

УДК 517.925+517.938.5

© А. В. Болсинов

КОМПЬЮТЕРНЫЙ АНАЛИЗ ДИАГРАММ СМЕЙЛА В ДИНАМИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

В работе предложены общий топологический и численный подходы к исследованию устойчивости периодических решений интегрируемых динамических систем с двумя степенями свободы. Развиваемые методы проиллюстрированы на примерах спутника на круговой орбите и конуса Штауде. Данные топологические и численные методы позволяют также отыскивать невырожденные периодические решения интегрируемых систем, что является особенно актуальным в тех случаях, когда общее решение, например, при помощи разделения переменных неизвестно.

Ключевые слова: диаграмма Смейла, бифуркационная диаграмма, устойчивость, численные методы

§ 1. Гамильтоновы системы на пуассоновых многообразиях

Предположим, что задана достаточно произвольная система уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}), \tag{1.1}$$

которая допускает группу симметрий G . В общем негамильтоновом случае группа G порождает лишь векторные поля симметрий $\mathbf{u}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{u}_m(\mathbf{x})$ (но не первые интегралы), которые коммутируют с векторным полем (1.1):

$$[\mathbf{u}_i, \mathbf{v}] = 0 \quad [\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j] = \sum_{k=1}^m c_{ij}^k \mathbf{u}_k,$$

где c_{ij}^k — структурные константы соответствующей алгебры Ли \mathfrak{g} .

Будем предполагать, что после редукции по симметриям окончательно получаем систему на многообразии $\mathcal{N} = \{\mathbf{z}\}$, уравнения движения которой представляются в форме

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{J}(\mathbf{z}) \frac{\partial H}{\partial \mathbf{z}}, \quad \mathbf{J}^T(\mathbf{z}) = -\mathbf{J}(\mathbf{z}), \tag{1.2}$$

где кососимметрическая матрица $\mathbf{J}(\mathbf{z})$, которая называется почти пуассоновой структурой, в общем случае не удовлетворяет тождеству Якоби.

Очевидно, что функция $H(\mathbf{z})$ является первым интегралом системы (1.2), её также будем называть гамильтонианом системы.

Кроме того дополнительно будем предполагать, что

1° $\text{rank} \mathbf{J}(\mathbf{z}) = 4$ и существуют функции $K_1(\mathbf{z}), \dots, K_m(\mathbf{z})$, где $m = \dim \mathcal{N} - 4$, удовлетворяющие соотношениям

$$\mathbf{J}(\mathbf{z}) \frac{\partial K_i}{\partial \mathbf{z}} \equiv 0, \quad i = 1, \dots, m; \tag{1.3}$$

2° имеется инвариантная мера с аналитической плотностью $\rho(\mathbf{z}) > 0$, то есть

$$\div \left(\rho(\mathbf{z}) \mathbf{J}(\mathbf{z}) \frac{\partial H}{\partial \mathbf{z}} \right) = 0.$$

