

УДК 532.517.4:536.25

© *И. Б. Палымский***О ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ТРЕХМЕРНОЙ КОНВЕКЦИИ¹**

Рассмотрена задача о трехмерной конвекции жидкости в прямоугольном параллелепипеде со свободными от касательных напряжений изотермическими горизонтальными границами, при подогреве снизу. Предложен специальный спектрально-разностный численный метод расчета, второго порядка аппроксимации по пространству и первого по времени. Проведенный линейный анализ предлагаемого численного метода показал, что численный метод правильно (с хорошим количественным соответствием в длинноволновой части спектра и с качественным — в коротковолновой) передает спектральные характеристики дифференциальной задачи при реальных значениях шагов по времени, пространству и надкритичности. В качестве тестов проведены расчеты двумерной валиковой и турбулентной конвекции Рэлея–Бенара для надкритичности, равной, соответственно, 2.2 и 950 при числе Прандтля, равном 10.

Ключевые слова: моделирование, гидродинамика, конвекция, теплоперенос, турбулентность, стохастичность.

Введение

Классическая задача о конвекции Рэлея–Бенара в различных постановках решалась многими авторами [1–14]. Из-за очевидной связи с прямым численным моделированием турбулентности наибольший интерес вызывают исследования при высокой надкритичности $r = Ra/Ra_{cr}$, где Ra и Ra_{cr} — число Рэлея и его критическое значение, а Pr — число Прандтля.

При численном моделировании различают две постановки задачи о конвекции в бесконечном горизонтальном слое — со свободными (от напряжений) и жесткими (с условием прилипания) горизонтальными границами как правило, решение предполагается периодическим в горизонтальных направлениях или удовлетворяющим специальным граничным условиям. Обе постановки задачи часто приводят к решениям, которые различаются лишь количественно, а не качественно [15]. Этим и относительной простотой решения задачи о конвекции со свободными граничными условиями и объясняется интерес к этой постановке. Конвекция со свободными границами реализована в эксперименте [16].

Основные трудности при численном моделировании конвекции при высокой надкритичности связаны с наличием быстрорастущих линейных возмущений; так, при $r = 950$ и $Pr = 10$ существуют возмущения, растущие в линейном приближении как $\exp(198 \cdot t)$, что накладывает серьезные ограничения на численные методы. Между тем, число Рейнольдса Re является относительно медленно растущей функцией надкритичности в конвекции Рэлея–Бенара и $Re = 44$ при $r = 950$ ($Pr = 10$) [17].

Конечно-разностные численные методы использовались в работах [4–9], причем в [4–6] представлены результаты расчетов при высокой надкритичности.

В задаче о конвекции Рэлея–Бенара со свободными горизонтальными границами собственные функции задачи линейной устойчивости выражаются через синусы и косинусы [18], и это обуславливает высокую эффективность применения спектральных методов. В данной трехмерной задаче спектральные методы примерно на два порядка эффективнее конечно-разностных, причем эта порядковая оценка отношения количества точек дискретизации к числу гармоник относительно слабо зависит от конкретных реализаций (в том числе и от порядка аппроксимации) конечно-разностного и спектрального методов, так как для любого конечно-разностного

¹Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (№07-01-96070).

оператора интервал аппроксимации составляет лишь треть всего спектра [19] и, таким образом, длина волны каждой учитываемой гармонике должна быть не менее шести интервалов разностной сетки.

Но применение конечно-разностных методов может быть оправдано при проведении расчетов с небольшими надкритичностями [7,9], в областях со сложной геометрией [4,5]. Использование конечно-разностных аппроксимаций возможно также по части переменных [20,21].

Для расчета турбулентной конвекции при высокой надкритичности в [3] используется специальный численный метод, основанный на методе характеристик с использованием сплайнов. На наш взгляд, в задаче о конвекции со свободными границами более эффективны спектральные методы с разложением по синусам и косинусам, которые совпадают с собственными функциями линейной задачи устойчивости [18].

Спектральные методы использовались в [1, 2, 10–14], причем в [1, 2, 10] рассматривается конвекция при высокой надкритичности. Для проведения расчетов турбулентной конвекции широко используется псевдоспектральный метод в различных модификациях [1,2,11,12], недостатками которого являются невыполнение уравнения неразрывности на полном шаге расщепления и использование неудачной схемы расщепления по физическим процессам (в частности, совместный учет на одном дробном шаге нелинейных членов и плавучести), что ограничивает шаг по времени. На наш взгляд, более правильно рассматривать на отдельных дробных шагах линейное и нелинейное развитие возмущений.

При расчете конвекции спектральным методом нужно решить две проблемы: интегрирование по времени жесткой системы уравнений и вычисление нелинейных членов. Во всех известных автору работах, кроме [14], для интегрирования по времени использовались разностные схемы, что ограничивает шаг по времени и число Рэлея [22]. На наш взгляд, для расчета конвекции со свободными границами наиболее оптимальны точные методы с использованием аналитических формул [17,22] или матричной экспоненты [14].

Проблема вычисления нелинейных членов рассматривалась в работах [23,24]. В работе [23] рассмотрены три различных способа вычисления нелинейных членов. Численные алгоритмы с вычислением нелинейных членов в пространстве коэффициентов Фурье обладают высокой точностью, но при этом возникает проблема их устойчивости. На наш взгляд, наиболее оптимальный компромисс между устойчивостью вычислений и точностью дает расчет нелинейного переноса в физическом пространстве по разностным схемам на отдельном этапе расщепления [17,22].

В [22,25] предложен спектрально-разностный (псевдоспектральный) численный метод расчета двумерной конвекции со свободными границами, где линейное развитие возмущений рассчитывается по аналитическим формулам в спектральном пространстве, а нелинейный перенос учитывается в физическом пространстве по схеме продольно-поперечной прогонки. Такой подход с успехом применен для расчета двумерной конвекции при высокой надкритичности [26,27]. В работе [17] на основе развития этого подхода проведено исследование временного и пространственного спектров температурных пульсаций трехмерной турбулентной конвекции. Однако какой-либо анализ используемого численного метода в [17] не проводился.

Цель работы — описание использованного в [17] спектрально-разностного численного метода расчета трехмерной конвекции и результатов его линейного анализа, проведение тестовых расчетов конвекции Рэлея–Бенара при малой ($r = 2, 2$) и умеренно высокой надкритичности ($r = 950$).

§ 1. Постановка задачи

В приближении Буссинеска рассматриваются трехмерные конвективные течения вязкой несжимаемой жидкости в прямоугольном параллелепипеде единичной высоты при подогреве снизу. Конвективное течение рассматривается в прямоугольной в плане области с размерами π/α и π/β в горизонтальных направлениях, где α и β — минимальные волновые числа. Горизонтальные границы области считаются изотермическими. Исходная система уравнений в безразмерных переменных, записанная в отклонениях от равновесного решения, имеет

вид [17]

$$\begin{aligned}
 u_x + v_y + w_z &= 0, \\
 u_t + \frac{1}{Pr}(uu_x + vu_y + wu_z) + P_x &= \Delta u, \\
 v_t + \frac{1}{Pr}(uv_x + vv_y + wv_z) + P_y &= \Delta v, \\
 w_t + \frac{1}{Pr}(ww_x + vw_y + ww_z) + P_z &= \Delta w + Ra \cdot Q, \\
 Q_t + \frac{1}{Pr}(uQ_x + vQ_y + wQ_z) &= \frac{1}{Pr} \Delta Q + \frac{w}{Pr},
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

где u, v, w, p — компоненты вектора скорости и давление, Q — отклонение температуры от равновесного линейного профиля (полная температура равна $\Theta = 1 - y + Q$), $\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$ — оператор Лапласа, действующий на функцию f , $Ra = g\beta_t H^3 dQ / \chi\nu$ — число Рэлея, $Pr = \nu / \chi$ — число Прандтля, g — ускорение силы тяжести, β_t, ν, χ — коэффициенты теплового расширения, кинематической вязкости и температуропроводности, H — толщина слоя и dQ — разность температур на горизонтальных границах, x, y и z — горизонтальные и вертикальная координаты. В дальнейшем для краткости будем называть Q и Θ температурой.

