

МЕХАНИКА

УДК 536.3, 532.517

(c) M. C. Вологдина

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ИНФРАКРАСНОМ НАГРЕВАТЕЛЕ С НЕКРУГЛОЙ ТРУБОЙ

Рассматривается сопряженная задача теплообмена, которая возникает при расчете параметров инфракрасного нагревателя. Приводится постановка задачи для трехмерного турбулентного течения в трубе излучателя с учетом наличия лучистого теплообмена с отражателем и внешнего теплообмена с окружающей средой. Проведен расчет для поставленной задачи.

Ключевые слова: сопряженная задача теплообмена, уравнения теплового баланса, система уравнений Навье–Стокса.

При моделировании сложных газодинамических процессов часто приходится сталкиваться с такими трудностями, как криволинейность области расчета, необходимость совместного учета различных процессов, сложность задания начальных или граничных условий, которые приводят к усложнению математической модели, описывающей тот или иной процесс. Чем сложнее и объемнее построенная математическая модель, тем труднее она в реализации. По этой причине становится весьма актуальной задача разработки методики, позволяющей рассчитывать подобные модели. Методика численного расчета, предлагаемая в данной статье, не претендует на общность, но позволяет учесть взаимное влияние газодинамических процессов и процессов теплообмена, протекающих в инфракрасном нагревателе.

В рамках данной статьи рассматривается конструкция инфракрасного нагревателя, состоящая из излучателя, испускающего лучистую энергию, и отражателя, располагающегося над излучающими трубами, для направления теплового потока с верхней стенки трубы в рабочую зону. Излучатель представляет собой трубу некруглого сечения, будем считать его полуокружностью (рис. 1), что позволит ввести цилиндрическую систему координат.

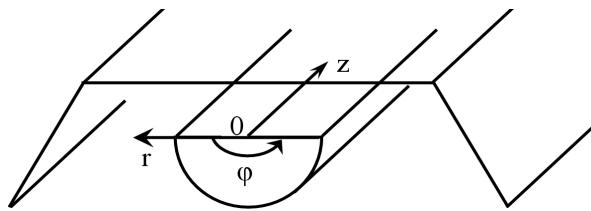


Рис. 1. Схема инфракрасного излучателя.

При построении математической модели принимаются следующие допущения [1, 2]:

- 1) число Маха рассматриваемого течения $M < 0,1$, поэтому допустимо полную энергию газа определять только температурой, а плотность — уравнением состояния идеального газа;
- 2) отсутствие объемных сил;
- 3) лучистое тепло не поглощается воздухом.

Гидродинамические процессы, протекающие в трубе–излучателе инфракрасного нагревателя, описываются с учетом принятых допущений следующей системой дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\mathbf{F}_x + \mathbf{G}_r + \mathbf{E}_\varphi = \mathbf{P} + \mathbf{R}_x + \mathbf{H}_r + \mathbf{M}_\varphi + \mathbf{S}, \quad (1)$$

$$\mathbf{F} = ru \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = rv \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = w \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = -r \begin{bmatrix} 0 \\ p_x \\ p_r \\ p_\varphi/r \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R} = r\mu \begin{bmatrix} 0 \\ u_x \\ v_x \\ w_x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = r\mu \begin{bmatrix} 0 \\ u_r \\ v_r \\ w_r \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \frac{\mu}{r} \begin{bmatrix} 0 \\ u_\varphi \\ v_\varphi \\ w_\varphi \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ (r\mu u_z)_z + (r\mu v_z)_r + (\mu w_z)_\varphi - \frac{2}{3}r(\mu \operatorname{div} \mathbf{V})_z \\ (r\mu u_r)_z + (r\mu v_r)_r + (\mu w_r)_\varphi - \frac{3\mu}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{w}{r}\frac{\partial \mu}{\partial \varphi} - \frac{2\mu v}{r} + \rho w^2 - \frac{2}{3}r(\mu \operatorname{div} \mathbf{V})_r \\ (\mu u_\varphi)_z + \frac{1}{r}((r\mu v_\varphi)_r + (\mu w_\varphi)_\varphi) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{2\mu v}{r}\right) - w\left(\frac{\mu}{r} + \frac{\partial \mu}{\partial r} + \rho v\right) - \frac{2}{3}(\mu \operatorname{div} \mathbf{V})_\varphi \end{bmatrix},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial(rv)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho u r T_g - r \frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial T_g}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\rho v r T_g - r \frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial T_g}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\rho w T_g - \frac{\lambda}{r c_p} \frac{\partial T_g}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho u r \nu_t - r \mu_\nu \frac{\partial \nu_t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\rho v r \nu_t - r \mu_\nu \frac{\partial \nu_t}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\rho w \nu_t - \frac{\mu_\nu}{r} \frac{\partial \nu_t}{\partial \varphi} \right) = S, \quad (3)$$

