства (9) получим следующее неравенство:

$$A \geqslant \frac{I_0 + I_2}{M(b_1 + b_2)^2} - 1, \tag{10}$$

так как $(I_0 + I_2)/M(b_1 + b_2) \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad A \geqslant -1$.

Равенство для константы B в предположении $m_w \ll M$ примет вид

$$B = \frac{2\eta}{(b_1 + b_2)}, \tag{11}$$

поскольку величина $(b_1 + b_2) > 0$, то знак постоянной B определяется знаком η, поскольку η не ограничена по величине и может быть как положительной, так и отрицательной, то $B \in (+\infty, -\infty)$. Заметим, что при $\eta = 0$, а следовательно, и $B = 0$, мы получим уравнения движения и квадратуры (6), (4) для случая симметричной тележки с зафиксированной колесной парой.

Уравнения (6) (или, точнее, уравнения для $(\theta, \dot\theta, v_\varphi)$) описывают так называемую приведенную систему, то есть динамику взаимного расположения частей тележки. По известным решениям приведенной системы можно определить положение и ориентацию тележки на плоскости, воспользовавшись квадратурами (так называемая реконструкция динамики):

$$\begin{gathered} \dot\varphi = v_\varphi \sin\theta, \\ \dot x = v_\varphi\bigl(b_1\cos\theta\cos\varphi + b_2\cos(\varphi+\theta)\bigr), \qquad \dot y = v_\varphi\bigl(b_1\cos\theta\sin\varphi + b_2\sin(\varphi+\theta)\bigr). \end{gathered} \tag{12}$$

Любопытно, что ни в уравнения движения для переменных z, ни в уравнения связи (12) не входит длина передней полуоси a_1. Это, в частности, означает, что «трехколесник» эквивалентен обычной тележке (колесному экипажу) с некоторыми специально выбранными постоянными A, B.

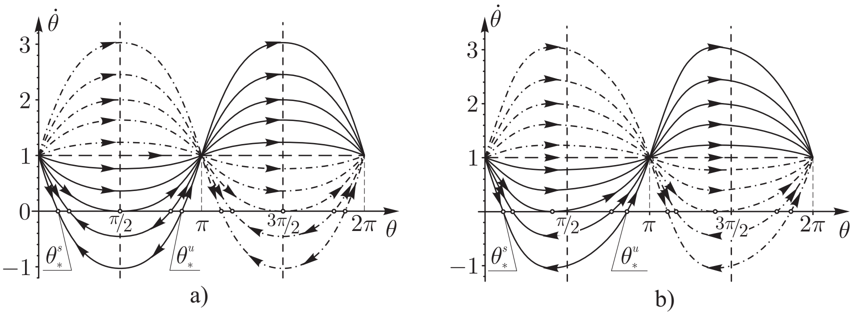

Рис. 3. Проекция траекторий, соответствующих различным значениям ϵ, на развертке цилиндра $(\dot\theta, \theta)$ при $A = 1$, $\omega = 1$ a) $B = 0$, b) $B = 1.6$

Таким образом, соотношения (8) определяют двухпараметрическое семейство траекторий (параметризуемых величинами ω, ϵ), которые целиком заполняют трехмерное фазовое пространство приведенной системы, определяемое координатами z (и вследствие единственности решений, очевидно, не пересекаются друг с другом).

Для описания возможных движений тележки, по аналогии с гамильтоновыми системами с одной степенью свободы, поступим следующим образом. Зафиксируем величину линейного интеграла ω и спроецируем получившееся однопараметрическое семейство траекторий на цилиндр $(\dot\theta, \theta \mod 2\pi)$. Проекции траекторий на этом цилиндре определяются уравнением

$$(1 + A\sin^2\theta - B\sin\theta\cos\theta)(\omega - \dot\theta)^2 = 2\epsilon\sin^2\theta, \tag{13}$$

и, как видно из рисунка 3, пересекаются друг с другом в точках $\theta = 0, \pi$, $\dot\theta = \omega$. Очевидно, что эти пересечения лишь особенности проекции и в трехмерном пространстве $(v_\varphi, \dot\theta, \theta)$ траектории не пересекаются, в чем легко убедиться, спроецировав их на плоскость/цилиндр $(v_\varphi, \theta \mod 2\pi)$.

