

УДК 517.917

© С. Г. Луценко

ДИНАМИКА КОЛЕСНОГО ЭКИПАЖА

В работе рассматривается задача о движении колесного экипажа на плоскости в случае, когда одна из колесных пар фиксирована, а также случай движения колесного экипажа на плоскости в случае двух свободных колесных пар.

Ключевые слова: неголономная связь, динамика системы, колесный экипаж.

Введение

Задачи, связанные с динамикой колесного экипажа, появились практически одновременно с изобретением автомобиля. Под колесным экипажем в этой статье понимается упрощенная модель автомобиля - две колесные пары соединенные мостом. В общем случае считается, что обе колесные пары могут вращаться в горизонтальной плоскости независимо от моста, также рассмотрен частный случай – одна из колесных пар закреплена перпендикулярно к мосту.

Одна из первых работ, где систематически рассмотрены задачи связанные с динамикой колесного экипажа принадлежит Рокару [3], в ней же Рокар сформулировал гипотезу бокового увода колеса. В работе [1] получено уравнение движения колесного экипажа и рассмотрены вопросы устойчивости системы при торможении. В работе [2] проинтегрирована и исследована задача о движении экипажа с одной фиксированной колесной парой, решена задача об условиях возникновения заноса и поведении системы при резком торможении. В работе [5] получены уравнения движения колесного экипажа в случае двух свободных колесных пар.

В настоящее время решено множество задач, так или иначе связанных с динамикой колесного экипажа, но все они рассматривают лишь поведение системы в некоторых частных случаях и не проводится исследование всех возможных траекторий движения колесного экипажа. Поэтому представляется интересным получить уравнения движения и, проведя их анализ, определить типичные траектории движения.

§ 1. Уравнения движения.

Для исследования была выбрана следующая модель колесного экипажа - две колесные пары, прикрепленные к разным концам моста, которые могут вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через точку крепления. Колесные пары симметричные и одинаковые, центр масс моста совпадает с его геометрическим центром. Система движется в горизонтальной плоскости. Колеса при качении по плоскости не проскальзывают. Схематично данная модель представлена на (Рис. 1).

- OA – радиус вектор центра масс экипажа.
- BC – мост, $|BC| = 2r$.
- DE , GF – колесные пары, $|DE| = |GF| = 2l$.
- D , E , G , F – места крепления колес к осям колесных пар.
- ψ – угол поворота моста относительно оси Ox неподвижной системы.
- θ_1 , θ_2 – углы поворота колесных пар относительно моста.
- h – радиус колеса.

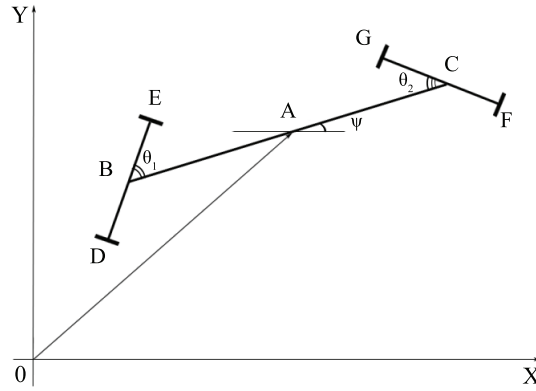


Рис. 1.

Для описания положения колесного экипажа в каждый момент времени был выбран следующий набор переменных $(x, y, \psi, \theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$.

Кинетическая энергия колесного экипажа в выбранных переменных имеет вид:

$$T = \frac{1}{2}M(\dot{x} + \dot{y}) + \frac{1}{2}I_1 \sum_{i=1}^4 \dot{\phi}_i + \frac{1}{2}I_2(\dot{\psi} + \dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2}I_2(\dot{\psi} + \dot{\theta}_2)^2 + \frac{1}{2}I_3\dot{\psi}^2, \quad (1.1)$$

где I_1, I_2, I_3 – приведенные моменты инерции различных частей экипажа, M – полная масса колесного экипажа.

Поскольку система движется по горизонтальной плоскости, то ее потенциальная энергия не меняется и может быть выбрана равной нулю. Тогда лагранжиан системы будет равен ее кинетической энергии.

