УДК 517.917

© *А. Н. Куликов, Д. А. Куликов*

ПОСЛЕКРИТИЧЕСКИЕ И ДОКРИТИЧЕСКИЕ БИФУРКАЦИИ БЕГУЩИХ ВОЛН МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ ГИНЗБУРГА–ЛАНДАУ [1]

Для обобщенного уравнения Гинзбурга–Ландау, содержащего как кубическую нелинейность, так и нелинейность более высокой степени, рассмотрена периодическая краевая задача. Показано, что для такого обобщения уравнения Гинзбурга–Ландау может быть реализован вариант докритической жесткой бифуркации двумерных инвариантных торов бегущих волн.

Ключевые слова: устойчивость, жесткая и мягкая бифуркации, инвариантные торы.

Введение

В работе будет рассмотрено уравнение

$$u_t = u - \alpha_1(1 + ic_1)u|u|^2 - \alpha_2(1 + ic_2)u|u|^4 - ibu_{xx}, \tag{1}$$

где $b > 0$, $\alpha_1, \alpha_2, c_1, c_2 \in R$, $\alpha_2 \geq 0$, $u = u(t, x) = u_1(t, x) + iu_2(t, x)$. Уравнение (1) будем рассматривать вместе с периодическими краевыми условиями

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x). \tag{2}$$

При $\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 = 1$ получаем слабодиссипативный вариант известного уравнения Гинзбурга–Ландау. Он возникает во многих задачах нелинейной оптики и гидродинамике [1,2]. Рассматривался и другой частный случай, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, как пример уравнения, у которого возможно появление решений с «обострением» [3]. Такие решения часто ассоциируют с «жесткой турбулентностью» [1, 3, 4].

Более общий вариант (уравнение (1)) все чаще стал появляться в литературе (см., например, [4]), а также приведенную в этой статье обширную библиографию), который призван, быть может, на феноменологическом уровне моделировать нелинейные эффекты в ряде задач гидродинамики. В монографии [3] вопросы, связанные с возникновением «режимов с обострением», рассматривались на основании численного анализа. В данной работе эти вопросы изучены аналитически.

Итак, рассмотрим краевую задачу (1), (2). Она должна быть дополнена начальными условиями

$$u(0, x) = f(x). \tag{3}$$

Смешанная задача (1), (2), (3) локально корректно разрешима, если $f(x) \in H_2^2$, пространству Соболева периодических функций с периодом 2π, у которых существуют обобщенные производные до второго порядка включительно принадлежат $L_2(-\pi, \pi)$. Уместно, быть может, напомнить, что в силу теорем вложения $f(x) \in C^1$ — пространству непрерывно дифференцируемых функций, имеющих период 2π. Фазовым пространством решений (1), (2), (3) целесообразно выбрать H_2^2, и устойчивость решений далее будем понимать в смысле нормы этого пространства: если $f(x) \in H_2^2$, то

$$||f||_{H_2^2} = ||f||_{L_2(-\pi,\pi)} + ||f'||_{L_2(-\pi,\pi)} + ||f''||_{L_2(-\pi,\pi)}.$$

[1]Работа выполнена в рамках тематики, поддержанной государственным контрактом № 02.552.11.7068.

Все эти замечания вытекают из результатов, изложенных в [5,6], так как данное уравнение входит в классы рассматриваемых там эволюционных уравнений (см., например, приложения Б, В из [6]).

