

УДК 517.955.8, 532.529.2

© С. Б. Козицкий

АМПЛИТУДНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОЙ БИДИФФУЗИОННОЙ ВАЛИКОВОЙ КОНВЕКЦИИ С ЯЧЕЙКАМИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ШИРИНЫ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧЕК БИФУРКАЦИИ ХОПФА¹

Рассматривается трехмерная бидиффузионная конвекция валикового типа в бесконечном по горизонтали слое несжимаемой жидкости в окрестности точек бифуркации Хопфа. Методом многомасштабных разложений получена АΨ-система амплитудных уравнений, описывающая вариации амплитуды конвективных ячеек. Ширина ячеек может быть произвольной, что актуально для больших чисел Рэлея. Отмечается, что в трехмерном случае взаимодействие конвекции и поля горизонтальной завихренности играет существенную роль в динамике системы, и им нельзя пренебрегать. Обсуждаются различные формы выведенных уравнений.

Ключевые слова: бидиффузионная конвекция, амплитудное уравнение, метод многомасштабных разложений.

Введение

Считается, что конвекция, связанная с неоднородным нагревом, является самым распространенным видом течений газа и жидкости во Вселенной [1]. Среди различных видов конвекции особое место занимает конвекция, обусловленная двойной диффузией, или бидиффузионная конвекция. Она возникает, когда в некоторой системе в поле силы тяжести образуется неоднородное в пространстве распределение двух компонент с различными коэффициентами диффузии (тепло и соль, как один из вариантов) и может принимать различные формы [2]. Например, бидиффузионная (термохалинная) конвекция играет важную роль в процессах тепло-массопереноса в океане и влияет на такие мелкомасштабные процессы как формирование вертикальной микроструктуры [3].

В 80–90-е гг. в работах по бидиффузионной конвекции изучался процесс формирования структур в окрестности точек бифуркации Хопфа для трансляционно-инвариантных по горизонтали двумерных систем. Развитие осцилляций в таких системах приводит к возникновению различных типов волн (стоячих, бегущих, модулированных, хаотических), которые хорошо описываются обобщенным уравнением Гинзбурга–Ландау [4, 5]. Уравнения такого типа должны выводиться асимптотическими методами из исходных для конкретной физической системы уравнений в частных производных. Существует ряд работ, посвященных амплитудным уравнениям в обычной тепловой конвекции, в том числе — трехмерной и взаимодействующей с фоновым течением [1]. Однако полный и обоснованный вывод амплитудных уравнений для систем с бидиффузионной конвекцией (особенно трехмерных) пока слабо представлен в литературе.

Целью настоящей работы является вывод амплитудных уравнений для трехмерной бидиффузионной конвекции в окрестности точек бифуркации Хопфа для случая валиковой конвекции. При этом развиваются идеи предыдущих работ [3, 4, 6], в которых рассматривалась как двумерная конвекция, так и трехмерная конвекция с ячейками квадратного типа. Предполагается, что полученные в работе амплитудные уравнения позволят продвинуться в понимании механизмов формирования вихревых и конвективных структур в самых разнообразных системах, где имеет место бидиффузионная конвекция.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке ДВО РАН (гранты 09-III-A-07-317, 09-II-CO-07-002).

§ 1. Постановка задачи и основные уравнения

Рассматривается трехмерная бидиффузионная конвекция в слое воды толщиной h , ограниченном двумя бесконечными плоскими горизонтальными границами, подогреваемом и подсаживаемом снизу. Здесь и далее для определенности в качестве жидкости выбрана вода, а в качестве диффундирующих компонент в ней — тепло и соль. Хотя это может быть любая другая жидкая среда с двумя компонентами, обладающими различными коэффициентами диффузии. Исходными уравнениями в данном случае являются уравнения гидродинамики для жидкой смеси в поле силы тяжести [7]:

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} &= -\rho^{-1}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v} + \mathbf{g}, \\ \partial_t T + (\mathbf{v}\nabla)T &= \chi\Delta T, \\ \partial_t S + (\mathbf{v}\nabla)S &= D\Delta S, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0.\end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{v}(t, x, y, z)$ — поле скоростей жидкости; $T(t, x, y, z)$ — температура; $S(t, x, y, z)$ — концентрация соли; $p(t, x, y, z)$ — давление; $\rho(t, x, y, z)$ — плотность жидкости; \mathbf{g} — ускорение свободного падения; ν — коэффициент вязкости жидкости; χ — коэффициент температуропроводности жидкости; D — коэффициент диффузии соли. Используются горизонтальные x и y , а также вертикальная z — пространственные переменные; время обозначено через t .

Распределенные источники тепла и соли отсутствуют. На верхней и нижней границах области поддерживаются постоянные значения температур и соленостей, более высокие — на нижней границе, что соответствует линейному по вертикали и не зависящему от времени основному распределению этих величин. Применяется приближение Обербека–Буссинеска, стандартное для задач конвекции, линейное уравнение состояния жидкости, проведено обезразмеривание с использованием следующих единиц измерения: для длины, времени, скорости, давления, температуры и солености это будут h , h^2/χ , χ/h , $\rho_0\chi^2/h^2$, T_Δ , S_Δ , где T_Δ и S_Δ — разности температур и соленостей на границах слоя.

Обезразмеренные эволюционные уравнения для момента импульса жидкой частицы, температуры и солености приобретают следующий вид [6]:

$$\begin{aligned}u_t + (uu_x + vu_y + wu_z) &= -p_x + \sigma\Delta u, \\ v_t + (uv_x + vv_y + wv_z) &= -p_y + \sigma\Delta v, \\ w_t + (uw_x + vw_y + ww_z) &= -p_z + \sigma\Delta w + \sigma R_T\theta - \sigma R_S\xi, \\ \theta_t + (u\theta_x + v\theta_y + w\theta_z) - w &= \Delta\theta, \\ \xi_t + (u\xi_x + v\xi_y + w\xi_z) - w &= \tau\Delta\xi, \\ u_x + v_y + w_z &= 0.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Здесь введены: $\sigma = \nu_0/\chi$ — число Прандтля ($\sigma \approx 7.0$), $\tau = D/\chi$ — число Льюиса ($0 < \tau < 1$, обычно $\tau = 0.01 - 0.1$). $R_T = (g\alpha'h^3/\chi\nu)T_\Delta$ — температурное и $R_S = (g\gamma'h^3/\chi\nu)S_\Delta$ — соленостное числа Рэлея, где α' и γ' — температурный и солёностный коэффициенты объемного расширения. Поле скоростей жидкости представлено как вектор $\mathbf{v}(t, x, y, z) = (u, v, w)^T$, где верхний индекс «Т» означает транспонирование. Переменные $\theta(t, x, y, z)$ и $\xi(t, x, y, z)$ обозначают отклонения температуры и солености от их стационарных линейных профилей, так что

$$T(t, x, y, z) = T_+ + T_\Delta(\theta(t, x, y, z) - z), \quad S(t, x, y, z) = S_+ + S_\Delta(\xi(t, x, y, z) - z).$$

T_+ и S_+ — температура и соленость на нижней границе области.

