УДК 533.6.011.3

© *Ю. М. Сметанин*

ОРТОГОНАЛЬНЫЙ БАЗИС СИЛЛОГИСТИКИ

В статье рассматривается новый базис силлогистики, которым можно заменить базис Аристотеля. Его основным отличием является однозначность смысла любого из функторов.

Ключевые слова: силлогистика, алгебра, базис Аристотеля, русская логика.

«Единственное средство улучшить наши умозаключения состоит в том, чтобы сделать их столь же наглядными, как и у математиков, — такими, что их ошибочность можно было бы увидеть глазами, и если между людьми возникают разногласия, достаточно было бы только сказать «Вычислим!», чтобы без дальнейших околичностей стало ясно, кто прав.»
Г. В. Лейбниц

Введение

Автор заранее предупреждает, что в публикации будет много умных цитат, но, по его мнению, они все уместны. Логику в школе и вузе изучают фрагментарно в рамках изучения дисциплин (предметов), при изучении которых формируются четыре вида умений:

1) предметные умения по данной дисциплине,
2) логические умения,
3) общеучебные умения,
4) творческие умения.

Не изучаемая как отдельный предмет логика, размазана по другим дисциплинам.

«Никакое образование немыслимо без изучения логики. Логика — фундамент любой науки и в первую очередь математики. Логику как отдельный предмет в качестве основного впервые ввел в гимназиях и в Академии великий русский ученый М. В. Ломоносов. С тех пор логику в обязательном порядке изучали в гимназиях России и по указанию Сталина в 1946– –1953 гг. в школах СССР. До октябрьского переворота в гимназиях России логике уделялось больше времени и внимания, чем математике. В наше время логика не преподается в общеобразовательных школах и во многих вузах. Как учить логике будущих специалистов? Современная классическая логика не решает задач, поставленных Аристотелем и Лейбницем. Об этом еще четыреста лет назад говорил выдающийся философ Френсис Бэкон. Он утверждал, что логика Аристотеля не только бесполезна, но и вредна, что она тормозит развитие науки [7].»

Основные недостатки классической логики по мнению В. И. Лобанова:

1) доказательство истинности суждений ведется неэффективными методами, что значительно сужает круг решаемых задач;
2) в силлогистике не учитывается содержание терминов и универсума;
3) модусы в большинстве своем неверны;
4) огромное количество определений, правил, которые приходится зубрить, что отбивает у студентов желание мыслить;
5) нет аналитического представления силлогистических функторов и аристотелев базис силлогистики некорректен;
6) нет математических методов анализа и синтеза силлогизмов.

Поэтому первое, что нужно сделать, — это исправить указанные недостатки, что автоматически улучшит возможности изучения логики. Кроме этого, учителей нужно обучить новым эффективным методам анализа рассуждений. В начале XXI века положение в связи с работами русских ученых стало изменяться в лучшую сторону. Здесь следует отметить цикл работ В. И. Лобанова по русской логике и работы Б. А. Кулика. В работах Б. А. Кулика для моделирования и анализа естественных рассуждений предлагается использовать новую математическую структуру (Е-структуру — эйлерову структуру), которая является обобщением алгебры множеств и совмещает в себе некоторые свойства частично упорядоченных множеств и логических исчислений. Наиболее полно результаты изложены в его докторской диссертации. На основе Е-структур можно моделировать системы естественных рассуждений, являющихся расширением традиционной полисиллогистики, а также системы немонотонного вывода, системы с многовариантными отрицаниями и системы индуктивного вывода без использования вероятностной или нечеткой меры.

Значительная часть фрагментов текста в естественных рассуждениях представляет собой предложения, которые с точки зрения логики являются суждениями. К суждениям (точнее, к их обобщенной форме) относятся многие типы повествовательных и условных предложений естественного языка, содержанием которых являются многие факты, их обобщения, определения и толкования терминов, законы природы и математические теоремы. Ранее было установлено, что представление рассуждений в виде совокупности суждений позволяет существенно расширить возможности полисиллогистики и, в частности, решать следующие не предусмотренные в ней и весьма важные для анализа рассуждений задачи [3]:

- с помощью простых вычислительных алгоритмов выводить все возможные следствия;
- осуществить проверку совместимости произвольной совокупности суждений и анализ возможных коллизий, соответствующих в ряде случаев логическим ошибкам в рассуждении;
- проверять совместимость исходной системы с произвольными гипотезами;
- осуществлять анализ неполноты моделируемых систем.

  В работе [10] отмечена весьма любопытная связь между процессом мышления и логикой. Далее приводится цитата из данной работы: «Для многих очевидно, что мышление — это некий сложный процесс, с помощью которого решаются житейские, научные или философские проблемы и рождаются гениальные идеи или роковые заблуждения. Язык же понимается многими просто как средство, с помощью которого результаты мышления можно передать современникам или оставить потомкам. Но, связав в своем сознании мышление с понятием «процесс», а язык с понятием «средство», мы по сути перестаем замечать тот непреложный факт, что в данном случае «средство» не подчинено полностью «процессу», а в зависимости от нашего целенаправленного или неосознанного выбора тех или иных словесных штампов оказывает сильнейшее влияние на ход и результат самого «процесса». Причем известно немало случаев, когда такое «обратное влияние» оказывается не только тормозом для правильного мышления, но порою даже его разрушителем. «... Некоторые из таких ныне живущих мемов, но уже из области знаний, связанных с логикой, мы рассмотрим в данной статье». Это конец цитаты, в последнем предложении которой обозначен предмет рассмотрения и нашей статьи.