Краевая задача (1), (2) допускает решения в виде бегущих волн

$$u_n(t,\,x)=\eta_*\exp(i\sigma_n+inx), \tag{4}$$

где η_* — ненулевой корень уравнения $P_0(\eta)=\eta-\alpha_1\eta^3-\alpha_2\eta^5=0$ или, иначе,

$$P(\eta)=1-\alpha_1\eta^2-\alpha_2\eta^4=0. \tag{5}$$

Без нарушения общности можно считать, что $\eta_*>0$. Наконец,

$$\sigma_n=-\alpha_1c_1\eta_*^2-\alpha_2c_2\eta_*^4+bn^2.$$

Ниже будут изучены локальные бифуркации решений (4) при смене ими устойчивости. Ранее эта задача была рассмотрена для частных случаев: $\alpha_1=1$, $\alpha_2=0$ или $\alpha_1=0$, $\alpha_2=1$ [7], [8]. В этих работах было показано, что для таких вариантов у уравнения имеет место лишь послекритические бифуркации. Иначе говоря, имеет место «мягкая» бифуркация двумерных инвариантных торов.

§ 1. Устойчивость бегущих волн

Исследование этого вопроса облегчает принцип самоподобия [7, 9], суть которого заключается в следующем. Положим

$$u(t,\,x)=\exp(ibn^2t+inx)v(t,\,x+2bnt), \tag{1.1}$$

которая переводит уравнение (1) снова в то же уравнение, но уже для функции $v(t,\,x)$:

$$v_t=v-\alpha_1(1+ic_1)v|v|^2-\alpha_2(1+ic_2)v|v|^4-ibv_{xx}, \tag{1.2}$$

где $v=v(t,\,x)$ также удовлетворяет периодическим краевым условиям

$$v(t,\,x+2\pi)=v(t,\,x). \tag{1.3}$$

Пространственно однородному периодическому решению краевой задачи (1.2), (1.3) $v(t,\,x)=$ $=v_0(t)=\eta_*\exp(i\sigma_0t)$, $\sigma_0=-\alpha_1c_1\eta_*^2-\alpha_2c_2\eta_*^4$ соответствуют решения $u_n(t,\,x)$ задачи (1), (2). Это соответствие осуществляет замена (1.1). Поэтому для задачи (1.2), (1.3) достаточно рассмотреть вопрос об устойчивости решения $v_0(t)$.

Для этого положим в (1.2), (1.3)

$$v(t,\,x)=\eta_*(1+w)\exp(i\sigma_0t).$$

Для функции $w(t,\,x)$ получим уже следующую краевую задачу

$$\begin{gathered} w_t=-\alpha_1(1+ic_1)\eta_*^2(w+\overline{w}+F_1(w,\,\overline{w}))-\\ -\alpha_2(1+ic_2)\eta_*^4(2(w+\overline{w})+F_2(w,\,\overline{w}))-ibw_{xx}, \end{gathered} \tag{1.4}$$

$$w(t,\,x+2\pi)=w(t,x). \tag{1.5}$$

Здесь

$$F_1(w,\,\overline{w})=2w\overline{w}+w^2+w^2\overline{w},$$

$$F_2(w,\,\overline{w})=\overline{w}^2+6w\overline{w}+3w^2+3w\overline{w}^2+6w^2\overline{w}+w^3+2w^3\overline{w}+3w^2\overline{w}^2+w^3\overline{w}^2.$$

Наряду с (1.4), (1.5) рассмотрим линеаризованную краевую задачу

$$w_t=A(b)w=[-\alpha_1(1+ic_1)\eta_*^2-2\alpha_2\eta_*^4(1+ic_2)](w+\overline{w})-ibw_{xx}, \tag{1.6}$$

где $w(t, x)$ удовлетворяет условиям периодичности (1.5). Для исследования устойчивости нулевого решения задачи (1.6), (1.5), а в первом приближении и нулевого решения нелинейной краевой задачи (1.4), (1.5) достаточно исследовать спектр линейного дифференциального оператора $A(b)$. Пусть $f(x)$ — комплекснозначная функция. Положим $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$. Тогда последнюю краевую задачу можно переписать в векторной форме:

$$A(b)F = \lambda F, \quad F(x) = col(f_1(x), f_2(x)), \quad A(b)F = \begin{pmatrix} (-2\alpha_1\eta_*^2 - 4\alpha_2\eta_*^4)f_1 + bf_2'' \\ -bf_1'' - (2\alpha_1 c_1\eta_*^2 + 4\alpha_2 c_2\eta_*^4)f_1 \end{pmatrix}.$$

