

УДК 62-503.56, 629.3.076, 629.113.075

© Б. М. Додонов, В. И. Кольцов, И. А. Долгов

УПРАВЛЕНИЕ КУРСОВЫМ ДВИЖЕНИЕМ АВТОМОБИЛЯ ПО НАПРАВЛЯЮЩЕЙ ТОЧКЕ

Рассматривается плоская модель курсового движения автомобиля, с двумя степенями свободы (боковое перемещение центра тяжести и курсовой угол). Управление осуществляется поворотом управляемых колес. Система рассматривается как замкнутая система автоматического регулирования. В статье рассматривается нахождение «оптимальной» передаточной характеристики, наилучшей в некотором определенном смысле для замкнутой системы. Анализируются возможные критерии оптимизации. Показано, что наиболее подходящим критерием для осуществления управления данным объектом является минимум функционала от отклонения от заданной траектории направляющей точки (точки, расположенной на продольной оси автомобиля впереди по направлению движения) и угла поворота управляемых колес.

Ключевые слова: автомобиль, курсовое движение, управление, критерии оптимизации.

Рассматривается плоская модель курсового движения, показанная на рис. 1.

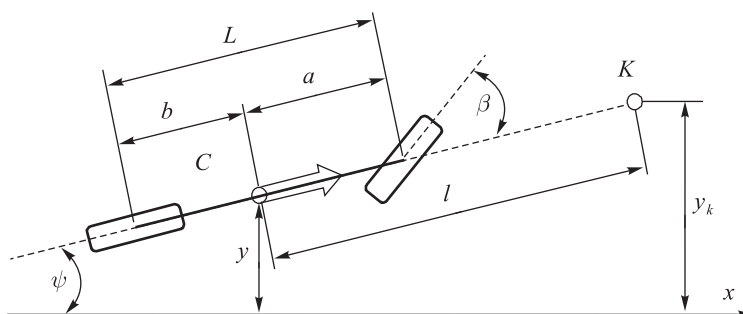


Рис. 1. Плоская модель курсового движения.

- V — скорость автомобиля,
- y — боковое перемещение центра тяжести C ,
- y_K — боковое перемещение направляющей точки K ,
- ψ — курсовой угол,
- β — угол поворота управляемых колес,
- l — расстояние до направляющей точки,
- L — база автомобиля,
- a и b — расстояние от центра тяжести до передних и задних колес соответственно.

Далее скорость автомобиля считается постоянной. Углы ψ и β считаются малыми. Рассматривается линейная модель курсового движения автомобиля. Тогда

$$y = A_1(p)\beta, \quad \psi = A_2(p)\beta,$$

где

A_1 и A_2 — соответствующие передаточные характеристики,
 $p = \frac{d}{dt}$ — оператор дифференцирования.

В работе [1, с. 445] показано, что при различных моделях качения эластичного колеса (модель бокового увода, учет боковой эластичности шин, модель Келдыша качения колеса) передаточная характеристика автомобиля имеет вид

$$A_1 = \frac{k_0}{p^2(p + \omega_0)} A_0(p),$$

где

$$\omega_0 = \frac{L^2 K_1 K_2 - V^2 M (K_1 a - K_2 b)}{V J (K_1 + K_2) + V M (K_1 a^2 + K_2 b^2)},$$

$$k_0 = \frac{L K_1 K_2 V}{J (K_1 + K_2) + M (K_1 a^2 + K_2 b^2)},$$

M — масса автомобиля,

J — центральный момент инерции для вертикальной оси,

K_1 и K_2 — коэффициенты бокового увода для передней и задней осей соответственно.

$|A_0| \cong 1$ для частот меньше 1 Гц. То есть для целей исследования управляемого движения автомобиля можно принять

$$A_1 = \frac{k_0}{p^2(p + \omega_0)}, \quad A_2 = \frac{p}{V} A_1, \quad (1)$$

поскольку управление производится на частотах $\omega \approx 1 \text{ с}^{-1}$ и менее.

Если, кроме того, $\omega_0 \gg 1$, то

$$A_1 = \frac{k_1}{p^2}, \quad (2)$$

где

$$k_1 = \frac{k_0}{\omega_0} = \frac{L K_1 K_2 V^2}{L^2 K_1 K_2 - V^2 M (K_1 a - K_2 b)}.$$

При нейтральной поворачиваемости автомобиля, когда $K_1 a - K_2 b = 0$, $k_1 = \frac{V^2}{L}$ и

$$A_1 = \frac{V^2}{L} \cdot \frac{1}{p^2}, \quad A_2 = \frac{V}{L} \cdot \frac{1}{p}. \quad (3)$$

Для оценки порядка величин ω_0 и k_0 при нейтральной поворачиваемости примем: $a = b$, $K_1 = K_2 = 20Mg$, $J = Ma^2$, $g = 9,81 \text{ м/с}^2$. Тогда

$$\omega_0 = \frac{20g}{V}, \quad k_0 = \frac{20Vg}{L},$$

то есть при скоростях, по крайней мере, меньше 30 м/с можно принять передаточные характеристики (3).

Для бокового перемещения направляющей точки имеем

$$y_K = y + l\psi = (A_1 + A_2 l)\beta = \left(1 + \frac{l}{Vp}\right) y,$$

то есть

$$y = \frac{1}{1 + \frac{l}{Vp}} y_K.$$

При поворачиваемости, близкой к нейтральной, будем пользоваться передаточной характеристикой (2), а при избыточной поворачиваемости — передаточной характеристикой (1). При этом $\omega_0 = 0$ соответствует критической скорости, а при скорости выше критической $\omega_0 < 0$. Простейшая одноконтурная схема системы автоматического регулирования курсового движения показана на рис. 2.

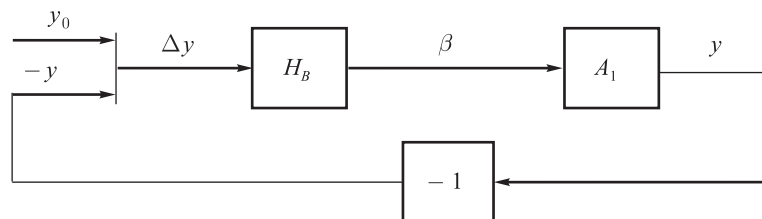


Рис. 2. Простейшая одноконтурная схема.