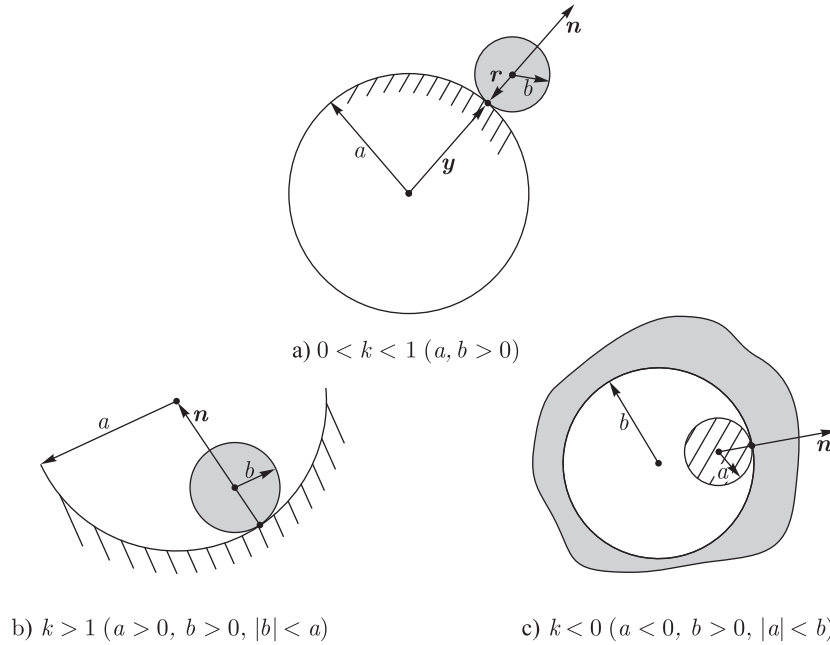


Рис. 1. Схема качения тела (обозначено серым цветом) по неподвижному сферическому основанию (обозначено штриховкой) при различных знаках радиусов кривизны a, b .

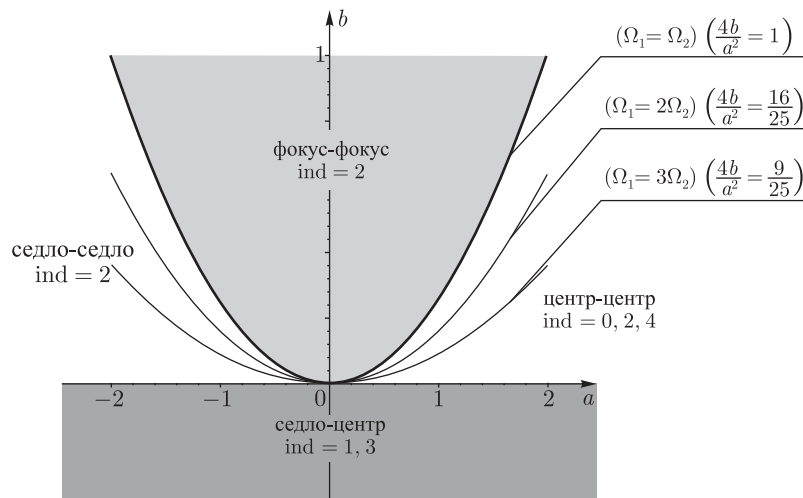


Рис. 2. Области на плоскости коэффициентов характеристического полинома, соответствующие различным типам неподвижных точек. Заштрихованы области неустойчивости. Приведены также кривые, отвечающие резонансам третьего и четвёртого порядков.

§ 2. Спутник на круговой орбите

Как было показано ранее исследование регулярных прецессий спутника на круговой орбите сводится к исследованию неподвижных точек редуцированной системы на (ко)алгебре $e(3)$ с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) - N_2 + \frac{3}{2}\bar{\alpha}\gamma_3^2, \quad \bar{\alpha} = \frac{I_3}{I_1} - 1, \quad (2.1)$$

и функциями Казимира

$$K_1 = (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1, \quad K_2 = (\mathbf{N}, \boldsymbol{\gamma}) = M_3 = \text{const.}$$

Вследствие неравенства треугольников для моментов инерции физическая область изменения $\bar{\alpha}$ задаётся неравенствами

$$-1 \leq \bar{\alpha} \leq 1.$$

Обозначим постоянную $M_3 = c$ и найдём соответствующие семейства неподвижных точек системы (2.1).

Множество критических точек и бифуркационная диаграмма. Согласно второму (векторному) уравнению в для неподвижных точек системы (2.1) получаем следующее соотношение

$$\mathbf{N} = \eta \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0),$$

где η — скалярный параметр. Подставляя найденный \mathbf{N} в первое уравнение системы, находим уравнения определяющие неподвижные точки

$$\eta + 3\bar{\alpha}\gamma_2 = 0, \quad \bar{\alpha}\gamma_1\gamma_3 = 0, \quad \eta\gamma_1 = 0.$$

Исходя из этих уравнений заключаем, что имеются четыре семейства неподвижных точек системы (2.1), которые традиционно объединяются в три типа прецессий.