Использованы свободные граничные условия для зависимых переменных (горизонтальная компонента скорости не определена):

$$u_z = v_z = w = \theta = \xi = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, 1.$$

Считается, что они хорошо подходят для описания конвекции во внутренних слоях жидкости и не меняют существенно критерии возникновения конвективной неустойчивости для исследуемого класса систем [8].

§ 2. Вывод уравнений — схема разложения

Рассмотрим уравнения конвекции с двойной диффузией в окрестности некоторой точки бифуркации, температурное и соленостное числа Рэлея для которой обозначены R_{Tc} и R_{Sc} соответственно. В этом случае числа Рэлея можно представить в виде

$$R_T = R_{Tc}(1 + \varepsilon^2 r_T), \quad R_S = R_{Sc}(1 + \varepsilon^2 r_S).$$

По крайней мере, одна из величин r_T и r_S — по модулю порядка единицы, а малый параметр ε показывает, насколько далеко от точки бифуркации находится рассматриваемая система. Например, пусть система выводится из равновесия путем увеличения градиента температуры в слое. Тогда $r_T = 1$ и $r_S = 0$, соответственно, $R_T = R_{Tc}(1 + \varepsilon^2)$ и $R_S = R_{Sc}$. Если в системе изначально заданы числа Рэлея, то эту формулу можно использовать как определение для малого параметра

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{R_T - R_{Tc}}{R_{Tc}}}.$$

Аналогичная ситуация складывается и в случае, когда система выводится из равновесия путем уменьшения градиента солености в слое. Тогда $r_T = 0$ и $r_S = -1$, также $R_S = R_{Sc}(1 - \varepsilon^2)$.

Для вывода амплитудных уравнений будем использовать метод разложения производной [9], который является разновидностью метода многомасштабных разложений. Положим, что конвекция имеет вид несколько деформированной системы валов с волновым числом k_c вдоль оси x . Для того, чтобы все векторы вида $\mathbf{k} = (k_c + a_{(x)}, a_{(y)})$, входящие в состав пакета мод, образующих данную систему валов, удовлетворяли требованию $|\mathbf{k}| = k_c + O(\varepsilon)$, нужно положить $a_{(x)} = O(\varepsilon)$ и $a_{(y)} = O(\sqrt{\varepsilon})$. С учетом этого введем следующие медленные переменные [1]:

$$T_1 = \varepsilon t, \quad T_2 = \varepsilon^2 t, \quad X = \varepsilon x, \quad Y = \sqrt{\varepsilon} y.$$

В соответствии с выбранным методом будем считать, что зависимые переменные теперь зависят от t , T_1 , T_2 , x , y , z , X , Y , которые считаются независимыми. Заменим также производные в уравнениях (1.1) на продолженные по правилам:

$$\partial_t \rightarrow \partial_t + \varepsilon \partial_{T_1} + \varepsilon^2 \partial_{T_2}, \quad \partial_x \rightarrow \partial_x + \varepsilon \partial_X, \quad \partial_y \rightarrow \sqrt{\varepsilon} \partial_Y.$$

Тогда уравнения (1.1) запишутся так:

$$\begin{aligned} u_t + (uu_x + wu_z) + p_x - \sigma(u_{xx} + u_{zz}) &= -\sqrt{\varepsilon}vu_Y - \\ &- \varepsilon(u_{T_1} + uu_X + p_X - \sigma(2u_{xX} + u_{YY})) + \varepsilon^2(\sigma u_{XX} - u_{T_2}), \\ v_t + (wv_x + wv_z) - \sigma(v_{xx} + v_{zz}) &= -\sqrt{\varepsilon}(vv_Y + p_Y) - \\ &- \varepsilon(v_{T_1} + wv_X - \sigma(2v_{xX} + v_{YY})) + \varepsilon^2(\sigma v_{XX} - v_{T_2}), \\ w_t + (uw_x + ww_z) + p_z - \sigma(w_{xx} + w_{zz}) - \sigma R_{Tc}\theta + \sigma R_{Sc}\xi &= \\ &= -\sqrt{\varepsilon}vw_Y - \varepsilon(w_{T_1} + uw_X - (2\sigma w_{xX} + w_{YY})) + \varepsilon^2(\sigma w_{XX} - w_{T_2} + \sigma r_T\theta - \sigma r_S\xi), \quad (2.1) \\ \theta_t + (u\theta_x + w\theta_z) - w - (\theta_{xx} + \theta_{zz}) &= -\sqrt{\varepsilon}v\theta_Y - \\ &- \varepsilon(\theta_{T_1} + u\theta_X - 2\theta_{xX} - \theta_{YY}) + \varepsilon^2(\theta_{XX} - \theta_{T_2}), \\ \xi_t + (u\xi_x + w\xi_z) - w - \tau(\xi_{xx} + \xi_{zz}) &= -\sqrt{\varepsilon}v\xi_Y - \\ &- \varepsilon(\xi_{T_1} + u\xi_X - 2\tau\xi_{xX} - \tau\xi_{YY}) + \varepsilon^2(\tau\xi_{XX} - \xi_{T_2}), \\ u_x + w_z &= -\sqrt{\varepsilon}v_Y - \varepsilon u_X. \end{aligned}$$

Будем искать решения этих уравнений в виде рядов по степеням ε :

$$\begin{aligned} u &= \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3, & v &= \varepsilon \sqrt{\varepsilon} v_1 + \varepsilon^2 \sqrt{\varepsilon} v_2 + \varepsilon^3 \sqrt{\varepsilon} v_3, \\ w &= \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + \varepsilon^3 w_3, & p &= \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \varepsilon^3 p_3, \\ \theta &= \varepsilon \theta_1 + \varepsilon^2 \theta_2 + \varepsilon^3 \theta_3, & \xi &= \varepsilon \xi_1 + \varepsilon^2 \xi_2 + \varepsilon^3 \xi_3. \end{aligned} \quad (2.2)$$