Здесь:

y_0 — заданная или желаемая траектория автомобиля,

$\Delta y = y_0 - y$ — отклонение от заданной траектории,

H_B — передаточная характеристика водителя (или автомата).

Передаточная характеристика разомкнутой системы

$$H_p = H_B A_1.$$

Передаточная характеристика замкнутой системы определяется равенствами

$$y = H_3 y_0 = H_p (y_0 - y),$$

откуда

$$H_3 = \frac{H_p}{1 + H_p}, \quad H_p = \frac{H_3}{1 - H_3}. \quad (5)$$

Передаточная характеристика водителя

$$H_B = H_p A_1^{-1}. \quad (6)$$

Угол поворота управляемых колес

$$\beta = A_1^{-1} y = A_3 A_1^{-1} y_0. \quad (7)$$

Но прежде чем строить и исследовать систему автоматического регулирования, надо найти «оптимальную» передаточную характеристику, наилучшую в некотором определенном смысле, например, для замкнутой системы. Надо иметь эталон, к которому следует стремиться.

Различные задачи оптимизации решаются в работах [1–3]. Например, в работе японских авторов решается следующая задача.

Найти минимум функционала

$$f = \int_0^{\infty} (y_0 - y_K)^2 dt,$$

при условии, что другой функционал

$$f_6 = \int_0^{\infty} \beta^2 dt$$

ограничен: $f_6 \leq f_{\text{доп}}$. При этом желаемая траектория задается в виде:

$$y_0 = \theta(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t > 0, \\ 0, & \text{при } t < 0, \end{cases}$$

и на передаточные характеристики накладывается условие физической осуществимости, когда система может реагировать только на прошлое и $H_3 = H_3^+$. После введения неопределенного множителя Лагранжа ε минимизируется функционал

$$\varphi = \int_0^{\infty} (\varepsilon(y_0 - y_K)^2 + \beta^2) dt. \quad (8)$$

В работах [1] и [3] минимизируется тот же функционал.

Но уже здесь, естественно, возникает целый ряд вопросов:

1) При чем тут «направляющая точка»? Ведь минимальное отклонение от желаемой траектории должен иметь сам *автомобиль* (например, центр тяжести), а не какая-то точка, находящаяся далеко впереди автомобиля. Траектории этих точек различны и связаны уравнением приведенным выше.

2) Почему ограничивается угол поворота управляемых колес? При «крейсерских» скоростях ($V \approx 20$ м/с) ограничены боковые реакции или боковые ускорения \ddot{y} , а углы поворота колес β малые.

3) Почему на систему накладывается условие «физической осуществимости»? Ведь водитель *видит* дорогу впереди автомобиля и может реагировать на маневр заранее.

4) Почему в качестве «желаемой» траектории (маневр «переставка») выбрана траектория $y_0 = \theta(t)$? Вообще, такую траекторию можно назвать «желаемой» лишь с большой натяжкой. Но хуже то, что оптимальное в указанном выше смысле движение по такой «переставке» оказывается неустойчивым к внешним возмущениям (ошибки водителя, боковой ветер, дорожные неровности и т. п.); если при окончании маневра остались отклонения Δy , то водитель (или система автоматического регулирования) далее и не пытается их устранить.

5) Как выбрать направляющую точку (величина l)?

Ответить на эти вопросы — задача данной работы.

Далее решается следующая задача оптимизации. Найти минимум функционала

$$f = \int_0^{\infty} (y_0 - y)^2 dt$$

при условии, что функционал безопасности

$$f_6 = \int_0^{\infty} \dot{y}^2 dt$$

ограничен.

Здесь $y = H_3^+(p)y_0$, причем, $y_0 = 0$, $y = 0$ при $t < 0$. Значок $+$ означает, что на передаточную характеристику замкнутой системы H_3 наложено условие физической осуществимости.

После введения неопределенного множителя Лагранжа ω_B^4 задача сводится к минимизации функционала

$$\varphi = \omega_B^4 f + f_6 = \int_0^{\infty} (\omega_B^4 (y_0 - y)^2 + \dot{y}^2) dt. \quad (9)$$

По теореме Парсеваля

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\omega_B^4 |1 - H_3^+(i\omega)|^2 + \omega^4 |H_3^+(i\omega)|^2) |Y_0(i\omega)|^2 d\omega,$$

где

$$Y_0(i\omega) = \int_0^{\infty} y_0(t) e^{-i\omega t} dt$$

— преобразование Фурье функции $y_0(t)$.

Варьируя φ по H_3^+ , получаем краевую задачу, определяющую H_3^+ , которая обеспечивает минимум φ

$$(\omega^4 + \omega_B^4)H_3^+Y_0(i\omega) = \omega_0^4Y_0(i\omega).$$

Общее решение краевой задачи приводится в работе [1, с. 240]. Проведя факторизацию,

$$(\omega^4 + \omega_B^4) = \left| i\omega^2 + \sqrt{2}\omega_B i\omega + \omega_B^2 \right|^2,$$

приводим краевую задачу к виду

$$(i\omega^2 + \sqrt{2}\omega_B i\omega + \omega_B^2)H_3^+Y_0(i\omega) = \Psi(i\omega),$$

где

$$\Psi = \frac{\omega_B^4 Y_0(i\omega)}{i\omega^2 - \sqrt{2}\omega_B i\omega + \omega_B^2}.$$

Остается разложить функцию Ψ на две составляющие:

$$\Psi = \Psi^+ + \Psi^-,$$

где Ψ^+ не имеет полюсов в правой полуплоскости комплексной переменной $i\omega$, а Ψ^- — в левой.

Тогда окончательно

$$H_3^+ = \frac{\Psi^+(i\omega)}{(i\omega^2 + \sqrt{2}\omega_B i\omega + \omega_B^2)Y_0(i\omega)}. \quad (10)$$

Далее рассматриваются два стандартных маневра: переставка и поворот.

Для переставки примем

$$y_0(t) = b_0\Theta^+(t),$$

где b_0 — ширина переставки. Тогда

$$Y_0(i\omega) = b_0 \frac{1}{i\omega + 0},$$

$$\Psi = \frac{\omega_B^4 b_0}{(i\omega^2 - \sqrt{2}\omega_B i\omega + \omega_B^2)(i\omega + 0)},$$

$$\Psi^+ = \frac{\omega_B^2 b_0}{i\omega + 0}.$$

Теперь согласно (10):

$$H_3^+ = \frac{\omega_B^2}{p^2 + \sqrt{2}\omega_B p + \omega_B^2}. \quad (11)$$

Рассмотрим подробнее такую переставку.