Уравнениями связей для нашей системы являются условия не проскальзывания колес при качении по плоскости, то есть скорость точки контакта равна нулю.

$$\dot{\vec{r}}_i = 0, \text{ где } i = 1..4$$

Получаем четыре векторных или двенадцать скалярных уравнений, описывающих неголономную связь. Поскольку система движется в горизонтальной плоскости, то уравнение для Z компоненты скорости каждого колеса будет тривиальным – $V_z = 0$. Выпишем оставшиеся восемь уравнений в явном виде:

$$\begin{aligned} \dot{x} + r\dot{\psi} \cos(\psi) + l(\dot{\psi} + \dot{\theta}_1) \cos(\psi + \theta_1) + h\dot{\phi}_1 \cos(\psi + \theta_1) &= 0, \\ \dot{y} + r\dot{\psi} \sin(\psi) + l(\dot{\psi} + \dot{\theta}_1) \sin(\psi + \theta_1) + h\dot{\phi}_1 \sin(\psi + \theta_1) &= 0, \\ \dot{x} + r\dot{\psi} \cos(\psi) - l(\dot{\psi} + \dot{\theta}_1) \cos(\psi + \theta_1) + h\dot{\phi}_2 \cos(\psi + \theta_1) &= 0, \\ \dot{y} + r\dot{\psi} \sin(\psi) - l(\dot{\psi} + \dot{\theta}_1) \sin(\psi + \theta_1) + h\dot{\phi}_2 \sin(\psi + \theta_1) &= 0, \\ \dot{x} - r\dot{\psi} \cos(\psi) + l(\dot{\psi} + \dot{\theta}_2) \cos(\psi + \theta_2) + h\dot{\phi}_3 \cos(\psi + \theta_2) &= 0, \\ \dot{y} - r\dot{\psi} \sin(\psi) + l(\dot{\psi} + \dot{\theta}_2) \sin(\psi + \theta_2) + h\dot{\phi}_3 \sin(\psi + \theta_2) &= 0, \\ \dot{x} - r\dot{\psi} \cos(\psi) - l(\dot{\psi} + \dot{\theta}_2) \cos(\psi + \theta_2) + h\dot{\phi}_4 \cos(\psi + \theta_2) &= 0, \\ \dot{y} - r\dot{\psi} \sin(\psi) - l(\dot{\psi} + \dot{\theta}_2) \sin(\psi + \theta_2) + h\dot{\phi}_4 \sin(\psi + \theta_2) &= 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Из этих восьми уравнений только шесть являются линейно независимыми. Введя замену переменных

$$\dot{\beta}_1 = \frac{h}{2l}(\dot{\phi}_2 + \dot{\phi}_1), \quad \dot{\beta}_2 = \frac{h}{2l}(\dot{\phi}_4 + \dot{\phi}_3), \quad (1.3)$$

можно записать уравнения связей в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} + r\dot{\psi} \cos(\psi) + l\dot{\beta}_1 \cos(\psi + \theta_1) &= 0, \\
 \dot{y} + r\dot{\psi} \sin(\psi) + l\dot{\beta}_1 \sin(\psi + \theta_1) &= 0, \\
 \dot{x} - r\dot{\psi} \cos(\psi) + l\dot{\beta}_2 \cos(\psi + \theta_2) &= 0, \\
 \dot{y} - r\dot{\psi} \sin(\psi) + l\dot{\beta}_2 \sin(\psi + \theta_2) &= 0, \\
 (\dot{\psi} + \dot{\theta}_1) &= \frac{h}{2l}(\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1), \\
 (\dot{\psi} + \dot{\theta}_2) &= \frac{h}{2l}(\dot{\phi}_4 - \dot{\phi}_3),
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

так как две последних связи (1.4) являются интегрируемыми, то используя их и замену (1.3), можно исключить из лагранжиана переменные $(\dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2, \dot{\phi}_3, \dot{\phi}_4)$, получим:

$$L = \frac{1}{2}M(\dot{x} + \dot{y}) + \frac{1}{2}\tilde{I}_1(\dot{\beta}_1 + \dot{\beta}_2) + \frac{1}{2}\tilde{I}_2(\dot{\psi} + \dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2}\tilde{I}_2(\dot{\psi} + \dot{\theta}_2)^2 + \frac{1}{2}I_3\dot{\psi}^2, \tag{1.5}$$

где $\tilde{I}_1 = I_1 l^2 / h^2$, $\tilde{I}_2 = I_1 l^2 / h^2 + I_2$.