$$S = r \left(\alpha \mu_t \sqrt{Q} - \frac{\gamma \nu_t (\beta \mu_t + \mu_m)}{s^2} \right),$$

$$Q = 2 \left(u_x^2 + v_r^2 + \frac{w_\varphi^2}{r^2} \right) + \left(\frac{u_\varphi}{r} + w_x \right)^2 + (u_r + v_x)^2 + \left(\frac{v_\varphi}{r} + w_r - \frac{w}{r} \right)^2 + \left(\frac{v}{r} \right)^2 + \frac{2vw_\varphi}{r^2},$$

$$\rho = \frac{p}{RT_g}, \quad (4)$$

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T_g}{T_0} \right)^{3/2} \frac{T_0 + T_S}{T_g + T_S}, \quad (5)$$

где (1) — определяет динамику процесса, $\mu = \mu_m + \mu_t$ — сумма молекулярной и турбулентной вязкости; (2) — уравнение баланса тепла; (3) — однопараметрическая модель турбулентности [3], где $\alpha = 0,2(\bar{\nu}^2 + 11\bar{\nu} + 13)/(\bar{\nu}^2 - 11\bar{\nu} + 64)$, $\bar{\nu} = \nu_t/\nu_m$, $\beta = 0,06$, $\gamma = 50$ — эмпирические коэффициенты; $\mu_\nu = \mu_m + \chi \mu_t$ — коэффициент переноса, $\chi = 2$; S — расстояние до стенки; (4) — уравнение состояния газа; (5) — формула Саттерлэнда, определяющая зависимость между динамическим коэффициентом вязкости и абсолютной температурой, в ней T_S — постоянная Саттерлэнда, T_0 и μ_0 — абсолютная температура и коэффициент вязкости, соответствующие некоторому начальному состоянию газа.

Система решается при следующих граничных условиях:

- 1) на входе $u = u_0$, $v = w = 0$, $T_g = T_0$, $\nu_t = \nu_0$;
- 2) на выходе $p = p_\infty$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $v = 0$, $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 T_g}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial \nu_t}{\partial x} = 0$;

3) на поверхности трубы $u = v = w = 0$, $T_g = T_{st}$, $\nu_t = 0$.

Конструкция инфракрасного нагревателя предусматривает отражатель, наличие которого изменяет распределение теплового потока, а также условия теплоотдачи труб излучателя, вследствие возникающего лучистого теплообмена в системе тел: трубы-излучатели, отражатель и окружающие поверхности. Данный процесс моделируется на основе системы теплового баланса, решение которой позволяет находить результирующее распределение температур и тепловых потоков. Введем операторы:

1) $G(\mathbf{V}, \rho, \mu, T_{st}, T_g)$ — оператор нахождения распределения температуры газа в трубах излучателя в результате гидродинамического расчета, где $\mathbf{V} = (u, v, w)$ — вектор скоростей; T_{st} — температура стенки трубы;

2) $I(T_g, \varphi_{ij}, T_{sr}, T_{st})$ — оператор определения температуры на стенках труб излучателя в результате решения системы теплового баланса, описывающей процесс лучистого теплообмена, где T_{sr} — температура окружающей среды; φ_{ij} — угловой коэффициент излучения между элементами конструкции i и j .