Поскольку $y = H_3 y_0$, то, взяв обратное преобразование Фурье (или Лапласа), получаем

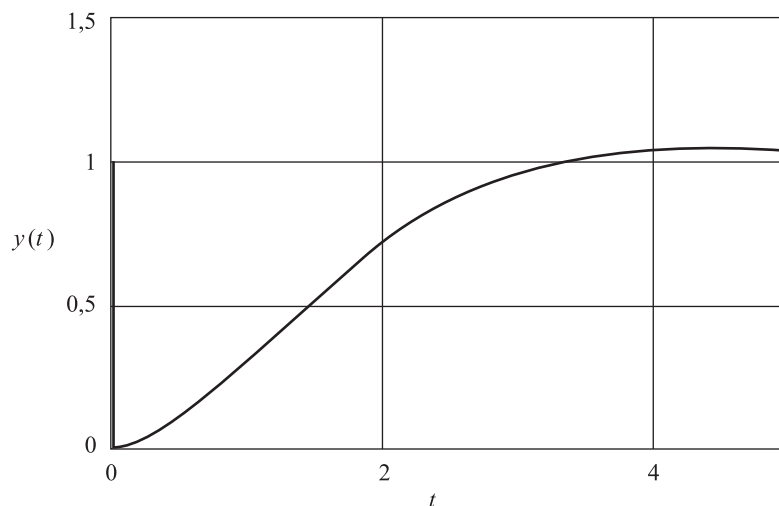
$$y(t) = b_0(1 - z\sqrt{0,5}\omega_B t),$$

где

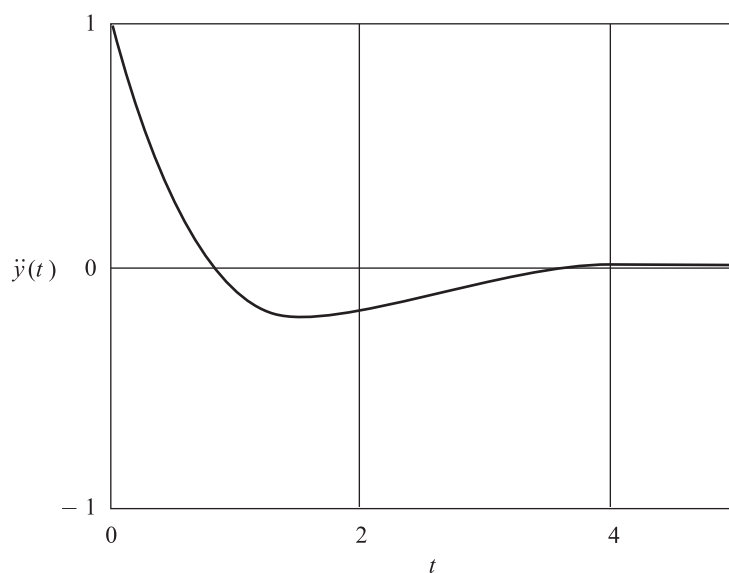
$$z(\tau) = \begin{cases} e^{-\tau}(\cos \tau - \sin \tau) & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases}$$

$$\ddot{y} = b_0\omega_B^2 e^{-\tau}(\cos \tau - \sin \tau),$$

где $\tau = \sqrt{0,5}\omega_B t$. Графики $y(t)$ и $\ddot{y}(t)$ показаны на рис. 3.



а)



б)

Рис. 3. Графики а) $y(t)$ и б) $\ddot{y}(t)$ для переставки.

Прежде всего, оценим величину параметра ω_B . Поскольку $\ddot{y}_{\max} = b_0 \omega_B^2$, то

$$\omega_B \cong \sqrt{\frac{\ddot{y}_{\max}}{b_0}}.$$

Принимая ширину переставки $b_0 = 2$ м и максимальное ускорение $\ddot{y}_{\max} = 2$ м/с², получаем $\omega_B = 1$ с⁻¹. Даже при маленькой переставке и большом ускорении, $b_0 = 1$ м и $\ddot{y}_{\max} = 4$ м/с², получаем $\omega_B = 2$ с⁻¹. Это и есть те реальные частоты, на которых происходит управление курсовым движением.

Учитывая (5) и (6), получаем

$$\begin{aligned} H_p &= \frac{H_3^+}{1 - H_3^+} = \frac{1}{p(p + \sqrt{2}\omega_B)}, \\ H_B &= H_p A_1^{-1} = \frac{p(p + \omega_0)}{k_1(p + \sqrt{2}\omega_B)}. \end{aligned} \quad (12)$$

В частном случае, когда передаточная характеристика автомобиля дается формулой (3):

$$H_B = \frac{Lp}{V^2(p + \sqrt{2}\omega_B)}.$$

При этом

$$\beta = \frac{L}{V^2}\ddot{y} = \frac{Lb_0\omega_B^2}{V^2}e^{-\tau}(\cos \tau - \sin \tau).$$

График функции $\beta(t)$ такой же, как и для $\dot{y}(t)$.

Наличие множителя $p = \frac{d}{dt}$ в передаточных характеристиках водителя H_B показывает, что если имеется постоянное отклонение автомобиля от желаемой траектории ($\Delta y = y_0 - y = \text{const}$), то никакой реакции системы на такое отклонение не будет, то есть система неустойчива к случайным боковым отклонениям, о чем говорилось выше.

Введем случайное возмущение в систему автоматического регулирования (рис. 2). Для этого на вход системы вместо сигнала $\Delta y = y_0 - y$ подадим сигнал $\Delta y + \delta$, где $\delta(t)$ — шум, обусловленный ошибками водителя, боковым ветром, дорожными неровностями и т.п. Тогда минимизации подлежит тот же функционал (9), но теперь

$$y = H_3^+(y_0 + \delta).$$

Полагая, что $\delta(t)$ — «белый» шум со спектральной плотностью $k^2 = \text{const}$, и считая, что шум некоррелирован с сигналом, почти повторяя выкладки, получаем оптимальную передаточную характеристику замкнутой системы

$$H_3^+ = \frac{\omega_B^2}{(i\omega^2 + \sqrt{2}\omega_B i\omega + \omega_B^2)(1 + \tau_{ш}i\omega)},$$