После их подстановки в (2.1) и приведению членов при ε^n получаются системы уравнений для определения членов рядов (2.2). При этом к уравнениям, получающимся при ε^n , из соображений удобства мы добавим уравнения для v_n , которые возникают при степенях $\varepsilon^{n+1/2}$. В результате имеем:

$$\begin{aligned} O(\varepsilon): & \quad \widehat{L}\varphi_1 = 0, \\ O(\varepsilon^2): & \quad \widehat{L}\varphi_2 = -\widehat{L}_1\varphi_1 - \widehat{N}(\varphi_1, \varphi_1), \\ O(\varepsilon^3): & \quad \widehat{L}\varphi_3 = -\widehat{L}_1\varphi_2 - \widehat{L}_2\varphi_1 - \widehat{N}(\varphi_1, \varphi_2) - \widehat{N}(\varphi_2, \varphi_1) - \widehat{N}_1(\varphi_1, \varphi_1), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где мы ввели вектор зависимых величин $\varphi = (u, v, w, \theta, \xi, p)^T$ и матрично-дифференциальный оператор \widehat{L} :

$$\widehat{L} = \begin{pmatrix} \partial_t - \sigma\Delta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_x \\ 0 & \partial_t - \sigma\Delta_2 & 0 & 0 & 0 & \partial_Y \\ 0 & 0 & \partial_t - \sigma\Delta_2 & -\sigma R_{Tc} & \sigma R_{Sc} & \partial_z \\ 0 & 0 & -1 & \partial_t - \Delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \partial_t - \tau\Delta_2 & 0 \\ \partial_x & 0 & \partial_z & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

А также ввели операторы \widehat{L}_1 и \widehat{L}_2 , входящие в правые части систем:

$$\begin{aligned} \widehat{L}_1 &= L_a \partial_{T_1} - L_b (2\partial_x \partial_X + \partial_Y^2) + L_c \partial_X + L_d \partial_Y, \\ \widehat{L}_2 &= L_a \partial_{T_2} - L_b \partial_X^2 + \sigma L_R, \\ L_a &= \text{diag}(1, 1, 1, 1, 1, 0), & L_b &= \text{diag}(\sigma, \sigma, \sigma, 1, \tau, 0), \\ L_c(1, 6) &= 1, & L_c(6, 1) &= 1, & L_d(6, 2) &= 1. \\ L_R(3, 4) &= -r_T R_{Tc}, & L_R(3, 5) &= r_S R_{Sc}. \end{aligned}$$

Здесь в матрицах $L_i(6 \times 6)$ упомянуты только отличные от нуля элементы. Также $\Delta_2 = \partial_x^2 + \partial_z^2$ — Лапласиан по переменным x и z . Кроме того, введены нелинейные операторы \widehat{N} и \widehat{N}_1 как следующие векторы:

$$\begin{aligned} \widehat{N}(\varphi_i, \varphi_j) &= (\widehat{M}(\varphi_i, u_j), \widehat{M}(\varphi_i, v_j), \widehat{M}(\varphi_i, w_j), \widehat{M}(\varphi_i, \theta_j), \widehat{M}(\varphi_i, \xi_j), 0)^T, \\ \widehat{N}_1(\varphi_i, \varphi_j) &= (\widehat{M}_1(\varphi_i, u_j), \widehat{M}_1(\varphi_i, v_j), \widehat{M}_1(\varphi_i, w_j), \widehat{M}_1(\varphi_i, \theta_j), \widehat{M}_1(\varphi_i, \xi_j), 0)^T, \\ \widehat{M}(\varphi_i, u_j) &= u_i u_{jx} + w_i u_{jz}, & \widehat{M}_1(\varphi_i, u_j) &= u_i u_{jX} + v_i u_{jY}. \end{aligned}$$

Помимо систем (2.3) при степенях ε с первой по третью в некоторых случаях имеет смысл рассматривать системы при более высоких степенях малого параметра, например, чтобы включить в итоговые амплитудные уравнения нелинейные члены пятого порядка. Однако в данной статье мы ограничимся уравнениями, которые получаются при степенях не выше третьей. При этом линейные уравнения при ε^1 дадут нам решение в виде нормальной моды, а условия отсутствия секулярных членов в системах при ε^2 и ε^3 приведут к уравнениям, которым должна удовлетворять амплитуда нормальной моды.

§ 3. Члены первого порядка по ε

При $O(\varepsilon^1)$ (в случае v при $O(\varepsilon^{3/2})$) получается следующая система:

$$\begin{aligned} u_{1t} + p_{1x} - \sigma(u_{1xx} + u_{1zz}) &= 0, \\ v_{1t} + p_{1Y} - \sigma(v_{1xx} + v_{1zz}) &= 0, \\ w_{1t} + p_{1z} - \sigma(w_{1xx} + w_{1zz}) - \sigma R_{Tc}\theta_1 + \sigma R_{Sc}\xi_1 &= 0, \\ \theta_{1t} - w_1 - (\theta_{1xx} + \theta_{1zz}) &= 0, \\ \xi_{1t} - w_1 - \tau(\xi_{1xx} + \xi_{1zz}) &= 0, \\ u_{1x} + w_{1z} &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

В операторной записи она имеет вид $\widehat{L}\varphi_1 = 0$. Решения будем искать в виде нормальной моды (ячейки валикового типа):

$$\begin{aligned} u_1 &= \bar{u}_1(X, Y, T_1, T_2) e^{ikx} e^{\lambda t} \cos \pi z + \widehat{u}_1(X, Y, T_1, T_2) + \text{c.c.}, \\ v_1 &= \bar{v}_1(X, Y, T_1, T_2) e^{ikx} e^{\lambda t} \cos \pi z + \widehat{v}_1(X, Y, T_1, T_2) + \text{c.c.}, \\ w_1 &= A(X, Y, T_1, T_2) e^{ikx} e^{\lambda t} \sin \pi z + \text{c.c.}, \\ \theta_1 &= \bar{\theta}_1(X, Y, T_1, T_2) e^{ikx} e^{\lambda t} \sin \pi z + \text{c.c.}, \\ \xi_1 &= \bar{\xi}_1(X, Y, T_1, T_2) e^{ikx} e^{\lambda t} \sin \pi z + \text{c.c.}, \\ p_1 &= \bar{p}_1(X, Y, T_1, T_2) e^{ikx} e^{\lambda t} \cos \pi z + \widehat{p}_1(X, Y, T_1, T_2) + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Члены с чертами и шляпками зависят только от медленных переменных. Без большой потери общности мы опустили \widehat{w}_1 , $\widehat{\theta}_1$ и $\widehat{\xi}_1$, которые, как и другие члены со шляпками, имеют смысл констант интегрирования и представляют собой поля по медленным горизонтальным переменным. Более детальное рассмотрение показывает, что эти члены или тождественно равны нулю, или не приводят к физически содержательным результатам. Нас интересуют члены \widehat{u}_1 и \widehat{v}_1 , образующие поле скоростей, на фоне которого развивается конвекция.