Конвекция рассматривается со свободными от касательных напряжений горизонтальными границами $u_z = v_z = w = Q = 0$. Такие граничные условия физически реальны и реализованы в эксперименте [16].

Искомые величины u, v, w, p, Q разыскиваются в виде

$$\begin{aligned}
 u(t, x, y, z) &= \sum_{k=0}^K \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M u_{knm}(t) \rho_k \rho_n \rho_m \cos(\alpha k x) \cos(\beta n y) \cos(\pi m z), \\
 v(t, x, y, z) &= \sum_{k=1}^{K-1} \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=0}^M v_{knm}(t) \rho_m \sin(\alpha k x) \sin(\beta n y) \cos(\pi m z), \\
 w(t, x, y, z) &= \sum_{k=1}^{K-1} \sum_{n=0}^N \sum_{m=1}^{M-1} w_{knm}(t) \rho_n \sin(\alpha k x) \cos(\beta n y) \sin(\pi m z), \\
 p(t, x, y, z) &= \sum_{k=1}^{K-1} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M p_{knm}(t) \rho_n \rho_m \sin(\alpha k x) \cos(\beta n y) \cos(\pi m z), \\
 Q(t, x, y, z) &= \sum_{k=1}^{K-1} \sum_{n=0}^N \sum_{m=1}^{M-1} Q_{knm}(t) \rho_n \sin(\alpha k x) \cos(\beta n y) \sin(\pi m z),
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $\rho_k = 0,5$ при $k = 0, K$ и $\rho_k = 1$ при $1 \leq k \leq K - 1$. Отметим, что для решений вида (1.2) из системы (1.1) сразу следует, что $u_{000} = 0$ и, таким образом, можно считать, что всегда $k + n + m > 0$.

«Мягкие» граничные условия первого и второго рода на боковых границах $x = 0, \pi/\alpha$ и $y = 0, \pi/\beta$ ставятся исходя из вида решения (1.2), например, при $x = 0, 0 \leq y \leq \pi/\beta$ и $0 \leq z \leq 1$ из (1.2) находим, что $u_x = v = w = Q = 0$ — условия на вертикальной плоскости, проходящей через центр конвективного вала, параллельно его оси. Граничные условия при $y = 0, 0 \leq x \leq \pi/\alpha$ и $0 \leq z \leq 1$: $u_y = v = w_y = Q_y = 0$ соответствуют условиям на границе конвективной ячейки.

Некоторая искусственность такой постановки обусловлена желанием обеспечить возможность существования валиковой конвекции (по экспериментальным данным [30] при $Pr = 10$ конвекция в виде конвективных валов реализуется при $1 \leq r \leq R_1, R_1 \approx 10, r = Ra/Ra_{cr}$) и преимущество с двумерными расчетами работы [27].

Пусть $r = Ra/Ra_{cr}$ — надкритичность, где $Ra_{cr} = 657,5$ — критическое значение числа Рэлея.

§ 2. Численный метод

Кратко опишем спектрально-разностный метод, используемый для решения системы (1.1). Предлагаемый метод использовался в [17] для исследования спектров трехмерной турбулентной конвекции. Двумерный вариант данного метода применялся для расчетов конвекции при высокой надкритичности со свободными и жесткими граничными условиями [27], описание метода расчета, результаты линейного и нелинейного (на модельной нелинейной системе уравнений) анализа, результаты тестовых расчетов приведены в [22], [25], [26]. Хотя предлагаемый метод является вариантом псевдоспектрального метода, называем его в дальнейшем спектрально-разностным, чтобы отличать от псевдоспектрального метода Орзага [11], [12].

Следуя общей идеологии метода расщепления, переход от слоя n к слою $n + 1$ по времени производится в три этапа. На первом этапе расщепления устанавливается соответствие в линейном приближении спектральных характеристик численного метода и дифференциальной задачи, на втором учитываются нелинейные члены и на третьем — восстанавливается выполнение уравнения неразрывности, нарушенное на втором этапе расщепления.

На первом этапе расщепления учитываем линейное развитие возмущений, без учета взаимодействия гармоник

$$\begin{aligned} u_x + v_y + w_z = 0, \quad u_t + P_x = \frac{1}{2} \Delta u, \quad v_t + P_y = \frac{1}{2} \Delta v, \\ w_t + P_z = \frac{1}{2} \Delta w + Ra Q, \quad Q_t = \frac{1}{2Pr} \Delta Q + \frac{w}{Pr}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Для эффективного решения уравнений нелинейного конвективного переноса для u , v , w и Q половина вязких членов учтена на втором этапе расчета. После подстановки решения (1.2) в систему (2.1), с помощью уравнения неразрывности получим для давления ($k + n + m > 0$):

$$P_{knm} = -\frac{\pi m}{S} Ra Q_{knm}, \quad S = \alpha^2 k^2 + \beta^2 n^2 + \pi^2 m^2 > 0,$$

и вместо (2.1) получим систему из четырех обыкновенных дифференциальных уравнений для четырех неизвестных амплитуд $u_{knm} = U$, $v_{knm} = V$, $w_{knm} = W$ и $Q_{knm} = Q$:

$$\begin{aligned} U_t = -\frac{S}{2} U + \frac{\alpha k \pi m}{S} Ra Q, \quad V_t = -\frac{S}{2} V - \frac{\beta n \pi m}{S} Ra Q, \\ W_t = -\frac{S}{2} W + \frac{\alpha^2 k^2 + \beta^2 n^2}{S} Ra Q, \quad Q_t = -\frac{S}{2Pr} Q + \frac{W}{Pr}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Как уже отмечалось, $S > 0$ и неопределенности типа деления на ноль в (2.2) не возникает. Система обыкновенных дифференциальных уравнений (2.2) решается аналитически, без применения каких-либо аппроксимаций по времени по формулам, выведенным программой аналитических вычислений Maple V R5 при $0 \leq k \leq K$, $0 \leq n \leq N$ и $0 \leq m \leq M$ (исключая $k = n = m = 0$). Аналитические формулы аналогичны формулам линейной теории устойчивости [17] и не приводятся здесь ввиду их громоздкости. Предполагается $u_{000} = 0$, и амплитуды отсутствующих в представлении (1.2) гармоник считаются нулевыми.

На втором этапе учитывается нелинейный конвективный перенос, то есть принимается во внимание взаимодействие гармоник

$$u_t + \frac{1}{Pr} (uu_x + vv_y + ww_z) = \frac{1}{2} \Delta u, \quad Q_t + \frac{1}{Pr} (uQ_x + vQ_y + wQ_z) = \frac{1}{2Pr} \Delta Q. \quad (2.3)$$

Отсутствующие в (2.3) уравнения для v и w легко выписать по аналогии с уравнением для u . Каждое из уравнений системы (2.3) решается в физическом пространстве по явной схеме, с аппроксимацией производных в нелинейных членах направленными разностями первого порядка

и поправкой А. А. Самарского, при достаточной разрешимости по пространству второго порядка точности [29].