Поскольку мы уже воспользовались двумя последними уравнениями из системы (1.4), то их надо исключить из дальнейшего рассмотрения. В оставшихся четырех уравнениях связи выразим $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_1, \dot{\beta}_2)$ через $\dot{\psi}$, получим:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \frac{\cos(\psi + \theta_1) \sin(\theta_2) + \cos(\psi + \theta_2) \sin(\theta_1)}{\sin(\theta_1 - \theta_2)} r \dot{\psi}, \\
 \dot{y} &= \frac{\sin(\psi + \theta_1) \sin(\theta_2) + \sin(\psi + \theta_2) \sin(\theta_1)}{\sin(\theta_1 - \theta_2)} r \dot{\psi}, \\
 \dot{\beta}_1 &= \frac{2 \sin(\theta_2)}{l \sin(\theta_1 - \theta_2)} r \dot{\psi}, \\
 \dot{\beta}_2 &= \frac{2 \sin(\theta_1)}{l \sin(\theta_1 - \theta_2)} r \dot{\psi}.
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Для получения уравнений движения и первых интегралов системы воспользуемся методом неопределенных множителей Лагранжа.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_j \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial \dot{q}_i} \tag{1.7}$$

где \dot{q}_i – обобщенная скорость, λ_j – неопределенный множитель, f_j – уравнение связи. В нашем случае

$$\vec{q} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}_1, \dot{\beta}_2, \dot{\psi}, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2).$$

Воспользовавшись (1.7), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
 M\ddot{x} &= \lambda_1, \quad M\ddot{y} = \lambda_2, \quad \tilde{I}_2\ddot{\beta}_1 = \lambda_3, \quad \tilde{I}_2\ddot{\beta}_2 = \lambda_4, \\
 I_3\ddot{\psi} &= \lambda_1 C_x + \lambda_2 C_y + \lambda_3 B_1 + \lambda_4 B_2, \\
 \ddot{\psi} + \ddot{\theta}_1 &= 0, \quad \ddot{\psi} + \ddot{\theta}_2 = 0,
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

где C_x, C_y, B_1, B_2 – функции от $(\theta_1, \theta_2, \psi)$, стоящие перед $\dot{\psi}$ в уравнениях связи (1.6).

Из двух последних уравнений системы (1.8) следует, что угловые скорости вращения колесных пар в неподвижной системе отсчета сохраняются:

$$\begin{aligned}
 (\dot{\psi} + \dot{\theta}_1) &= \text{const} = \omega_1, \\
 (\dot{\psi} + \dot{\theta}_2) &= \text{const} = \omega_2.
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Продифференцировав уравнения связи (1.6) и разрешив получившиеся уравнения совместно с (1.8) относительно множителей λ , получим уравнение движения для ψ в следующем виде:

$$G\ddot{\psi} + \frac{1}{2}\dot{G}\dot{\psi} = 0, \quad (1.10)$$

где

$$G = \frac{\sin^2(\theta_1) + \sin^2(\theta_2) + A \sin^2(\theta_1 - \theta_2)}{\sin^2(\theta_1 - \theta_2)}, \quad A = \left(\frac{I_3/r^2 - M}{M + 4I_1/h^2} \right). \quad (1.11)$$

Уравнение (1.10) допускает первый интеграл движения

$$E = G\dot{\psi}^2, \quad (1.12)$$

который с точностью до константы совпадает с кинетической энергией экипажа:

$$T = E + \frac{1}{2}\tilde{I}_2(\omega_1^2 + \omega_2^2). \quad (1.13)$$

Итак приведенная система уравнений и интегралов движения имеет вид

$$\ddot{\psi} = \frac{1}{2}\frac{\dot{G}}{G}\dot{\psi}, \quad \ddot{\theta}_1 = \ddot{\psi}, \quad \ddot{\theta}_2 = \ddot{\psi}. \quad (1.14)$$

$$E = \frac{\sin^2(\theta_1) + \sin^2(\theta_2) + A \sin^2(\theta_1 - \theta_2)}{\sin^2(\theta_1 - \theta_2)} \dot{\psi}^2, \quad (1.15)$$

$$\dot{\psi} + \dot{\theta}_1 = \omega_1, \quad \dot{\psi} + \dot{\theta}_2 = \omega_2.$$

Для вычисления остальных переменных системы можно воспользоваться условиями связи и квадратурами.

§ 2. Колесный экипаж с одной зафиксированной колесной парой.

