МЕХАНИКА

УДК 62.534(031)

© *С. П. Безгласный, М. А. Худякова*

СТАБИЛИЗАЦИЯ ПРОГРАММНЫХ ДВИЖЕНИЙ УРАВНОВЕШЕННОГО ГИРОСТАТА[1]

Решена задача о построении асимптотически устойчивых произвольно заданных программных движений уравновешенного гиростата относительно центра масс. Решение получено синтезом активного программного управления, приложенного к системе тел, и стабилизирующего управления по принципу обратной связи. Управление построено в виде точного аналитического решения в классе непрерывных функций. Задача решена на основе прямого метода Ляпунова теории устойчивости с использованием функций Ляпунова со знакопостоянными производными.

Ключевые слова: уравновешенный гиростат, соосные тела, программное движение, знакопостоянная функция, функция Ляпунова.

Введение

Задача по реализации управляемых пространственных движений твердых тел и системы твердых тел имеют важное прикладное значение и широко рассматриваются авторами во многих работах, например, [1–6]. В данной работе ставится и решается задача об определении управлений, реализующих и стабилизирующих произвольные заданные программные движения системы двух соосных тел относительно их общего центра масс. Решение проводится построением активного управления, приложенного к системе тел и представляющего собой совокупность программного управления и стабилизирующего управления по принципу обратной связи, реализуемых, например, двигателями малой тяги. Исследование программного движения сводится к анализу нулевого решения неавтономной системы и проводится на основе прямого метода Ляпунова [7]. Метод предельных систем [8] и его модификация [9] позволяют при использовании функций Ляпунова со знакопостоянными производными строить искомое управление в замкнутой аналитической форме в классе непрерывных функций.

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим пространственное движение системы двух связанных соосных тел (уравновешенный гиростат): несущее тело (носитель) T_1 массой m_1 и несомое тело T_2 с массой m_2. Точки O_1, O_2 есть центры масс тел T_1 и T_2, точка O — общий для тел T_1 и T_2 центр масс; $l_1 = O_1O$, $l_2 = O_2O$ — расстояния между центрами масс тел и их общим центром масс, где $l_1m_1 = l_2m_2$.

Пусть $O'\xi\eta\zeta$ есть абсолютная неподвижная система координат; $O\alpha\beta\gamma$ — подвижная система координат, оси которой во все время движения остаются параллельными осям системы $O'\xi\eta\zeta$; $Oxyz$ — неинерциальная система координат, неизменно связанная с первым телом. Тело T_2 вращается вокруг T_1 с произвольно заданной угловой скоростью $\dot\sigma = \dot\sigma(t)$, направленной по оси Oz, где σ — угол закрутки второго тела относительно первого (рис. 1).

Исследуем пространственные движения описанной механической системы относительно общего центра масс. Поставим задачу о реализации управляющими силами, прикладываемыми к системе, произвольно заданных (программных) движений двух соосных тел и стабилизации этих движений.

Программным (желательным) движением назовем пару $(\overline{r}(t), \dot{\overline{r}}(t))$, где $\overline{r}(t)$ — ограниченная, дважды кусочно-непрерывно дифференцируемая вектор-функция, описывающая некоторое заданное движение механической системы.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-00384-а).

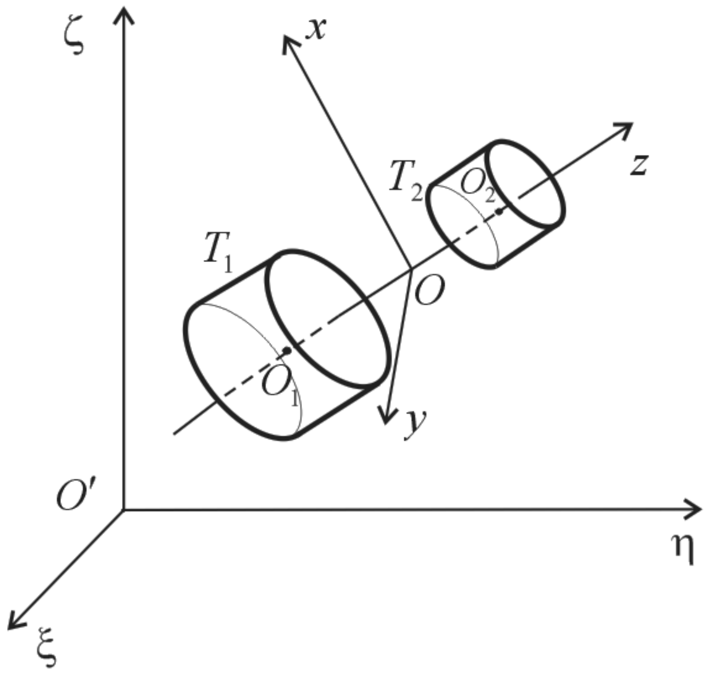

Рис. 1. Система двух соосных тел

В общем случае функция $\overline{r}(t)$, описывающая программное движение, может не являться решением системы дифференциальных уравнений, описывающих движения управляемой механической системы. Поэтому будем реализовывать программные движения, разделив управляющие воздействия на две группы: силы, реализующие программное движение, и силы, стабилизирующие его.