Для одномерного уравнения

$$u_t + au_x = \nu u_{xx}, \quad a \geq 0,$$

применяемая на втором этапе схема имеет вид

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + a \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{H} = \nu_1 \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{H^2}, \quad \nu_1 = \frac{\nu}{1 + aH/(2\nu)}.$$

Обобщение этой схемы на многомерный случай не вызывает затруднений.

На третьем этапе расщепления восстанавливается выполнение уравнения неразрывности, нарушенное на втором этапе:

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+2/3}}{\tau} = -grad(p), \quad \frac{div(u^{n+2/3})}{\tau} = \Delta p. \quad (2.4)$$

Подстановка в (2.4) решений в форме (1.2) приводит (2.4) к легко разрешаемой системе алгебраических соотношений. Пересчет искомых полей из спектрального пространства в физическое и обратно производится по стандартным программам быстрого преобразования Фурье по косинусам и синусам.

§ 3. Сравнительный анализ численных методов на модельной задаче

Проанализируем известные численные методы на модельной линейной задаче:

$$u_t = u_{xx} + au, \quad (3.1)$$

где предполагается, что $a \gg 1$.

Рассмотрим решения уравнения (3.1) вида

$$u(t, x) = u_0 \exp(\lambda t) \sin(\alpha x), \quad u_0 = const,$$

причем решения при $\lambda > 0$ нарастают во времени, а при $\lambda < 0$ — затухают. Из уравнения (3.1) находим, что $\lambda_d = -\alpha^2 + a$ и возмущения при $\alpha < \alpha_{cr}$ нарастают, а при $\alpha > \alpha_{cr}$ — затухают во времени, здесь $\alpha_{cr} = \sqrt{a}$.

Методы численного интегрирования рассматриваются с шагами τ и $H = 1/N$ по времени и пространству. Сравнить точность численных методов можно по правильности воспроизведения λ как функции α во всем спектре разностного оператора $0 < \alpha \leq \pi/H$. При этом хороший численный метод должен с высокой точностью воспроизводить длинноволновый участок спектра с нарастающими гармониками и хотя бы качественно правильно — коротковолновый с затухающими.

Для уравнения (3.1) схема расщепления по физическим процессам [30] совпадает с явной схемой первого порядка точности по времени:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{H^2} + au_i^n. \quad (3.2)$$

Можно получить, что для схемы (3.2)

$$\lambda_r = \frac{1}{\tau} \ln \left(1 - \frac{4\tau}{H^2} \sin^2 \left(\frac{\alpha H}{2} \right) + a\tau \right), \quad \lambda_r = \lambda_d - \frac{1}{2} \lambda_d^2 \tau + \frac{\alpha^4}{12} H^2 + O(\tau^2).$$

Из приведенных формул следует, что на краю спектра ($\alpha H \approx \pi$) гармоники затухают только при $H < H_1 = \frac{2}{\sqrt{a}}$ ($N > 0,5\sqrt{a}$). А при $\alpha \rightarrow 0$, $\lambda_r = \lambda_d - a^2\tau/2 + O(\alpha^2)$, $\lambda_d = a$, откуда следует, что нарушение условия $a\tau \ll 2$ приводит к искажению длинноволнового участка спектра.

Применяя для решения уравнения (3.1) широко используемый для расчета турбулентных течений псевдоспектральный метод с неявной схемой первого порядка точности на последнем этапе расщепления [11, 12], имеем после исключения дробного шага:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \frac{a}{2}(3u^n - u^{n-1}) + u_{xx}^{n+1},$$

$$\lambda_{ors} = \frac{1}{\tau} \ln(\rho), \quad \rho = \frac{1 + 1.5a\tau + \sqrt{(1 + 1.5a\tau)^2 - 2a\tau(1 + \alpha^2\tau)}}{2(1 + \alpha^2\tau)}.$$

Разложением ρ в степенной ряд по τ можно получить, что

$$\lambda_{ors} = \lambda_d - \frac{\alpha^2}{2}\lambda_d\tau + \frac{\lambda_d}{12}(4\alpha^4 + 4a\alpha^2 - 5a^2)\tau^2 + O(\tau^3),$$

и при $\alpha \rightarrow 0$ $\lambda_{ors} = \lambda_d - \frac{5}{12}a^3\tau^2 + O(\alpha^2)$, $\lambda_d = a$, откуда следует, что нарушение условия $a\tau \ll 1,5$ приводит к искажению длинноволнового участка спектра.

Симметричная схема второго порядка точности Кранка–Николсона, с успехом использованная для расчета турбулентного течения в канале [23] и примененная к уравнению (3.1), дает:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = \frac{1}{2} \left(\frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{H^2} + \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{H^2} \right) + \frac{a}{2}(u_i^{n+1} + u_i^n),$$

$$\lambda_{cn} = \frac{1}{\tau} \ln \frac{1 - \frac{2\tau}{H^2} \sin^2 \frac{\alpha H}{2} + \frac{a\tau}{2}}{1 + \frac{2\tau}{H^2} \sin^2 \frac{\alpha H}{2} - \frac{a\tau}{2}},$$

$$\lambda_{cn} = \lambda_d + \left(-\frac{\alpha^6}{12} + \frac{\alpha^4 a}{4} - \frac{\alpha^2 a^2}{4} + \frac{a^3}{12} \right) \tau^2 + \frac{\alpha^4}{12} H^2 + O(H^4 + \tau^4 + H^2\tau^2).$$

Высокие частоты ($\alpha H \approx \pi$) отражаются качественно верно ($\lambda_{cn} < 0$) при $H < H_1 = \frac{2}{\sqrt{a}}$, а при $\alpha \rightarrow 0$ находим, что $\lambda_{cn} = \lambda_d + \frac{a^3}{12}\tau^2 + O(\alpha^2)$, $\lambda_d = a$. Из последней формулы видно, что нарушение условия $a\tau \ll 3,5$ приводит к искажению длинноволнового участка спектра.

Неявная схема третьего порядка точности Куртиса–Хиршфельдера, использованная для расчета двумерной конвекции в [24] и примененная к уравнению (3.1), дает:

$$\frac{11u_i^{n+3} - 18u_i^{n+2} + 9u_i^{n+1} - 2u_i^n}{6\tau} = \frac{u_{i+1}^{n+3} - 2u_i^{n+3} + u_{i-1}^{n+3}}{H^2} + au_i^{n+3}.$$

Выписывая спектральное уравнение и разыскивая его решение в виде степенного ряда, находим, что

$$\lambda_{ch} = \lambda_d + \frac{\lambda_d^4}{4}\tau^3 + \frac{\alpha^4}{12}H^2 + O(\tau^4 + H^4).$$

Можно показать, что для схемы Куртиса–Хиршфельдера высокие частоты ($\alpha H \approx \pi$) отражаются качественно верно ($\lambda_{ch} < 0$) при $H < H_1 = \frac{2}{\sqrt{a}}$, а при $\alpha \rightarrow 0$ $\lambda_{ch} = \lambda_d + \frac{\alpha^4}{4}\tau^3 + O(\tau^4 + H^4)$, $\lambda_d = a$. Из последнего соотношения следует, что нарушение условия $a\tau \ll 1,6$ приводит к искажению длинноволнового участка спектра.