Собственные функции линейного дифференциального оператора $A(b)$ можно и удобно искать в следующем виде

$$F(x) = a\exp(inx), \quad a = col(a_1, a_2), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

После элементарных преобразований задачи об определении собственных значений λ задача сводится к исследованию счетного семейства характеристических уравнений

$$\det\begin{pmatrix} -2\alpha_1\eta_*^2 - 4\alpha_2\eta_*^2 - \lambda & -bn^2 \\ bn^2 - 2\alpha_1 c_1\eta_*^2 - 4\alpha_2 c_2\eta_*^4 & -\lambda \end{pmatrix} = 0.$$

В иной форме

$$\lambda^2 + 2p\lambda + q_n = 0,$$

где $p = \alpha_1\eta_*^2 + 2\alpha_2\eta_*^4 > 0$, $q_n = bn^2(bn^2 - 2\alpha_1 c_1\eta_*^2 - 4\alpha_2 c_2\eta_*^4)$. Положим $b_* = 2\alpha_1 c_1\eta_*^2 + 4\alpha_2 c_2\eta_*^4$.

Лемма 1. *Пусть* $b_* > 0$. *Тогда нулевое решение задачи* (1.4), (1.5) *устойчиво, если* $b \in (b_*, \infty)$, *и неустойчиво при* $b \in (0, b_*)$.

Если оказалось, что $b_* \leqslant 0$, *то нулевое решение устойчиво при любом выборе параметров задачи.*

Проверка условий устойчивости сводится к проверке неравенств

$$p > 0, \qquad q_n > 0.$$

Первое из них очевидно выполнено всегда, а второе при $n \neq 0$ сводится к условиям леммы 1. При $n = 0$ имеем $q_0 = 0$. Линейный оператор $A(b)$ всегда имеет нулевое собственное число. Этот факт является следствием наличия у основной краевой задачи однородного периодического решения $v_0(t) = \eta_* \exp(i\sigma_0 t)$. Поэтому лемма 1 является аналогом известной теоремы Андронова–Витта [10].

При $b = b_* > 0$ собственное значение $\lambda = 0$ оператора

$$Af = A(b_*)f = -(\alpha_1(1 + ic_1)\eta_*^2 + 2\alpha_2(1 + ic_2)\eta_*^4)(f + \overline{f}) - ib_* f'', \tag{1.7}$$

где $f = f(x) = f_1(x) + if_2(x)$, трехкратно, и этому собственному значению соответствуют три собственные функции:

$$e_0(x) = i, \quad e_1(x) = (-\kappa + i)\cos x, \quad e_2(x) = (-\kappa + i)\sin x,$$

а $\kappa = \dfrac{\alpha_1 c_1 + 2\alpha_2 c_2\eta_*^2}{\alpha_1 + 2\alpha_2\eta_*^2} > 0$, так как знак этой действительной постоянной совпадает со знаком b_*.

Рассмотрим теперь тот же оператор (1.7), но с иной областью определения: $f(x) \in D_A$, если достаточно гладкая функция удовлетворяет краевым условиям

$$f'(0) = f'(\pi) = 0, \qquad x \in [0, \pi]. \tag{1.8}$$

Оператор (1.7), (1.8) также имеет нулевое собственное значение $\lambda = 0$, но оно уже двукратно, а соответствующие собственные функции — $e_0(x) = i$, $e_1(x) = (-\kappa + i)\cos x$.

Рассмотрим неоднородное уравнение

$$Af(x) = g(x), \tag{1.9}$$

где функция $f(x) \in W_2^2[0, \pi]$ и удовлетворяет краевым условиям (1.8), а $g(x) \in L_2(0, \pi)$. Стандартным образом проверяется справедливость следующего утверждения.