Строго говоря, в исследуемой системе одновременно может возбуждаться несколько таких валиковых мод с конвективными валиками, расположенными под произвольными углами друг к другу. Например, суперпозиция двух валиков под прямым углом друг к другу дает ячейки квадратного типа, если же валиков три — под углами в 120 градусов друг к другу — то они дадут гексагональные ячейки. В настоящей работе мы рассматриваем простейший случай трехмерной бидиффузионной конвекции, когда есть только одна валиковая мода. Понятно, что более геометрически сложные конфигурации валиков — тема отдельного исследования. Однако и одномодовая конвекция представляет практический интерес, поскольку влияние всех прочих мод в некоторой области пространства по разным причинам может оказаться несущественным. Например, известно, что в двухмерной бидиффузионной конвекции для амплитудных уравнений характерны решения в виде уединенных волн, которые в какой-то момент времени разбегаются в противоположные стороны и перестают взаимодействовать [10].

Подстановка выражений (3.2) в уравнения (3.1) даст соотношения для амплитуд.

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 &= -\frac{ik}{\lambda + \sigma\kappa^2} \bar{p}_1 = -\frac{\pi}{ik} A, & \bar{v}_1 &= -\frac{1}{\lambda + \sigma\kappa^2} \bar{p}_{1Y} = \frac{\pi}{k^2} A_Y, \\ \bar{\theta}_1 &= \frac{1}{\lambda + \kappa^2} A, & \bar{\xi}_1 &= \frac{1}{\lambda + \tau\kappa^2} A, \\ \bar{p}_1 &= -\frac{\sigma\pi}{\kappa^2} \left(\frac{R_{Tc}}{\lambda + \kappa^2} - \frac{R_{Sc}}{\lambda + \tau\kappa^2} \right) A = -\frac{\pi}{k^2} (\lambda + \sigma\kappa^2) A. \end{aligned}$$

Здесь и далее $A \equiv w_1$, также $\kappa^2 = k^2 + \pi^2$ — квадрат полного волнового числа. В дальнейшем будет использовано обозначение вектора амплитуд $\bar{\varphi}_1 = (\bar{u}_1, \bar{v}_1, \bar{w}_1, \bar{\theta}_1, \bar{\xi}_1, \bar{p}_1)^T$. Параметры валиковой конвективной моды λ , k , R_{Tc} , R_{Sc} связаны соотношением:

$$(\lambda + \sigma\kappa^2)(\lambda + \kappa^2)(\lambda + \tau\kappa^2) + \sigma(k^2/\kappa^2)[R_{Sc}(\lambda + \kappa^2) - R_{Tc}(\lambda + \tau\kappa^2)] = 0.$$

Это уравнение имеет три корня, два из которых могут быть комплексно-сопряженными. В случае бифуркации Хопфа (см. рис. 1) эти два корня приобретают положительную действительную часть при некотором R_{Tc} :

$$R_{Tc} = \frac{\sigma + \tau}{1 + \sigma} R_{Sc} + \frac{\varkappa^6}{\sigma k^2} (1 + \tau)(\tau + \sigma), \quad \omega^2 = \frac{1 - \tau}{1 + \sigma} \sigma R_{Sc} \frac{k^2}{\varkappa^2} - \tau^2 \varkappa^4.$$

Здесь ω — частота волн конвекции. В настоящей работе мы рассматриваем бидиффузионную конвекцию именно в точках бифуркации Хопфа, то есть везде $\lambda = i\omega$. Из этих выражений

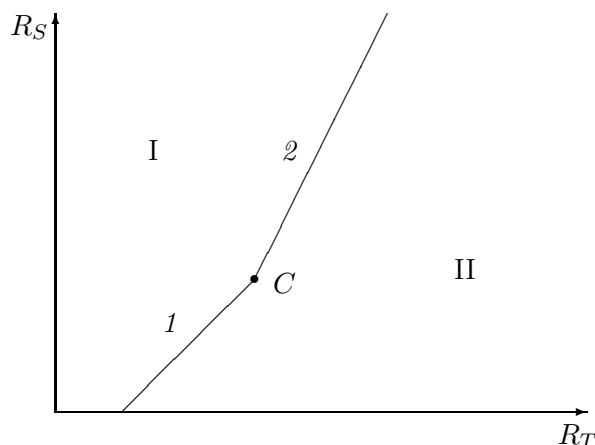


Рис. 1. Плоскость чисел Рэлея $R_T - R_S$, на прямой 1 — бифуркация Тейлора, на прямой 2 — бифуркация Хопфа. В области I конвекции нет, в области II конвекция есть

видно, что критические числа Рэлея зависят от волнового числа k . Как нетрудно установить, минимальное число Рэлея R_{Tc} получается при $k_c = \pi/\sqrt{2}$, которое и задает характерный размер конвективных ячеек в системе, которые возникают при увеличении R_T выше критической величины. Вместе с модой, для которой волновое число равно k_c , возбуждаются и соседние моды, отличающиеся от центральной моды на величину ε , приводя к тому, что совокупный пакет этих мод выглядит как одна мода с волновым числом k_c и переменной амплитудой, описываемой искомыми амплитудными уравнениями. Ситуация точно такая же и при возбуждении конвекции за счет изменения солёностного числа Рэлея R_{Sc} .

Тем не менее, как показывают результаты работы [3], сказанное справедливо, только если числа Рэлея не очень велики. При больших же числах Рэлея, что типично для океанологических приложений, имеет место интересный феномен, когда при увеличении R_T сверх критического значения критическое волновое число быстро увеличивается и достигает величин $k_c \approx 100$. То есть преимущественно растут достаточно узкие конвективные ячейки. Если амплитуда конвекции растёт пропорционально ε , то критическое волновое число растёт как $\sqrt{\varepsilon}$, существенно быстрее амплитуды. Причем с модой с волновым числом $k_c \approx 100$ возбуждаются и соседние моды, образуя волновой пакет, который выглядит как одна мода с переменной амплитудой. Поэтому имеет смысл выводить искомые амплитудные уравнения, не задаваясь заранее какой-то одной величиной k_c , иначе говоря — рассматривать конвективные ячейки произвольной ширины при фиксированной высоте.