Применяя предлагаемый спектрально-разностный численный метод для решения уравнения (3.1), имеем:

$$u_t = \frac{1}{2}u_{xx} + au, \quad \frac{u_i^{n+1} - u_i^*}{\tau} = \frac{1}{2} \frac{u_{i+1}^* - 2u_i^* + u_{i-1}^*}{H^2},$$

$$\lambda_{sr} = a - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{1}{\tau} \ln \left(1 - \frac{2\tau}{H^2} \sin^2 \frac{\alpha H}{2} \right),$$

$$\lambda_{sr} = \lambda_d - \frac{\alpha^4\tau}{8} + \frac{\alpha^4 H^2}{24} + O(\tau H^2 + \tau^2 + H^4).$$

Из приведенных формул для λ_{sr} видно, что члены, описывающие схемный эффект (все члены правой части, кроме первого), не зависят от величины a . Интересно, что при $\tau = H^2/3$ исчезают главные члены разложения, описывающего схемный эффект, и точность решения повышается независимо от значения параметра a .

При $\alpha \rightarrow 0$ $\lambda_{sr} = \lambda_d + O(\alpha^4)$, откуда следует отсутствие искажений длинноволновой части спектра при любых шагах τ и H . На краю спектра (при $\alpha H = \pi$) можно получить разложением в степенной ряд по степеням $2\tau/H^2$:

$$\lambda_{sr} = -\frac{\alpha^2}{2} + a - \frac{2}{H^2} + O\left(\frac{\tau}{H^4}\right),$$

и, таким образом, $\lambda_{sr} < 0$ при $H < H_2 = 2,63/\sqrt{a}$ ($N > 0,38\sqrt{a}$). Условие качественно правильного воспроизведения коротковолновых гармоник для предлагаемого спектрально-разностного метода мягче аналогичного для явной схемы, схем Кранка–Николсона и Куртиса–Хиршфельдера ($H_2/H_1 = 1,32$).

На рис. 1 приведены спектральные кривые для явной схемы (кривая 1), псевдоспектрального метода (2), симметричной схемы второго порядка Кранка–Николсона (3), предлагаемого спектрально-разностного метода (4) и дифференциальной задачи (5) при $a = 8000$. Для наглядного разделения областей нарастания и затухания гармоник приведена также прямая $\lambda = 0$ (6).

На рис. 1а спектральные кривые изображены при $\tau = 0,1 \cdot a^{-1} = 1,25 \cdot 10^{-5}$ и $H = \frac{1}{80} = 0,0125 < H_1 = 0,0224$. Видно, что длинноволновую часть спектра, соответствующую нарастающим гармоникам, все рассматриваемые численные методы отражают с высокой точностью, сохраняя качественное соответствие в коротковолновой области, соответствующей затухающим гармоникам. При этом на краю спектра ($\alpha = 251,3$) наиболее точными оказались псевдоспектральный метод и предлагаемый спектрально-разностный численный метод (33 и 47% соответственно), затем явная схема и схема Кранка–Николсона (277 и 312% соответственно).

Ситуация кардинально меняется при попытке увеличить шаги τ и H . На рис. 1б спектральные кривые изображены при $\tau = a^{-1} = 1,25 \cdot 10^{-4}$ и $H = \frac{1}{40} = 0,0250$, $H_1 < H < H_2 = 0,0294$. Видно, что явная схема, псевдоспектральный метод и схема Кранка–Николсона искажают длинноволновую часть спектра и, кроме того, схемы явная и Кранка–Николсона качественно неправильно передают коротковолновую часть спектра, так как вплоть до края спектра ($\alpha = 125,7$) все гармоники нарастают. При параметрах, принятых на рис. 1, спектральные кривые для схем Куртиса–Хиршфельдера и Кранка–Николсона совпадают с графической точностью, и поэтому на рис. 1 спектральная кривая, отвечающая схеме Куртиса–Хиршфельдера, не приводится.

Из рис. 1 видно, что предлагаемый спектрально-разностный численный метод не искажает длинноволновую часть спектра и с приемлемой точностью передает коротковолновую.

§ 4. Линейный анализ и тестирование численного метода

Линейный анализ основан на рассмотрении линейных аналогов системы (1.1) и предлагаемого спектрально-разностного численного метода. Рассчитываются и сравниваются инкременты нарастания возмущений в дифференциальной задаче и численном методе. По близости спектральных характеристик можно судить о точности численного метода. По подобной методике тестировались двумерный вариант предлагаемого спектрально-разностного численного метода [22], [26] и численные методы, использованные для расчета турбулентных течений в плоском канале [23] и трубе кольцевого сечения [21].

Заметим, что линейный аналог системы (1.1) описывает развитие бесконечно малых возмущений равновесного решения, поэтому близость спектральных характеристик дифференциальной задачи и численного метода означает правильную динамику бесконечно малых возмущений равновесного решения при расчете решений системы (1.1) численным методом.

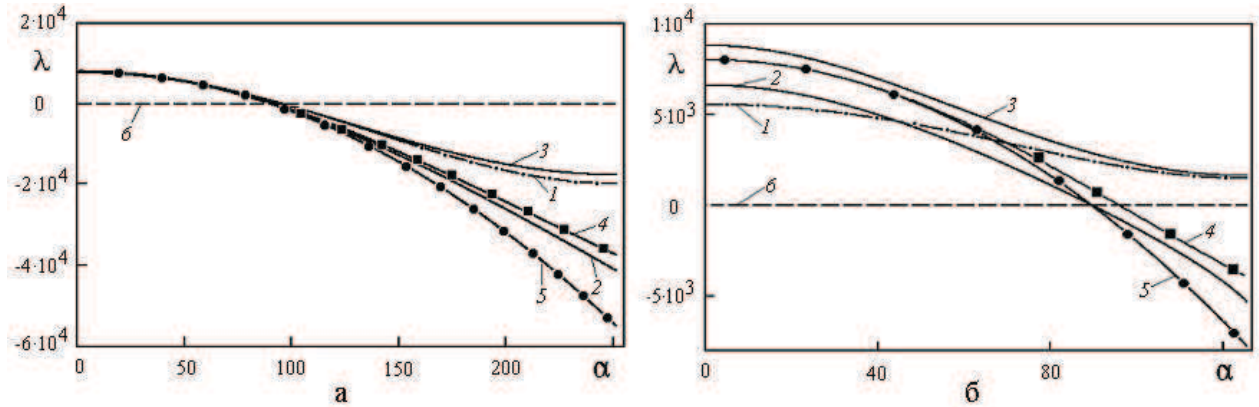


Рис. 1. Спектральные кривые для модельного линейного уравнения
 а) малые шаги τ и H ; б) увеличенные τ и H .

Итак, рассмотрим линейный аналог системы (1.1), где отбрасываются все нелинейные члены и решение ищется в виде, который для u принимает вид:

$$u(t, x, y, z) = u_0 \exp(-\lambda t) \cos(\alpha x) \cos(\beta y) \cos(\pi m z),$$

представления для v, w, p и Q получаются по аналогии, здесь u_0 — постоянная амплитуда, а инкремент λ находится из задачи на собственные значения, при $\lambda < 0$ амплитуда гармоник нарастает, а при $\lambda > 0$ — затухает.

Для простоты анализа ограничимся случаем $Pr = 1$.

Аналитические выражения для спектральных характеристик имеют вид:

$$\lambda_d = S - k \sqrt{\frac{Ra}{S}},$$

для дифференциальной задачи, где $S = \alpha^2 + \beta^2 + \pi^2 m^2$, $k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ и

$$\lambda_{sr} = \frac{S}{2} - k \sqrt{\frac{Ra}{S}} - \frac{1}{\tau} \ln \left(1 - \frac{\tau a}{2} \right),$$

для предлагаемого спектрально-разностного численного метода, где

$$a = \frac{4}{H_1^2} \sin^2 \frac{\alpha H_1}{2} + \frac{4}{H_2^2} \sin^2 \frac{\beta H_2}{2} + \frac{4}{H_3^2} \sin^2 \frac{\pi m H_3}{2}.$$

Предполагая, что шаги по времени и пространству достаточно малы, можно получить разложением в степенной ряд

$$\lambda_{sr} = \lambda_d + \frac{\tau}{8} S^2 - \frac{1}{24} (\alpha^4 H_1^2 + \beta^4 H_2^2 + \pi^4 m^4 H_3^2) + O(\tau^2),$$

где, как и раньше, $S = \alpha^2 + \beta^2 + \pi^2 m^2$.