Далее мы рассмотрим силлогистику и критику ее с позиций современного знания и здравого смысла и попробуем внести конструктивные предложения по устранению нескольких «тормозящих» мемов, которые «замыленный» глаз логиков не замечает.

§ 1. Силлогистика Аристотеля и ортогональный базис силлогистики

Силлогизм — это умозаключение, в котором из двух посылок, связанных общим (средним) термином, выводится заключение. Силлогистика — раздел логики, занимающийся анализом и синтезом силлогизмов.

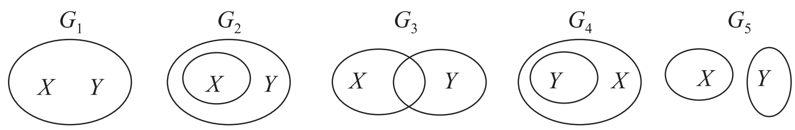

Рис. 1. Классические жергонновы отношения: G_1 — совпадение или равнозначность; G_2 — левостороннее включение; G_3 —- частное совпадение; G_4 — правостороннее включение; G_5 — несовместимость.

Алгебра множеств имеет непосредственное отношение к силлогистике, которое было замечено и исследовано Аристотелем, Лейбницем, Жергонном, Венном, Эйлером и другими корифеями. Жергонну (рис. 1) удалось представить все классы аристотелевых суждений, с помощью соотношений между множествами. Эти соотношения получили в математике и логике название «жергонновых отношений».

В основе силлогистики Аристотеля лежат простые суждения, представленные четырьмя типами:

A — общеутвердительное (все X есть Y);
E — общеотрицательное (все X не есть Y);
I — частноутвердительное (некоторые X есть Y);
O — частноотрицательное (некоторые X не есть Y).

Отметим, что в трудах Аристотеля смысл суждений отличается от общепринятого сегодня. Аристотель не употреблял в суждениях двусмысленную связку «есть» и формулировал суждения следующим образом:

A: Y присуще всем X
E: Y не присуще всем X
I: Y присуще некоторым X
O: Y не присуще некоторым X.

Использование двусмысленной связки «есть» является одним из вредных мемов. Двусмысленность связки явно указана на рис. 2. Отметим, что рассуждения, проводимые по рис. 1 и 2, проводятся без учета универсума (это первый мем, который кочует из учебника в учебник). Термины X и Y можно представить как некоторые совокупности (множества, классы) в виде кругов Эйлера. Жергонн выделил пять возможных соотношений между ними (рис. 1).

Жергонн показал, что каждый тип аристотелевского суждения соответствует некоторым типам этих отношений, в частности:

— типу **A** соответствует G_1 или G_2;
— типу **E** соответствует G_5;
— типу **I** соответствует G_1, или G_2, или G_3, или G_4;
— типу **O** соответствует G_3, или G_4, или G_5. Это следует из рис. 2.

Б. А. Кулик в работе [4] на с. 13 отмечает: «Например, суждение типа **I** означает, что некоторая непустая часть множества или класса X содержится в Y. Посмотрев на рисунок, нетрудно убедиться, что этому условию удовлетворяют все типы жергонновых отношений кроме G_5. В классической логике слово «некоторые» используется в широком смысле: «хотя бы один, но не исключено, что и все». Например, суждение типа **I** может быть представлено в четырех вариантах жергонновых отношений. Для первого варианта подходит предложение «Некоторые числа, делящиеся на 4, делятся на 2» (хотя на 2 делятся все числа, делящиеся на 4, и не только числа, делящиеся на 4, тем не менее это суждение тоже истинно и, на наш взгляд, бессмысленно, в предлагаемом ортогональном базисе силлогистики его просто нельзя выразить). Для второго варианта вполне подходит суждение «Некоторые японцы говорят на русском языке» (ясно, что не все японцы говорят на русском языке и не все, говорящие на русском языке, являются японцами). Третий вариант может быть представлен суждением «Некоторые линии являются прямыми» (ясно, что класс линий шире класса прямых)». Конец

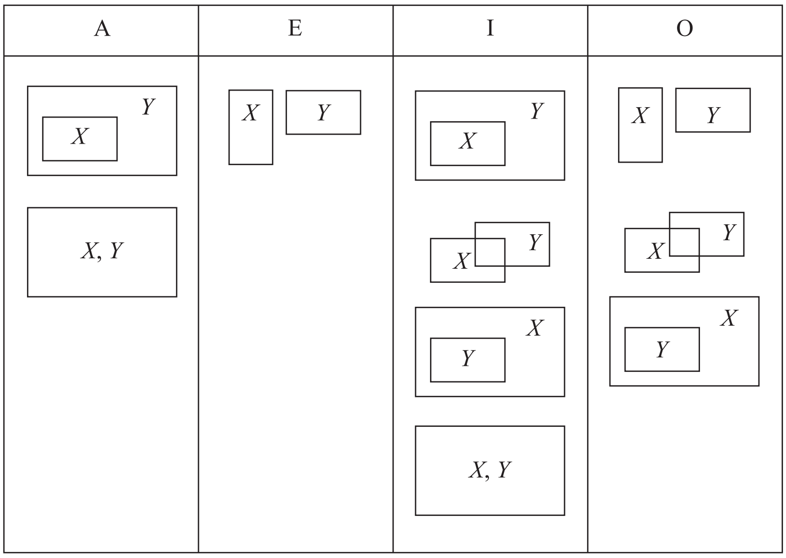

Рис. 2. Многовариантность смыслового содержания аристотелевского базиса силлогистики.