§ 4. Уравнения при ε^2 и ε^3

Полученные системы можно записать в общем виде:

$$\widehat{L}\varphi_i = Q_i.$$

Функции Q_i включают члены, резонирующие с левой частью уравнений, а именно: $Q_i = Q_i^{(1)} + Q_i^{(2)} + Q_i^{(3)}$. Здесь $Q_i^{(1)}$ и $Q_i^{(2)}$ порождают секулярные члены двух типов в решениях, а $Q_i^{(3)}$

не порождает секулярных членов. Условие отсутствия секулярных членов первого типа сводится к требованию ортогональности функций $Q_i^{(1)}$ и решения сопряженного однородного уравнения $\hat{L}^* \varphi_i^* = 0$, которое обычно приобретает вид амплитудного уравнения. Члены $Q_i^{(2)}$ являются константами по быстрым переменным и, чтобы не нарушать регулярность разложений (3.2), должны быть приравнены к нулю [5]. Эти условия также имеют вид амплитудных уравнений.

В общем виде условие отсутствия секулярных членов первого типа выглядит следующим образом [9]. Введем скалярное произведение векторов:

$$\langle \bar{\varphi}_i, \bar{\varphi}_j \rangle = \bar{u}_i \bar{u}_j^* + \bar{v}_i \bar{v}_j^* + \bar{w}_i \bar{w}_j^* + \bar{\theta}_i \bar{\theta}_j^* + \bar{\xi}_i \bar{\xi}_j^* + \bar{p}_i \bar{p}_j^*.$$

Системы уравнений, возникающие при ε^i , при подстановке в правые части конкретного вида функций \bar{Q}_i имеют вид $L \bar{\varphi}_i = \bar{Q}_i^{(1)}$. Тогда условия разрешимости для рассматриваемых систем уравнений запишутся следующим образом:

$$\langle \bar{Q}_i, \bar{F} \rangle = 0, \quad (L^*)^T \bar{F} = 0.$$

То есть для совместности систем уравнений их правые части должны быть ортогональны решению сопряженной однородной системы. Конкретный вид вектора \bar{F} в нашем случае таков:

$$\bar{F} = \left(ik\pi, 0, k^2, \frac{k^2 \sigma R_{Tc}}{\lambda^* + \varkappa^2}, -\frac{k^2 \sigma R_{Sc}}{\lambda^* + \tau \varkappa^2}, \pi(\lambda^* + \sigma \varkappa^2) \right)^T.$$

Найдем амплитудные уравнения, получающиеся из системы при ε^2 . Вектор правых частей $\bar{Q}_2^{(1)}$ имеет следующий вид:

$$\bar{Q}_2^{(1)} = \check{Q}_{2a}(A_{T_1} + ik\Psi_Y A) + \check{Q}_{2b}(2ikA_X + A_{YY}) + \check{Q}_{2c}A_X + \check{Q}_{2d}A_Y + \bar{Q}_{2v}^{(1)}.$$

Отдельно выделена компонента $\bar{Q}_{2v}^{(1)}$, не вносящая вклад в амплитудное уравнение в силу того, что $\bar{F}(2) = 0$. Компоненты всех векторов явным образом запишутся так:

$$\check{Q}_{2a} = -L_a \check{\varphi}_1, \quad \check{Q}_{2b} = L_b \check{\varphi}_1, \quad \check{Q}_{2c} = -L_c \check{\varphi}_1, \quad \check{Q}_{2d} = -L_d \check{\varphi}_{1a}.$$

Векторы $\check{\varphi}_1$ и $\check{\varphi}_{1a}$ определяются из тех соображений, чтобы выполнялось $\bar{\varphi}_1 = \check{\varphi}_1 A + \check{\varphi}_{1a} A_Y$, или покомпонентно:

$$\check{\varphi}_1 = \left(\frac{ik\pi}{k^2}, 0, 1, \frac{1}{\lambda + \varkappa^2}, \frac{1}{\lambda + \tau \varkappa^2}, -\frac{\pi}{k^2}(\lambda + \sigma \varkappa^2) \right)^T, \quad \check{\varphi}_{1a}(2) = \frac{\pi}{k^2}.$$

Остальные члены у $\check{\varphi}_{1a}$ равны нулю. Условие отсутствия секулярных членов первого типа в решении уравнений при ε^2 запишется как $\langle \bar{Q}_2^{(1)}, \bar{F} \rangle = 0$ и после несложных вычислений приобретает вид амплитудного уравнения (α_0 определяется в (5.2) ниже):

$$A_{T_1} + \alpha_0(2ikA_X + A_{YY}) + ikA\Psi_Y = 0. \tag{4.1}$$

Для исключения секулярных членов второго типа необходимо потребовать, чтобы выполнялось равенство $\bar{Q}_2^{(2)} = 0$. Расписанное покомпонентно, оно даст следующую систему:

$$\bar{Q}_2^{(2)}(1) = -\hat{u}_{1T_1} - \hat{p}_{1X} + \sigma \hat{u}_{YY} = 0, \quad \bar{Q}_2^{(2)}(2) = -\hat{v}_{1T_1} + \sigma \hat{v}_{YY} = 0, \quad \bar{Q}_2^{(2)}(6) = -\hat{u}_{1X} - \hat{v}_{1Y} = 0.$$

Чтобы удовлетворить эти равенства, введем горизонтальную функцию тока Ψ такую, что:

$$\hat{u}_1 = \Psi_Y, \quad \hat{v}_1 = -\Psi_X, \quad \Psi_{T_1} - \sigma \Psi_{YY} = 0. \tag{4.2}$$

При этом получается, что $\widehat{p}_{1X} = 0$. Уравнения (4.1) и (4.2) вместе составляют искомую систему амплитудных уравнений, получающуюся при рассмотрении членов порядка ε^2 в методе многомасштабных разложений.

Вычислим, наконец, амплитудные уравнения из системы при ε^3 . Для этого нам понадобятся решения для φ_1 и φ_2 , которые могут быть написаны в общей форме:

$$\varphi_1 = \varphi_1^{(0)} + \widehat{\varphi}_1, \quad \varphi_2 = \varphi_2^{(0)} + \varphi_2^{(1)} + \widehat{\varphi}_2 + \widetilde{\varphi}_2.$$

Здесь $\varphi_i^{(0)}$ — общее решение однородного уравнения $\widehat{L}\varphi_i^{(0)} = 0$, $\varphi_2^{(1)}$ — частное решение неоднородного уравнения $\widehat{L}\varphi_2^{(1)} = Q_2$, $\widehat{\varphi}_i$ — средние поля по медленным горизонтальным переменным, $\widetilde{\varphi}_2$ — нелинейные по амплитуде члены.

$$\overline{\varphi}_2^{(1)} = L_e \overline{Q}_2^{(1)} = L_e (\check{Q}_{2b} - \alpha_0 \check{Q}_{2a}) \widehat{D}A + L_e \check{Q}_{2c} A_X + L_e \check{Q}_{2d} A_{Y_Y}.$$

Здесь $\overline{\varphi}_2^{(1)}$ — частное решение уравнения $L\overline{\varphi}_2^{(1)} = \overline{Q}_2^{(1)}$, записанное в виде $L_e \overline{Q}_2^{(1)}$, а также оператор $\widehat{D} = (2ik\partial_X + \partial_Y^2)$.