§ 2. Вывод уравнений движения

Уравнения движения исследуемой системы составим в форме уравнений Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\overline{q}}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \overline{q}} = \overline{Q}. \tag{2.1}$$

Пусть общий центр масс O движется в абсолютном пространстве со скоростью $(\dot{\xi},\ \dot{\eta},\ \dot{\zeta})^{\top}$, символ $(\ )^{\top}$ обозначает транспонирование. Положение системы координат $Oxyz$ относительно $O\alpha\beta\gamma$ будем характеризовать углами Эйлера φ, ψ, θ, приняв их за обобщенные координаты $\overline{q}^{\top} = (\varphi, \psi, \theta)$. Компоненты абсолютной угловой скорости $\overline{\omega}_1^{\top} = (p, q, r)$ носителя в системе $Oxyz$ выражаются уравнениями Эйлера [10] и имеют вид:

$$p = \dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\sin\varphi\sin\theta,\ q = -\dot{\theta}\sin\varphi + \dot{\psi}\cos\varphi\sin\theta,\ r = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta.$$

Абсолютная угловая скорость второго тела в системе координат $Oxyz$ дается равенством $\overline{\omega}_2 = \overline{\omega}_1 + \dot{\overline{\sigma}}$, а в системе координат, жестко связанной со вторым телом, равенством $\overline{\omega}_2 = \Gamma(\overline{\omega}_1 + \dot{\overline{\sigma}})$, где $\Gamma = \begin{pmatrix} \cos\sigma & \sin\sigma & 0 \\ -\sin\sigma & \cos\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ есть матрица перехода от $Oxyz$ к жестко связанной со вторым телом системе координат.

Тогда кинетическая энергия системы примет явный вид:

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2) + \frac{1}{2}I_{1x}(\dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\sin\varphi\sin\theta)^2 + \frac{1}{2}I_{1y}(-\dot{\theta}\sin\varphi + \dot{\psi}\cos\varphi\sin\theta)^2 +$$

$$+\frac{1}{2}I_{1z}(\dot\varphi+\dot\psi\cos\theta)^2+\frac{1}{2}I_{2x}(\dot\theta\cos\varphi+\dot\psi\sin\varphi\sin\theta)^2\cos\sigma+\frac{1}{2}(I_{2y}-I_{2x})(\dot\theta\cos\varphi+\dot\psi\sin\varphi\sin\theta)(-\dot\theta\sin\varphi+$$

$$+\dot\psi\cos\varphi\sin\theta)\sin\sigma+\frac{1}{2}I_{2y}(-\dot\theta\sin\varphi+\dot\psi\cos\varphi\sin\theta)^2\cos\sigma+\frac{1}{2}I_{2z}(\dot\varphi+\dot\psi\cos\theta+\dot\sigma)^2,$$

где $I_{ix}, I_{iy}, I_{iz}, (i=1,2)$ — главные моменты инерции тел T_i, вычисляемые относительно общего центра масс O согласно теореме Гюйгенса–Штейнера через центральные главные моменты инерции тел $\widehat{I}_{ix}, \widehat{I}_{iy}, \widehat{I}_{iz}, (i=1,2)$ согласно равенствам:

$$I_{1x}=\widehat{I}_{1x}+\frac{m_1(m_2l_1+m_2l_2)^2}{(m_1+m_2)^2},\ I_{1y}=\widehat{I}_{1y}+\frac{m_1(m_2l_1+m_2l_2)^2}{(m_1+m_2)^2},\ I_{1z}=\widehat{I}_{1z},$$

$$I_{2x}=\widehat{I}_{2x}+\frac{m_2(m_1l_1+m_1l_2)^2}{(m_1+m_2)^2},\ I_{2y}=\widehat{I}_{2y}+\frac{m_2(m_1l_1+m_1l_2)^2}{(m_1+m_2)^2},\ I_{2z}=\widehat{I}_{2z}.$$