Одно из отличий описываемой системы от обычной гамильтоновой системы с одной степенью свободы заключается в том, что линии уровня интеграла (13) пересекают прямую $\dot\theta = 0$ не под прямым углом. Следовательно, на траектории в окрестности точки пересечения $\theta = \theta_*$ справедливо равенство $\dot\theta = k(\theta - \theta_*) + O\big(|\theta - \theta_*|^2\big)$, $k = \mathrm{const}$ (тангенс угла наклона кривой). Зависимость угла от времени $\theta(t)$ при больши́х по величине t на этой траектории определяется соотношением

$$\dot\theta = \theta_* + e^{kt} + O(e^{2kt}), \qquad \begin{array}{ll} t \to -\infty, & \text{при } k > 0, \\ t \to +\infty, & \text{при } k < 0. \end{array} \tag{14}$$

Отсюда замечаем, что на прямой $\dot\theta = 0$ лежат (вырожденные) неподвижные точки системы, разделяющие линии уровня интеграла (13) на пару асимптотических траекторий; как следует из (14) при $k > 0$ эти неподвижные точки неустойчивы, а при $k < 0$ — устойчивы.

Таким образом окончательно получаем, что приведенная система (8) *имеет четыре типа решений* (*см. рис.* 3):

T_1 — *неподвижные точки на оси* $\dot\theta = 0$;

T_2 — *асимптотические траектории, стремящиеся к оси* $\dot\theta = 0$;

T_3 — *периодические траектории* $\dot\theta = \omega$, $\epsilon = 0$;

T_4 — *периодические траектории, не пересекающие ось* $\dot\theta = 0$.

На плоскости первых интегралов тип приведенной системы определяется следующей бифуркационной диаграммой.

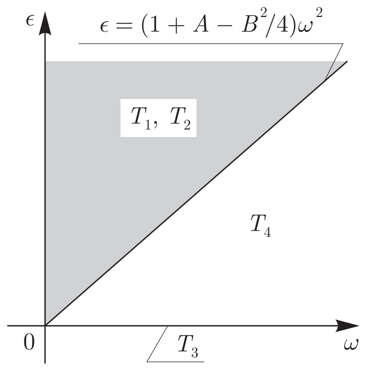

Рис. 4. Бифуркационная диаграмма приведенной системы. Тип траектории в каждой области указан соответствующими буквами T_k. $k = 1 \ldots 4$. Траектории типа T_3 лежат только на оси $\epsilon = 0$

Абсолютная динамика. Опишем теперь динамику всей тележки в абсолютном пространстве для каждого из вышеперечисленных типов траекторий.

(T_1) В этом случае подвижная ось фиксирована, то есть $\theta = \theta_* = \mathrm{const}$, при этом согласно (12)

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t,$$
$$x = \frac{b_1 \cos\theta_* \sin\omega t + b_2 \sin(\omega t + \theta_*)}{\sin\theta_*}, \quad y = -\frac{b_1 \cos\theta_* \cos\omega t + b_2 \cos(\omega t + \theta_*)}{\sin\theta_*}. \tag{15}$$

Таким образом, тележка катится так, что центр масс движется по окружности радиуса R:

$$R = \frac{b_1^2 \cos^2\theta_* + 2b_1 b_2 \cos^2\theta_* + b_2^2}{\sin^2\theta_*}. \tag{16}$$

(T_2) В приведенной системе траектория выходит (при $t \to -\infty$) из неустойчивой неподвижной точки $\dot\theta = 0$, $\theta = \theta_*^s$, и входит в устойчивую $\dot\theta = 0$, $\theta = \theta_*^u$, при этом стремление к этим точкам (при $t \to \pm\infty$) экспоненциальное. Соответственно, тележка на плоскости переходит от одного движения, описываемого соотношениями (15), при $t \to -\infty$, к другому аналогичному движению (см. рис. 5).