Имеем два взаимосвязанных процесса: лучистый теплообмен влияет на гидродинамический расчет процессов внутри трубы, а полученное в результате решения дифференциальной системы уравнений, описывающей гидродинамику течения газов, поле температур определяет величину теплового потока от газа к стенкам трубы, а значит, и тепловой баланс в целом. Последовательность решения этой задачи схематично можно обозначить следующим образом:

1) задать начальное приближение для распределения температуры газа $T_g = T_g^0$, $k = 0$ — номер итерации;

2) $I(T_g^k, \varphi_{ij}, T_{sr}, T_{st}^k)$ — решение системы теплового баланса;

3) $G(\mathbf{V}, \rho, \mu, T_{st}^k, T_g^{k+1})$ — гидродинамический расчет;

4) $\Delta \leq \varepsilon$ — критерий окончания расчета; если он выполняется, то задача решена, иначе $k = k + 1$ и переход к шагу 2.

В общем случае полученная задача сопряженного теплообмена является трехмерной и весьма сложной в реализации, поскольку требует решения системы уравнений теплового баланса на поверхности каждого элемента нагревателя и нахождения угловых коэффициентов излучения, которое в трехмерном случае связано с большими трудностями. Для того чтобы упростить решение этой задачи, было решено разбить излучатель на несколько равных частей вдоль продольной оси и определять температуры стенок на излучателе и отражателе в полученных сечениях [4]. Температура поверхностей от одного сечения до другого определяется линейным интерполированием. Таким образом, решение трехмерной задачи лучистого теплообмена заменяется решением нескольких двухмерных задач следующего типа: поверхности рассматриваемых тел разбиваются на отрезки, для которых необходимо определить температуру T_i и плотность теплового потока R_i .

Вся конструкция разбивается на m_2 отрезка, из них на отражателе m_1 элемент. Для каждого полученного элемента выполняется равенство потока эффективного излучения сумме потока испускаемого излучения и потока отраженного излучения [2]:

$$R_i - (1 - \varepsilon) \sum_{j=1}^{m_2} R_j \varphi_{ij} - \varepsilon \sigma (T_i^4 - T_{sr}^4) = 0, \quad i = \overline{1, m_2}, \quad (6)$$

где $\varepsilon \sigma (T_i^4 - T_{sr}^4)$ — плотность поверхностного испускаемого излучения, где ε — степень черноты; $\sigma = 5,669 \cdot 10^{-8}$ Вт $(\text{м}^2 \cdot K^4)$ — постоянная Стефана–Больцмана; T_i, T_{sr} — абсолютные температуры поверхности элемента системы и окружающей среды соответственно, K ; $(1 - \varepsilon) \sum_{j=1}^{m_2} R_j \varphi_{ij}$ — плотность потока отраженного излучения, где φ_{ij} — угловые коэффициенты излучения.

Следующие m_2 уравнения получаются из баланса тепловых потоков на поверхности элемента системы: сумма поступающих и поглощенных потоков равна нулю. Соответственно, для

отражателя записывается

$$R_i - \sum_{j=1}^{m_2} R_j \varphi_{ij} - \left(\lambda_{ot} \frac{\partial^2 T}{\partial l^2} \right)_i + \varepsilon_0 \sigma (T_i^4 - T_{sr}^4) + \alpha_0 (T_i - T_{sr}) = 0, \quad i = \overline{1, m_1}, \quad (7)$$

где $\sum_{j=1}^{m_2} R_j \varphi_{ij}$ — поток, приходящий от других элементов системы; $\varepsilon_0 \sigma (T_i^4 - T_{sr}^4)$ — поток поверхного излучения с внешней стороны излучателя, где ε_0 — степень черноты внешней стороны отражателя; $\left(\lambda_{ot} \frac{\partial^2 T}{\partial l^2} \right)_i = \frac{2\lambda_{ot} h_{ot}}{\Delta l_i + \Delta l_{i+1}} \left(\frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta l_{i+1}} - \frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta l_i} \right)$ — перетоки тепла от соседних элементов, где λ_{ot} — коэффициент теплопроводности, а h_{ot} — толщина стенки отражателя, $\Delta l_i, \Delta l_{i+1}$ — расстояние между точками определения температур T_{i-1}, T_i и T_i, T_{i+1} соответственно; $\alpha_0 (T_i - T_{sr})$ — конвективный поток, возникающий при теплообмене с окружающей средой, температура которой T_{sr} , α_0 — коэффициент теплоотдачи, определяемый по формуле для свободной конвекции [5].