цитаты. В предлагаемом ниже базисе это суждение излагается так: «Все прямые есть линии». К четвертому варианту можно отнести суждение «Некоторые числа, которые одновременно делятся на 3 и на 5, делятся на 15» (нетрудно доказать, что эти классы чисел совпадают). В нашем базисе просто и без затей говорим «Множество чисел, делящихся на 3 и 5, совпадает с множеством чисел, делящихся на 15». В то же время суждение «Некоторые жабы умеют ездить на велосипеде» не является истинным, поскольку речь в нем идет о классах объектов, которые не имеют общих элементов и соответствуют пятому варианту жергонновых отношений. Точно так же можно проанализировать и другие типы суждений. Жергонновы отношения часто использовались для строгого обоснования не только правил вывода для простого категорического силлогизма, в котором в качестве посылок используются только два суждения, но и для более сложных умозаключений, когда в качестве посылок допускается произвольное число суждений. Как отметил Б. А Кулик, «главным препятствием применения их в логике является то, что практически для всех типов суждений (за исключением типа **E**) можно использовать несколько вариантов жергонновых отношений, и при увеличении количества исходных суждений число возможных вариантов анализа возрастает в степенной зависимости. Если мы рассматриваем сложное рассуждение, содержащее много суждений, то мы должны для каждого суждения просмотреть все соответствующие ему варианты жергонновых отношений». Это, по нашему мнению, и есть второй мем. Во-первых, здесь (см. рис. 2) не учитывается наличие универсума, учет которого приводит не к 5, а к 7 вариантам отношений между двумя непустыми множествами X и Y, являющимися подмножествами универсума U $X \subset U$ и $Y \subset U$.

Приведем расширенные жергонновы соотношения:

$$\begin{array}{ll}
1.\ X = Y & (G_2)\\
2.\ X \subset Y & (G_1)\\
3.\ X \cap Y = \varnothing \text{ и } X \neq \overline{Y} & (G_5)\\
4.\ X = \overline{Y} & (G_6)\\
5.\ X \cap Y \neq \varnothing \text{ и } X \cup Y \subset U & (G_3)\\
6.\ X \cap Y \neq \varnothing \text{ и } X \cup Y = U & (G_7)\\
7.\ Y \subset X & (G_4).
\end{array} \qquad (1)$$

Третий мем заключается в том, что как нечто неизменное, «незыблемое», неприкасаемое весьма продолжительное время рассматривается базис силлогистики. Этот мем благополучно разрушил и Н. А. Васильев и В. И. Лобанов: в своих работах они предложили множество базисов и достаточно веское обоснование их. Продолжим эту работу. А что, если в качестве базиса силлогистики взять такой, суждения которого соответствуют лишь одному из вышеприведенных отношений 1–7?

Такой базис можно легко предложить, рассматривая рис. 2.

1. (X совпадает с Y) обозначим $\mathbf{EQ}\,(X, Y)$, ему соответствует отношение 1.

2. (Y присуще всем X или без двусмысленности все X есть Y) обозначим $\mathbf{A}\,(X, Y)$ ему, соответствует отношение 2; $\mathbf{A}\,(Y, X)$ соответствует отношение 7.

3. (Все X не есть Y) и (X не есть дополнение Y до универсума). Это суждение естественно обозначить $\mathbf{E}\,(X, Y)$, ему соответствует соотношения 3.

4. (X есть дополнение Y до универсума) или просто (X есть дополнение Y), ему соответствует отношение 4. Здесь новых обозначений не требуется, так как (X есть дополнение Y) равносильно $\mathbf{EQ}\,(X, \overline{Y})$.

5. (Некоторые X есть Y) и (некоторые X не есть Y) и (X , объединенное Y , не совпадает с универсумом). Здесь «есть» без двусмысленности, как в суждении 2. Данное суждение из выстраиваемого базиса естественно обозначить $\mathbf{IO}_1(X, Y)$ (см. рис. 2), ему соответствует соотношение 5.

6. (Некоторые X есть Y) и (некоторые X не есть Y) и (X , объединенное с, Y совпадает с универсумом). Данное суждение из выстраиваемого базиса естественно обозначить $\mathbf{IO}_2(X, Y)$ (см. рис. 1), ему соответствует соотношение 6.

Ортогональный базис силлогистики

$$1.\ \mathbf{EQ}(X, Y),\quad 2.\ \mathbf{A}(X, Y),\quad 3.\ \mathbf{E}(X, Y),\quad 4.\ \mathbf{IO}_1(X, Y),\quad 5.\ \mathbf{IO}_2(X, Y). \tag{2}$$

Предложенный базис (2) не имеет двусмысленностей. Его естественно назвать ортогональным базисом силлогистики. Иногда двусмысленности, трехсмысленности и четырехсмысленности снимаются за счет смыслового содержания подмножеств универсума. Например, суждение «некоторые камни (X) являются предметами легче воды (Y) » по форме частноутвердительное IXY, однако оно однозначно соответствует суждению $\mathbf{IO}_1(X, Y)$ нашего базиса (2). Это следует из наших знаний о природе. В. И. Лобанов в своих работах приводит аналитическое выражение суждений базиса силлогистики Аристотеля на основе использования скалярных диаграмм Лобанова. Переход от диаграмм Венна к скалярным диаграммам Лобанова показан на рис. 3, заимствованном из работы [7].