Из приведенной формулы видно, что схемный эффект (все члены правой части, кроме первого) определяется шагами τ, H_1, H_2, H_3 и волновыми числами α, β и πm и не зависит от числа Ra .

На рис. 2 изображены спектральные кривые и граница области неустойчивости на волновой плоскости при $r = 950$, $\tau = 5 \cdot 10^{-5}$, $H_1 = H_2 = \frac{\pi}{64}$, $H_3 = \frac{1}{64}$.

На рис. 2а изображены спектральные кривые $\lambda(\alpha, \alpha, \pi m)$, соответствующие трем старшим модам $m = 1, 2, 3$ линейной неустойчивости, где линия (1) соответствует дифференциальной задаче и линия (2) — предлагаемому численному методу. Линия (3) $\lambda = 0$ на рис. 2а разделяет области нарастания и затухания гармоник.

Спектральные кривые практически совпадают в области малых волновых чисел и в области максимальных значений инкрементов, небольшое количественное отклонение заметно лишь для затухающих гармоник при $\alpha \geq 17$, что обусловлено конечно-разностной аппроксимацией половинок вязких членов.

Граница области неустойчивости в пространстве волновых чисел описывается уравнением

$$\rho_d^* = \sqrt{\cos \psi}, \quad \rho_d^* = \frac{\rho_d}{Ra^{0,25}}, \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2},$$

в сферической системе координат

$$\alpha = \rho \cos(\varphi) \cos(\psi), \quad \beta = \rho \sin(\varphi) \cos(\psi), \quad \gamma = \rho \sin(\psi),$$

$$0 \leq \varphi, \quad \psi \leq \frac{\pi}{2}, \quad \gamma = \pi m.$$

Разложением в степенной ряд выражения $\lambda_{sr} = 0$ получим для границы области неустойчивости спектрально-разностного численного метода:

$$\rho_{sr}^* = \sqrt{\cos \psi} - \frac{\sqrt{Ra}}{16} \cos^{1,5} \psi A,$$

$$A = \tau - \frac{\cos^4 \varphi \cos^4 \psi H_1^2 + \sin^4 \varphi \cos^4 \psi H_2^2 + \sin^4 \psi H_3^2}{3}, \quad (4.1)$$

$$\rho_{sr}^* = \frac{\rho_{sr}}{Ra^{0,25}}, \quad 0 \leq \varphi, \quad \psi \leq \frac{\pi}{2}.$$

На рис. 2б изображена граница области устойчивости для дифференциальной задачи и численного метода при $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $Ra = 950 \cdot 657,5 \approx 6,25 \cdot 10^5$, где линия (1) соответствует дифференциальной задаче, а линия (2) — предлагаемому численному методу. Максимальное отклонение кривых составляет 1,7%.

Заметим, что на рис. 2 значения надкритичности, шагов по времени и пространству реальны и совпадают с используемыми при расчете стохастической конвекции.

§ 5. Расчет стационарной двумерной конвекции

Сначала, для апробации предлагаемого трехмерного вычислительного алгоритма, сравним результаты расчета двумерной стационарной конвекции с экспериментальными данными [31] и результатами двумерных расчетов со свободными граничными условиями [27].

В [31] описаны результаты экспериментов по стационарной двумерной конвекции в дистиллированной воде при небольшой надкритичности (до $r < 14$). На верхней и нижней горизонтальных границах в эксперименте поддерживалась постоянная температура, а оси конвективных валов были ориентированы параллельно короткой боковой стороне рабочей области.

Размер области в горизонтальном y -направлении был для экономии времени расчета уменьшен в 11,97 раз ($\beta = \pi$), и по однородной координате y проводилось осреднение. Все результаты данного раздела получены с разрешимостью $[513 \times 5 \times 17]$, надкритичность $r = 2,2$ и число Прандтля $Pr = 6,8$ в эксперименте и расчетах совпадали. Совпадали также безразмерные размеры области в горизонтальном x -направлении и окна визуализации.

На рис. 3 приведены изотермы полной температуры, полученные в эксперименте (рис. 3а) и расчете по трехмерной модели (рис. 3б). Видно, что расчетная и экспериментальная изотермы близки.

На рис. 4 сравниваются расчетный (линия 1) и экспериментальный (2) профили средней температуры. Результаты расчета и эксперимента хорошо согласуются, небольшое различие заметно лишь при $y = 0,85$.

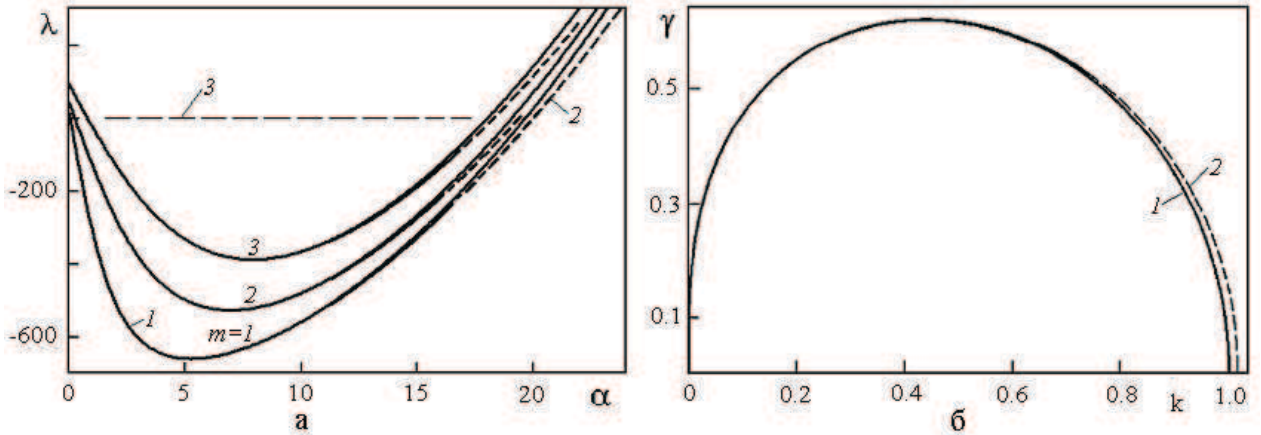


Рис. 2. Спектральные характеристики линейных уравнений конвекции:
 а) спектральные кривые $m = 1, 2, 3$ для дифференциальной задачи и предлагаемого численного метода;

б) граница области неустойчивости, здесь $\gamma = \frac{\pi m}{Ra^{0,25}}$, $k = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{Ra^{0,25}}$.