Величина T представлена в виде суммы: $T=T_2+T_1+T_0$, где $T_2=\frac{1}{2}\dot{\overline{q}}^\top A(t,\overline{q})\dot{\overline{q}}$ — квадратичная форма скоростей $\dot{\overline{q}}$, задаваемая симметричной матрицей $A(t,\overline{q})=\{a_{ij}\}$ с элементами

$$a_{11}=I_{1z}+I_{2z},\quad a_{12}=a_{21}=(I_{1z}+I_{2z})\cos\theta,\quad a_{13}=a_{31}=0,$$

$$a_{22}=(I_{1x}\sin^2\varphi+I_{1y}\cos^2\varphi)\sin^2\theta+I_{1z}\cos^2\theta+(I_{2x}\sin^2\varphi+I_{2y}\cos^2\varphi)\sin^2\theta\cos\sigma+I_{2z}\cos^2\theta+$$
$$+\frac{I_{2y}-I_{2x}}{2}\sin 2\varphi\sin^2\theta\sin\sigma,$$

$$a_{23}=a_{32}=\frac{I_{1x}-I_{1y}}{2}\sin 2\varphi\sin\theta+\frac{I_{2x}-I_{2y}}{2}\sin 2\varphi\sin\theta\cos\sigma+(I_{2y}-I_{2x})\cos 2\varphi\sin\theta\sin\sigma,$$

$$a_{33}=I_{1x}\cos^2\varphi+I_{1y}\sin^2\varphi+(I_{2x}\cos^2\varphi+I_{2y}\sin^2\varphi)\cos\sigma-\frac{I_{2y}-I_{2x}}{2}\sin 2\varphi\sin\sigma;$$

$T_1=B^\top(t,\overline{q})\dot{\overline{q}}$ — линейная форма скоростей $\dot{\overline{q}}$, определяемая вектором-столбцом $B(t,\overline{q})$ с компонентами:

$$B_1=I_{2z}\dot\sigma;\ B_2=I_{2z}\dot\sigma\cos\theta;\ B_3=0;$$

$T_0=T_0(t,\overline{q})$ — скалярная функция, имеющая вид

$$T_0=\frac{1}{2}(m_1+m_2)(\dot\xi^2+\dot\eta^2+\dot\zeta^2)+\frac{1}{2}I_{2z}\dot\sigma^2.$$

С учетом структуры кинетической энергии уравнения (2.1) запишутся в следующем виде:

$$A\ddot{\overline{q}}+M+\left(\frac{\partial B}{\partial\overline{q}^\top}-\frac{\partial B^\top}{\partial\overline{q}}\right)\dot{\overline{q}}+\frac{\partial B}{\partial t}-\frac{\partial T_0}{\partial\overline{q}}=\overline{Q},\tag{2.2}$$

где через $M=M(\overline{q},\dot{\overline{q}})$ обозначен вектор-столбец с компонентами, вычисляемыми по формуле

$$M_i=\sum_{j,k=1}^{3}\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k}\dot q_k\dot q_j-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{3}\frac{\partial a_{kj}}{\partial q_i}\dot q_k\dot q_j,\quad (i=\overline{1,3}).$$

Для получения уравнений в скалярном виде вычислим слагаемые в (2.2):

$$\frac{\partial B}{\partial\overline{q}^\top}-\frac{\partial B^\top}{\partial\overline{q}}=\begin{pmatrix}0 & \frac{\partial B_1}{\partial\psi}-\frac{\partial B_2}{\partial\varphi} & \frac{\partial B_1}{\partial\theta}-\frac{\partial B_3}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial B_2}{\partial\varphi}-\frac{\partial B_1}{\partial\psi} & 0 & \frac{\partial B_2}{\partial\theta}-\frac{\partial B_3}{\partial\psi}\\ \frac{\partial B_3}{\partial\varphi}-\frac{\partial B_1}{\partial\theta} & \frac{\partial B_3}{\partial\psi}-\frac{\partial B_2}{\partial\theta} & 0\end{pmatrix},$$

где

$$\frac{\partial B_1}{\partial\psi}-\frac{\partial B_2}{\partial\varphi}=0,\ \frac{\partial B_1}{\partial\theta}-\frac{\partial B_3}{\partial\varphi}=0,\ \frac{\partial B_2}{\partial\theta}-\frac{\partial B_3}{\partial\psi}=-I_{2z}\dot\sigma\sin\theta.$$

Производные компонент вектора-столбца $B(t,\overline{q})$ по времени запишутся равенствами:

$$\frac{\partial B_1}{\partial t}=I_{2z}\ddot{\sigma},\ \frac{\partial B_2}{\partial t}=I_{2z}\ddot{\sigma}\cos\theta,\ \frac{\partial B_3}{\partial t}=0.$$

Частные производные функции T_0 по обобщенным координатам φ,ψ,θ равны

$$\frac{\partial T_0}{\partial\varphi}=0,\ \frac{\partial T_0}{\partial\psi}=0,\ \frac{\partial T_0}{\partial\theta}=0.$$

Вектор обобщенных сил $\overline{Q}=\overline{Q}_e+\overline{Q}_c$ в правой части (2.2) представляет собой сумму внешних сил $\overline{Q}_e$, действующих на механическую систему, и управляющих воздействий $\overline{Q}_c$, определяемых в дальнейшем и являющихся совокупностью программных $\overline{Q}_p$ и стабилизирующих $\overline{Q}_s$ сил: $\overline{Q}_c=\overline{Q}_p+\overline{Q}_s$.