Отметим, что хотя на рисунке последнее соотношение между X и Y обозначено IXY — это один из вариантов значений частноотрицательных суждений, в наших обозначениях это суждение обозначено $\mathbf{IO}_1(X, Y)$. С помощью скалярных диаграмм можно легко аналитически выразить наш ортогональный базис в алгебре логики. Свяжем с подмножествами и универсумом понятие элемента, $el \in U$, и с утверждениями $el \in X$, $el \in Y$ — булевые переменные x и y , обзначающие эту принадлежность. Например, x принимает значение *истина*, если el принадлежит множеству X , и *ложь* в противном случае. Поэтому аналитическая запись утверждения может быть заменена просто булевой переменной x . На рис. 3 изображен так называемый общеразговорный базис, или базис Васильева по классификации [7]. Отметим еще раз, что частноутвердительное суждение IXY, обоснованное Васильевым, соответствует суждению $\mathbf{IO}_1(X, Y)$ предлагаемого ортогонального базиса силлогистики. Дадим аналитическое представление суждений ортогонального базиса. Комбинации значений булевых переменных xy означают варианты взаимного расположения множеств XY в рамках универсума.

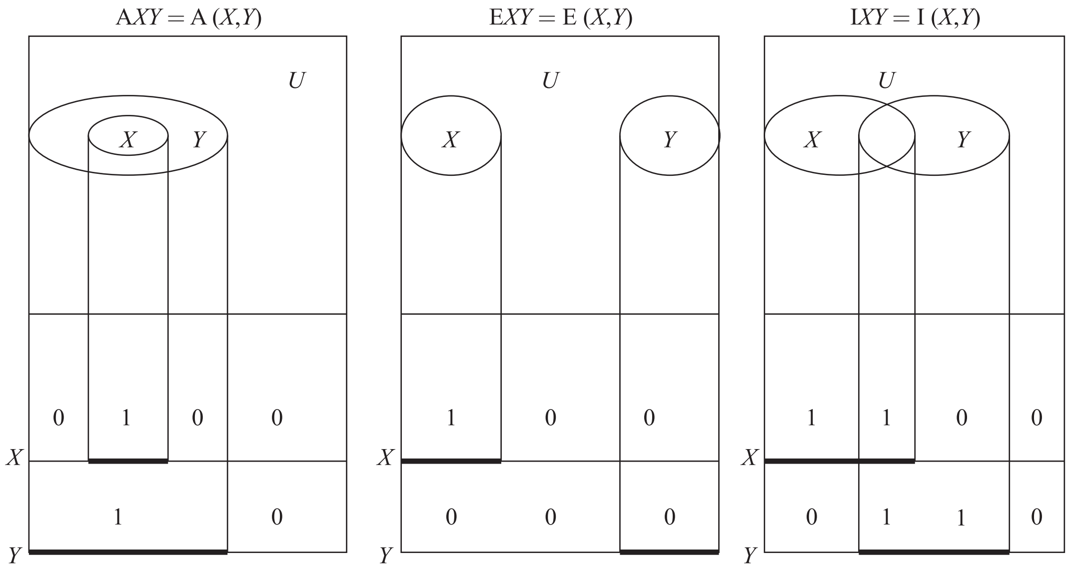

Рис. 3. Скалярные диаграммы Лобанова для общеразговорного базиса Н. А. Васильева.

$A(X, Y)$ — все X есть Y.
X —=====—
1 0
Y —======–

$el \in X$	$el \in Y$	$\mathrm{EQ}(X, Y)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$\mathbf{A}(X, Y) = x'y' + xy' + xy = x' + y$.
$\mathbf{EQ}\,(X, Y)$ — X совпадает с Y.
X —=====—
1 0
Y —=====—

$el \in X$	$el \in Y$	$\mathrm{EQ}(X, Y)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$\mathbf{EQ}(X, Y) = xy + x'y' = (x + y')(x' + y)$.
$\mathbf{E}\,(X, Y)$ — (все X не есть Y) и (X не есть дополнение Y до универсума).
X —===———
1 0
Y ————===–

$el \in X$	$el \in Y$	$\mathrm{EQ}(X, Y)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$\mathbf{E}(X, Y) = x'y' + x'y + xy' = (x' + y')$.

$\mathbf{IO}_1(X, Y)$ = (некоторые X есть Y) и (некоторые X не есть Y) и (X, объединенное Y, не совпадает с универсумом).

$\mathbf{IO}_1(X, Y) = (X \cap \overline{Y} \neq \varnothing)$ и $(X \cap \overline{Y} \neq \varnothing)$ и $(X \cup \overline{Y} \neq U)$.

КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ 2009. Вып. 4

x –===========–––

y ––============–

$el \in X$	$el \in Y$	$\mathrm{IO}_2(X,\, Y)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$\mathbf{IO}_1(X,\, Y) = x'y' + x'y + xy' + xy = 1$.