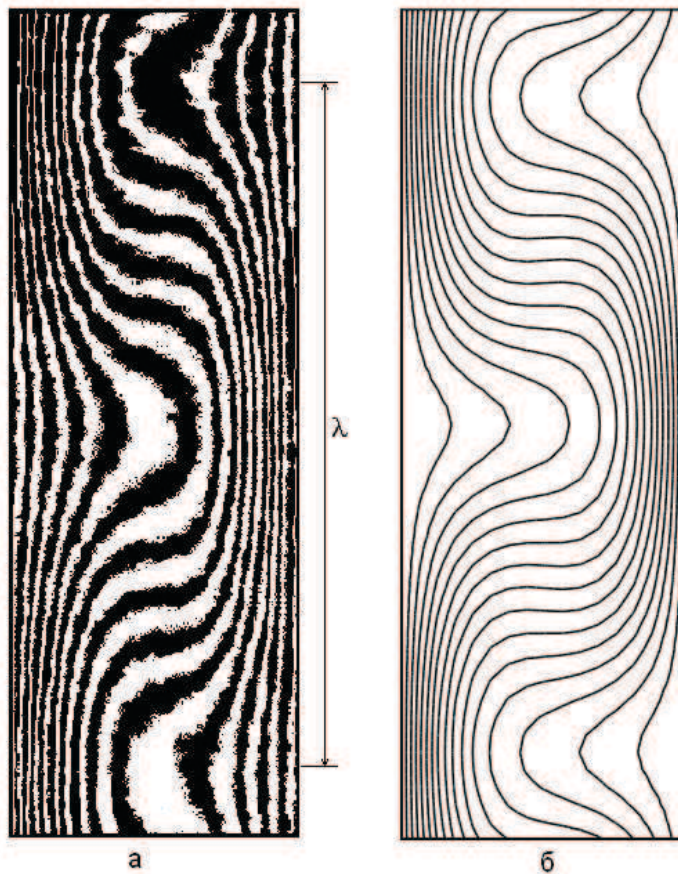


Рис. 3. Экспериментальная (а) и расчетная (б) изотермы полной температуры.

Отметим, что изотермы и профиль средней температуры в трехмерных и двумерных [27] расчетах со свободными граничными условиями совпадают с графической точностью, и поэтому результаты двумерных расчетов на рис. 3 и 4 не приводятся.

Число Нуссельта

$$Nu(t) = \frac{\alpha\beta}{2\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{\alpha}} \int_0^{\frac{\pi}{\beta}} (Q_z(t, x, y, 0) + Q_z(t, x, y, 1)) dx dy - 1$$

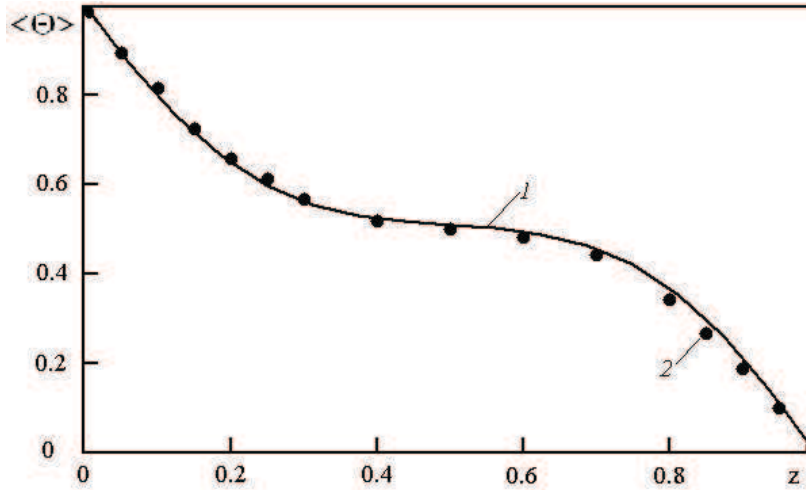


Рис. 4. Расчетный и экспериментальный профили температуры.

было равно: 1,82 — в эксперименте, 2,201 и 2,233 — в расчетах по трехмерной и двумерной моделям соответственно. Расчеты по трехмерной и двумерной модели приводят к близким результатам (различие на 1,5%) при отклонении от эксперимента примерно на 21%.

Размер конвективной ячейки λ (рис. 3а) в эксперименте был равен примерно 2,35 H , где H — толщина слоя. В трехмерном и двумерном расчетах размер конвективной ячейки был равен 2,37 H . Среднеквадратичное отклонение полей температуры в трехмерных и двумерных расчетах составило 1,5%, хорошо согласовались также среднеквадратичные значения температуры и скорости — 0,7 и 0,2% соответственно.

§ 6. Численное моделирование стохастической конвекции

Расчет трехмерной конвекции проводился с учетом $[65 \times 65 \times 65]$ гармоник, при $r = 950$, $Pr = 10$, $\alpha = \beta = 1$, с шагами по пространству $H_1 = H_2 = \frac{\pi}{64}$, $H_3 = \frac{1}{64}$ и времени $\tau = 4,88 \times 10^{-5}$, число Рейнольдса равнялось 44. Для проверки достаточности разрешимости проведены тестовые расчеты с числом гармоник $[129 \times 129 \times 129]$ и $[33 \times 33 \times 33]$. По сравнению с данными расчета с разрешимостью $[129 \times 129 \times 129]$ число Нуссельта отличалось на 3,6%, среднеквадратичные значения скорости — на 7,1% и температуры — на 1,4% для числа гармоник $[65 \times 65 \times 65]$ и на 13,4, 18,2 и 2,3% — для числа гармоник $[33 \times 33 \times 33]$. По приведенным средним характеристикам видна сходимость.

При этом профили средней температуры и среднеквадратичных температурных пульсаций практически совпадали, для профилей пульсаций вертикальной и горизонтальной скорости наблюдалась сходимость при увеличении разрешимости [17]. Сходимость при увеличении пространственной разрешимости наблюдалась в тестовых расчетах настоящей работы также и для одномерных пространственных спектров пульсаций температуры и скорости, методика вычисления которых описана в [17].

В [17] приведены результаты сравнения рассчитанного энергетического спектра температуры в центре ячейки с экспериментальными данными при $r = 410$ по конвекции газообразного He при криогенной температуре. Отмечено хорошее согласование расчетных и экспериментальных данных вплоть до диссипативных частот. Согласовались также вычисленные значения числа Нуссельта с результатами трехмерного моделирования со свободными границами [8,9] при $r = 152$ и 7,6 соответственно.

На рис. 5 приведен график числа Нуссельта как функции времени и его энергетический спектр — квадрат модуля амплитуды гармоники Фурье как функция частоты. Рис. 5а показывает сложную зависимость числа Нуссельта от времени. А из рис. 5б видно, что спектр этой

зависимости сложный, непрерывный, с характерным для стохастических процессов заполнением его длинноволновой части [32].

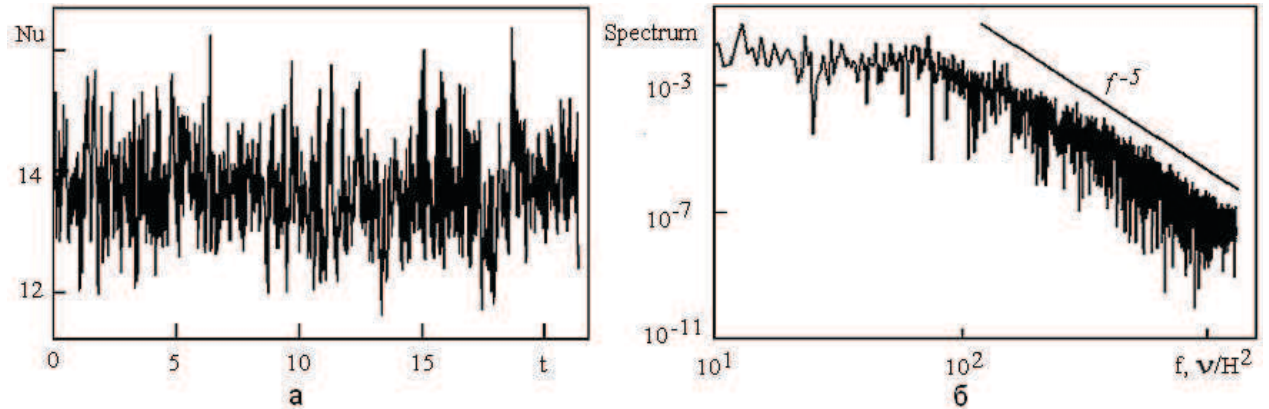


Рис. 5. Число Нуссельта и его спектр:

а) число Нуссельта как функция времени, б) спектр как функция частоты.