где постоянная времени

$$\tau_{ш} = \frac{k}{b_0}.$$

Из различных соображений следует, что

$$\tau_{ш} = (0,1, \dots, 0,3)\frac{1}{\omega_B}.$$

Теперь

$$H_p = \frac{1}{p} \cdot \frac{\omega_B^2}{\tau_{ш}p^2 + (1 + \sqrt{2}\omega_B\tau_{ш})p + \sqrt{2}\omega_B + \tau_{ш}\omega_B^2},$$

а передаточная характеристика водителя

$$H_B = \frac{1}{k_0} \cdot \frac{p\omega_B^2(p + \omega_0)}{\tau_{ш}p^2 + (1 + \sqrt{2}\omega_B\tau_{ш})p + \sqrt{2}\omega_B + \tau_{ш}\omega_B^2}. \quad (13)$$

Положительный эффект учета «шума» состоит в том, что с передаточной характеристикой (13), в отличие от передаточной характеристики (12), не возникает скачков боковых ускорений: график функции $\dot{y}(t)$ приведен на рис. 3б. Не возникает и бесконечных значений угла поворота управляемых колес β .

Однако множитель $p = \frac{d}{dt}$ в выражении (13) остается. Система остается неустойчивой к боковым возмущениям. Тот же самый результат следует и из работ [2] и [3], хотя там минимизируется совсем другой функционал (8) и используется другая модель автомобиля. Создается впечатление, что строго оптимальная система при переставке вида $y_0 = b_0\Theta(t)$ не может служить основой для построения эффективной системы автоматического регулирования в различных реальных условиях.

Рассмотрим маневр «поворот». Желаемая траектория

$$y_0(t) = \alpha Vt\Theta^+(t),$$

где угол поворота α считается малым, $\alpha = 0,1$ рад. Тогда в частотной области

$$Y_0(i\omega) = \frac{\alpha V}{(i\omega + 0)^2}.$$

Выполняя указанные выше выкладки, получаем оптимальную физически осуществимую передаточную характеристику замкнутой системы

$$H_3^+ = \frac{\sqrt{2}\omega_B i\omega + \omega_B^2}{i\omega^2 + \sqrt{2}\omega_B i\omega + \omega_B^2}. \quad (14)$$

Выполняя обратное преобразование Фурье функции $H_3^+(i\omega)Y_0(i\omega)$, получаем боковое перемещение

$$y = \alpha V \left(t - \frac{1}{\sqrt{0,5}\omega_B} e^{-\tau} \sin \tau \right) \quad \text{при } t > 0,$$

где $\tau = \sqrt{0,5}\omega_B t$. Боковое ускорение

$$\ddot{y} = \sqrt{2}\alpha V \omega_B e^{-\tau} \cos \tau \quad \text{при } t > 0.$$

Поскольку $\ddot{y}_{\max} = \sqrt{2}\alpha V \omega_B$, то искомая «частота водителя»

$$\omega_B = \frac{\ddot{y}_{\max}}{\sqrt{2}\alpha V}.$$

Примем $\ddot{y}_{\max} = 4$ м/с², $\alpha = 0,1$ рад и $V = 20$ м/с²; получаем $\omega_B \cong 1,4$ с⁻¹ (примерно то же, что раньше).

Передаточная характеристика разомкнутой системы:

$$H_p = \frac{\sqrt{2}p + \omega_B^2}{p^2} \omega_B.$$

Передаточная характеристика водителя:

$$H_B = \frac{\omega_B}{k_0} (\sqrt{2}p + \omega_B)(p + \omega_0).$$

В частном случае, при

$$A_1 = \frac{V^2}{L} \cdot \frac{1}{p^2}$$

получаем

$$H_B = \frac{L\omega_B}{V^2} (\sqrt{2}p + \omega_B).$$

Поскольку

$$\beta = H_B(y_0 - y) = \frac{L\omega_B^2}{V} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\omega_B} p \right) (y_0 - y)$$

и

$$\psi = \frac{1}{V} p y,$$

то

$$\beta = \frac{L\omega_B^2}{V^2} ((y_0 + l\alpha) - (y + l\psi)),$$

где введено обозначение

$$l = \frac{\sqrt{2}V}{\omega_B}. \quad (15)$$

Мы специально ввели обозначение l — расстояние до направляющей точки. И поскольку боковое отклонение направляющей точки

$$y_K = y + l\psi,$$

то управление курсовым движением (передаточная функция водителя) сводится к простейшему выражению

$$\beta = \frac{L\omega_B^2}{V^2} \Delta y_K.$$

Угол поворота управляемых колес пропорционален боковому отклонению направляющей точки K от желаемой траектории (в точке K), то есть от $(y_0 + l\alpha)$.

Такое управление имеет достоинства:

1) оно является строго оптимальным, по крайней мере, для одной из рассмотренных выше задач оптимизации;

2) оно является чрезвычайно простым и легко реализуемым как для водителя, так и для системы автоматического регулирования;

3) оно, безусловно, устойчиво к боковым возмущениям;

4) оно однозначно указывает положение направляющей точки (15) при заданном значении ω_B , которое мы специально оценивали во всех рассмотренных выше задачах оптимизации.

Но, оказывается, такое управление имеет еще одно важное достоинство. Дело в том, что до сих пор мы рассматривали только «физически осуществимое» управление: реакция только на «прошлое». Причем момент времени $t = 0$ соответствует моменту прохождения точки маневра (переставки, поворота) *автомобилем*, в то время как направляющая точка достигает точки маневра *раньше*. Это уже реакция на «будущее», управление с упреждением. Как показано ниже, управление по отклонению направляющей точки дает результаты, очень близкие к оптимальному управлению с «упреждением».

Рассмотрим теперь задачу оптимизации с упреждением на время $\tau = \frac{l}{V}$, где l — расстояние до некоторой «направляющей точки» K . Момент времени $t = 0$ теперь соответствует моменту прохождения точки маневра точкой K . Система должна быть физически осуществимой. Это как раз означает, что время упреждения равно τ , но не больше. Задача формулируется так.