Ниже предполагаем, что движение исследуемой механической системы происходит без воздействия внешних сил, то есть $\overline{Q}_e=0$.

§ 3. Построение программных и стабилизирующих управлений

Пусть необходимо, чтобы система совершала некоторое программное движение $\overline{r}(t),\dot{\overline{r}}(t)$. Прямой подстановкой программного движения $\overline{r}(t)$ в систему (2.2) определим, как и в [11], управляющие силы, реализующие это движение:

$$\overline{Q}_p=A\ddot{\overline{r}}+M(\overline{r},\dot{\overline{r}})+\left[\frac{\partial B}{\partial\overline{q}^\top}-\frac{\partial B^\top}{\partial\overline{q}}\right]\dot{\overline{r}}+\frac{\partial B}{\partial t}-\frac{\partial T_0}{\partial\overline{q}}. \tag{3.1}$$

Подставив силы (3.1) в уравнения (2.2), имеем управляемую систему, для которой программное движение $\overline{r}(t),\dot{\overline{r}}(t)$ является решением, но, вообще говоря, не является устойчивым. Возникает задача о его стабилизации, состоящая в определении стабилизирующих сил, которые обеспечат асимптотическую устойчивость исследуемого движения.

Сведем решение задачи о стабилизации программных движений к задаче стабилизации нулевого решения неавтономной лагранжевой системы. Это позволит применить к задаче о стабилизации программных движений методы и результаты, разработанные для исследования устойчивости и стабилизации нулевого положения равновесия неавтономных систем [9].

Введем новые обобщенные координаты (отклонения) по правилу $\overline{x}=\overline{q}-\overline{r}(t)$. В силу линейности замены и линейности оператора дифференцирования структура уравнений Лагранжа при переходе к уравнениям в отклонениях не изменится и согласно [11] уравнения возмущенного движения примут вид:

$$A\ddot{\overline{x}}+M+M'+\left[\frac{\partial B}{\partial\overline{x}^\top}-\frac{\partial B^\top}{\partial\overline{x}}\right]\dot{\overline{x}}+A\ddot{\overline{r}}+M''+\left[\frac{\partial B}{\partial\overline{x}^\top}-\frac{\partial B^\top}{\partial\overline{x}}\right]\dot{\overline{r}}+\frac{\partial B}{\partial t}-\frac{\partial T_0}{\partial\overline{x}}=\overline{Q}_s+\overline{Q}_p, \tag{3.2}$$

где через M,M' и M'' обозначены соответственно квадратичная, линейная и нулевая по скоростям формы:

$$M_i=\sum_{j,k=1}^{3}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\dot{x}_k\dot{x}_j-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{3}\frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i}\dot{x}_k\dot{x}_j,\quad (i=\overline{1,3});$$

$$M_i'=\sum_{j,k=1}^{3}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\dot{x}_k\dot{r}_j-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{3}\frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i}\dot{x}_k\dot{r}_j+\sum_{j,k=1}^{3}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\dot{r}_k\dot{x}_j-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{3}\frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i}\dot{r}_k\dot{x}_j,\ (i=\overline{1,3});$$

$$M_i''=\sum_{j,k=1}^{3}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\dot{r}_k\dot{r}_j-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{3}\frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i}\dot{r}_k\dot{r}_j,\quad (i=\overline{1,3}).$$

Задачу о стабилизации решим прямым методом Ляпунова с использованием функции Ляпунова, которую согласно [12] выберем в виде:

$$V(t,\overline{x},\dot{\overline{x}})=\frac{1}{2}\overline{x}^\top C\overline{x}+\frac{1}{2}\dot{\overline{x}}^\top A\dot{\overline{x}}, \tag{3.3}$$

где определенно-положительная матрица C удовлетворяет условию:

$$c_0 E \leqslant C = \mathrm{const} \leqslant c_1 E, \quad (0 < c_0 < c_1 - \mathrm{const}).$$

