ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА 2009. Вып. 4

УДК 517.5

© *В. И. Родионов*

ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ ПОДПРОСТРАНСТВ ПРОСТРАНСТВА ПРЕРЫВИСТЫХ ФУНКЦИЙ

В пространстве прерывистых функций исследовано параметрическое семейство подпространств специального вида и подпространство, представляющее их пересечение. Оно содержит в себе пространство функций ограниченной вариации. Исследована решетка подпространств, зависящая от параметра. Исследованы вопросы существования интеграла Римана–Стилтьеса на элементах подпространств. Доказана полнота подпространств (в каждом подпространстве используется собственная норма). Исследованы соотношения между нормами.

Ключевые слова: прерывистая функция, интеграл Римана–Стилтьеса, банахова алгебра.

Введение

Непрерывные функции $x : K \to \mathbb{C}$, где K — это отрезок или интервал, обладают достаточно высокой степенью регулярности («порядка»), заключающейся в том, что близость аргументов влечет близость значений непрерывной функции. «Не слишком разрывные» прерывистые функции тоже обладают хорошей регулярностью (в англоязычной литературе они так и называются — regulated functions, то есть упорядоченные функции). Они обладают тем свойством, что в каждой точке $t \in K$ определены три значения $x(t-0)$, $x(t)$ и $x(t+0)$, что позволяет конструировать другие сопутствующие атрибуты функций и получать новые результаты.

Настоящая работа продолжает цикл публикаций [1–4]. В силу специфики этих работ изложение ведется в терминах алгебр и подалгебр.

§ 1. Алгебра $\mathrm{G}[a, b]$ прерывистых функций

1.1. Обозначения, определения и вспомогательные утверждения

Зафиксируем отрезок $K \doteq [a, b]$ и через $\mathrm{G} \doteq \mathrm{G}(K) \doteq \mathrm{G}[a, b]$ обозначим пространство *прерывистых* (см. [5, с. 16]) функций, то есть функций $x : K \to \mathbb{C}$, обладающих конечными пределами $x(t-0) \doteq \lim\limits_{\tau \to t-0} x(\tau)$ при всех $t \in (a, b]$ и $x(t+0) \doteq \lim\limits_{\tau \to t+0} x(\tau)$ при всех $t \in [a, b)$. Пространство G, наделенное естественной операцией умножения функций, является алгеброй над полем $\mathbb{C}$, и в дальнейшем мы будем называть G как пространством, так и алгеброй. Через G_L обозначим подпространство (подалгебру) в G, состоящее из тех функций, что $x(t-0) = x(t)$ при $t \in (a, b]$ и $x(a+0) = x(a)$. Симметричное подпространство (подалгебра) G_R состоит из тех функций, что $x(t+0) = x(t)$ при $t \in [a, b)$ и $x(b-0) = x(b)$. Функции из G_L будем называть непрерывными слева, а функции из G_R — непрерывными справа прерывистыми функциями. Через G_0 обозначим пространство (алгебру) таких функций $x : K \to \mathbb{C}$, что при любом $\varepsilon > 0$ множество $\{t \in K : |x(t)| \geqslant \varepsilon\}$ состоит из конечного числа точек. Нет никаких ограничений для того, чтобы считать, что функции x вещественнозначны, то есть $x : K \to \mathbb{R}$, — читатель может так и поступать, однако мы будем вести изложение для комплекснозначных функций, отступая от этого принципа лишь в исключительных случаях. Отметим еще, что в [5] дается определение прерывистых функций, действующих из K в произвольное банахово пространство.

Функция $x : K \to \mathbb{C}$ называется *ступенчатой*, если существует такое конечное разбиение $a = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n = b$, что на каждом интервале (τ_{k-1}, τ_k), $k = 1, \ldots, n$, функция x тождественно равна константе $c_k \in \mathbb{C}$. Очевидно, всякая ступенчатая функция является прерывистой. Более того, справедливо

Утверждение 1 (см. [5, с. 16]). *Для функции* $x : [a,b] \to \mathbb{C}$ *следующие утверждения эквивалентны:*

1) $x \in \mathrm{G}[a,b]$ *;*

2) x *есть равномерный (на* $[a,b]$ *) предел последовательности ступенчатых функций;*

3) *для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое конечное разбиение* $a = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n = b$, *что при всех* $k = 1, \ldots, n$ *справедливо* $\sup\limits_{\tau, s \,\in\, (\tau_{k-1}, \tau_k)} |x(s) - x(\tau)| < \varepsilon$.

Третье утверждение теоремы означает, что колебание функции x на каждом интервале (τ_{k-1}, τ_k) не превышает ε.