Найти минимум функционала

$$f = \int_0^{\infty} (y_0(t - \tau) - y(t))^2 dt$$

при условии, что ограничен функционал

$$f_6 = \int_0^{\infty} \ddot{y}^2(t) dt.$$

Вводя множитель Лагранжа ω_B^4 , минимизируем функционал

$$\varphi = \omega_B^4 f + f_6,$$

или в частотной области

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\omega_B^4 |e^{-i\omega\tau} - H_3^+|^2 + \omega^4 |H_3^+|^2) |Y_0|^2 d\omega.$$

Варьируя φ по H_3^+ получаем краевую задачу:

$$(i\omega^2 + \sqrt{2}\omega_B i\omega + \omega_B^2) Y_0 H_3^+ = \Psi,$$

где

$$\Psi = \frac{\omega_B^4 e^{-i\omega\tau}}{i\omega^2 - \sqrt{2}\omega_B i\omega + \omega_B^2} Y_0.$$

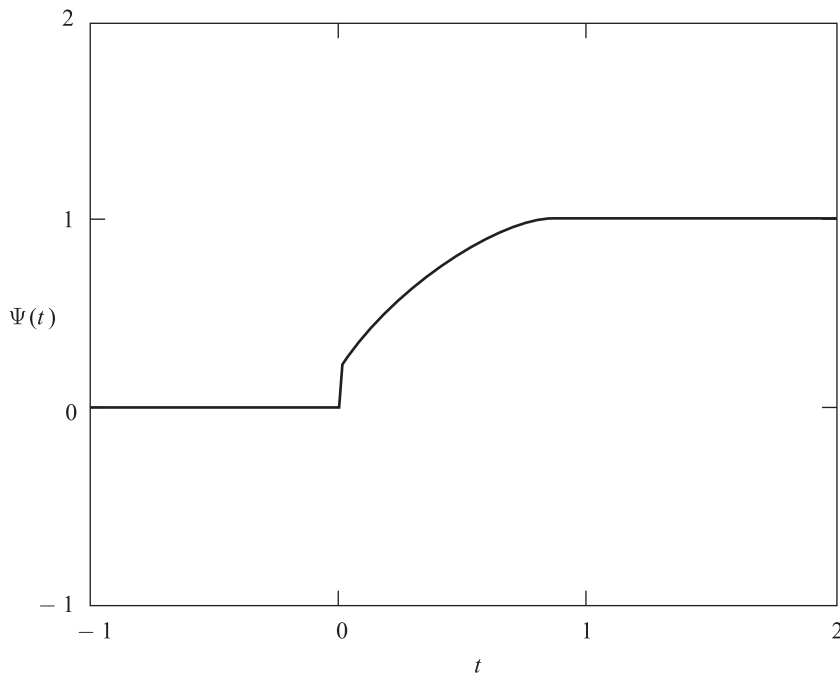


Рис. 4. График функции $\psi^+(t)$.

Принимая, например,

$$Y_0 = \frac{b_0}{i\omega + 0}$$

(маневр «переставка»), получаем

$$\Psi = \frac{b_0 \omega_B^4 e^{-i\omega\tau}}{(i\omega^2 - \sqrt{2}\omega_B i\omega + \omega_B^2)(i\omega + 0)}.$$

Здесь лучше перейти во временную область:

$$\psi^+(t) \frac{1}{b_0 \omega_B^4} = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ e^{-\Theta}(\cos \Theta + \sin \Theta) & \text{при } 0 < t < \tau, \\ 1 & \text{при } t > \tau, \end{cases}$$

где $\Theta = \sqrt{0,5}\omega_B(\tau - t)$.

Теперь $\Psi^+(i\omega)$ легко находится как преобразование Фурье функции $\psi^+(t)$.

Однако полученное выражение для $\Psi^+(i\omega)$ получается довольно громоздким, еще сложнее его приближенное выражение дробно-рациональными функциями, то есть дифференциальными уравнениями.

График функции $\psi^+(t)$ показан на рис. 4.

На рисунке видно, что уже при $\tau > 3\omega_B^{-1}$ практически

$$\psi^+(t) \cong \psi(t), \quad \text{то есть} \quad \Psi^+ \cong \Psi.$$

Тогда для любого маневра

$$H_3 = \frac{\omega_B^4}{\omega^2 + \omega_B^4} e^{-i\omega\tau},$$

если время считать по направляющей точке, или

$$H_3 = \frac{\omega_B^4}{\omega^2 + \omega_B^4},$$

если время считать по автомобилю. Тогда имеется реакция и на «будущее».

Например, для переставки:

$$y(t) = \begin{cases} \frac{b_0}{2} e^{\Theta} \cos \Theta & \text{при } t < 0, \\ b - \frac{b_0}{2} e^{\Theta} \cos \Theta & \text{при } t > 0, \end{cases}$$

где $\Theta = \sqrt{0,5} \omega_b t$. Тогда

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= -\frac{1}{2} b_0 \omega_b^2 e^{-\Theta} \sin \Theta \quad \text{при } t > 0, \\ \ddot{y}_{\max} &= -\frac{1}{2} \sqrt{0,5} e^{-\frac{\pi}{4}} b_0 \omega_b^2, \end{aligned}$$

и мы получаем оценку для частоты водителя

$$\omega_b \cong 2,5 \sqrt{\frac{\ddot{y}_{\max}}{b_0}}.$$

На рис. 5 показаны графики бокового перемещения автомобиля для управления с упреждением и без упреждения.

Для управления без упреждения выше мы показали, что расстояние до направляющей точки, обеспечивающее оптимальную работу системы автоматического регулирования, дается формулой $l = \sqrt{2} V \omega_b^{-1}$. При этом время упреждения $\tau = \frac{l}{V} = \frac{\sqrt{2}}{\omega_b}$, $\Theta = 1$ и боковое отклонение

$$y(\tau) = b_0 e^{-l} (\cos l + \sin l) \cong \frac{b_0}{2}.$$

Это замечательное совпадение: именно при таком времени упреждения мы получаем траекторию, близкую к оптимальной при бесконечно большем времени упреждения (см. рис. 5). Интересно отметить, что в некоторых работах по исследованию курсового движения эта роль «направляющей точки» отмечалась, по-видимому, на уровне интуиции (курсовое движение хорошее, так чего же еще надо?), без рассмотрения соответствующих задач оптимизации. Мы же показали, что движение не просто «хорошее», но и то, что его практически нельзя улучшить.

Совершенно аналогичная картина наблюдается и при маневре «поворот». При этом преобразование Фурье бокового перемещения

$$Y(i\omega) = \frac{\omega_b^4}{\omega^4 + \omega_b^4} \cdot \frac{\alpha V}{(i\omega + 0)^2}.$$

Взяв обратное преобразование Фурье, получаем:

$$y(t) = \begin{cases} \frac{\alpha V}{2\sqrt{2}\omega_b} e^{\Theta} (\cos \Theta + \sin \Theta) & \text{при } t < 0, \\ \alpha V t + e^{\Theta} (\cos \Theta - \sin \Theta) \frac{\alpha V}{2\sqrt{2}\omega_b} & \text{при } t > 0, \end{cases}$$

где $\Theta = \sqrt{0,5} \omega_b t$.