Вектор правых частей $\overline{Q}_3^{(1)}$ выглядит так:

$$\overline{Q}_3^{(1)} = -(L_a \partial_{T_1} - L_b \widehat{D} + L_c \partial_X + L_d \partial_Y) \overline{\varphi}_2^{(1)} - (L_a \partial_{T_2} - L_b \partial_X^2 + \sigma L_R) \overline{\varphi}_1^{(1)} + \overline{Q}_{3n}^{(1)}.$$

Через $\overline{Q}_{3n}^{(1)}$ мы обозначили нелинейные члены по медленным переменным. Искомые амплитудные уравнения при ε^3 получаются из условия разрешимости $\langle \overline{Q}_3^{(1)}, \overline{F} \rangle = 0$. Их окончательный вид представлен и обсуждается в следующем разделе.

Из условия отсутствия секулярных членов второго типа в уравнениях при ε^3 необходимо потребовать выполнения следующих соотношений:

$$\begin{aligned} (\Psi_{T_2} - \sigma \Psi_{XX})_X &= \frac{\pi^2}{k^4} (|A_Y|^2)_Y + \frac{\pi^2}{k^4} \operatorname{Re}(ik(AA_Y^*)_X) + (\Psi_{XY}\Psi_X - \Psi_Y\Psi_{XX}), \\ (\Psi_{T_2} - \sigma \Psi_{XX})_Y &= -\frac{\pi^2}{k^2} (|A|^2)_X - \frac{\pi^2}{k^2} \operatorname{Re}(ikAA_Y^*) - (\Psi_{XY}\Psi_Y - \Psi_X\Psi_{YY}) - p_{2X}. \end{aligned}$$

Отсюда первое уравнение мы можем рассматривать как одно из основных, описывающее взаимодействие конвекции с горизонтальным вихрем. Также из обоих уравнений для \widehat{p}_2 получается соотношение следующего вида:

$$\widehat{p}_{2XX} = 2(\Psi_{XX}\Psi_{YY} - \Psi_{XY}^2) - \frac{\pi^2}{k^4} [k^2(|A|^2)_{XX} + (|A_Y|^2)_{YY}] - \frac{2\pi^2}{k^4} \operatorname{Re}(ik(AA_Y^*)_{XY}).$$

§ 5. $A\Psi$ -система амплитудных уравнений

Запишем получившиеся в итоге уравнения (для системы при ε^3):

$$\begin{cases} A_{T_2} = rA + \alpha_1 \left(\partial_X + \frac{1}{2ik} \partial_Y^2 \right)^2 A - \alpha_0 A_{XX} + \alpha_2 A|A|^2 + J(\Psi, A) + \widehat{F}(\Psi, A), \\ (\Psi_{T_2} - \sigma \Psi_{XX})_X = J(\Psi, \Psi_X) + \widehat{G}(A). \end{cases} \quad (5.1)$$

Где введен Якобиан $J(\Psi, f) = (\Psi_X f_Y - \Psi_Y f_X)$, а также операторы $\widehat{F}(\Psi, A)$ и $\widehat{G}(A)$ определены как:

$$\begin{aligned} \widehat{F}(\Psi, A) &= \alpha_3 (ikA\Psi_{XY} + A_Y\Psi_{YY}) + \alpha_4 A\Psi_{YY}, \\ \widehat{G}(A) &= \frac{\pi^2}{k^4} (|A_Y|^2)_Y + \frac{\pi^2}{k^4} \operatorname{Re}(ik(AA_Y^*)_X). \end{aligned}$$

Заметим, что член $(|A_{Y_1}|^2)_{Y_1}$ в операторе $\widehat{G}(A)$ в уравнениях (5.1) будет генерировать Ψ , когда амплитуда A существенно зависит от Y , что типично для 3D конвекции. Таким образом, уравнения (5.1) с опущенным Ψ некорректны.

Коэффициенты в этих уравнениях определяются формулами:

$$\begin{aligned} r &= \beta_2[(\sigma + \tau)(\varkappa^2 - i\omega)r_T - (\sigma + 1)(\tau\varkappa^2 - i\omega)r_S](1 - \tau)^{-1}, \\ \alpha_0 &= \frac{i\omega}{\varkappa^2} \left[1 + \left(\frac{\pi^2}{2k^2} - 1 \right) \left(1 - \frac{\varkappa^4}{\omega^2} \beta_1 \right) \right] = \frac{i\omega}{\varkappa^2} + \beta, \quad \alpha_2 = \frac{\varkappa^2}{4i\omega}, \\ \alpha_1 &= \left(\frac{\pi^2}{k^2} - 1 \right) \left(\frac{2i\omega}{\varkappa^2} + \frac{2\varkappa^2}{i\omega} \beta_1 \right) - \frac{8k^2}{\varkappa^2} \beta \left[1 + \left(\frac{\pi^2}{2k^2} - 1 \right) \beta_2 \right] + \frac{4k^2}{\varkappa^2} \beta^2 \beta_3, \\ \alpha_3 &= \frac{2ik}{\varkappa^2} \left[1 + \left(\frac{\pi^2}{k^2} - 1 \right) \beta_2 - \beta \beta_3 \right], \quad \alpha_4 = \frac{ik}{\varkappa^2} (1 - \beta_2 - \beta \beta_3). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Здесь мы для удобства и компактности формул ввели функции:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{i\omega}{\varkappa^2} \left(\frac{\pi^2}{2k^2} - 1 \right) \left(1 - \frac{\varkappa^4}{\omega^2} \cdot \frac{(\tau + \sigma + \tau\sigma)i\omega + \tau\sigma\varkappa^2}{i\omega + (1 + \tau + \sigma)\varkappa^2} \right), \\ \beta_1 &= \frac{(\tau + \sigma + \tau\sigma)i\omega + \tau\sigma\varkappa^2}{i\omega + (1 + \tau + \sigma)\varkappa^2}, \quad \beta_2 = \frac{(i\omega + \varkappa^2)(i\omega + \tau\varkappa^2)}{2i\omega(i\omega + (1 + \tau + \sigma)\varkappa^2)}, \\ \beta_3 &= \frac{\varkappa^2(\omega^2 + \tau\varkappa^4)}{2i\omega(i\omega + \varkappa^2)(i\omega + \tau\varkappa^2)} - \frac{\varkappa^4((1 + \tau + 2\sigma)i\omega + (1 + \tau^2 + \tau\sigma + \sigma)\varkappa^2)}{2(i\omega + \varkappa^2)(i\omega + \tau\varkappa^2)(i\omega + (1 + \tau + \sigma)\varkappa^2)}. \end{aligned}$$