На рис. 6 приведены автокорреляционная функция зависимости числа Нуссельта от времени и пространственный одномерный энергетический спектр пульсаций скорости.

Быстроспадающая автокорреляционная функция, приведенная на рис. 6а, также показывает стохастический характер зависимости числа Нуссельта от времени.

В [17] показано, что для энергетического спектра пульсаций температуры характерен степенной закон пассивной примеси $k^{-5/3}$ и $k^{-2,4}$, наблюдавшиеся в экспериментах по турбулентной конвекции в газообразном He при криогенной температуре [33, 34].

На рис. 6б приведен одномерный (x -направление) энергетический спектр пульсаций скорости, где точками (1) показаны результаты расчета, а прямой линией — степенной закон Болджиано–Обухова $k^{-11/5}$.

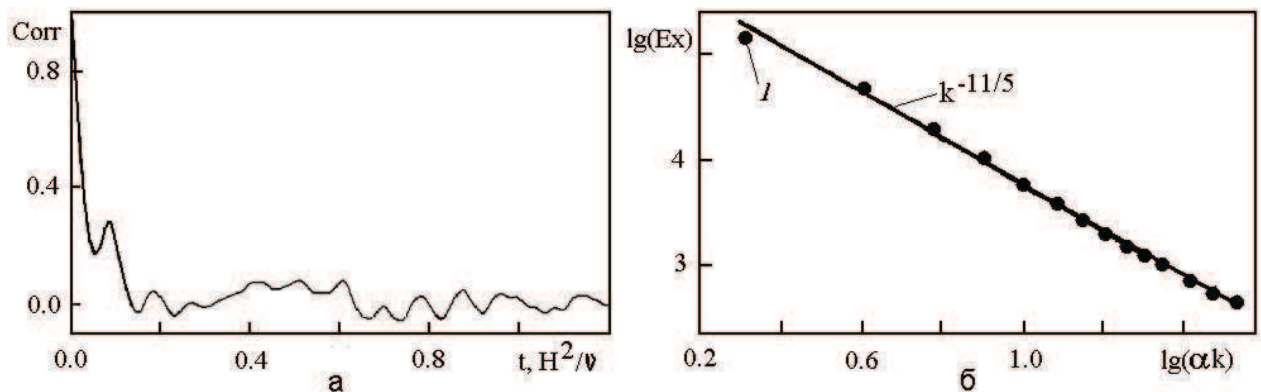


Рис. 6. а) Автокорреляционная функция числа Нуссельта,

б) одномерный (x -направление) энергетический спектр пульсаций кинетической энергии.

На рис. 7 показаны пространственные одномерные энергетические спектры пульсаций скорости в горизонтальном (y) и вертикальном направлениях, где точками (1) показаны результаты расчета.

В спектре скорости, соответствующему горизонтальному y -направлению (рис. 7а) виден спектр Ламли–Шура n^{-3} , а вертикальному (рис. 7б) — степенной закон m^{-5} .

Стратификационные спектры Болджиано–Обухова $k^{-11/5}$ и Ламли–Шура k^{-3} в энергетическом спектре пульсаций скорости наблюдались в экспериментах при исследовании турбу-

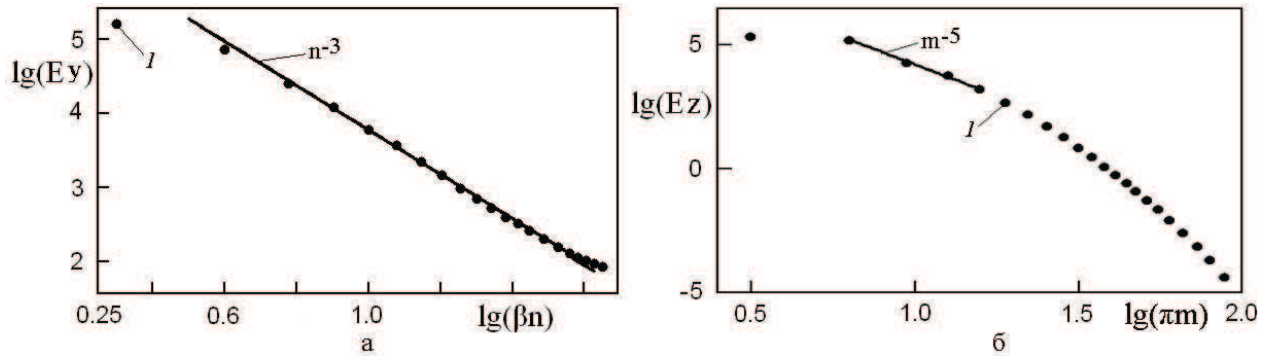


Рис. 7. Спектры пульсаций скорости:

а) горизонтальное y -направление, б) вертикальное направление.

лентной конвекции воды [35] и численных исследованиях [1, 3] соответственно. А спектр k^{-5} предсказан теоретически для жидкостей с высокими числами Pr [36].

Таким образом, сложный, непрерывный, с характерным для стохастических процессов заполнением длинноволновой части спектр, быстроспадающая автокорреляционная функция и наличие четко идентифицируемых пространственных спектров пульсаций температуры и скорости позволяют сделать вывод о турбулентном характере конвекции. Наблюдаемая анизотропия горизонтальных направлений является следствием относительно невысокого числа Рейнольдса ($Re = 44$) в этом моделировании.

Заключение

Рассмотрена задача о трехмерной конвекции жидкости в прямоугольном параллелепипеде со свободными от касательных напряжений изотермическими горизонтальными границами при подогреве снизу. Предложен спектрально-разностный численный метод расчета трехмерной конвекции, второго порядка аппроксимации по пространству и первого по времени.

На модельной линейной задаче показано, что использование аналитического решения линейной задачи в предлагаемом численном методе на первом этапе расщепления позволяет ослабить требования малости шагов по времени и пространству по сравнению с известными конечно-разностными и спектральными численными методами при проведении расчетов с высокой надкритичностью.

Проведенный линейный анализ предлагаемого численного метода показал, что в линейном приближении численный метод правильно (с хорошим количественным соответствием в длинноволновой части спектра и с качественным — в коротковолновой) передает спектральные характеристики дифференциальной задачи при реальных значениях шагов по времени, пространству и надкритичности.

Предлагаемым спектрально-разностным численным методом проведены расчеты трехмерной конвекции Рэля–Бенара при надкритичности $r = 950$, где $r = Ra/Ra_{cr}$ и $Pr = 10$. Непрерывный, с характерным для стохастических процессов заполнением длинноволновой части энергетический спектр зависимости числа Нуссельта от времени, быстроспадающая автокорреляционная функция и наличие четко идентифицируемых пространственных спектров пульсаций температуры и скорости позволяют сделать вывод о турбулентном характере конвекции. Наблюдаемая анизотропия горизонтальных направлений является следствием относительно невысокого числа Рейнольдса ($Re = 44$) в этом моделировании.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kerr R. M. Rayleigh number scaling in numerical convection // J. Fluid Mech. — 1996. — V. 310. — P. 139–179.
2. Hartlep T., Tilgner A., Busse F. H. Large scale structures in Rayleigh–Benard convection at high Rayleigh numbers // Phys. Rev. Lett. — 2003. — V. 91, № 6. — P. 064501-1-4.