Лемма 2. *Необходимым и достаточным условием существования решения у уравнения* (1.9) *является выполнение равенств*

$$Img_0 = \kappa Reg_0, \qquad Img_1 = 0, \tag{1.10}$$

где g_0, g_1 *— коэффициенты Фурье функции* $g(x)$ *:*

$$g_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi g(x)dx, \qquad g_1 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi g(x)\cos x dx.$$

Для доказательства леммы следует функции $f(x), g(x)$ представить в виде соответствующих рядов Фурье

$$f(x) = \frac{f_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos nx, \quad g(x) = \frac{g_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} g_n \cos nx, \quad f_n, g_n \in C.$$

Их подстановка в (1.9) с последующим приравниванием коэффициентов Фурье и позволяют проверить справедливость леммы 2. Так при $n = 0$ получаем равенство

$$-(\alpha_1(1+ic_1)\eta_*^2 + 2\alpha_2(1+ic_2)\eta_*^4)(f_0 + \overline{f}_0) = g_0,$$

а при $n = 1$ имеем

$$-(\alpha_1(1+ic_1)\eta_*^2 + 2\alpha_2(1+ic_2)\eta_*^4)(f_1 + \overline{f}_1) + ib_* f_1'' = g_1.$$

§ 2. Вспомогательная бифуркационная задача

Рассмотрим краевую задачу

$$v_t = v - \alpha_1(1+ic_1)v|v|^2 - \alpha_2(1+ic_2)v|v|^4 - i(b_* - \varepsilon)v_{xx}, \tag{2.1}$$

$$v_x(t, 0) = v_x(t, \pi) = 0, \qquad x \in [0, \pi]. \tag{2.2}$$

Условия периодичности заменены на однородные условия Неймана. Краевая задача (2.1), (2.2) также имеет решение $v_0(t) = \eta_* \exp(i\sigma_0 t)$ — однородный цикл, который устойчив при $\varepsilon < 0$ и теряет устойчивость при $\varepsilon > 0$.

Из результатов §1, где была рассмотрена линеаризация в окрестности решения $v_0(t)$, а также теоремы о центральном инвариантном многообразии [11] вытекает, что динамику решений краевой задачи в окрестности решения $v_0(t)$ определяет система из двух обыкновенных дифференциальных уравнений — нормальная форма. Для ее построения положим в (2.1), (2.2)

$$v(t, x) = \eta_* \exp(i\sigma_0 t + i\varphi(t))(1 + w(\xi, x)). \tag{2.3}$$

Здесь $\varphi = \varphi(t)$, $\xi = \xi(t)$ — действительные функции, определяемые системой дифференциальных уравнений

$$\dot{\varphi} = G_0(\xi, \varphi), \qquad \dot{\xi} = G_1(\xi, \varphi), \tag{2.4}$$

где G_0, G_1 — достаточно гладкие функции $\xi \in (-\xi_0, \xi_0)$ и $\varphi \in R$, имеющие по переменной φ период 2π. Изложим алгоритм для построения G_0, G_1. Аналогичный алгоритм был использован, например, в [7]. Положим

$$G_0 = \beta\xi^2 + \ldots, \qquad G_1 = \varepsilon\alpha\xi + a\xi^3 + \ldots,$$

где точками обозначены слагаемые, имеющие более высокий порядок малости по сравнению с выписанными в явном виде.