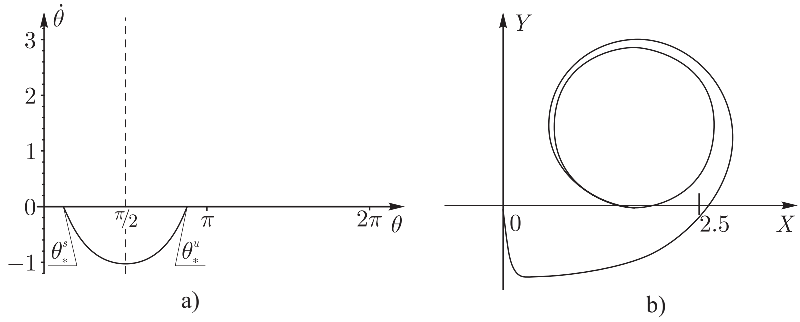

Рис. 5. Характерные траектории для второго типа решений T_2, при параметрах системы $E = 1$, $A = 2$, $\omega = 0.8$. a) Проекция траектории на развертке цилиндра $(\dot\theta, \theta)$. b) Траектория центра масс

(T_3) В этом случае
$$\dot\theta = \omega, \qquad \dot\varphi = 0, \qquad \dot x = \dot y = 0,$$
то есть тележка стоит на месте, а ее подвижная ось равномерно вращается.

(T_4) Приведенная система совершает периодическое движение, период которого определяется квадратурой
$$T = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\omega - \sqrt{\dfrac{2\epsilon}{1 + A\sin^2\theta - B\sin\theta\cos\theta}}}.$$
При этом тележка совершает квазипериодическое двухчастичное движение в ограниченной области на плоскости (см. рис. 6).

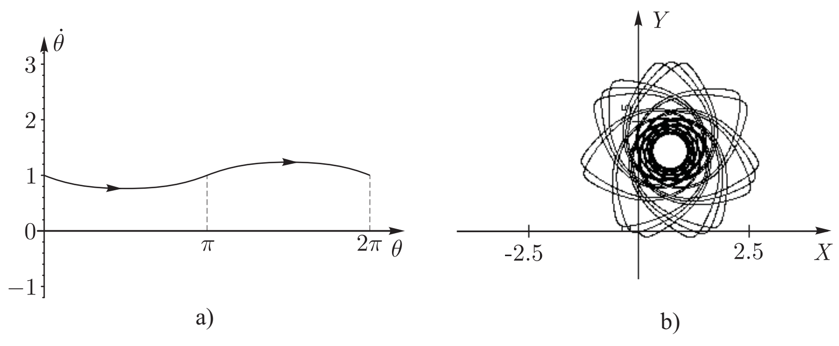

Рис. 6. Характерные траектории для четвертого типа решений T_4 при параметрах системы $E = 2.3$, $A = 2$, $\omega = 0.8$. a) Проекция траектории на развертке цилиндра $(\dot\theta, \theta)$. b) Траектория центра масс

2.3. Симметричная тележка с незакрепленными осями

Рассмотрим движение тележки, подчиненной следующим дополнительным условиям:

– точки закрепления колесных пар O_1, O_2 совпадают с центрами масс этих пар и с серединами осей, несущих колеса:
$$d_1 = d_2 = 0, \qquad a_{11} = a_{12} = a_1, \qquad a_{21} = a_{22} = a_2;$$