График функции $y(t)$ показан на рис. 6.

Очень похожий график получается и управлением по направляющей точке. Например, при

$$A_1 = \frac{V^2}{L} \cdot \frac{1}{p^2}$$

и

$$\beta = \frac{L\omega_b^2}{V^2} \Delta y_K.$$

Надо только учитывать запаздывание на время $\tau = \frac{l}{V}$ автомобиля по сравнению с направляющей точкой.

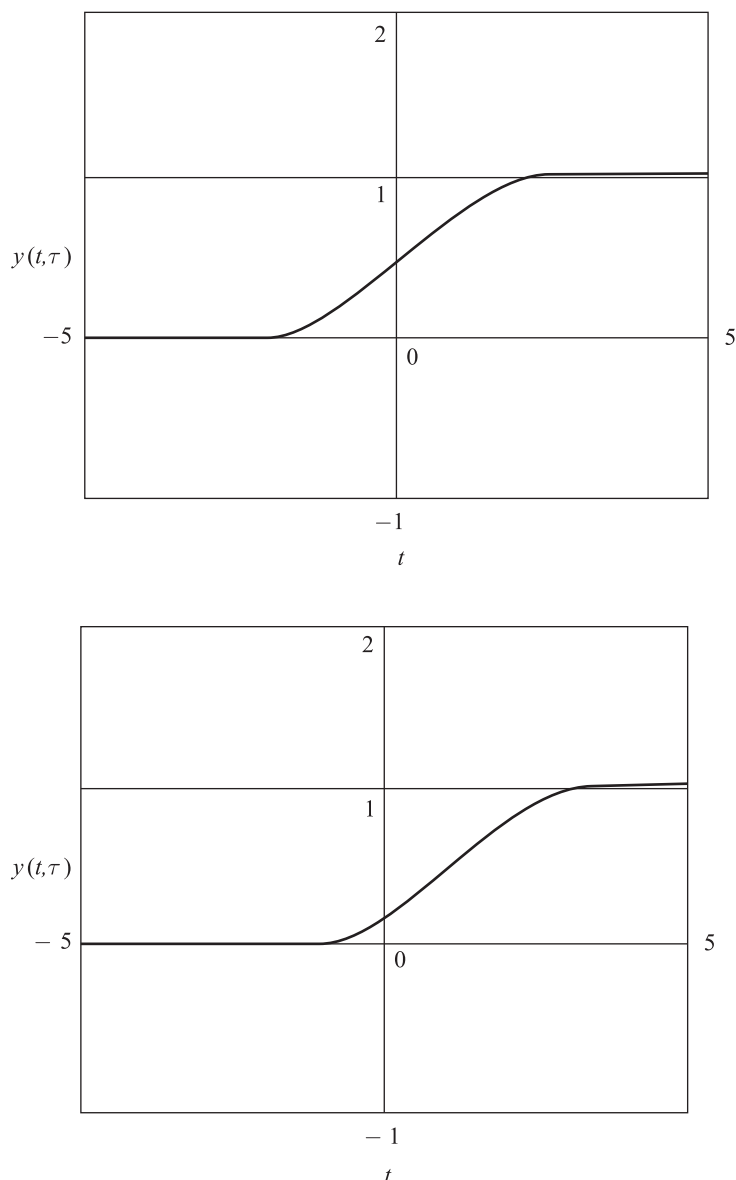


Рис. 5. Графики бокового перемещения автомобиля: а) без упреждения, б) с упреждением.

Тот факт, что при управлении по направляющей точке имеется заметное отклонение \ddot{y} от оптимального при малых значениях t , легко устраним путем введения дополнительного сглаживания. Тем более, что дополнительное сглаживание, как мы уже видели, появляется и при оптимальном управлении после учета «шума» (случайных боковых возмущений).

С учетом «шума» минимизируем функционал

$$\varphi = \int_0^t (\omega_B^4 (y_0 - y)^2 + \dot{y}^2) dt,$$

где

$$y = H_3^+ (y_0 + y_{\text{ш}}), \quad y_{\text{ш}} - \text{шум.}$$

Если сигнал/шум некоррелированы, то краевая задача имеет вид

$$(\omega^4 + \omega_B^4)(|Y_0|^2 + |Y_{\text{ш}}|^2)H_3^+ = \omega_B^4 |Y_0|^2.$$

Пусть шум — винеровский процесс. Тогда

$$Y_{\text{ш}} = \frac{\tau_{\text{ш}}}{i\omega + 0}.$$

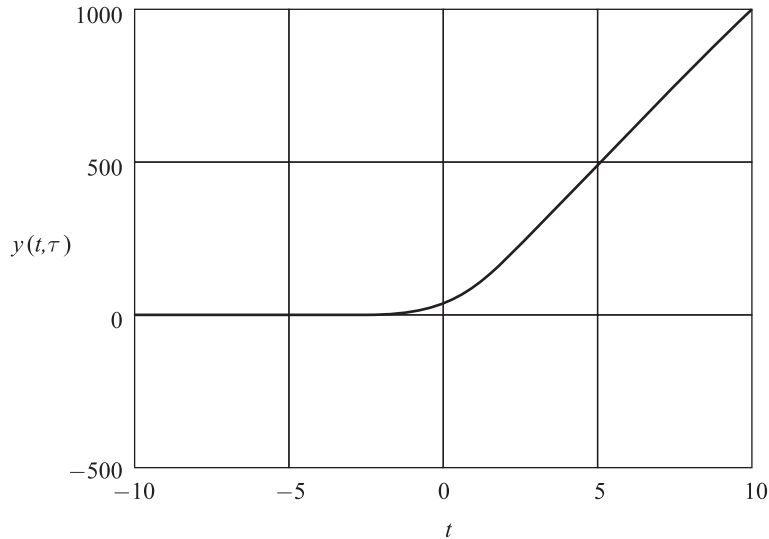


Рис. 6. График перемещения в маневре «поворот».