Для определения коэффициентов системы (2.4) выпишем уравнение для $w(t, x) \equiv w(\xi(t), x)$:

$$w_t + i\dot{\varphi}(1 + w) = Aw + i\varepsilon w_{xx} - \alpha_1(1 + ic_1)F_1(w, \overline{w}) - \alpha_2(1 + ic_2)F_2(w, \overline{w}), \tag{2.5}$$

$$w_x(t, 0) = w_x(t, \pi) = 0, \tag{2.6}$$

где F_1, F_2 были введены ранее. Положим

$$w(t, x) = w(\xi(t), x) = \xi w_1(x) + \xi^2 w_2(x) + \xi^3 w_3(x) + \varepsilon\xi w_0(x) + \ldots. \tag{2.7}$$

Здесь $\xi(t)$ определяется из (2.4), функции $w_j(x)$ удовлетворяют краевым условиям (2.6), а точками обозначены слагаемые, имеющие более высокий порядок малости.

Подстановка суммы (2.7) в (2.5), (2.6) приводит нас к серии краевых задач для определения w_0, w_1, w_2, w_3. Так для определения w_1 получаем однородную краевую задачу

$$Aw_1 = 0, \qquad w_1'(0) = w_1'(\pi) = 0,$$

у которой следует выбрать решение $w_1(x) = (-\kappa + i)\cos x$. Для остальных функций получим уже неоднородные краевые задачи:

$$Aw_2 = i\beta + \alpha_1(1 + ic_1)\eta_*^2(2w_1\overline{w}_1 + w_1^2) + \alpha_2(1 + ic_2)\eta_*^4(\overline{w}_1^2 + 6w_1\overline{w}_1 + 3w_1^2), \tag{2.8}$$

$$w_2'(0) = w_2'(\pi) = 0, \tag{2.9}$$

$$\begin{gathered} Aw_3 = (a + i\beta)(-\kappa + i)\cos x + \alpha_1(1 + ic_1)\eta_*^2(w_1^2 w_1 + 2w_1\overline{w}_2 + \\ +2\overline{w}_1 w_2 + 2w_1 w_2) + \alpha_2(1 + ic_2)\eta_*^4(3w_1\overline{w}_1^2 + 6w_1^2\overline{w}_1 + \\ +2\overline{w}_1\overline{w}_2 + 6\overline{w}_1 w_2 + 6w_1\overline{w}_2 + 6w_1 w_2 + w_1^3), \end{gathered} \tag{2.10}$$

$$w_3'(0) = w_3'(0) = 0, \tag{2.11}$$

$$Aw_0 = -iw_1'' + \alpha w_1, \ w_0'(0) = w_0'(\pi) = 0. \tag{2.12}$$

Анализ неоднородной краевой задачи (2.8), (2.9), включающий использование условий ее разрешимости (см. лемму 2), показал, что

$$\beta = \frac{1}{2}[\alpha_1\eta_*^2(1 + \kappa^2)(3\kappa - c_1) + 2\alpha_2\eta_*^4((1 + 5\kappa^2)(\kappa - c_2) + 2\kappa(1 + \kappa c_2))],$$

$$w_2(x) = \gamma_1 + i\gamma_2 + (\gamma_3 + i\gamma_4)\cos 2x, \quad \gamma_1 = -\frac{H_1}{2p}, \quad \gamma_2 = \kappa\gamma_1,$$
$$\gamma_3 = \frac{H_2}{3b_*}, \quad \gamma_4 = -\left(\frac{H_2 p}{6b_*^2} + \frac{H_1}{4b_*}\right),$$
$$H_1 = \frac{\eta_*^2}{2}[\alpha_1(3\kappa^2 + 1 + 2\kappa c_1) + 2\alpha_2\eta_*^2(5\kappa^2 + 2c_2\kappa + 1)],$$
$$H_2 = \frac{\eta_*^2}{2}[\alpha_1(3c_1\kappa^2 + c_1 - 2\kappa) + 2\alpha_2\eta_*^2(5c_2\kappa^2 - 2\kappa + c_2)].$$