3. Malevsky A. V. Spline-characteristic method for simulation of convective turbulence // *J. Comput. Phys.* — 1996. — V. 123, № 2. — P. 466–475.
4. Verzicco R., Camussi R. Numerical experiments on strongly turbulent thermal convection in a slender cylindrical cell // *J. Fluid Mech.* — 2003. — V. 477. — P. 19–49.
5. Shishkina O., Wagner C. Analysis of thermal dissipation rates in turbulent Rayleigh–Benard convection // *J. Fluid Mech.* — 2006. — V. 546. — P. 5–60.
6. Van Reeuwijk M., Jonker H. J. J., Hanjalic K. Identification of the wind in Rayleigh–Benard convection // *Phys. Fluids.* — 2005. — V. 17, № 4. — P. 051704-1-4.
7. Grotzbach G. Direct numerical simulation of laminar and turbulent Benard convection // *J. Fluid Mech.* — 1982. — V. 119. — P. 27–53.
8. Travis B., Olson P., Schubert G. The transition from two-dimensional to three-dimensional planforms in infinite-Prandtl-number thermal convection // *J. Fluid Mech.* — 1990. — V. 216. — P. 71–91.
9. Arter W. Nonlinear Rayleigh–Benard convection with square planform // *J. Fluid Mech.* — 1985. — V. 152. — P. 391–418.
10. Cortese T., Balachandar S. Vortical nature of thermal plumes in turbulent convection // *Phys. Fluids. A.* — 1993. — V. 5, № 12. — P. 3226–3232.
11. Curry J. H., Herring J. R., Loncaric J., Orszag S. A. Order and disorder in two–and three–dimensional Benard convection // *J. Fluid Mech.* — 1984. — V. 147. — P. 1–38.
12. Goldhirsch I., Pelz R. B., Orszag S. A. Numerical simulation of thermal convection in a two-dimensional finite box // *J. Fluid Mech.* — 1989. — V. 199. — P. 1–28.
13. Герценштейн С. Я., Родичев Е. Б., Шмидт В. М. Взаимодействие трехмерных волн во вращающемся горизонтальном слое жидкости, подогреваемом снизу // *Докл. АН СССР.* — 1978. — Т. 238, № 3. — С. 545–548.
14. Thual O. Zero-Prandtl-number convection // *J. Fluid Mech.* — 1992. — V. 240. — P. 229–258.
15. Гетлинг А. В. Конвекция Рэлея–Бенара. Структуры и динамика. — М.: Эдиториал УРСС, 1999. — 247 с.
16. Goldstein R. J., Graham D. J. Stability of a horizontal fluid with zero shear boundaries // *Phys. Fluids.* — 1969. — V. 12, № 6. — P. 1133–1137.
17. Палымский И. Б. Численное исследование спектров турбулентной конвекции Рэлея–Бенара // *Нелинейная динамика.* — 2008. — Т. 4, № 2. — С. 145–156.
18. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. — М.: Наука, 1972. — 392 с.
19. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике (2-е изд.). — М.: Наука, 1978. — 687 с.
20. Никитин Н. В., Полежаев В. И. Трехмерные эффекты переходных и турбулентных режимов тепловой гравитационной конвекции в методе Чохральского // *Известия РАН, серия МЖГ.* — 1999. — № 6. — С. 81–90.
21. Никитин Н. В. Спектрально-конечноразностный метод расчета турбулентных течений несжимаемых жидкостей в трубах и каналах // *ЖВМ и МФ.* — 1994. — Т. 34, № 6. — С. 909–925.
22. Палымский И. Б. Линейный и нелинейный анализ численного метода расчета конвективных течений // *Сиб. ж. вычисл. математики.* — 2004. — Т. 7, № 2. — С. 143–163.
23. Рождественский Б. Л., Стойнов М. И. Алгоритмы интегрирования уравнений Навье–Стокса, имеющие аналоги законам сохранения массы, импульса и энергии. Препринт / *ИПМ АН СССР им. М. В. Келдыша*, 1987, № 119. — 28 с.
24. Бабенко К. И., Рахманов А. И. Численное исследование двумерной конвекции. Препринт / *ИПМ АН СССР им. М. В. Келдыша*, 1988, № 118. — 26 с.
25. Палымский И. Б. Метод численного моделирования конвективных течений // *Вычисл. технологии.* — 2000. — Т. 5, № 6. — С. 53–61.
26. Палымский И. Б. Численное моделирование двумерной конвекции при высокой надкритичности // *Успехи механики.* — 2006. — № 4. — С. 3–28.
27. Палымский И. Б. Численное моделирование двумерной конвекции, роль граничных условий // *Известия РАН. МЖГ.* — 2007. — № 4. — С. 61–71.
28. Krishnamurti R., Howard L. Large-scale generation in turbulent convection // *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.* — 1981. — V. 78, № 4. — P. 1981–1985.
29. Пасконов В. М., Полежаев В. И., Чудов Л. А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. — М.: Наука, 1984. — 285 с.
30. Белоцерковский О. М., Опарин А. М. Численный эксперимент в турбулентности: От порядка к хаосу. Издание 2-е, доп. — М.: Наука, 2000. — 223 с.

31. Farhadieh R., Tankin R. S. Interferometric study of two-dimensional Benard convection cells // J. Fluid Mech. — 1974. — V. 66, Pt 4. — P. 739–752.
32. Заславский Г. М., Сагдеев Р. З. Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. — М.: Наука, 1988. — 378 с.
33. Niemela J. J., Skrbek L., Sreenivasan K. R., Donnelly R. J. Turbulent convection at very high Rayleigh numbers // Nature. — 2000. — V. 404, № 20. — P. 837–840.
34. Wu X.-Z., Kadanoff L., Libchaber A., Sano M. Frequency power spectrum of temperature fluctuations in free convection // Phys. Rev. Lett. — 1990. — V. 64, № 18. — P. 2140–2143.
35. Shang X.-D., Xia K.-Q. Scaling of the velocity power spectra in turbulent thermal convection // Phys. Rev. E. — 2001. — V. 64. — P. 065301-1-4.
36. Фрик П. Г. Турбулентность: подходы и модели. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований. — 2003. — 292 с.

Поступила в редакцию 22.10.2009

I. B. Palymskyi

About numerical simulation of three-dimensional convection

The problem of three-dimensional convection of the liquid in rectangular parallelepiped with stress-free isothermal horizontal boundaries, at heating from below is considered. The special spectral-finite difference method is offered with the second order approximation on space and the first on time. The linear analysis proposed numerical method has been shown that numerical method has the good quantitative correspondence in long-wave part of spectrum and qualitative — in short-wave. As test the calculations of two-dimensional roll and three-dimensional turbulent Rayleigh–Benard convection with supercriticality is equal to 2.2 and 950, accordingly are performed with Prandtl number is equal to 10.

Keywords: simulation, hydrodynamics, convection, heat transfer, turbulence, stochasticity.

Mathematical Subject Classifications: 76F35, 76F65, 76M20, 76M22

Игорь Борисович Палымский, профессор кафедры математики и информатики Современной Гуманитарной Академии, Новосибирский Филиал, 630064, Россия, г. Новосибирск, ул. Ватутина 71, e-mail: palymsky@hnet.ru. Modern University for Humanities, Novosibirsk Branch, 630064, Russia, Novosibirsk, Vatutina 71.