1. *Цилиндрические прецессии* определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \gamma_1 = \gamma_3 = 0, \quad N_1 = N_3 = 0 \\ \gamma_2 = \pm 1, \quad N_2 = 1 \pm \eta \end{aligned} \quad (2.2)$$

и содержат два семейства неподвижных точек (различающихся знаком), параметризующиеся величиной η , которые мы обозначим $\mathcal{C}^{(+)}$, $\mathcal{C}^{(-)}$. Соответствующие бифуркационные кривые на плоскости (c, h) (где $c = M_3$, $h = H$) задаются в параметрической форме

$$c(\eta) = \eta \pm 1, \quad h(\eta) = \frac{1}{2}(\eta^2 - 1), \quad \eta \in (-\infty, +\infty). \quad (2.3)$$

2. *Конические прецессии* определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = \xi, \quad \gamma_3 = \pm\sqrt{1 - \xi^2}, \quad \xi \in [-1, 1] \\ N_1 = 0, \quad N_2 = 1 + \bar{\alpha}\xi^2, \quad N_3 = \mp\bar{\alpha}\sqrt{1 - \xi^2}, \quad \eta = -3\bar{\alpha}\xi \end{aligned} \quad (2.4)$$

и параметризуются величиной ξ (используя тригонометрическую параметризацию можно автоматически учесть знак при извлечении корня), обозначим их \mathcal{K} .

Бифуркационная кривая в данном случае задаётся уравнениями

$$c(\xi) = \xi(1 - 3\bar{\alpha}), \quad h(\xi) = -\frac{1}{2}(1 - 3\bar{\alpha})(1 + 3\bar{\alpha}\xi^2), \quad \xi \in [-1, 1]. \quad (2.5)$$

Каждой точке на кривой определённой соотношениями соответствуют две неподвижных точки, различающиеся знаками в уравнениях (2.4). В точках $\xi = \pm 1$ эти решения сливаются с цилиндрическими прецессиями.

3. *Гиперболоидальные прецессии* определяются следующими соотношениями

$$\begin{aligned} \gamma_1 = \pm\sqrt{1 - \xi^2}, \quad \gamma_2 = \xi, \quad \gamma_3 = 0, \quad \xi \in [-1, 1] \\ N_1 = 0, \quad N_2 = 1, \quad N_3 = 0, \quad \eta = 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

и также параметризуется величиной ξ , их обозначим \mathcal{H} .

Бифуркационная кривая задаётся уравнениями

$$c(\xi) = \xi, \quad h(\xi) = -\frac{1}{2}, \quad \xi \in [-1, 1]. \quad (2.7)$$

Здесь также каждой точке соответствует два решения, различающиеся знаком в (2.6). В точках $\xi = \pm 1$ эти решения также сливаются с цилиндрическими прецессиями.

Анализируя взаимное расположение кривых (2.3), (2.5), (2.7) приходим к выводу, что для физических значений $\bar{\alpha}$ возможны три типа бифуркационных диаграмм.

Устойчивость ветвей индекса 2.

Как видно на рис. 3 ветви $\text{ind} = 2$ имеются для цилиндрических прецессий при $-1 < \bar{\alpha} < 1$ и для конических прецессий при $1/3 < \bar{\alpha} < 1$.

2) Рассмотрим теперь цилиндрические прецессии при

$$-1 < \bar{\alpha} < 0.$$

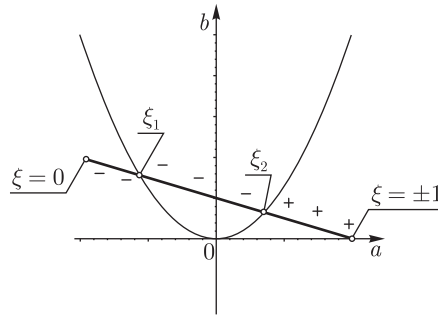
Используя параметризацию находим, что для ветвей $\text{ind} = 2$ в этом случае

$$0 < \xi$$

и характеристический многочлен

$$\chi = \lambda^4 + (\xi^2 + 1 - 3|\bar{\alpha}|)\lambda^2 + \xi(\xi + 3|\bar{\alpha}|) \quad (2.8)$$

Возможное расположение кривой $\gamma_\xi = (a(\xi), b(\xi))$ в зависимости от величины $\bar{\alpha}$ указано на рисунке 5.