Условия разрешимости задач (2.10), (2.11) и (2.12) позволяют найти оставшиеся коэффициенты. Оказалось, что $\alpha = \kappa$, а

$$a = \kappa\beta + \frac{3}{4}\alpha_1\eta_*^2(\kappa c_1 - 1)(\kappa^2+1) + \alpha_1\eta_*^2[(2\gamma_2+\gamma_4)\kappa -$$
$$-(2\gamma_1+\gamma_3) + 3(2\gamma_1+\gamma_3)\kappa c_1 - (2\gamma_2+\gamma_4)c_1] +$$
$$+\frac{3}{2}\alpha_2\eta_*^4[(5\kappa^2+3)c_2\kappa - (3\kappa^2+1)] +$$
$$+2\alpha_2\eta_*^4[(2\gamma_1+\gamma_3)(5c_2\kappa - 1) + (2\gamma_2+\gamma_4)(\kappa - c_2)].$$

В системе (2.4) положим также $\tau = 2|\varepsilon|\kappa t$, $\xi = \sqrt{|\varepsilon|\kappa\rho}$, считая при этом $\xi \geq 0$, $\rho \geq 0$. В результате получим систему

$$\varphi' = \frac{1}{2}\beta\rho + o(\varepsilon), \qquad \rho' = \rho + a\rho^2 + o(\varepsilon) \tag{2.13}$$

при $\varepsilon > 0$ и

$$\varphi' = \frac{1}{2}\beta\rho + o(\varepsilon), \qquad \rho' = -\rho + a\rho^2 + o(\varepsilon) \tag{2.14}$$

при $\varepsilon < 0$. Здесь уже $\varphi = \varphi(\tau)$, $\rho = \rho(\tau)$, а штрихом обозначена производная по τ. Для изложения результатов целесообразно рассмотреть «укороченную» нормальную форму

$$\rho' = \rho + a\rho^2 \qquad (\varepsilon > 0) \tag{2.15}$$

или

$$\rho' = -\rho + a\rho^2 \qquad (\varepsilon < 0). \tag{2.16}$$

Уравнение (2.15) имеет ненулевое асимптотически устойчивое состояние равновесия $\rho = -\frac{1}{a}$, если, конечно, $a < 0$. Уравнение (2.16) имеет неустойчивое ненулевое состояние равновесия $\rho = \frac{1}{a}$ при $a > 0$.

Отметим, что знак постоянной a может быть любым. Так, в «классических» случаях $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$ и $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$ величина a отрицательна при всех рассматриваемых значениях параметров.

Так в первом из них

$$a = -\frac{1}{6}(30c_1^4 - 9c_1^2 + 1) < 0$$

при любых c_1, а во втором

$$a = -\frac{1}{3}(64c_2^4 - 7c_2^2 + 1) < 0$$

также при любых c_2. Если $\alpha_1\alpha_2 \neq 0$, то знак может быть любым. Следует признать, что «преобладают» случаи, когда $a < 0$. Но тем не менее и противоположные случаи также встречаются. Пусть $(\alpha_1, \alpha_2, c_1, c_2)$ — наборы из коэффициентов уравнения (1). Ниже приведены примеры шести таких наборов, при которых $a > 0$:

$$(-1.25,\ 2.25,\ 10, 3), \qquad (-2,\ 3,\ 10,\ 3.5), \qquad (-9,\ 10,\ 10,\ 4.75),$$
$$(-1,\ 2,\ 15,\ 4), \qquad (-59,\ 60,\ 15,\ 7.5), \qquad (-9,\ 10,\ 15,\ 7).$$

Естественно, здесь приведена лишь иллюстрация возможности реализации неравенств $a > 0$, $a < 0$. Разбиение пространства параметров $(\alpha_1, \alpha_2, c_1, c_2)$ на области сохранения знака — отдельная и очень трудоемкая, а может быть, и не до конца разрешимая задача. Из результатов, изложенных в [12–14], вытекает, что справедливо утверждение:

Теорема 1. *Существует* $\varepsilon_0 > 0$ *, что при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *краевая задача* (2.1) , (2.2) *имеет пару устойчивых (орбитально асимптотически устойчивых) периодических решения, если* $a < 0$ *. Эти решения имеют вид*

$$v(t, x, \varepsilon) = \eta_* \exp(i(\sigma_0 + \beta\xi_\pm^2)t)\times \\ \times[1 + \xi_\pm(-\kappa + i)\cos x + (\xi_\pm^2)w_2(x)] + o(\varepsilon), \tag{2.17}$$

где $\xi_\pm = \pm\sqrt{-\frac{\varepsilon\kappa}{a}}$.