Для труб излучателя уравнения теплового баланса примут вид

$$R_i - \sum_{j=1}^{m_2} R_j \varphi_{ij} - \left(\lambda_{iz} \frac{\partial T}{\partial n} \right)_i - \left(\lambda_{iz} \frac{\partial^2 T}{\partial l^2} \right)_i = 0, \quad i = \overline{m_1 + 1, m_2}, \quad (8)$$

где $\left(\lambda_{iz} \frac{\partial^2 T}{\partial l^2} \right)_i = \frac{2\lambda_{iz} h_{iz}}{\Delta l_i + \Delta l_{i+1}} \left(\frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta l_{i+1}} - \frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta l_i} \right)$ — перетоки тепла вдоль стенок трубы-излучателя в поперечном движению направлении, где h_{iz}, λ_{iz} — толщина и коэффициент теплопроводности стенки излучателя; $\left(\lambda_{iz} \frac{\partial T}{\partial n} \right)_i$ — количество тепла, проходящего через стенку излучателя от газа, протекающего внутри трубы-излучателя, где $\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{T_g - T_i}{dr}$ — градиент температур, $T_g = (T_g)_n$ — температура газа, а dr — радиальный размер расчетной ячейки, ближайшей к стенке трубы.

Для расчета угловых коэффициентов излучения φ_{ij} применялся метод «натянутых нитей» [2]. Получили систему (6)–(8) из $2m_2$ нелинейных уравнений с $2m_2$ неизвестными, решением которой будут являться температуры и плотности тепловых потоков элементов отражателя и излучателя.

Алгоритм решения сопряженной задачи теплообмена:

1. В качестве начального приближения для T_g при решении ряда сопряженных задач используется среднемассовая по сечению трубы температура газа. Для ее нахождения решается дифференциальное уравнение переноса тепла в газовой смеси [2]

$$c_p G \frac{dT_g(x)}{dx} = P_T \alpha_g (T_{st}(x) - T_g(x))$$

и уравнение для температуры стенки

$$\lambda_{st} \frac{d^2 T_{st}}{dx^2} + \alpha_g (T_g - T_{st}) - \alpha_{ef} (T_{st} - T_{sr}) = 0,$$

где T_g — температура газа; T_{st} — температура стенки; G — массовый расход газа; P_T — периметр трубы; c_p — удельная теплоемкость газа; T_{sr} — температура вокруг излучателя; λ_{st} — теплопроводность материала стенки; α_g — коэффициент теплоотдачи от газа [5]; α_{ef} — эффективный коэффициент теплоотдачи от стенки трубы в окружающую среду [5].

2. Последовательное решение ряда систем уравнений теплового баланса (6)–(8) для нахождения температуры стенок излучателей T_{st} :

а) Задается начальное приближение для температур и плотностей тепловых потоков с поверхности стенок отражателя и излучателя.

б) Линеаризуется система (6)–(8) методом Ньютона. Получается система линейных уравнений следующего вида:

$$F'(x^k)\Delta x^{k+1} = -F(x^k), \quad (9)$$

$$\Delta x^{k+1} = x^{k+1} - x^k, \quad x = (R_1, R_2, \dots, R_{m_2}, T_1, T_2, \dots, T_{m_2}). \quad (10)$$

- с) Расчет матриц $F(x^k)$ и $F'(x^k)$.
- д) Решение линейной системы методом Гаусса.
- е) Расчет x^{k+1} из соотношения (10).
- ф) Проверка критерия окончания расчетов по нахождению решения нелинейной системы уравнений методом Ньютона:

$$\sqrt{\sum_i (F_i(x^{k+1}))^2} < \varepsilon, \quad (11)$$

где ε — заданная точность расчета метода Ньютона.