Функция (3.3) является определенно-положительной. Ее производная в силу системы (3.2) записывается равенством:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{2}\dot{\overline{x}}^\top \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial \overline{x}^\top}\dot{\overline{r}}\right)\dot{\overline{x}} + \dot{\overline{x}}^\top C\overline{x} + \dot{\overline{x}}^\top(-M' - \left(\frac{\partial B}{\partial \overline{x}^\top} - \frac{\partial B^\top}{\partial \overline{x}}\right)\dot{\overline{x}} - M'' - \left(\frac{\partial B}{\partial \overline{x}^\top} - \frac{\partial B^\top}{\partial \overline{x}}\right)\dot{\overline{r}} -$$

$$-\frac{\partial A}{\partial t}\dot{\overline{x}} - \frac{\partial A}{\partial t}\dot{\overline{r}} - \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial T_0}{\partial \overline{x}} - A\ddot{\overline{r}} + \frac{1}{2}N + Q_c),$$

где символом N обозначен вектор-столбец с компонентами

$$N_i = \sum_{j,k=1}^{3} \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i}\dot{x}_k\dot{x}_j - \sum_{j,k=1}^{3} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\dot{x}_k\dot{x}_j, \quad (i = \overline{1,3}).$$

Определим стабилизирующее управление равенством:

$$\overline{Q}_s = -C\overline{x} - D\dot{\overline{x}} + M'' + \left(\frac{\partial B}{\partial \overline{x}^\top} - \frac{\partial B^\top}{\partial \overline{x}}\right)\dot{\overline{r}} + \frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial T_0}{\partial \overline{x}} + A\ddot{\overline{r}} - \overline{Q}_p, \tag{3.4}$$

где матрица D является ограниченной и неисчезающей и выбирается из условий:

$$d_0 E \leqslant D(t,q) \leqslant d_1 E, \quad (0 < d_0 < d_1 - \mathrm{const});$$

$$2D + \frac{\partial A}{\partial t} \geqslant \alpha_0 E, \quad (0 < \alpha_0 - \mathrm{const}).$$

Тогда производная функции (3.3) имеет оценку

$$\frac{dV}{dt} \cong -\dot{\overline{x}}^\top \left(\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial t} + D\right)\dot{\overline{x}} \leqslant -\frac{\alpha_0}{2}\|\dot{\overline{x}}^2\| \leqslant 0$$

и является определенно-отрицательной функцией по скоростям. Таким образом, на основе теоремы из [9] имеем асимптотическую устойчивость исследуемого программного движения.

Вычислив слагаемые правой части выражения (3.4), получим стабилизирующие управления в скалярном виде:

$$Q_s^\varphi = -c_{11}x_1 - d_{11}\dot{x}_1 + ((I_{1x} - I_{1y})\cos 2(x_1+\varphi^*)\sin(x_3+\theta^*) + (I_{2x} - I_{2y})\cos 2(x_1+\varphi^*)\sin(x_3+\theta^*)\times$$

$$\times\cos\sigma - 2(I_{2y} - I_{2x})\sin 2(x_1+\varphi^*)\sin(x_3+\theta^*)\sin\sigma + (I_{1z} + I_{2z})\sin(x_3+\theta^*))\dot{\psi}^*\dot{\theta}^* - \frac{1}{2}((I_{1x} - I_{1y})\times$$

$$\times\sin 2(x_1+\varphi^*)\sin^2(x_3+\theta^*) + (I_{2x} - I_{2y})\sin 2(x_1+\varphi^*)\sin^2(x_3+\theta^*)\cos\sigma + (I_{2y} - I_{2x})\cos 2(x_1+\varphi^*)\times$$

$$\times\sin^2(x_3+\theta^*)\sin\sigma)\dot{\psi}^* - \frac{1}{2}((I_{1y} - I_{1x})\sin 2(x_1+\varphi^*) + (I_{2y} - I_{2x})\sin 2(x_1+\varphi^*)\cos\sigma - (I_{2y} - I_{2x})\times$$

$$\times\cos 2(x_1+\varphi^*)\sin\sigma)\dot{\theta}^{*2} + I_{2z}\ddot{\sigma} + (I_{1z} + I_{2z})\ddot{\varphi}^{*2} + (I_{1z} + I_{2z})\cos(x_3+\theta^*)\ddot{\psi}^* - Q_p^\varphi;$$

$$Q_s^\psi = -c_{22}x_2 - d_{11}\dot{x}_2 + \dot{\varphi}^*\dot{\theta}^*((I_{1x} - I_{1y})\cos 2(x_1+\varphi^*)\sin(x_3+\theta^*) + (I_{2x} - I_{2y})\cos 2(x_1+\varphi^*)\sin(x_3+\theta^*)\times$$