Для поворота

$$Y_0 = \frac{\tau_{\text{ш}}}{(i\omega + 0)^2}.$$

Тогда решение задачи оптимизации имеет вид

$$H_3^+ = \frac{(\sqrt{2}\omega_{\text{в}} + \tau_{\text{ш}}\omega_{\text{в}}^2)i\omega + \omega_{\text{в}}^2}{(i\omega^2 + \sqrt{2}\omega_{\text{в}}i\omega + \omega_{\text{в}}^2)(1 + \tau_{\text{ш}}i\omega)}.$$

Передаточная характеристика разомкнутой системы

$$H_{\text{p}} = \frac{(\sqrt{2}\omega_{\text{в}} + \tau_{\text{ш}}\omega_{\text{в}}^2)i\omega + \omega_{\text{в}}^2}{(i\omega + 0)^2((1 + \sqrt{2}\tau_{\text{ш}}\omega_{\text{в}}) + \tau_{\text{ш}}i\omega)}$$

и, если передаточная характеристика автомобиля имеет вид

$$A_1 = \frac{V^2}{L} \cdot \frac{1}{p^2},$$

то передаточная характеристика водителя

$$H_{\text{в}} = \frac{L\omega_{\text{в}}}{V^2} \cdot \frac{(\sqrt{2} + \tau_{\text{ш}}\omega_{\text{в}})i\omega + \omega_{\text{в}}}{(1 + \sqrt{2}\tau_{\text{ш}}\omega_{\text{в}}) + \tau_{\text{ш}}p}.$$

Теперь расстояние до направляющей точки

$$l = \left(\frac{\sqrt{2}}{\omega_{\text{в}}} + \tau_{\text{ш}} \right) V,$$

а в знаменателе появляется «сглаживающий» множитель порядка $(1 + \tau_{\text{ш}}p)$ при $\tau_{\text{ш}}\omega \ll 1$.

Если передаточная характеристика автомобиля

$$A_1 = \frac{k_0}{p^2(p + \omega_0)},$$

то передаточная характеристика водителя

$$H_{\text{в}} = \frac{\omega_{\text{в}}\omega_0}{k_0} \cdot \frac{(\sqrt{2} + \tau_{\text{ш}}\omega_{\text{в}})p + \omega_{\text{в}}}{(1 + \sqrt{2}\tau_{\text{ш}}\omega_{\text{в}}) + \tau_{\text{ш}}p} \left(1 + \frac{1}{\omega_0}p \right),$$

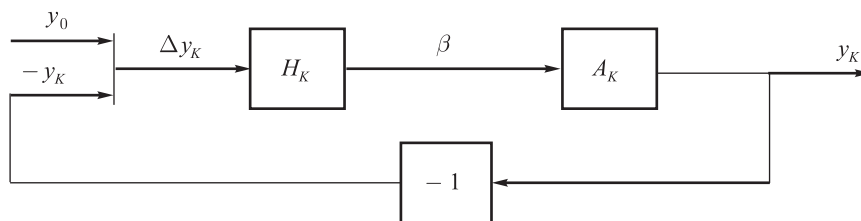


Рис. 7. Простейшая система автоматического регулирования курсовым движением автомобиля.

то есть

$$\beta = \frac{\omega_B^2 \omega_0}{k_0} \cdot \frac{1 + \frac{1}{\omega_0} p}{(1 + \sqrt{2} \tau_{ш} \omega_B) + \tau_{ш} p} \Delta y_K. \quad (*)$$

Остается «сглаживание» и добавляется «форсаж» системы автоматического регулирования — это множитель $(1 + \frac{1}{\omega_0} p)$. В теории автоматического регулирования «форсажем» называют прибавление к отклонению Δy_K производной от отклонения $p \Delta y_K$.

При $\omega_0 > 0$ управление (*) остается устойчивым к боковым возмущениям. Практически это управление следует использовать лишь при $\omega_0 > \omega_B$.

При $\omega_0 = 0$ (критическая скорость) и, тем более, при $\omega_0 < 0$ (скорость выше критической) управление (*) неустойчиво к боковым отклонениям, и эти случаи надо рассматривать отдельно.

Если признать, что боковые возмущения — это белый шум, имеющий спектральную плотность

$$|Y_{ш}|^2 = \tau_{ш}^4,$$

то оптимальная передаточная характеристика замкнутой системы

$$H_3^+ = \frac{\sqrt{2}(\omega_B + \tau_{ш} \omega_B^2) p + \omega_B^2}{p^2 + \sqrt{2} \omega_B p + \omega_B^2} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{2} \tau_{ш} p + \tau_{ш}^2 p^2}.$$

Передаточная характеристика разомкнутой системы

$$H_p = \frac{\sqrt{2}(\omega_B + \tau_{ш} \omega_B^2) p + \omega_B^2}{p^2(1 + 2\tau_{ш} \omega_B + \tau_{ш}^2 \omega_B^2) + \sqrt{2}(\tau_{ш} + \tau_{ш}^2 \omega_B) p + \tau_{ш}^2 p^2}. \quad (**)$$

Теперь передаточная характеристика водителя

$$H_B = H_p \frac{p^2(p + \omega_0)}{k_0}.$$

Во всех передаточных характеристиках появилось «сглаживание» второго порядка. Практически как в (*), так и в (**), следует принять $\tau_{ш} \omega_B \cong 0,2$ — это отношение шум/сигнал.

Остается рассмотреть случай движения автомобиля со скоростью близкой к критической или больше критической, то есть случай $\omega_0 < \omega_B$.

Простейшая система автоматического регулирования курсовым движением автомобиля по направляющей точке показана на рис. 7.

Передаточная характеристика автомобиля по направляющей точке K ($y_K = A_K \beta$) имеет вид

$$A_K = \frac{k_0(1 + \tau p)}{p^2(p + \omega_0)},$$

где $\tau = \frac{l}{V}$.

Если $\omega_0 > \omega_b$, то мы используем полученную выше оптимальную (без учета шума) передаточную характеристику водителя по отношению направляющей точки ($\beta = H_K \Delta y_K$)

$$H_K = \frac{\omega_b^2 \omega_0}{k_0} \left(1 + \frac{1}{\omega_0} p \right).$$

Если $\omega_0 < \omega_b$, то примем

$$H_K = k_b (1 + \tau p),$$

где k_b и τ — пока неизвестные коэффициенты (вместо того, чтобы увеличивать «форсаж» τp , будем уменьшать коэффициент усиления k_b). При этом курсовое движение, очевидно, будет оставаться устойчивым к боковым возмущениям, если даже $\omega_0 < 0$. Передаточная характеристика разомкнутой системы

$$H_p = \frac{k(1 + \tau p)^2}{p^2(p + \omega_0)},$$

где $k = k_0 k_b$.