$\mathbf{IO}\,_2(X,\, Y)$ — (некоторые X есть Y) и (некоторые X не есть Y) и (X , объединенное Y , совпадает с универсумом).

$\mathbf{IO}_2(X, Y) = \mathbf{IO}_1(X,\, Y) = (X \cap \overline{Y} \neq \varnothing)$ и $(X \cap \overline{Y} \neq \varnothing)$ и $(X \cup Y = U)$.

X ==========––––

Y –––===========

$el \in X$	$el \in Y$	$\mathrm{IO}_2(X,\, Y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$\mathbf{IO}_2(X,\, Y) = x'y + xy' + xy$, или, равносильно, $\mathbf{IO}_2(X,\, Y) = x + y$, что позволяет выразить суждение более компактно.

$\mathbf{IO}\,_2(X,\, Y)$ — любой элемент универсума принадлежит множеству X или Y . (Все X не есть Y) и (X не есть дополнение Y до универсума) все не X есть $Y = A(\overline{X},\, Y)$. Равенство $\mathbf{E}(X,\, Y) = x'y' + x'y +\ \ +xy' = x' + y'$ позволяет выразить второе суждение так: $\mathbf{E}(X,\, Y)$ — любой элемент универсума принадлежит дополнению X или дополнению Y .

§ 2. Математическая модель рассуждений

Следуя работам Б. А. Кулика, каждое суждение мы будем представлять математически как одно или несколько соотношений вида $X \to Y$, в котором X и Y обозначают некоторые множества, события или признаки, а связка « $\to$ » может иметь несколько значений в зависимости от содержания суждения. Если X и Y — множества, то $X \to Y$ означает то же самое, что и $X \to Y$, если же X и Y — события или признаки, то $X \to Y$ означает, что Y является необходимым условием или определяющим признаком X . Оказывается, что для всех этих вариантов значений соотношения $X \to Y$ правила вывода для совокупности таких соотношений являются общими, и построение логического вывода из некоторого множества суждений не зависит от того, какому из этих вариантов соответствует содержание каждого суждения. Для сравнения рассмотрим сначала представление различных типов суждений в классическом базисе (**A, E, I, O**) в виде таких пар, взяв за основу жергонновы отношения (см. рис. 1). Ясно, что в итоговом результате

$$\mathbf{A}\colon X \subseteq Y; \quad \mathbf{E}\colon X \cap Y = \varnothing; \quad \mathbf{I}\colon X \cap Y \neq \varnothing; \quad \mathbf{O}\colon X \cap \overline{Y} \neq \varnothing$$

нашему определению суждения соответствует только представление общеутвердительного типа суждения (**A**) — $X \to Y$. Но оказывается, и остальные типы можно представить таким же образом. Проще всего такое преобразование осуществимо для типа **E**: $X \subseteq \overline{Y}$ $(X \to Y)$.

Варианты логических значений этого выражения могут быть самые разные: « X не является Y », « X включено в дополнение Y », «Свойство Y не присуще X », «Отрицание Y является необходимым условием X ». Чтобы привести к такому виду остальные типы суждений, введем следующие обозначения: пусть все основные множества будут у нас обозначены прописными буквами ($A,\, B,\, \ldots,\, X,\, Y,\, \ldots$), а некоторые непустые подмножества этих множеств — соответствующими строчными буквами ($a,\, b,\, \ldots,\, x,\, y,\, \ldots$). Тогда очевидно, что

$$\mathbf{I}\colon x \subseteq Y \quad (x \to Y) \qquad \mathbf{O}\colon x \subseteq \overline{Y} \quad (x \to \overline{Y}).$$

Рассмотрим теперь представление различных типов суждений ортогонального базиса

$$1.\ \mathbf{EQ}(X,Y),\quad 2.\ \mathbf{A}(Y,X),\quad 3.\ \mathbf{E}(X,Y),\quad 4.\ \mathbf{IO}_1(X,Y),\quad 5.\ \mathbf{IO}_2(X,Y)$$

в виде таких пар, взяв за основу расширенные жергонновы отношения (1).

В итоге получим, что:

$\mathbf{EQ}\,(X,Y)$ сопоставим пару $(X\to Y)$, $(Y\to X)$;

$\mathbf{A}\,(Y,X)$ сопоставим $(X\to Y)$;

$\mathbf{E}\,(X,Y)$ сопоставим $(Y\to \overline{X})$.

Ибо это соответствует выше данному определению суждения и законам алгебры множеств. Пусть

$$x_1\subset X,\quad x_1\subset Y,\quad x_2\subset X,\quad x_2\not\subset Y,\quad x_3\not\subset X,\quad x_3\subset Y,\quad x_4\not\subset X,\quad x_4\not\subset Y,$$

тогда очевидно, что

$$\mathbf{IO}_1\colon (x_1\to X);\ (x_1\to Y);\quad (x_2\to X);\ (x_2\to \overline{Y});\ (x_3\to \overline{X});\ (x_3\to Y);\ (x_4\to \overline{X});\ (x_4\to \overline{Y}).$$