При $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, 0)$ *периодические решения* (2.17) *существуют, если* $a > 0$ *. Оба эти решения неустойчивы.*

§ 3. Основной результат

Возвратимся к рассмотрению основной краевой задачи (1), (2) при $b = b_* - \varepsilon$. Пусть $v(t, x)$ — решение вспомогательной задачи (2.1), (2.2). Эта функция определенная при $x \in [0, \pi]$. Доопределим ее по четности по переменной x на отрезок $[-\pi, \pi]$. Это можно сделать с сохранением гладкости в силу справедливости для нее краевых условий (2.2). Затем доопределим ее на всю числовую ось по периодичности с периодом 2π относительно переменной x . Таким образом переопределенная функция будет решением задачи (2.1), (2.2), периодическим и по переменной t . Такому решению в силу замены (1.1) соответствует счетное семейство решений вида

$$u_n(t, x, \varepsilon) = \eta_* \exp\left[i[(\sigma_0 + \beta\xi_\pm^2 + bn^2)t + nx + \varphi_0]\right]\times \\ \times[1 + \xi_\pm(-\kappa + i)\cos(x + 2bt + \varphi_1) + (\xi_\pm)^2 w_2(x + 2bt + \varphi_1)] + o(\varepsilon), \tag{3.1}$$

где $b = b_* - \varepsilon$, $\xi_\pm = \pm\sqrt{-\frac{\varepsilon\kappa}{a}}$, а $\varepsilon a < 0$. Наконец, здесь φ_0, φ_1 — произвольные действительные постоянные. Поэтому выбор знака при определении $\xi_\pm$ не существенен. Замена $x \to x + \varphi_1$ регулирует знак, и без нарушения общности можно считать, что выбран верхний вариант знака.

Формула (3.1) записанная в виде принимает вид

$$u_n(t, x, \varepsilon) = \eta_* \exp\left[i(\psi_n + nx)\right]\times \\ \times[1 + \xi(-\kappa + i)\cos(x + \varphi_1) + \xi^2 w_2(x + \varphi_1)] + o(\varepsilon). \tag{3.2}$$

Здесь $\xi = \xi_+$, $\psi_n = \psi_n(t) = bn^2 t + \beta\xi^2 + o(\varepsilon)$, $\varphi_1 = \varphi_1(t) = 2bt$. Такие обозначения позволяют считать $u_n = u(x, \varepsilon, \psi_n, \varphi_1)$ функцией, периодически зависящей от ψ_n, φ_1 . Тем самым равенство (3.2) определяет интегральное многообразие решений задачи (1), (2) — счетное семейство двумерных инвариантных торов $T_n(\varepsilon)$. Откуда заключаем о справедливости утверждения:

Теорема 2. *Существует* $\varepsilon_0 > 0$ *, что при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ $(a < 0)$ *существует счетное семейство инвариантных торов* $T_{2,n}(\varepsilon)$ *, каждый из которых асимптотически устойчив.*

Если $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, 0)$ *, каждый из торов* $T_{2,n}(\varepsilon)$ *будет седловым.*