$$\times\cos\sigma - 2(I_{2y} - I_{2x})\sin 2(x_1+\varphi^*)\sin(x_3+\theta^*)\sin\sigma - (I_{1z} + I_{2z})\sin(x_3+\theta^*)) + \dot{\varphi}^*\dot{\psi}^*((I_{1x} - I_{1y})\times$$

$$\times\sin 2(x_1+\varphi^*)\sin^2(x_3+\theta^*) + (I_{2x} - I_{2y})\sin 2(x_1+\varphi^*)\sin^2(x_3+\theta^*)\cos\sigma + (I_{2y} - I_{2x})\cos 2(x_1+\varphi^*)\times$$

$$\times\sin^2(x_3+\theta^*)\sin\sigma) + \dot{\psi}^*\dot{\theta}^*((I_{1x}\sin^2(x_1+\varphi^*) + I_{1y}\cos^2(x_1+\varphi^*))\sin 2(x_3+\theta^*) - I_{1z}\sin 2(x_3+\theta^*) +$$

$$+(I_{2x}\sin^2(x_1+\varphi^*) + I_{2y}\cos^2(x_1+\varphi^*))\sin 2(x_3+\theta^*)\cos\sigma - I_{2z}\sin 2(x_3+\theta^*) + (I_{2y} - I_{2x})\sin 2(x_1+\varphi^*)\times$$

$$\times\sin 2(x_3+\theta^*)\sin\sigma) + \dot{\theta}^{*2}\Big(\frac{I_{1x} - I_{1y}}{2}\sin 2(x_1+\varphi^*)\cos(x_3+\theta^*) + \frac{I_{2x} - I_{2y}}{2}\sin 2(x_1+\varphi^*)\cos(x_3+\theta^*)\times$$

$$\times\cos\sigma+(I_{2y}-I_{2x})\cos 2(x_1+\varphi^*)\cos(x_3+\theta^*)\sin\sigma\Big)-I_{2z}\dot\sigma\sin(x_3+\theta^*)\dot\theta^*+I_{2z}\ddot\sigma\cos(x_3+\theta^*)+(I_{1z}+I_{2z})\times$$
$$\times\cos(x_3+\theta^*)\ddot\varphi^*+((I_{1x}\sin^2(x_1+\varphi^*)+I_{1y}\cos^2(x_1+\varphi^*))\sin^2(x_3+\theta^*)+I_{1z}\cos^2(x_3+\theta^*)+$$
$$+(I_{2x}\sin^2(x_1+\varphi^*)+I_{2y}\cos^2(x_1+\varphi^*))\sin^2(x_3+\theta^*)\cos\sigma+I_{2z}\cos^2(x_3+\theta^*)+\frac{I_{2y}-I_{2x}}{2}\sin 2(x_1+\varphi^*)\times$$
$$\times\sin^2(x_3+\theta^*)\sin\sigma)\ddot\psi^*+\Big(\frac{I_{1x}-I_{1y}}{2}\sin 2(x_1+\varphi^*)\sin(x_3+\theta^*)+\frac{I_{2x}-I_{2y}}{2}\sin 2(x_1+\varphi^*)\sin(x_3+\theta^*)\times$$
$$\times\cos\sigma+(I_{2y}-I_{2x})\cos 2(x_1+\varphi^*)\sin(x_3+\theta^*)\sin\sigma\Big)\ddot\theta^*-Q_p^\psi;$$