Передаточная характеристика замкнутой системы

$$H_3 = \frac{k(1 + \tau p)^2}{p^3 + (k\tau^2 + \omega_0)p^2 + 2k\tau p + k}.$$

Теперь надо потребовать, чтобы система была устойчивой, и переходный процесс был несильно колебательным, например, относительное затухание звеньев не менее 0,5. Тогда примем, что H_3 имеет вид

$$H_3 = \frac{k(1 + \tau p)^2}{(p + \omega_1)(p^2 + \omega_b p + \omega_b^2)}.$$

Сравнивая эти два выражения для H_3 , получаем равенства:

$$k = \omega_1 \omega_b^2,$$

$$2\tau = \tau_1 + \tau_b,$$

$$\tau^2 = \tau_1 \tau_b + \tau_b^2 - \tau_1 \tau_b \omega_0,$$

где $\tau_1 = \omega_1^{-1}$, $\tau_b = \omega_b^{-1}$. Отсюда находим неизвестные параметры:

$$\tau_1 = \tau_b - 2\omega_0 \tau_b^2 + \sqrt{(\tau_b - 2\omega_0 \tau_b)^2 + 3\tau_b^2}, \quad (***)$$

$$\tau = \frac{1}{2}(\tau_1 + \tau_b),$$

$$k = \omega_1 \omega_b^2.$$

Например, при $\omega_0 = 0$ (критическая скорость) получим:

$$\tau_1 = 3\tau_b, \quad \tau = 2\tau_b, \quad k = \frac{1}{3}\omega_b^3,$$

$$H_3 = \frac{\frac{1}{3}\omega_b^3 \left(1 + \frac{2}{\omega_b} p \right)^2}{\left(p + \frac{\omega_b}{3} \right) (p^2 + \omega_b p + \omega_b^2)}.$$

Время упреждения $\tau = \frac{2}{\omega_b}$ несколько больше оптимального $\frac{\sqrt{2}}{\omega_b}$, но зато это легко реализуемое управление устойчиво к возмущениям и все-таки близкое оптимальному.

При скорости намного выше критической, например, при $\omega_0 = -\omega_b$, имеем:

$$\tau_1 = 5\tau_b, \quad \tau = 3\tau_b, \quad k = 0,2\omega_b^3.$$

Упреждение еще больше, но остаются те же достоинства.

Сглаживание в системе автоматического регулирования вводится, в основном, для сглаживания переходных процессов по углу поворота управляемых колес $\beta(t)$. Для $\omega_0 > \omega_b$ используем результаты решения задач оптимизации при наличии шума. Согласно (*) и (**) передаточная характеристика водителя имеет вид:

$$H_K = \frac{\omega_b^2 \omega_0}{k_0} \cdot \frac{1 + \frac{1}{\omega_0} p}{(1 + \sqrt{2} \tau_{ш} \omega_b) + \tau_{ш} p},$$

или

$$H_K = \frac{\omega_b^2 \omega_0}{k_0} \cdot \frac{1 + \frac{1}{\omega_0} p}{1 + 2\tau_{ш} \omega_b + \sqrt{2} \tau_{ш} (1 + \tau_{ш} \omega_b) p + \tau_{ш}^2 p^2}.$$

Здесь мы пренебрегаем малыми членами, поскольку следует принять $\tau_{ш} \omega_b \cong 0,2$.

Время упреждения

$$\tau = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\omega_b} + \tau_{ш} \right).$$

Для $\omega_0 < \omega_b$ принимаем

$$H_K = \frac{\omega_b^2 \omega_1}{k_0} \cdot \frac{1 + \tau p}{1 + \tau_{ш} p},$$

или

$$H_K = \frac{\omega_b^2 \omega_1}{k_0} \cdot \frac{1 + \tau p}{1 + \tau_{ш} p + \tau_{ш}^2 p^2},$$

где упреждение

$$\tau = \frac{1}{2} \left(\tau_1 + \frac{1}{\omega_b} \right).$$

Причем при вычислении величины τ_1 (равной ω_1^{-1}) по формуле (***) величина τ_1 увеличивается примерно на 20%.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Динамика системы дорога-автомобиль-водитель. / Под. ред. Хачатурова А. А. — М: Машиностроение, 1976.
2. Study on automatic path tracking using virtual point regulator. Yoshitaka Marumo, Hiroshi Mouri, YuQing Wang Takayoshi Kamada, Masao Nagai Department of Mechanical Systems Engineering. — Tokyo University of Agriculture and Technology, Received 7 March 2000.
3. Choi Seibum Ben. The design of a control coupled observer for the longitudinal control of autonomous vehicles // Trans. ASME J. Dyn. Syst., Meas. and Contr. — 1998. — 120, № 2. — P. 288–289.

Поступила в редакцию 19.06.09

B. M. Dodonov, V. I. Kolcov, I. A. Dolgov
Control of the motor car's directional motion

A flat model of the motor car's directional motion with two degrees of freedom (lateral motion of the center of gravity and relative bearing) is considered. The control is performed by turning steering wheels. The system is regarded as a closed automatic control system. The paper discusses finding an optimal transfer characteristic which in some definite sense is the best for the closed system. Possible criteria of optimization are analyzed. It is shown that the minimum of the functional from the off-path jogging of the guiding point (the point located on the longitudinal axis of a motor car ahead in the direction of motion) and the turning angle of the steering wheels is the most appropriate criterion for controlling this object.

Keywords: motor car, directional motion, control, optimization criteria.

Mathematical Subject Classifications: 74G15

Додонов Борис Михайлович, кандидат технических наук, доцент, профессор, кафедра теоретической механики Московского автомобильно-дорожного института (технический университет). Москва 125319 Ленинградский проспект, 64 dodonov@comtv.ru

Кольцов Владислав Иванович, кандидат технических наук, доцент, Профессор, кафедра теоретической механики Московского автомобильно-дорожного института (технический университет). Москва 125319 Ленинградский проспект, 64 dodonov@comtv.ru

Долгов Иван Алексеевич, инженер, заведующий хозрасчетной научной лабораторией кафедры двигателей внутреннего сгорания Московского автомобильно-дорожного института (технический университет). Москва 125319 Ленинградский проспект, 64 Madi-avto@mail.ru