Несложно заметить, что при $k = \pi/\sqrt{2}$, что соответствует наиболее быстро растущей моде для не слишком высоких частот, параметр β обращается в нуль, и приведенные выше формулы сильно упрощаются:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{2i\omega}{3\pi^2}, \quad \alpha_1 = \frac{4i\omega}{3\pi^2} + \frac{3\pi^2}{i\omega} \beta_1, \quad \alpha_2 = \frac{3\pi^2}{8i\omega}, \\ \alpha_3 &= \frac{i2\sqrt{2}}{3\pi} (1 + \beta_2), \quad \alpha_4 = \frac{i\sqrt{2}}{3\pi} (1 - \beta_2). \end{aligned}$$

Надо сказать, что подробное аналитическое и численное исследование получившихся уравнений представляет собой отдельную и нетривиальную задачу, которая будет являться предметом последующих публикаций. Для численного моделирования системы (5.1), по мнению автора, лучше всего подходят современные ETD (exponential time differencing) методы [11], допускающие эффективное распараллеливание, например, с использованием системы CUDA.

§ 6. Комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау

Рассмотрим частный случай системы (5.1), к которому она сводится при некоторых упрощающих предположениях. Положим, что отсутствует взаимодействие с полем горизонтальной завихренности Ψ , вся динамика рассматривается относительно единственной пространственной переменной X , волновое число соответствует первой теряющей устойчивость моде $k = \pi/\sqrt{2}$ для не слишком высоких частот Хопфа. При этих условиях система приобретает следующий вид:

$$A_{T_2} = rA + \alpha_5 A_{XX} + \alpha_2 A|A|^2. \quad (6.1)$$

Коэффициенты получившегося CGL уравнения (согласуются с [4, 10]):

$$\alpha_5 = \frac{i\omega}{\varkappa^2} + \frac{2\varkappa^2}{i\omega} \beta_1 = \frac{i\omega}{\varkappa^2} + \frac{2\varkappa^2}{i\omega} \cdot \frac{(\tau + \sigma + \tau\sigma)i\omega + \tau\sigma\varkappa^2}{i\omega + (1 + \tau + \sigma)\varkappa^2}.$$

В случае, когда волновое число k не связано какими-либо условиями, коэффициент α_5 выражается в общем виде как $\alpha_5 = \alpha_1 - \alpha_0$ (см. рис. 2). В пределе больших частот ω полученное

уравнение сводится к нелинейному уравнению Шредингера и имеет решения типа темных солитонов [4].

Стоит отметить, что коэффициент при нелинейном члене $\alpha_2 = -i\kappa^2/4\omega$ в уравнении (6.1) является чисто мнимым. С этим связана известная проблема, которая заключается в том, что одномодовое решение, удовлетворяющее этому уравнению, неограниченно возрастает со временем. Один из возможных способов добиться ограничения роста амплитуды, предлагаемый разными авторами, состоит во включении в уравнение нелинейных членов вплоть до пятого порядка, возникающих в системах уравнений при ε^5 . Другой способ [12] заключается в том, что учет зависимости вязкости и других параметров задачи от температуры и солености приводит к появлению у коэффициента α_2 действительной части, которая позволяет судить о типе бифуркации Хопфа в исследуемой системе. Получается, что при некоторых значениях частот и волновых чисел для одномодового решения имеет место суперкритическая бифуркация Хопфа, ограничивающая рост амплитуды моды. При других же значениях ω и k бифуркация Хопфа оказывается субкритической, что влечет за собой необходимость для ограничения амплитуды решения включать в уравнение (6.1) нелинейные члены более высокого порядка, чем третий. Наконец, нелинейное ограничение на рост амплитуды естественным образом возникает при рассмотрении решений, состоящих более чем из одной моды, как следствие взаимодействия разных мод [10].

§ 7. Результаты

- Выведена $A\Psi$ -система амплитудных уравнений (5.1), описывающая трехмерную бидиффузионную валиковую конвекцию в бесконечном слое жидкости, взаимодействующую с полем горизонтальной завихренности Ψ .
- Развита методика вычисления коэффициентов амплитудных уравнений для бидиффузионной конвекции, позволяющий получать сравнительно компактные формулы, такие как (5.2) (см. рис. 2–4).
- Как частный случай: получено комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау (6.1) для двумерной бидиффузионной конвекции при произвольном k (ширине конвективных ячеек).
- Из структуры оператора $\hat{G}(A)$ в уравнениях (5.1) можно понять, что в 3D случае взаимодействие конвекции с полем горизонтальной завихренности играет существенную роль.

Полученные результаты могут быть использованы для описания процессов тепло-массообмена, процессов формирования вихревых образований в океане и атмосфере за счет конвекции, а также могут быть основой для построения более продвинутых моделей такого рода.

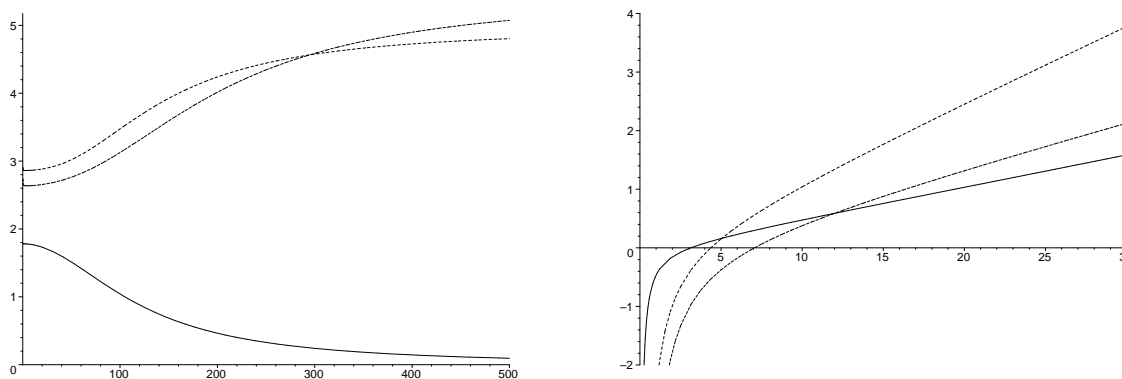


Рис. 2. $\text{Re}(\alpha_5(\omega))$ (слева) и $\text{Im}(\alpha_5(\omega))$ (справа) при различных k : $k = 1.75$ (пунктир), $k = \pi/\sqrt{2}$ (сплошная), $k = 3$ (штрих). При $\sigma = 7$ и $\tau = 0.02$