В этом случае $\theta_2 = \pi/2$, $\dot{\theta}_2 = 0$ и уравнения движения колесного экипажа сводятся к одному уравнению второго порядка

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{\sin(\theta_1)\dot{\theta}_1(\omega_1 - \dot{\theta}_1)}{\cos(\theta_1)(1 + A \cos^2(\theta_1))}, \quad (2.1)$$

а интеграл энергии примет вид

$$E = \frac{1 + \tilde{A} \cos^2(\theta_1)}{\cos(\theta_1)^2} (\omega_1 - \dot{\theta}_1)^2, \quad \tilde{A} = 1 + A. \quad (2.2)$$

Выразив $\dot{\theta}_1$ из (2.2), получим уравнение линий уровня энергии, являющихся фазовыми траекториями системы

$$\dot{\theta}_1 = \omega_1 \pm \cos(\theta_1) \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{1 + \tilde{A} \cos^2(\theta_1)}}, \quad (2.3)$$

где знак определяется исходя из начальных условий.

Фазовый портрет системы в координатах $(\theta_1, \dot{\theta}_1)$ представлен на рис. 2а.

Пересечение фазовых траекторий на рис. 2а связано с неоднозначностью интеграла энергии. Для устранения данной неоднозначности перейдем к переменным $(\theta_1, V_{\parallel})$, где

$$V_{\parallel} = \frac{\omega_1 - \dot{\theta}_1}{\cos(\theta_1)}, \quad (2.4)$$

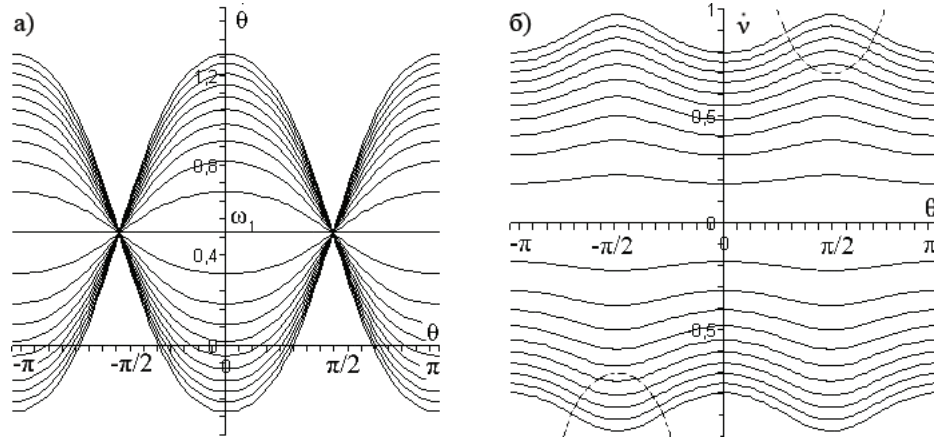


Рис. 2. а) Фазовый портрет системы в координатах $\theta_1, \dot{\theta}_1$ б) Фазовый портрет системы в координатах θ_1, V_{\parallel}

и имеет смысл проекции скорости экипажа на прямую параллельную мосту. Фазовый портрет системы в координатах $(\theta_1, V_{\parallel})$ представлен на рис. 2б.

Из рис. 2а следует, что существует всего три различных типа фазовых траекторий:

1. Прямая $\dot{\theta} = \omega_1$. В этом случае:

$$\theta_1 = \omega_1 t, \quad \dot{\psi} = 0 \Rightarrow \psi = const, \quad E = 0 \Rightarrow T = \frac{1}{2} \tilde{I}_2 \omega_1^2. \quad (2.5)$$

Таким образом центр масс системы может двигаться только по прямой, проходящей через ось моста, либо же покоиться.

2. Фазовые траектории не пересекающие ось $O\theta$. В этом случае фазовая траектория является периодической, а центр масс системы движется по сложной траектории постепенно заметая кольцо на плоскости. Результаты численного расчета приведены на рис. 3.
3. Фазовые траектории пересекающие ось $O\theta$. В этом случае на фазовой траектории (в точке ее пересечения с осью абсцисс) лежат две неподвижные точки. Одна из них будет притягивающей, другая – отталкивающей, а движение приведенной системы имеет асимптотический характер. Притягивающей неподвижной точке в абсолютном пространстве соответствует движение колесного экипажа, при котором центр масс системы описывает окружность на плоскости. Пример такой траектории приведен на рис. 4. Образ прямой $\dot{\theta}_1 = 0$ на плоскости $(\theta_1, V_{\parallel})$ изображен на рис. 2б пунктирной линией. Соответственно все неподвижные точки в этих переменных лежат на пересечении фазовых траекторий и этих кривых.