– точка O на прямой O_1O_2 выбирается на перпендикуляре к этой прямой, проходящей через центр масс системы C, так что:

$$R = (-\eta\sin\varphi, \eta\cos\varphi), \qquad |CO| = \eta;$$

– колеса имеют один и тот же момент инерции:

$$I_{ij} = m_w h^2, \qquad i, j = 1, 2.$$

Уравнения движения и первые интегралы. Уравнения связей в этом случае представляются в форме

$$\begin{aligned}
\dot x &= \frac{\dot\varphi}{\sin(\theta_2-\theta_1)}\big(b_1\cos\theta_1\cos(\varphi+\theta_2) + b_2\cos\theta_2\cos(\varphi+\theta_1)\big),\\
\dot y &= \frac{\dot\varphi}{\sin(\theta_2-\theta_1)}\big(b_1\cos\theta_1\sin(\varphi+\theta_2) + b_2\cos\theta_2\sin(\varphi+\theta_1)\big),\\
h\dot\psi_{11/12} &= -\frac{\dot\varphi}{\sin(\theta_2-\theta_1)}(b_1+b_2)\cos\theta_2 \;{}^{+}/{-}\, a_1(\dot\varphi+\dot\theta_1),\\
h\dot\psi_{21/22} &= -\frac{\dot\varphi}{\sin(\theta_2-\theta_1)}(b_1+b_2)\cos\theta_1 \;{}^{+}/{-}\, a_2(\dot\varphi+\dot\theta_2).
\end{aligned} \tag{17}$$

После подстановки связей (17) в кинетическую энергию (3) находим:

$$\begin{gathered}
\widehat{T} = \frac12 I_1^*(\dot\varphi+\dot\theta_1)^2 + \frac12 I_2^*(\dot\varphi+\dot\theta_2)^2 + \frac12 g(\theta_1,\theta_2)\dot\varphi^2,\\
g(\theta_1,\theta_2) = \sin^{-2}(\theta_2-\theta_1)\big(J_0\sin^2(\theta_2-\theta_1) + J_1\cos^2\theta_1 + J_2\cos^2\theta_2 + J_3\cos\theta_1\cos\theta_2\sin(\theta_2-\theta_1)\big),\\
I_i^* = I_i + 2m_w a_i^2, \qquad J_0 = I_0 + I_1 + I_2 - Mb_1b_2, \qquad J_3 = 2M\eta(b_1+b_2),\\
J_1 = (b_1+b_2)\big(Mb_1 + 2m_w(b_1+b_2)\big), \qquad J_2 = (b_1+b_2)\big(Mb_2 + 2m_w(b_1+b_2)\big).
\end{gathered} \tag{18}$$

Для матрицы, определяющей неголономные члены в уравнениях (4), получим соответственно

$$\mathbf{S} = \left\|\begin{matrix} 0 & \frac12\dot\varphi\frac{\partial g}{\partial\theta_1} & \frac12\dot\varphi\frac{\partial g}{\partial\theta_2}\\ -\frac12\dot\varphi\frac{\partial g}{\partial\theta_1} & 0 & 0\\ -\frac12\dot\varphi\frac{\partial g}{\partial\theta_2} & 0 & 0 \end{matrix}\right\|.$$

Используя *предположение* 1, получим уравнения движения системы в следующей форме:

$$\ddot\theta_1 = \ddot\theta_2 = -\ddot\varphi = \frac{1}{g(\theta_1,\theta_2)}\left(\frac{\partial g(\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_1}\dot\theta_1 + \frac{\partial g(\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_2}\dot\theta_2\right)\frac{\dot\varphi}{2} = \frac{\dot\varphi}{2}\frac{\dot g(\theta_1,\theta_2)}{g(\theta_1,\theta_2)}. \tag{19}$$

Эта система имеет очевидные интегралы движения:

$$\mathcal{W}_1 = \dot\varphi + \dot\theta_1, \qquad \mathcal{W}_2 = \dot\varphi + \dot\theta_2, \qquad \mathcal{E} = \frac12 g(\theta_1,\theta_2)\dot\varphi^2. \tag{20}$$