г) Если условие (11) выполняется, то переход к шагу 3, если нет, то возврат к пункту с, где в качестве x^k берется x^{k+1} .

3. Найденные в результате решения сопряженной задачи значения температуры на поверхности излучателя T_{st} используются в качестве граничного условия первого рода для температуры на стенке при решении системы (1)–(5).

4. Решение системы (1)–(5) методом Патанкара [6].

5. Проверка критерия окончания расчетов:

$$\psi = \max_i \left| \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{T_i^n} \right| < \varepsilon. \quad (12)$$

6. Если условие (12) выполняется, то расчет окончен, иначе к шагу б в качестве новых значений T_g берется температура газа, найденная в результате решения системы (1)–(5).

Сходимость численного метода решения системы дифференциальных уравнений, описывавшей гидродинамические процессы в трубе-излучателе, была установлена путем измельчения конечно-разностной сетки по радиальной координате. На рис. 2 представлено изменение значения нормы относительной погрешности ξ при турбулентном режиме течения в круглой трубе в зависимости от количества узлов N в направлении r .

Число узлов задавалось от 40 до 400, в качестве ξ рассматривается среднеквадратическое отклонение расчетного профиля скорости на выходе от аналитической зависимости распределения скорости для установленвшегося турбулентного течения в круглой трубе (рис. 3):

$$\frac{100\% \cdot \sqrt{\sum_i^N \left(\frac{u_i - u_i^*}{u_i^*} \right)^2}}{N},$$

где u_i, u_i^* — расчетное и теоретическое значение продольной скорости.

С увеличением количества узлов в направлении N (при фиксированном M) от 40 до 120 значение нормы относительной погрешности ξ уменьшилось на 146,6%, а от 120 до 300 узлов ξ изменяется на 126,6% (рис. 2). С дальнейшим увеличением количества узлов изменение значения ξ происходит на 8,2% и достигает значения 0,1%.

Исследование на адекватность проводилось путем сравнения решений, полученных численно, с известными решениями тестовых задач. На рис. 3 приведено сравнение расчетных профилей скорости (полученных с использованием алгебраической модели турбулентности и модели Секундова) с аналитической зависимостью распределения скорости в круглой трубе при турбулентном режиме течения. Использование как алгебраической модели турбулентности, так

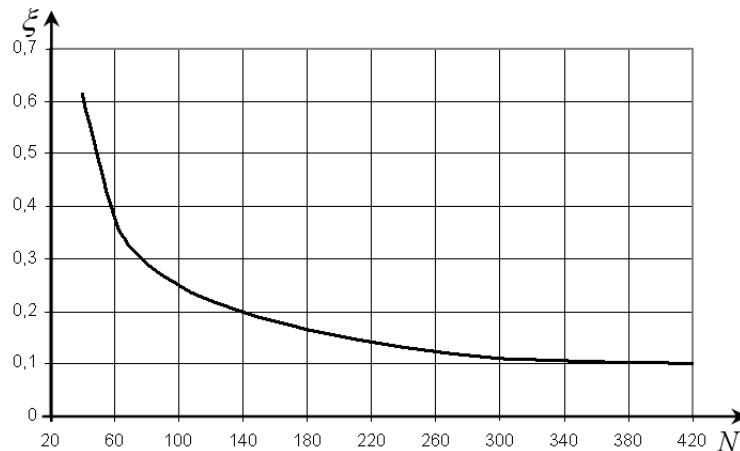


Рис. 2. Зависимость нормы погрешности от числа узлов конечно-разностной сетки при турбулентном режиме течения в радиальном направлении.

и модели Секундова позволяет получать профиль скорости, близкий к теоретическому. Применение алгебраической модели турбулентности дает более хорошее совпадение с теоретическим распределением, но ее применение для областей со сложной геометрией затруднительно, поэтому для моделирования турбулентности использовалась однопараметрическая модель Секундова.