§ 3. Колесный экипаж со свободными колесными парами.

Исключив из уравнения (1.14) ψ с помощью интегралов ω_1 и ω_2 , выпишем уравнения движения колесного экипажа в переменных θ_1, θ_2 .

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_1 &= \frac{\sin(\theta_1) \cos(\theta_1) \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 + \sin(\theta_2) \cos(\theta_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2 - \cos(\theta_1 - \theta_2) (\sin^2(\theta_1) - \sin^2(\theta_2)) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)}{\sin(\theta_1 - \theta_2) (\sin^2(\theta_1) + \sin^2(\theta_2) + A \sin^2(\theta_1 - \theta_2))} \left(\Omega - \frac{\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2}{2} \right), \\ \ddot{\theta}_2 &= \ddot{\theta}_1. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Интегралы системы при этом примут вид:

$$\begin{aligned} E &= \frac{\sin^2(\theta_1) + \sin^2(\theta_2) + A \sin^2(\theta_1 - \theta_2)}{\sin^2(\theta_1 - \theta_2)} \left(\Omega - \frac{\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2}{2} \right)^2, \\ (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) &= \omega, \end{aligned} \quad (3.2)$$

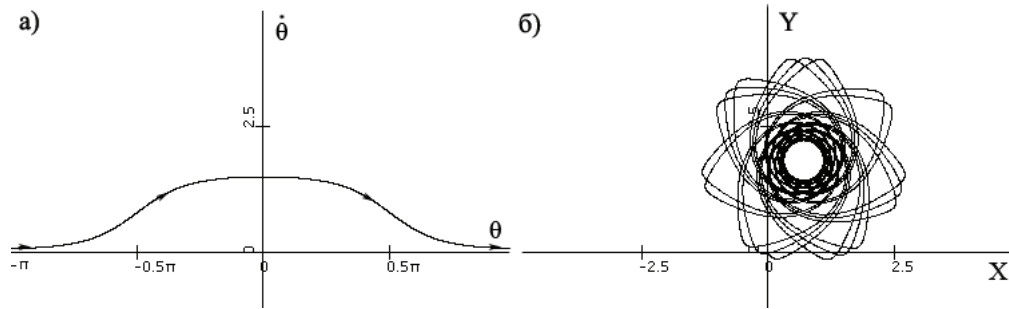


Рис. 3. а) фазовая траектория в переменных $(\theta_1, \dot{\theta}_1)$ б) траектория движения центра масс колесного экипажа. При $E = 1$, $A = 2$, $\omega_1 = 0.8$.

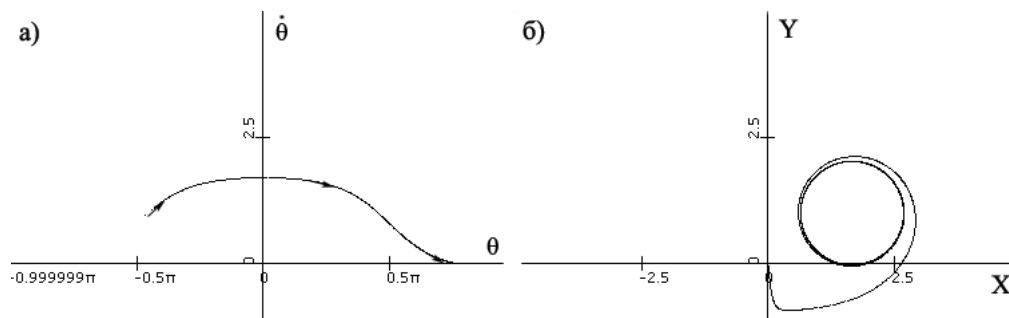


Рис. 4. а) фазовая траектория в переменных $(\theta_1, \dot{\theta}_1)$ б) траектория движения центра масс колесного экипажа. При $E = 2.3$, $A = 2$, $\omega_1 = 0.8$.