Пусть $x_1\subset X$, $x_1\subset Y$, $x_2\subset X$, $x_2\not\subset Y$, $x_3\not\subset X$, $x_3\subset Y$ и $X\cup Y=U$. Тогда

$$\mathbf{IO}_2\colon (x_1\to X);\quad (x_1\to Y);\quad (x_2\to X);\quad (x_2\to \overline{Y});\quad (x_3\to \overline{X});\quad (x_3\to Y);\quad (\overline{X}\to Y).$$

Проверить справедливость этих соотношений несложно. Достаточно построить скалярные диаграммы или диаграммы Венна при условии, что во всех соотношениях включения участвуют только непустые множества. А что делать в тех случаях, когда в исходных суждениях допускаются пустые множества, которые по законам алгебры множеств включены в любые множества? Подробный ответ на этот вопрос выходит за рамки статьи и дан в работах Б. А. Кулика. У него первый этап анализа рассуждений производится из «сильного» предположения, что все участвующие в рассуждении множества непустые. Если этот этап анализа ведет в тупик, то на втором этапе анализа рассматриваются варианты, когда некоторые множества, которые «не жалко потерять», рассматриваются как пустые. Но на этом этапе анализ производится уже по другим (менее жестким) правилам. Кроме того, очевидно, что для всех «терминов» $A, B, \ldots, X, Y, \ldots$ соблюдается $a\subseteq A$, $b\subseteq B$, …, $x\subseteq X$, $y\subseteq Y$, …, что соответствует суждениям $a\to A$, $b\to B$, …, $x\to X$ и т. д.

Рассмотрим примеры. «Все люди (H) смертны (M)»: $H\to M$; «Некоторые камни (X) легче воды (Y)». В силу наших знаний об универсуме (окружающем мире) это суждение относится к классу $\mathbf{IO}_1$. Отсюда сразу же следует, что существует множество камней x_1 (например, вулканического происхождения) ($x_1\to X$), являющихся предметами легче воды ($x_1\to Y$), и при этом существует множество камней x_2 ($x_2\to X$), которые являются предметами тяжелее воды ($x_2\to\overline{Y}$); и существует множество x_3 предметов, не являющихся камнями ($x_3\to\overline{X}$), которые легче воды ($x_3\to Y$), и существует множество предметов x_4, которые не камни и тяжелее воды, то есть ($x_4\to\overline{X}$) и ($x_4\to\overline{Y}$). Если предположить, что логическим мышлением обладают только люди, то суждение «Некоторые люди не в ладах с логикой», обозначаемое как OHL (частноотрицательное), является на самом деле суждением $\mathbf{IO}_2(H,L)$ со всеми вытекающими отсюда последствиями.

Ясно, что в суждениях, если к термину добавить некоторую логическую приставку («все», «некоторые», «не» или «невозможно, что»), получим новое содержание. Эти различные логические варианты термина назовем модификациями термина.

«*Модификациями произвольного термина* X в математической модели рассуждений называются следующие множества, обозначаемые соответственно: X — все элементы термина X; $\overline{X}$ — все не X в некотором универсуме U; $x_1, x_2, \ldots, x_i$ — некоторые непустые подмножества представителей термина X. Далее нам понадобится еще две модификации: $\overline{x}_i=U/x_i$ — назовем ее *отрицанием* (или дополнением) *частного случая* и Cx_i — *частный случай отрицания* (или дополнения) термина X. Соотношение между этими модификациями можно легко понять с помощью диаграмм Венна (рис. 4).

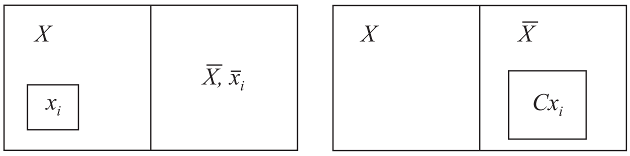

Рис. 4. Смысл модифицированных терминов по А. Б. Кулику.

Область $\overline{x}_i$ «охватывает» всю область $\overline{X}$ и часть области X за исключением «объема», заключенного в области x_i. Что касается области Cx_i (символ C здесь указывает на то, что мы «находимся» в дополнении (complement) области X), то она заключена внутри «объема» $\overline{X}$ и интерпретируется как некоторое подмножество не X [3, 61]».

Мы убедились, что значительная часть бинарных суждений, встречающихся в научных рассуждениях или разговорной речи, может быть представлена как соотношения включения между множествами. Но, следуя [3], мы не будем ограничиваться только «множественной» интерпретацией «правильных» суждений. К «правильным» суждениям будем относить и такие суждения вида $X \to Y$, когда достоверно известно, или постулируется, или предполагается, что Y является *необходимым* условием X, или же X является *достаточным* условием Y (термины «необходимость» и «достаточность» здесь употребляются в сугубо математическом смысле [8, 41] и отличаются от одноименных терминов, используемых в философии или модальной логике. Например, суждение «Если гремит гром и на небе тучи, то идет гроза» не является правильным, если речь в данном случае идет о реальном мире. Здесь правильным будет суждение «Если идет гроза, то гремит гром и на небе тучи», — тучи и гром являются необходимым, но недостаточным условием грозы. В данном случае, если мы в суждении хотим причину поставить перед следствием, то для обеспечения «правильности» можно воспользоваться равносильным суждением — «Если нет туч и грома, то нет и грозы».