Отметим, что выбор ε_0 не зависит от n , одинаков для любого тора $T_{2,n}(\varepsilon)$ данного семейства. Асимптотическая формула (3.1) в ситуации общего положения определяет квазипериодическое решение относительно переменной t . Формула (3.1) содержит два множителя, каждый из которых представляет собой периодическую функцию по t , но отношение этих периодов в общем случае иррациональное число. Еще раз подчеркнем, что при $a < 0$ имеет место послекритическая (мягкая) бифуркация двумерных торов $(b < b_*)$, а при $a > 0$ — докритическая (жесткая) $(b > b_*)$. Второй из этих вариантов возможен лишь при наличии обоих нелинейных слагаемых в уравнении (1). Послекритическая бифуркация от бегущих волн достаточно типична, а докритическая — реализуется в уравнении (1) с одной нелинейностью, если число пространственных переменных равно n , где $n \geqslant 3$ [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дразин Ф. Введение в теорию гидродинамической устойчивости. — М.: Физматлит, 2005. — 287 с.
2. Scheuer J., Malomed B. A. Stable and chaotic solutions of the Ginzburg–Landau equation with periodic boundary conditions // Physika D. — 2002. — Vol. 161, № 1-2.— P. 102–115.
3. Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б., Подлазов А. В. Нелинейная динамика. — М.: Изд-во Комкнига, 2006. — 280 с.
4. Deissler R. J. Turbulent burth, spots and slugs in a generalized Ginzburg–Landau equation // Physics Letters A. — 1987. —Vol. 120, № 7.— P. 334–340.
5. Якубов С. Я. Разрешимость задачи Коши для абстрактных уравнений второго порядка и их приложения // Труд ММО. — 1970. — Т. 27.— С. 37–59.
6. Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла. — М.: Мир, 1985. — 280 с.
7. Куликов А. Н., Куликов Д. А. Бифуркация кубического уравнения Шредингера в случае трех независимых переменных // Вестник Удмуртского университета. — 2008. — Вып. 3. — С. 23–34.
8. Котиков А. Э., Куликов А. Н. Бифуркация бегущих волн видоизменного уравнения Гинзбурга–Ландау // Моделир. и анализ информ. систем. — 2008. — Т. 15, № 1. — С. 10–15.
9. Колесов А. Ю., Куликов А. Н., Розов Н. Х. Цилиндрические бегущие волны обобщенного кубического уравнения Шредингера // Доклады РАН. — 2006. — Вып. 73, № 1. — С. 125–129.
10. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 472 с.
11. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. — М.: Мир, 1980. — 369 с.
12. Колесов А. Ю., Куликов А. Н. Инвариантные торы нелинейных эволюционных уравнений. — Ярославль: ЯрГУ, 2003. — 107 с.
13. Колесов А. Ю., Куликов А. Н., Розов Н. Х. Инвариантные торы одного класса точечных отображений: принцип кольца // Дифф. уравн. — 2003. — Т. 39. — № 5.— С. 584–601.
14. Колесов А. Ю., Куликов А. Н., Розов Н. Х. Инвариантные торы одного класса точечных отображений: сохранение инвариантного тора при возмущениях // Дифф. уравн. — 2003. — Т. 39. — № 6.— С. 738–753.

Поступила в редакцию 01.09.08

A. N. Kulikov, D. A. Kulikov

After critical and precritical bifurcations of progressive wave in a generalized Ginzburg–Landau equation

A generalized time dependent Ginzburg–Landau equation is considered with periodic boundary conditions. There is contable number progressive wave. Local bifurcations of that solutions is edudied when they change the stability. The torus of the 2 dimension bifurcate of each of the progressive wave. In particular, the possibility of precritic hard bifurcation is demonstrated for this equations.

Keywords: stability, soft and hard bifurcations, invariant torus.

Mathematical Subject Classifications: 34A30, 34D08

Куликов Анатолий Николаевич, к. ф.-м. н., доцент кафедры дифференциальных уравнений, Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, 150000, Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14, E-mail: kulikov_d_a@mail.ru

Куликов Дмитрий Анатольевич, к. ф.-м. н., старший преподаватель кафедры микроэлектроники, Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, 150000, Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14, E-mail: kulikov_d_a@mail.ru