Значения величин ξ_1, ξ_2 (моменты пересечения с кривой $\Omega_1 = \Omega_2$) и соответствующие значения интеграла $c = \pm 1 \pm \xi_i$, находятся как корни детерминанта $D(\xi_i) = 0$ уравнения (2.8), который может быть представлен в форме

$$D(\xi) = \left((\xi + 1) (\sqrt{\xi} - 1)^2 - 3|\bar{\alpha}| \right) \left((\xi + 1) (\sqrt{\xi} + 1)^2 - 3|\bar{\alpha}| \right).$$

3) Коническим прецессиям при условии $1/3 < \bar{\alpha} < 1$ соответствует характеристический полином вида

$$\chi = \lambda^4 + (1 - 6\bar{\alpha} + 9\bar{\alpha}(1 + \bar{\alpha})\xi^2)\lambda^2 + 3\bar{\alpha}(3\bar{\alpha} - 1)(1 - \xi^2), \quad (2.9)$$

где параметр $\xi \in [-1, 1]$. На плоскости коэффициентов уравнение (2.9) определяет отрезок прямой между точками

$$a|_{\xi=0} = 1 - 6\bar{\alpha}, \quad b|_{\xi=0} = 3\bar{\alpha}(3\bar{\alpha} - 1) \quad \text{и} \quad a|_{\xi=\pm 1} = 1 + 3\bar{\alpha} + 9\bar{\alpha}^2, \quad b|_{\xi=\pm 1} = 0$$

см. рис. 4.

Здесь $\xi_i = \sqrt{\frac{\eta_i}{3\bar{\alpha}}}$, где η_i корни уравнения

$$9(\bar{\alpha} + 1)^2 \eta^2 - 2(18\bar{\alpha}^2 + 9\bar{\alpha} - 1)\eta + 1 = 0.$$

§ 3. Конус Штауде

Как было показано выше, приведённая система, описываемая движением тела с неподвижной точкой, в случае центра масс на главной оси задаётся в канонической форме гамильтонианом. Удобнее тем не менее представить уравнения движения в форме уравнений на (ко)алгебре $e(3)$

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}} \quad (3.1)$$

с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(\alpha M_1^2 + \beta M_2^2 + M_3^2) + \gamma_3. \quad (3.2)$$

При этом функции Казимира задаются соотношениями

$$K_1 = (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1, \quad K_2 = (\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) = c. \quad (3.3)$$

Замечание 1. Фактически переменные φ , p_φ , ϑ , p_ϑ задают канонические переменные на симплектическом листе $\mathcal{N}_c = \{ \mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma} \mid K_1 = 1, K_2 = c \}$, так что соответствующее (пуассонову) отображение имеет вид

$$\gamma_1 = \sin \vartheta \sin \varphi, \quad \gamma_2 = \sin \vartheta \cos \varphi, \quad \gamma_3 = \cos \vartheta,$$

$$M_1 = \frac{\sin \varphi}{\sin \vartheta} (c - p_\varphi \cos \vartheta) + p_\vartheta \cos \varphi, \quad M_2 = \frac{\cos \varphi}{\sin \vartheta} (c - p_\varphi \cos \vartheta) + p_\vartheta \sin \varphi, \quad M_3 = p_\varphi.$$

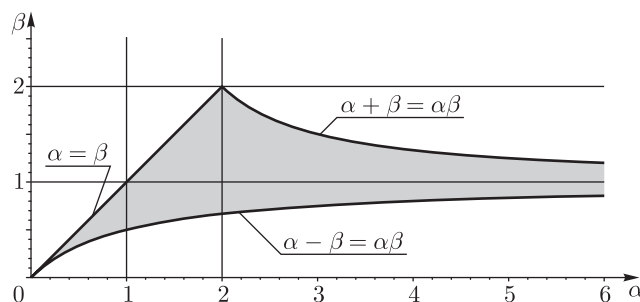


Рис. 3. Область возможных значений α , β .