В работе [3, 63–64] указано: «Множество «правильных» суждений не обязательно должно соответствовать какой-то реальности. Как отмечено, логика не запрещает рассуждений о фантастическом мире или о мире, для которого в реальности существуют лишь грубые приближения. Ни одна реальная точка и ни одна реальная линия или граница не совпадают в точности с «точками» и «прямыми» в логической системе, которая носит название евклидовой геометрии. В логике никто не запрещает брать в качестве исходных суждений фразы «Все драконы любят шоколад» или «Все люди злые». Но если в процессе рассуждений мы встречаемся с такими суждениями (аргументами), которые приводят к опровержению этих фраз, то у нас остается три варианта выбора:

1) усомниться в исходных суждениях;

2) усомниться в аргументах;

3) согласиться с истинностью исходных суждений и аргументов, но считать при этом, что логика лишь мешает нам отстаивать любимые постулаты.

К сожалению, в реальной жизни многие (а среди этих многих есть и ученые, и политики) нередко выбирают третий вариант. Но к логической истинности этот вариант не имеет никакого отношения. В рассматриваемой модели рассуждения «истинность» во многом совпадает с понятием «непротиворечивость». Заметим, что этот тезис, выдвинутый Д. Гильбертом в качестве одного из основных в логическом формализме, в данной модели не оспаривается. В рассуждениях, которые так или иначе отражают некоторые стороны нашей повседневной жизни, мы часто вынуждены использовать в качестве посылок суждения, адекватность которых не является строго доказанной. Например, суждения «Все лебеди белые» или «Все демократы ратуют за рыночную экономику» основаны на каком-то ограниченном множестве подтверждающих примеров и вполне возможно, что в дальнейшем могут не подтвердиться. Спрашивается, можно ли такие «эмпирические» суждения использовать в нашей модели рассуждения, в которой для суждений предусматриваются довольно жесткие семантические ограничения? Разумеется, можно, но такие суждения целесообразно считать *гипотезами*, и если в процессе рассуждения будет получено противоречие, то в этом случае в некоторые из этих «эмпирических» исходных суждений необходимо ввести соответствующие поправки. Далее мы увидим, что на основе нашей математической модели можно сравнительно легко выявлять семантические неточности, допущенные в исходных суждениях». Конец цитаты.

Общее определение рассуждения. *Рассуждением* называется процесс построения из множества исходных суждений множества заключительных суждений (или следствий) на основе некоторых правил вывода [3].

Так же, как и в [3], в ортогональном базисе предусматривается всего два правила вывода:

1) правило **C** (контрапозиции): $X \to Y$ равносильно $\overline{Y} \to \overline{X}$;

2) правило **T** (транзитивности): из $X \to Y$ и $Y \to Z$ выводится $X \to Z$.

Заметим, что при использовании правила **C** следует применять также и закон инволюции (исключение двойного дополнения или отрицания). Например, суждение $\overline{X} \to Y$ преобразуется по правилу **C** в суждение $\overline{Y} \to \overline{\overline{X}}$, которое в свою очередь равносильно суждению $\overline{Y} \to X$. Чтобы представить процедуру вывода более наглядно, совокупность исходных и получаемых в процессе логического вывода суждений в работе [3] изображается в виде графов. Графы являются высокоэффективным средством, повышающим наглядность проводимых на базе посылок рассуждений. Математический аппарат, применяемый Б. А. Куликом, позволяет быстро и безошибочно получать все возможные следствия из данных посылок и анализировать их на непротиворечивость и полноту. Разработана также общедоступная программа вывода [9]. Рассмотрим пример из [3] решения задачи.

Пусть в закрытом ящике содержится неизвестное число предметов. Известно, что они различаются по форме (шар или кубик), по цвету (белый или красный) и по материалу (дерево или пластмасса). Известны также следующие соотношения между признаками:

1) все шары красного цвета;

2) все деревянные предметы белого цвета;

3) все пластмассовые предметы шары.

Спрашивается, что нового можно узнать о предметах в ящике на основе этих сведений? Введем обозначения: X — множество шаров, Y — множество предметов белого цвета, Z — пластмассовые предметы. Построим модель исходных посылок. $X \to \overline{Y}$, $\overline{Z} \to Y$, $Z \to X$. Проведем логический вывод, согласно правилам вывода, и наглядно отобразим его на графе (рис. 5), добавив согласно правилу контрапозиции дополнительные соотношения $Y \to \overline{X}$, $\overline{Y} \to Z$, $\overline{X} \to \overline{Z}$. Согласно правилу транзитивности, в граф необходимо добавить дуги $X \to Z$, $\overline{Z} \to \overline{X}$. В результате рассмотрения графа в нем выявляются два цикла в рассуждениях $X \to \overline{Y} \to Z \to X$ и $\overline{Z} \to Y \to \overline{X} \to \overline{Z}$. Это означает, что множества, входящие в цикл, совпадают и строгого включения, как прописано в посылках, быть не может.