Особенность при $\theta_1 = \theta_2 \neq \pi/2$ в уравненях связей (17) и уравнениях (20) — несущественная, она появляется вследствие того, что из исходных уравнений связей (1) вытекает, что при $\theta_1 = \theta_2$ обращается в ноль угловая скорость оси O_1O_2 то есть $\dot\varphi = 0$. Эта особенность устраняется выбором вместо $\dot\varphi$ новой независимой переменной:

$$v_\varphi = \frac{\dot\varphi}{\sin(\theta_1-\theta_2)}.$$

Помимо того, чтобы привести уравнения движения к более удобному для исследований виду, положим дополнительно

$$\theta_1 + \theta_2 = \alpha, \qquad \theta_1 - \theta_2 = \beta,$$

где $\alpha \in [0, 2\pi]$, $\beta \in [-\pi, \pi]$ — угловые переменные на торе. Окончательно получим

$$\begin{gathered}\ddot{\alpha} = \left(\frac{\dot{G}}{G}\sin\beta - 2\cos\beta\dot{\beta}\right)v_\varphi, \qquad \ddot{\beta} = 0, \qquad \dot{v}_\varphi = -\frac{v_\varphi}{2G}\dot{G},\\ G = 1 + \cos\alpha\cos\beta + A\sin^2\beta - B(\cos\alpha + \cos\beta)\sin\beta - C\sin\alpha\sin\beta, \\ A = \frac{2J_0}{J_1 + J_2}, \qquad B = \frac{J_3}{J_1 + J_2}, \qquad C = \frac{J_1 - J_2}{J_1 + J_2},\end{gathered} \tag{21}$$

где полагается, что $\dot{G} = \dfrac{\partial G}{\partial \alpha}\dot{\alpha} + \dfrac{\partial G}{\partial \beta}\dot{\beta}$. Эти уравнения не содержат (вырожденных) особенностей на оси $\beta = 0$ (то есть при $\theta_1 = \theta_2$), а содержат лишь изолированные сингулярности в точках $\alpha = \pi$, $\beta = 0$ (то есть $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$) и $\alpha = 0$, $\beta = \pm\pi$ (то есть $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$), так как в этих точках $G = 0$. Заметим, что согласно (21) $|C| \leq 1$.

Авторы выражают благодарность Васькину В. В. и Килину А. А. за полезные обсуждения в ходе работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мартынюк А. А., Лобас Л. Г., Никитина Н. В. Динамика и устойчивость движения колесных транспортных машин. — Киев.: Техника, 1981. — 223 с.
2. Лобас Л. Г. Неголономные модели колесных экипажей. — Киев.: Научная мысль, 1986. — 230 с.
3. Рокар И. Неустойчивость в механике. — М.: Издательство иностранной литературы, 1959. — 285 с.
4. Маркеев А. П. Теоретическая механика. — М.–Ижевск.: Регулярная и хаотическая динамика, 2007. — 591 с.
5. Розенблат Г. М. К динамике неголономных моделей колесных экипажей // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2008. — Вып. 3. — С. 99–108.
6. Луценко С. Г. Динамика колесного экипажа // Вестник Удмуртского университета. Механика. Компьютерные науки. — 2009. — Вып. 1. — С. 87–94.

Поступила в редакцию 03.12.10

A. V. Borisov, S. G. Lutsenko, I. S. Mamaev
Dynamics of a wheeled carriage on a plane

The paper deals with the problem of motion of a wheeled carriage on a plane in the case where one of the wheeled pairs is fixed. In addition, the case of motion of a wheeled carriage on a plane in the case of two free wheeled pairs is considered.

Keywords: nonholonomic constraint, dynamics of the system, wheeled carriage.

Mathematical Subject Classifications: 37J60

Борисов Алексей Владимирович, Институт компьютерных исследований, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1, E-mail: borisov@rcd.ru

Луценко Степан Григорьевич, кафедра теоретической физики, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, E-mail: ул. Университетская, 1 (корп. 4), E-mail: lsg@rcd.ru

Мамаев Иван Сергеевич, Институт компьютерных исследований, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1, E-mail: mamaev@rcd.ru