$$Q_s^\theta=-c_{33}x_3-d_{33}\dot x_3+\dot\varphi^*\dot\theta^*((I_{1y}-I_{1x})\sin 2(x_1+\varphi^*)+(I_{2y}-I_{2x})\sin 2(x_1+\varphi^*)\cos\sigma-(I_{2y}-I_{2x})\cos 2(x_1+\varphi^*)\times$$
$$\times\sin\sigma)+\dot\varphi^*\dot\psi^*((I_{1x}-I_{1y})\cos 2(x_1+\varphi^*)\sin(x_3+\theta^*)+(I_{2x}-I_{2y})\cos 2(x_1+\varphi^*)\sin(x_3+\theta^*)\cos\sigma-$$
$$-2(I_{2y}-I_{2x})\sin 2(x_1+\varphi^*)\sin(x_3+\theta^*)\sin\sigma+(I_{1z}+I_{2z})\sin(x_3+\theta^*))-\frac{1}{2}\ddot\psi^{*2}((I_{1x}\sin^2(x_1+\varphi^*)+$$
$$+I_{1y}\cos^2(x_1+\varphi^*))\sin 2(x_3+\theta^*)-I_{1z}\sin 2(x_3+\theta^*)+(I_{2x}\sin^2(x_1+\varphi^*)+I_{2y}\cos^2(x_1+\varphi^*))\sin 2(x_3+\theta^*)\times$$
$$\times\cos\sigma-I_{2z}\sin 2(x_3+\theta^*)+(I_{2y}-I_{2x})\sin 2(x_1+\varphi^*)\sin 2(x_3+\theta^*)\sin\sigma)+I_{2z}\dot\sigma\sin(x_3+\theta^*)\dot\theta^*+$$
$$+\Big(\frac{I_{1x}-I_{1y}}{2}\sin 2(x_1+\varphi^*)\sin(x_3+\theta^*)+\frac{I_{2x}-I_{2y}}{2}\sin 2(x_1+\varphi^*)\sin(x_3+\theta^*)\cos\sigma+(I_{2y}-I_{2x})\times$$
$$\times\cos 2(x_1+\varphi^*)\sin(x_3+\theta^*)\sin\sigma\Big)\ddot\psi^*+(I_{1x}\cos^2(x_1+\varphi^*)+I_{1y}\sin^2(x_1+\varphi^*)+(I_{2x}\cos^2(x_1+\varphi^*)+$$
$$+I_{2y}\sin^2(x_1+\varphi^*))\cos\sigma-\frac{I_{2y}-I_{2x}}{2}\sin 2(x_1+\varphi^*)\sin\sigma)\ddot\theta^*-Q_p^\theta.$$

Для иллюстрации полученных результатов проинтегрируем численно с помощью математического пакета Maple 10 уравнения движения построенной управляемой механической системы при следующих значениях параметров: $m_1=3$, $m_2=1$, $r_1=1$, $r_2=\frac{1}{3}$, $\sigma(t)=t$, $c_{ij}=1,\ i=j$; $c_{ij}=0, i\neq j$; $d_{ij}=1,\ i=j$; $d_{ij}=0,\ i\neq j$. Начальные условия были взяты: $x_{01}=0.1$, $\dot x_{01}=0.02$, $x_{02}=0.1$, $\dot x_{02}=0.03$, $x_{03}=0.2$, $\dot x_{03}=0.01$. Программное движение было выбрано следующее:

$$\begin{cases}\varphi^*(t)=\dfrac{t}{6},\\[2mm] \psi^*(t)=\dfrac{\pi t}{6},\\[2mm] \theta^*(t)=\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$$

На рисунках 2–4 показаны изменения отклонений с течением времени для уравнений движения системы соосных тел под действием программного движения, стабилизированного управляющими силами.

В работе решена задача о синтезе и стабилизации произвольно заданных программных движений уравновешенного гиростата относительно его центра масс. Управление было построено в явном виде аналитически в классе непрерывных функций. Исследуемая задача решалась на основе прямого метода Ляпунова теории устойчивости с использованием функции Ляпунова со знакопостоянными производными. Полученные в работе результаты развивают и обобщают соответствующие результаты из [11, 13] по двум направлениям: во-первых, задача решалась для произвольных программных движений $(\overline{r}(t),\dot{\overline{r}}(t))$; во-вторых, использованная функция Ляпунова со знакопостоянной производной позволила построить управление существенно проще без слагаемых третьего порядка малости по отклонениям.

Авторы выражают благодарность и глубокую признательность профессору Асланову В. С. за внимание к работе и ряд ценных замечаний.