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}, \\ \Omega &= \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Сделаем замену переменных

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}, \\ \gamma_2 &= \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

В новых переменных уравнения и интегралы движения примут вид

$$\begin{aligned} \ddot{\gamma}_1 &= \left[\frac{\sin(\gamma_1 + \gamma_2) \cos(\gamma_1 + \gamma_2) \sin(2\gamma_2) (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2) + \sin(\gamma_1 - \gamma_2) \cos(\gamma_1 - \gamma_2) \sin(2\gamma_2) (\dot{\gamma}_1 - \dot{\gamma}_2)}{\sin(2\gamma_2) (\sin^2(\gamma_1 + \gamma_2) + \sin^2(\gamma_1 - \gamma_2) + A \sin^2(2\gamma_2))} - \right. \\ &\quad \left. \frac{\cos(2\gamma_2) (\sin^2(\gamma_1 + \gamma_2) - \sin^2(\gamma_1 - \gamma_2)) \dot{\gamma}_1}{\sin(2\gamma_2) (\sin^2(\gamma_1 + \gamma_2) + \sin^2(\gamma_1 - \gamma_2) + A \sin^2(2\gamma_2))} \right] (\Omega - \dot{\gamma}_1), \\ \ddot{\gamma}_2 &= 0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} E &= \frac{\sin^2(\gamma_1 + \gamma_2) + \sin^2(\gamma_1 - \gamma_2) + A \sin^2(2\gamma_2)}{\sin^2(2\gamma_2)} (\Omega - \dot{\gamma}_1)^2, \\ \dot{\gamma}_2 &= \omega. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Выразив $\dot{\gamma}_1$ из интеграла энергии, получим уравнение поверхности, на которой лежат все траектории системы с одинаковыми энергиями. На рис. 5а представлена изоэнергетическая поверхность в переменных $(\gamma_1, \gamma_2, \dot{\gamma}_1)$.

Также как и в предыдущем случае, данная поверхность является неоднозначной в точках $\theta_1 = \pi n, \theta_2 = \pi k, n, k \in Z$. Для исключения этой неоднозначности снова воспользуемся переходом к V_{\parallel} . В этом случае выражение для V_{\parallel} примет вид:

$$V_{\parallel} = \frac{(\Omega - \dot{\gamma}_1)}{\sin(2\gamma_2)}. \tag{3.7}$$

Изоэнергетическая поверхность в переменных $(\gamma_1, \gamma_2, V_{\parallel})$ представлена на рис. 5б.

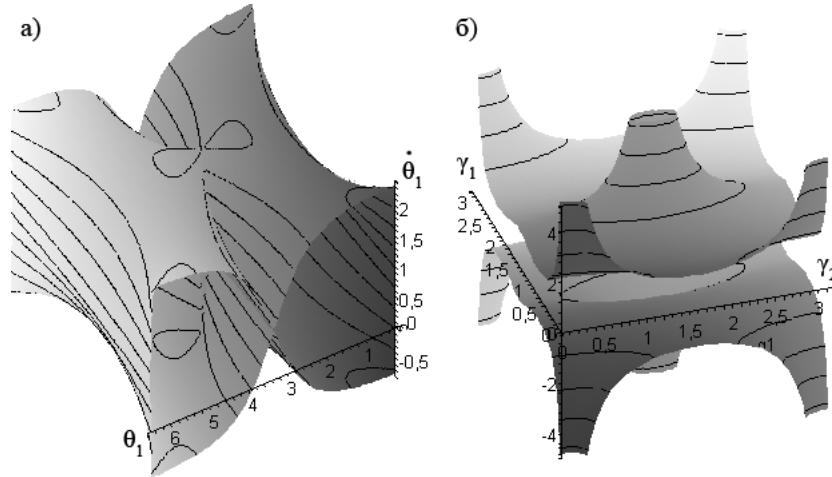


Рис. 5. Изоэнергетическая поверхность в переменных: а) $(\theta_1, \dot{\theta}_1)$, б) $(\theta_1, V_{\parallel})$. При $E = 1, A = 2, \Omega = 0.8$.

На рис. 6 представлен фазовый портрет системы (3.5) при фиксированном значении интеграла энергии. Отметим, что на фазовом портрете отсутствуют неподвижные точки. Это связано с тем, что в общем случае $\dot{\gamma}_2 = \omega \neq 0$, при этом фазовые траектории постепенно заметают всю фазовую плоскость.