Без ограничения общности можно полагать, что

область возможных значений параметров α , β определяется неравенствами (см. рис. 3)

$$\beta \leq \alpha, \quad \alpha + \beta \geq \alpha\beta, \quad \alpha - \beta \leq \alpha\beta. \quad (3.4)$$

Действительно:

1. поворотом подвижных осей на $\pi/2$ вокруг оси, содержащей центр масс, можно получить $I_1 < I_2$, то есть $\beta < \alpha$;
2. из неравенств треугольника для моментов инерции $I_1 + I_2 \geq I_3$ и $I_1 + I_3 \geq I_2$ получим два последних неравенства в (3.4)

Несложно показать, что имеется шесть типов бифуркационных диаграмм общего положения, соответствующие им области возможных параметров указаны на рис. 4

Закключаем, что на кривой $\gamma_c = (a_+(c), b_+(c))$

- a. $a_+(c)$ монотонно возрастает с ростом c ;
- b. $b_+(c)$ монотонно возрастает при $\alpha < 1$ и монотонно убывает при $1 < \alpha$;
- c. точка $(a_+(0), b_+(0))$ всегда лежит в области седло-седло.

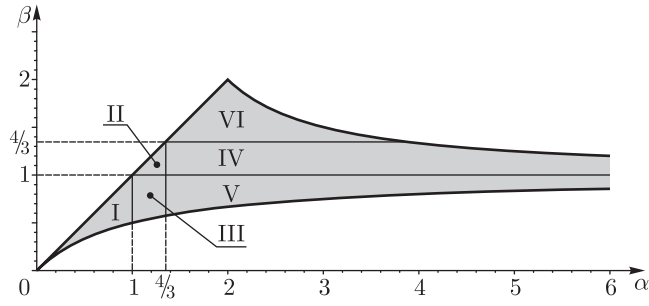


Рис. 4. Области возможных параметров α , β , соответствующие различным осям бифуркационных диаграмм.

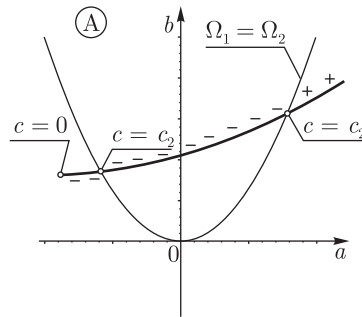


Рис. 5.

Можно показать, что при $\alpha < 1$ кривая γ_c , $c \in [0, \infty)$ имеет вид приведённый на рис. 5, где c_1, c_2 бифуркационные значения.

Обозначим возможные вложения кривой γ_c , приведённые на рис. 5 следующим образом А, В, С, D. Тогда на плоскости параметров α, β несложно указать области соответствующие каждому типу вложения. Границы между ними определяются следующими условиями:

1. Между А и D прямая $\alpha = 1$.
2. Между D и С условие $c_2 = c_\alpha^+$, что даёт кривую $\beta = \frac{\alpha(2\alpha-3)}{(1-\alpha)^2}$.
3. Между С и В условие $c_1 = c_2$ даёт кривую $\alpha = 2$.

Окончательно на плоскости α, β получим следующую картину — рис. 6.

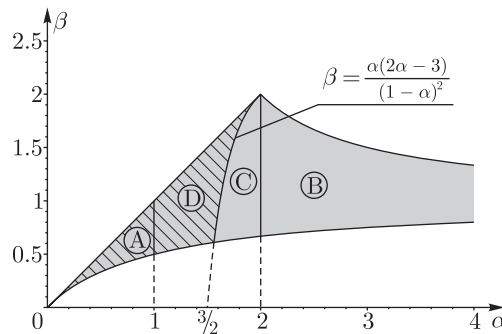


Рис. 6. Области на плоскости параметров α, β , соответствующие различным случаям, изображённым на 5. Штриховкой отмечена область, в которой имеются устойчивые прецессии.

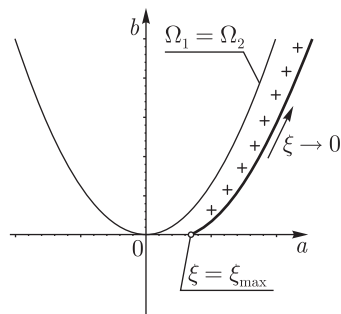


Рис. 7.