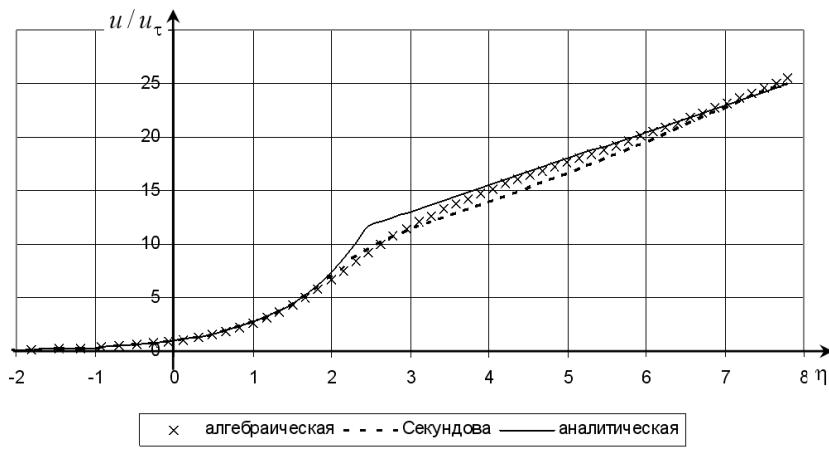


Рис. 3. Профиль скорости при турбулентном течении в круглой трубе.

Произведем расчет для инфракрасного нагревателя со следующими характеристиками:

- 1) размеры излучателя $R = 0,05$ м, $L = 8$ м;
- 2) параметры на входе в трубу излучателя $G = 3 \cdot 10^{-2}$ кг/с, $T_0 = 1200^\circ\text{C}$, $\mu_0 = 1,983 \cdot 10^{-5}$ Н·с/м². Температуру среды зададим $T_{sr} = 27^\circ\text{C}$.

Между излучателем и расположенным над ним отражателем происходит интенсивный лучистый теплообмен, максимум которого достигается в центре верхней стенки трубы, вследствие чего происходит значительный перегрев этой части стенки излучателя, что и наблюдается на рис. 4. Распределение представлено для начального участка трубы.

Изобразим на графике распределение температуры в поперечном сечении отражателя (рис. 6) и по периметру излучателя (рис. 7). Номер кривой соответствует номеру сечения, в котором производился расчет. Чем больше номер, тем дальше от входа в трубу находится сечение. Соответствие точек графика точкам нагревателя приведено на рис. 5. На отражателе

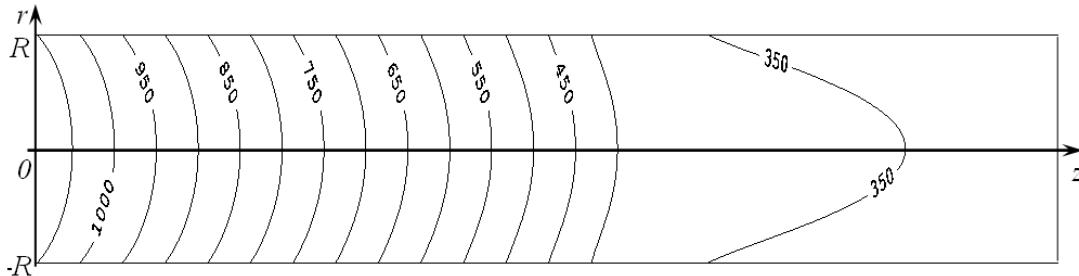


Рис. 4. Распределение температуры на верхней стенке излучателя.

пик температур достигается на отрезке CD , где под отражателем располагается излучатель и между ними происходит интенсивный лучистый теплообмен. По этой же причине максимум температур излучателя приходится на верхнюю стенку. Температура газа по длине излучателя падает, поэтому и температура стенки уменьшается, а значит, уменьшается и количество излучаемой лучистой энергии. В свою очередь, это приводит к уменьшению пика температур на отражателе, чем ближе к концу трубы, тем меньше энергии на него приходит.

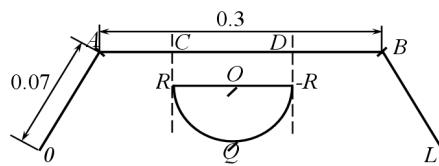


Рис. 5. Схема нагревателя, определяющая точки на оси графика.