Другими словами, стрелку мы понимаем как отношение включения множеств, поэтому наличие цикла говорит о том, что все множества, входящие в цикл, должны быть равны друг другу. То есть все шары красные пластмассовые ($X = \overline{Y} = Z$) и все кубики белые деревянные ($\overline{X} = Y = \overline{Z}$). В аналитическом виде три исходные посылки $A(X, \overline{Y})$, $A(\overline{Z}, Y)$, $A(Z, X)$ записываются так:

$$(x' + y')(z + y)(z' + x).$$

Проверим вывод аналитически. Необходимо, чтобы конъюнкция посылок была истинна на некотором наборе значений переменных xyz:

$$(x' + y')(z + y)(z' + x) = 1;$$

раскроем первые три скобки, удаляя слагаемые равные 0:

$$\begin{gathered}(x'z + x'y + y'z + y'y)(z' + x) = \\ = (x'zz' + x'yz' + y'zz' + x'zx + x'yx + y'zx) = \\ = (x'yz' + y'zx) = 1;\end{gathered}$$

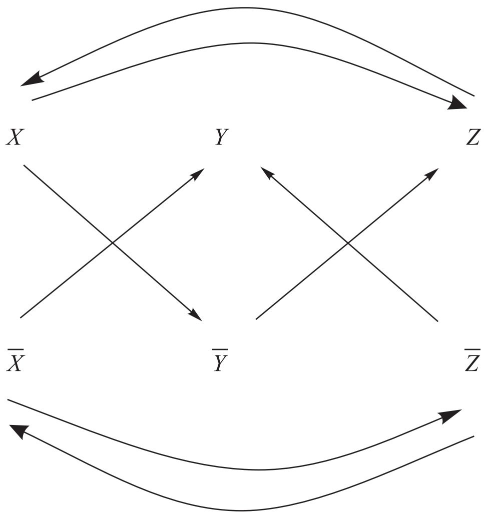

Рис. 5. Вывод в форме графа.

Итак

$$(x'yz') + (xy'z) = 1.$$

Последнее равенство соблюдается на наборе (010) и на наборе (101). По-русски это читается так: (кубики белые из дерева) и (шары красные из пластмассы). К сожалению, объем публикации не позволяет привести другие примеры выводов, которые можно найти в [3].

Таким образом, нами фактически дополнен общеразговорный базис Васильева (рис. 3), в котором реализуются пять классических жергонновых соотношений, до ортогонального базиса (2) в котором выражаются все семь расширенных соотношений Жергонна.

В заключение попробуем дать рекомендации по обучению логическим приемам мышления в рамках учебного предмета не профильных специальностей (специальностей, не связанных с разработкой информационных систем). Необходимо ввести специальный курс или факультатив, лучше всего на первом году обучения. Рабочее название «Логические основы здравого смысла».

Изложение вести в следующем порядке.

1. История возникновения формальной и математической логики.
2. Логические операции.
3. Язык логики высказываний и алгебра множеств.
4. Логическая равносильность.
5. Обратные и противоположные суждения.
6. Логическое следование.
7. Нормальные формы.
8. Силлогистика.
9. Математическая модель рассуждений в форме графов.
10. Логика и здравый смысл.

(Содержание предмета формировать по лучшим образцам из публикаций Б. А. Кулика, В. И. Лобанова, И. Л. Никольской и др.)

На практических занятиях отрабатывать проверку правильности силлогизмов, полисиллогизмов и соритов. При этом учитывать наличие универсума, смысловое содержание предметных переменных и соответствующих им множеств. Обратите внимание, что для формирования развитого логического мышления совсем не обязательно изучать логику второго порядка, основанную на кванторах и предикатах.

Логика, которая нужна для изучения нематематиками, должна давать возможность однозначно задавать исходные посылки для рассуждений и иметь набор инструментов для наглядного получения выводов из них. Эта логика должна быть легко усваиваемой при изучении и такой, чтобы с помощью ее можно было выражать здравый смысл и легко распознавать неправильные рассуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев Н. А. Воображаемая логика. Избранные труды. — М.: Наука, 1989. — с. 94–123.
2. Кулик Б. А. Основные принципы философии здравого смысла (познавательный аспект) // Новости искусственного интеллекта, 1996, № 3, с. 7–92.
3. Кулик Б. А. Логические основы здравого смысла / Под редакцией Поспелова Д. А. — СПб.: Политехника, 1997. — 131 с.
4. Кулик Б. А. Логика естественных рассуждений. — СПб.: Невский диалект. — 2001.
5. Стяжкин Н. И. Формирование математической логики. — М.: Наука, 1967.
6. Соловьев А. Дискретная математика без формул. — 2001, `http://soloviev.nevod.ru/2001/dm/index.html`
7. Лобанов В. И. Русская логика для школьников (азбука математической логики). — М.: 2004. — 122 с.
8. Никольская И. Л. Математическая логика. Учебник. — М.: Высшая школа, 1981. — 127 с.
9. Кулик Б. А. Программа для моделирования и анализа рассуждений // Компьютерные инструменты в образовании, № 2, 1998.
10. Кулик Б. А. С чем идет логика в XXI век. `http://logic-cor.narod.ru/s_chem.htm`

Поступила в редакцию 27.11.09

U. M. Smetanin
Orthogonal basic of syllogistics

The author offers the basis of syllogistics alternative to the basis of Aristotle. It possesses an important quality, which is that all factors of the basis have a simple interpretation.

Keywords: syllogistics, algebra, basis of Aristotle, Russian logic.

Mathematical Subject Classifications: 76G25

Сметанин Юрий Михайлович, к.ф.-м.н., доцент, зав. кафедрой высшей математики и информатики Института экономики и управления УдГУ. 426001, г. Ижевск, ул. Университетская 1, корп. 4, каб. 425, р.т. 916-063, E-mail: gms1234gms@rambler.ru