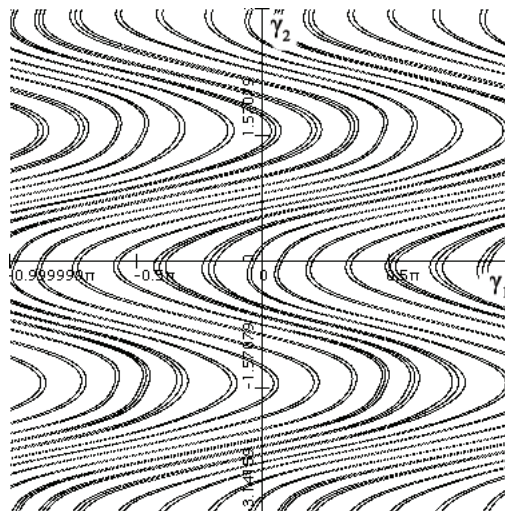


Рис. 6. Фазовая траектория в переменных (γ_1, γ_2) . При $E = 2.3, A = 2, \omega_1 = 0.8, \omega_2 = 0.3$.

На рис. 7 представлен результат численного расчета траектории движения центра масс колесного экипажа со свободными колесными парами, для двух различных начальных условий.

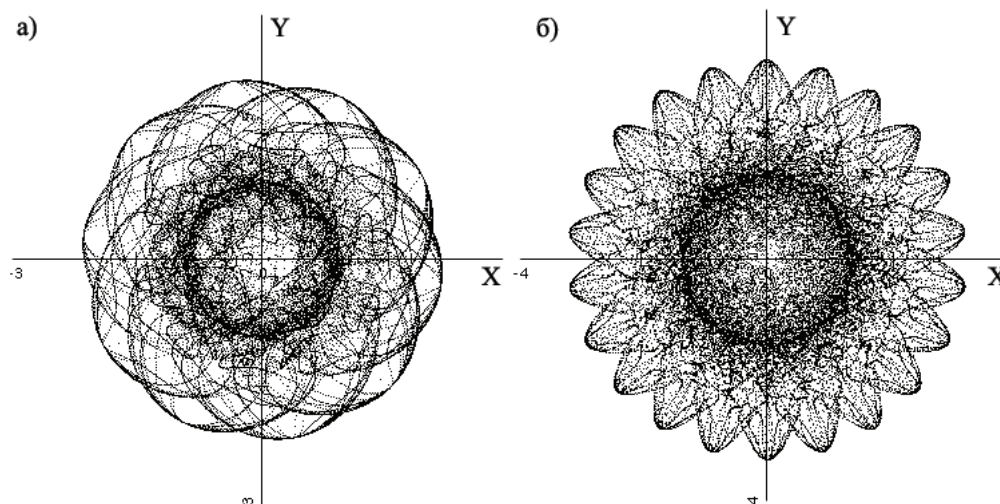


Рис. 7. Траектории движения центра масс колесного экипажа а) $E = 1$, $A = 2$, $\omega_1 = 0.8$, $\omega_2 = 0.3$.
 б) $E = 1$, $A = 2$, $\omega_1 = 0.8$, $\omega_2 = -0.3$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мартынюк А. А., Лобас Л. Г. Никитина Н. В. Динамика и устойчивость движения колесных транспортных машин. — Киев.: Техника, 1981. — 223 с.
2. Лобас Л. Г. Неголономные модели колесных экипажей. — Киев.: Научная мысль, 1986. — 230 с.
3. Рокар И. Неустойчивость в механике. — М.:Издательство иностранной литературы, 1959. — 285 с.
4. Маркеев А. П. Теоретическая механика. — Москва-Ижевск.: Регулярная и хаотическая динамика, 2007. — 591 с.
5. Розенблат Г. М. К динамике неголономных моделей колесных экипажей // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные Науки. — 2008. — Вып. 3. — С. 99–108.

Поступила в редакцию 28.11.09

S. G. Lutsenko

Dynamics of a wheeled carriage

The paper deals with the problem of motion of a wheeled carriage on a plane in case one of the wheeled couples is fixed. It also considers the case of motion of a wheeled carriage on a plane in the case of two free wheeled couples.

Keywords: nonholonomic constraint, dynamics of the system, wheeled carriage.

Mathematical Subject Classifications: 34A30, 34D08

Луценко Степан Григорьевич, инженер, лаборатория «Высоких технологий», Удмуртский государственный университет, 426000, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4), E-mail: lustgr@yandex.ru