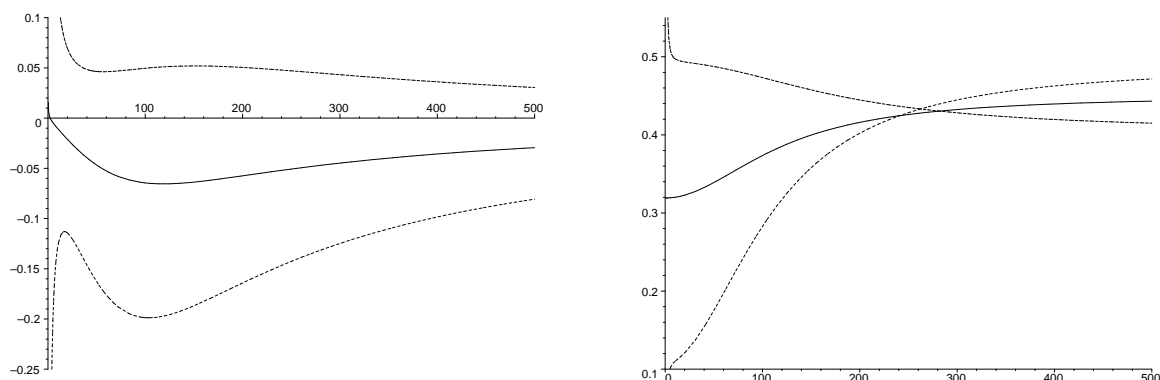


Рис. 3. $\text{Re}(\alpha_3(\omega))$ (слева) и $\text{Im}(\alpha_3(\omega))$ (справа) при различных k : $k = 1.75$ (пунктир), $k = \pi/\sqrt{2}$ (сплошная), $k = 3$ (штрих). При $\sigma = 7$ и $\tau = 0.02$

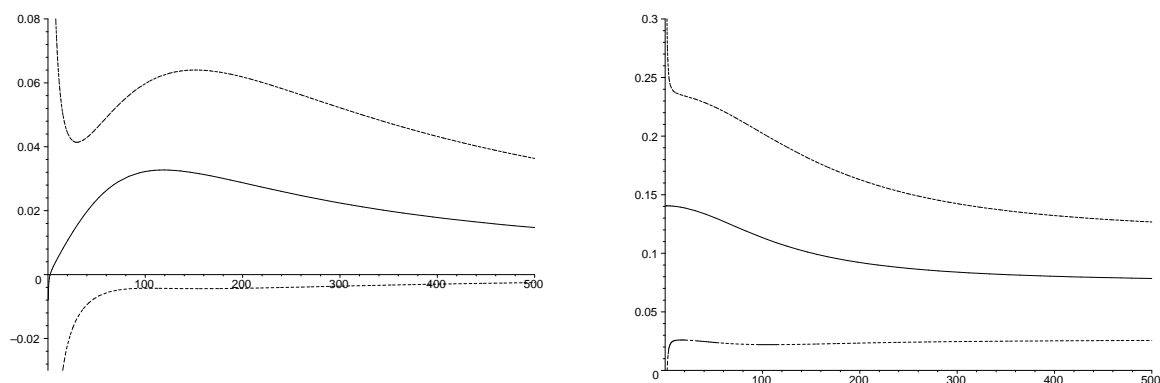


Рис. 4. $\text{Re}(\alpha_4(\omega))$ (слева) и $\text{Im}(\alpha_4(\omega))$ (справа) при различных k : $k = 1.75$ (пунктир), $k = \pi/\sqrt{2}$ (сплошная), $k = 3$ (штрих). При $\sigma = 7$ и $\tau = 0.02$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гетлинг А. В. Конвекция Рэлея–Бенара. Структуры и динамика. — М.: Эдиториал УРСС, 1999. — 247 с.
2. Хашперт Г., Тернер Дж. Конвекция, обусловленная двойной диффузией // Современная гидродинамика. Успехи и проблемы: Сб. М.: Мир, 1984. — С. 413–453.
3. Kozitskiy S. V. Fine structure generation in double-diffusive system // Phys. Rev. E — 2005. — Vol. 72, № 5. — P. 056309-1–056309-6.
4. Козицкий С. Б. Амплитудные уравнения для системы с термохалинной конвекцией // ПМТФ. — 2000. — Т. 41, № 2. — С. 56–66.
5. Balmforth N. J., Biello J. A. Double diffusive instability in a tall thin slot // J. Fluid Mech. — 1998. — Vol. 375. — P. 203–233.
6. Козицкий С. Б. Амплитудные уравнения для трехмерной бидиффузионной конвекции в окрестности точек бифуркации Хопфа // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2008. — Вып. 3. — С. 46–60.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. — М.: Наука, 1988. — 736 с.
8. Weiss N. O. Convection in an imposed magnetic field. Part 1. The development of nonlinear convection // J. Fluid Mech. — 1981. — Vol. 108. — P. 247–272.

9. Найфэ А. Х. Введение в методы возмущений. — М.: Мир, 1984. — 535 с.
10. Bretherton C. S., Spiegel E. A. Intermittency through modulational instability // Phys. Lett. — 1983. — Vol. 96A. — P. 152–156.
11. Cox S. M., Matthews P. C. Exponential time differencing for stiff systems // J. Comput. Phys. — 2002. — Vol. 176. — P. 430–455.
12. Козицкий С. Б. Амплитудные уравнения для 3D бидиффузионной валиковой конвекции с линейной зависимостью вязкости от температуры // Регулярная и хаотическая гидродинамика. Приложения к атмосфере и океану: Тез. докл. Междунар. конф. — М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. — с. 28–29.

Поступила в редакцию 20.10.10

S. B. Kozitskiy

Amplitude equations for three dimensional roll-type double-diffusive convection with an arbitrary cell width in the neighborhood of Hopf bifurcation points

Three dimensional roll-type double-diffusive convection in a horizontally infinite layer of an incompressible liquid is considered in the neighborhood of Hopf bifurcation points. An $A\Psi$ -system of amplitude equations for the variations of convective rolls amplitude is derived by multiple-scaled method. The cell width can be arbitrary, which is important for large Rayleigh numbers. It is noted that in 3D case an interaction of convection and horizontal vorticity field plays an essential role and can hardly be neglected. Different cases of the derived equations are discussed.

Keywords: double-diffusive convection, amplitude equation, multiple-scale method.

Mathematical Subject Classifications: 34E13, 76E06, 76R99

Козицкий Сергей Борисович, к. ф.-м. н., с. н. с. лаб. 3/2, Тихоокеанский океанологический институт, 690041, Россия, г. Владивосток, ул. Балтийская, 43, E-mail: skozi@poi.dvo.ru