3. Семейство σ_α . В этом случае характеристический полином следующий

$$\chi = \lambda^4 + a_\alpha(\xi)\lambda^2 + b_\alpha(\xi),$$

$$a_\alpha(\xi) = \frac{2\alpha(\alpha - 1) + \alpha + \beta - \alpha\beta}{\alpha(\alpha - 1)} \frac{1}{\xi} - \frac{\alpha^2(2 - \beta) + \alpha + \beta(\alpha - 1)}{\alpha} \xi, \quad (3.5)$$

$$b_\alpha(\xi) = 3(\alpha - \beta)(1 - \xi^2) \left(\frac{1}{3(\alpha - 1)} - \xi^2 \right) \frac{1}{\xi^2},$$

где параметр ξ меняется в следующих пределах:

$$\begin{aligned} \text{если } 1 < \alpha < \frac{4}{3}, \quad \text{то } 0 < \xi < 1, \\ \text{если } \frac{4}{3} < \alpha, \quad \text{то } 0 < \xi < (3(\alpha - 1))^{-1/2}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Обозначим ξ_{\max} максимальное значение параметра ξ в зависимости от условий α_2 . На кривой γ_ξ , определяемой соотношениями (3.5), величины $a_\alpha(\xi)$ и $b_\alpha(\xi)$ монотонно растут, с уменьшением ξ , причём можно показать, что γ_ξ не пересекает кривую $\Omega_1 = \Omega_2$. Таким образом окончательно получим следующий рис. 7

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борисов А. В., Мамаев И. С., Марихин В. Г. Явное интегрирование одной неголономной задачи // Докл. РАН, 2008, т. 422, вып. 4, с. 475–478.
2. Борисов А. В., Фёдоров Ю. Н. О двух видоизмененных интегрируемых задачах динамики // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ., 1995, вып. 6, с. 102–105.
3. Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. Stability of steady rotations in the nonholonomic Routh problem // Regul. Chaotic Dyn., 2008, vol. 13, no. 4, pp. 239–249.
4. Borisov A. V., Mamaev I. S. Conservation laws, hierarchy of dynamics and explicit integration of nonholonomic systems // Regul. Chaotic Dyn., 2008, vol. 13, no. 5, pp. 443–490.
5. Borisov A. V., Mamaev I. S. Isomorphism and Hamilton representation of some nonholonomic systems // Siberian Math. J., 2007, vol. 48, no. 1, pp. 26–36; см. также arXiv: nlin.-SI/0509036 v. 1 (Sept. 21, 2005).
6. Borisov A. V., Mamaev I. S. Rolling of a non-homogeneous ball over a sphere without slipping and twisting // Regul. Chaotic Dyn., 2007, vol. 12, no. 2, pp. 153–159.
7. Ehlers K., Koiller J. Rubber rolling: Geometry and dynamics of 2–3–5 distributions // In Proceedings IUTAM symposium 2006 on Hamiltonian Dynamics, Vortex Structures, Turbulence, at the Steklov Institute, Moscow, to appear.
8. Ehlers K., Koiller J., Montgomery R., Rios P. Nonholonomic systems via moving frames: Cartan equivalence and Chaplygin Hamiltonization // The breadth of symplectic and Poisson geometry: Festschrift in honor of Alain Weinstein / J. E. Marsden, T. S. Ratiu. (Progr. Math., vol. 232.) Boston: Birkhäuser, 2005. P. 75–120.

Поступила в редакцию 01.09.09

*A. V. Bolsinov***On the computer analysis of Smiel diagram in rigid body dynamics**

In this paper a general topological approach and numerical methods are proposed for the study of stability of periodic solutions of integrable dynamical systems with two degrees of freedom. The methods developed are illustrated by examples of several integrable problems. These topological methods also enable one to find non-degenerate periodic solutions of integrable systems, which is especially topical in those cases where no general solution (for example, by separation of variables) is known.

Keywords: Smiel diagram, bifurcation diagram, stability, numerical methods

Mathematical Subject Classifications: 37Jxx

Болсинов Алексей Викторович, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119899, Россия, г. Москва, Воробьевы горы, School of Mathematics, Loughborough University, United Kingdom, LE11 3TU, Loughborough, Leicestershire, E-mail: A.Bolsinov@lboro.ac.uk