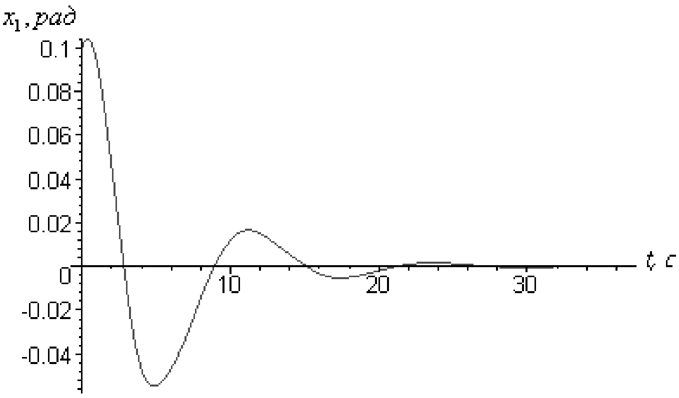

Рис. 2. График поведения отклонения $x_1(t)$

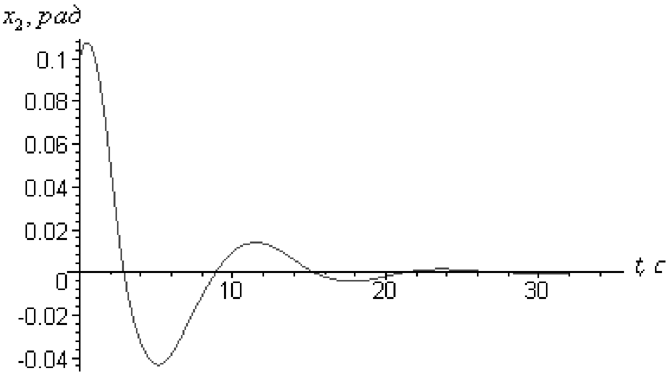

Рис. 3. График поведения отклонения $x_2(t)$

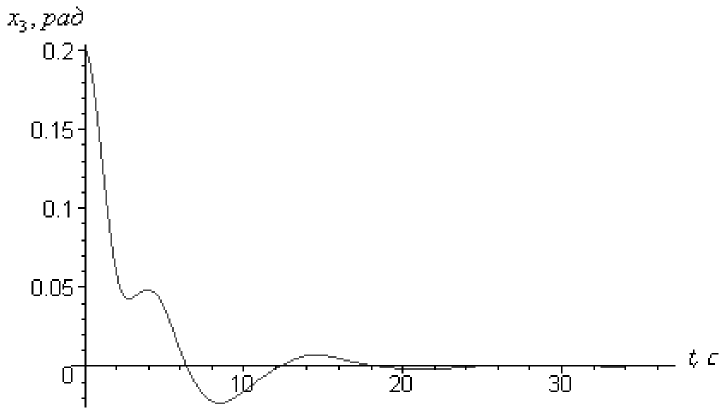

Рис. 4. График поведения отклонения $x_3(t)$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Афанасьев В. Н., Колмановский В. Б, Носов В. Р. Математическая теория конструирования систем управления. — М.: Высш. шк., 1989. — 447 с.
2. Летов А. М. Динамика полета и управление. — М.: Наука, 1969. — 359 с.
3. Построение систем программного движения / Галиуллин А. С., Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г., Фурасов В. Д. — М.: Наука, 1971. — 352 с.

4. Зубов В. И. Проблема устойчивости процессов управления. — Л.: Судостроение, 1980. — 375 с.

5. Раушенбах В. В., Токарь В. И. Управление ориентацией космических аппаратов. — М.: Наука, 1974. — 589 с.

6. Асланов В. С., Дорошин А. В. Стабилизация спускаемого аппарата частичной закрутки при осуществлении неуправляемого спуска. Космические исследования. — 2002. — Т. 40 — № 2. — С. 193–200.

7. Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. — М.: Мир, 1980. — 301 с.

8. Artstein Z. Topological dynamics of an ordinary equations // J. Differ. Equat. 1977. V. 23. P. 216–223.

9. Андреев А. С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы // ПММ — 1984. —Т. 48. Вып. 2. С. 225–232.

10. Маркеев А. П. Теоретическая механика: учеб. для вузов. — Издание второе, дополненное. — М.: ЧеРо, 1999. — 572 с.

11. Bezglasnyi S. P. The stabilization of program motions of controlled nonlinear mechanical systems // Korean J. Comput. Appl. Math. — 2004. — V. 14, № 1–2. — P. 251–266.

12. Безгласный С. П., Мысина О. А. Стабилизация программных движений твердого тела на подвижной платформе // Известия Саратовского университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2008. — Т. 8, вып. 4. — С. 44–52.

13. Управление движением механических систем / Смирнов Е. Я., Павликов В . Ю., Щербаков П. П., Юрков А. В. —Л.: Изд-во ЛГУ, 1985. — 316 с.

Поступила в редакцию 06.09.10

S. P. Bezglasnyi, M. A. Khudyakova
The stabilization of program motions of balanced gyrostat

We consider program motion of balanced gyrostat. We solve the problem of construction asimptotically stability program motion. The program motion can be any function. Control is received in the form the analytical solution. We solve the problem of stabilization by the direct Lyapunov's method and the method of limiting functions and systems. In this case we can use the Lyapunov's functions having constant signs derivatives.

Keywords: balanced gyrostat, coaxial bodies, programm motion, functions with constant sings, Lyapunov's function.

Mathematical Subject Classifications: 74H45

Безгласный Сергей Павлович, к. ф.-м. н., доцент, кафедра теоретической механики, Самарский государственный аэрокосмический университет им. академика С. П. Королева, 443086, Россия, г. Самара, ул. Московское шоссе, 34а, E-mail: bezglasnsp@rambler.ru

Худякова Мария Александровна, аспирант, кафедра теоретической механики, Самарский государственный аэрокосмический университет им. академика С. П. Королева, 443086, Россия, г. Самара, ул. Московское шоссе, 34а, E-mail: motya31087@list.ru