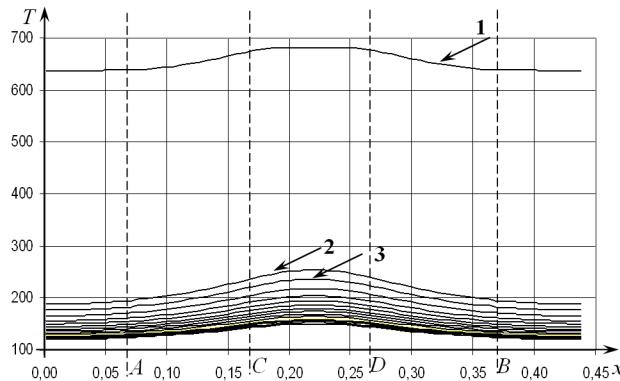


Рис. 6. Распределение температуры по поверхности отражателя.

Была построена методика расчета сопряженной задачи, позволяющая учесть совместное протекание процессов гидродинамики и лучистого теплообмена. На ее основе был реализован численный метод, сходимость которого подтверждается проведенными расчетами, а адекватность проверяется согласованием полученных в ходе вычислительного эксперимента результатов с зависимостями тестовых задач. Построенный и реализованный метод решения сопряженной задачи теплообмена позволяет находить распределения температур для выбранной конфигурации инфракрасного нагревателя, что позволяет делать выводы о работоспособности и надежности его конструкции. В частности, было установлено, что между излучателем и отражателем в плоскопараллельном зазоре реализовываются повышенные потоки излучения, что может привести к сильному перегреву элементов конструкции.

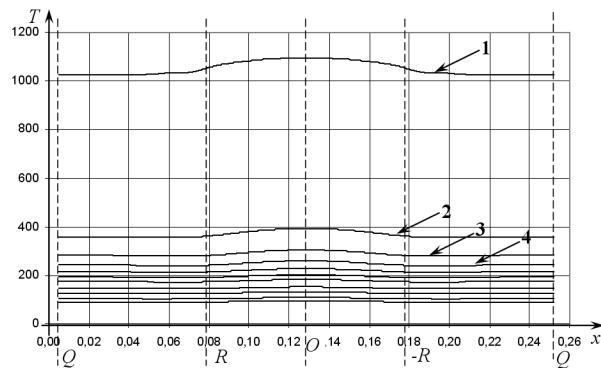


Рис. 7. Распределение температуры по периметру излучателя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа: Учеб. для вузов. — 5-е изд. — М.: Наука, 1978. — 736 с.
2. Исаченко В. П., Осипова В. А., Сукомел А. С. Теплопередача. — М.: Энергоиздат, 1981. — 416 с.
3. Абрамович Г. Н., Крашенинников С. Ю., Секундов А. Н. Турбулентные течения при воздействии объемных сил и неавтомодельности. — М.: Машиностроение, 1975. — 96 с.
4. Вологдина М. С. Обоснование методики расчета процессов в инфракрасном нагревателе // Интеллектуальные системы в производстве. 2007. — № 2. — С. 13–20.
5. Уонг Х. Основные формулы и данные по теплообмену для инженеров. — М.: Атомиздат, 1979. — 216 с.
6. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. — М.: Энергоиздат, 1984. — 150 с.

Поступила в редакцию 26.06.09

M. S. Vologdina

Numerical simulation of processes of gazdynamic and heat exchange in the infared heater with not round pipe

It is considered associate problem of heat-exchange, which we must solve at determination of parameters of a radiant heater. It is resulted a statement of a problem for three-dimensional turbulent current in pipe of emitter with provision for presence radiant heat-exchange with reflector and external heat-exchange with surrounding ambience. It is organized a calculation of delivered problems.

Keywords: associate problem of heat-exchange, the equations of heat balance, system of Navier–Stokes equations.

Mathematical Subject Classifications: 76D05, 80A20

Вологдина Мария Сергеевна, старший преподаватель кафедры высшей математики, Ижевский государственный технический университет, 426069, Россия, г. Ижевск, ул. Студенческая, 7 (корп. 1), E-mail: riya-ma@yandex.ru