Следствие 1. *Равномерный предел последовательности прерывистых функций есть функция прерывистая.*

Теорема 1 (см. [5, с. 16]). *Если* $x \in \mathrm{G}[a,b]$, *то* x *ограничена и измерима, а само пространство* $\mathrm{G}[a,b]$ *банахово по норме* $\|x\| \doteq \sup\limits_{t \,\in\, [a,b]} |x(t)|$ *(более того,* $\mathrm{G}[a,b]$ *является банаховой алгеброй) и является замыканием пространства ступенчатых функций по* sup*-норме.*

Действительно, так как $x \in \mathrm{G}(K)$, то в топологии равномерной сходимости существует сколь угодно близкая к x ступенчатая функция $y : K \to \mathbb{C}$, которая, очевидно, ограничена, поэтому и x ограничена. Поскольку всякая ступенчатая функция измерима, то и x измерима (как предел последовательности измеримых функций). Наконец, если последовательность $\{x_n\}$, $x_n \in \mathrm{G}(K)$, фундаментальна по sup-норме, то она равномерно (на K) сходится в себе и, следовательно, равномерно сходится к некоторой функции $x : K \to \mathbb{C}$, причем в силу следствия 1 справедливо включение $x \in \mathrm{G}(K)$.

Лемма 1 (см. [5, с. 17]). *Если* $x \in \mathrm{G}[a,b]$ *и* $\varepsilon > 0$, *то каждое из множеств*

$$\bigl\{t \in (a,b] : \ |x(t-0) - x(t)| \geqslant \varepsilon\bigr\} \quad \text{и} \quad \bigl\{t \in [a,b) : \ |x(t+0) - x(t)| \geqslant \varepsilon\bigr\}$$

состоит из конечного числа точек.

Теорема 2 (см. [5, с. 17]). *Множество* $T(x)$, *состоящее из всех точек разрыва прерывистой функции* $x \in \mathrm{G}$, *не более чем счетно.*

В силу леммы 1 точки множества $T(x)$ (это обозначение применяем на протяжении всей работы) легко поддаются перечислению (последовательно берем значения $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$).

Утверждение 2. *Если функция* $x : [a,b] \to \mathbb{C}$ *кусочно непрерывна, то* $x \in \mathrm{G}$.

Мы называем функцию x кусочно непрерывной на отрезке (и пишем $x \in \mathrm{KC}[a,b]$), если она имеет на нем только конечное множество точек разрыва и притом все они первого рода.

Утверждение 3. *Если функция* $x : [a,b] \to \mathbb{C}$ *имеет ограниченное изменение, то есть* $x \in \mathrm{BV}[a,b]$, *то* $x \in \mathrm{G}[a,b]$.

В соответствии с [6, с. 206] у функции ограниченной вариации множество точек разрыва не более чем счетно, причем все разрывы первого рода. Следовательно, $\mathrm{BV}[a,b] \subset \mathrm{G}[a,b]$.

Утверждение 4. *Если* $x \in \mathrm{G}[a,b]$, *то* x *интегрируема по Риману и, следовательно, интегрируема по Лебегу.*

Действительно, поскольку всякая функция $x \in \mathrm{G}[a,b]$ ограничена и имеет не более чем счетное множество точек разрыва, то x интегрируема по Риману.

Таким образом, имеет место диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{AC} \to \mathrm{CBV} & \to & \mathrm{C} \to \mathrm{KC} & & & & \\ & \searrow & & \searrow & & & \\ & & \mathrm{BV} & \to & \mathrm{G} & \to \mathrm{R} \to \mathrm{L}\,, & \end{array} \tag{1.1}$$

где $\mathrm{C}, \mathrm{AC}, \mathrm{CBV}, \mathrm{R}$ и L — пространства непрерывных функций, абсолютно непрерывных функций, непрерывных функций ограниченной вариации, интегрируемых по Риману и интегрируемых по Лебегу функций соответственно. Стрелки означают отношение включения пространств. Все включения в диаграмме (1.1) строгие. Приведем подтверждающие примеры.

Пример 1. Пусть функция $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ такова, что $x(0) = 0$, $x(t) = t\{\frac{1}{t}\}$ при $t \neq 0$ (выражение $\{\sigma\}$ обозначает дробную часть $\sigma \in \mathbb{R}$). Если $t \in (\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\,]$, $k = 1, 2, \ldots$, то имеем $x(t) = 1 - kt$, следовательно, x непрерывна слева, разрывна справа в точках $\tau_k = \frac{1}{k+1}$, то есть $T(x) = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$, и имеет неограниченное изменение (скачки функции образуют гармонический ряд). Таким образом, $x \in \mathrm{G}[0,1]$, однако $x \notin \mathrm{BV}[0,1]$. Кроме того, $x \notin \mathrm{KC}[0,1]$.

Пример 2. Пусть функция $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ такова, что $x(0) = 0$, $x(t) = (-1)^{[1/t]}$ при $t \neq 0$ (выражение $[\sigma]$ обозначает целую часть числа $\sigma \in \mathbb{R}$). Если $t \in (\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\,]$, $k = 1, 2, \ldots$, то $x(t) = (-1)^k$, следовательно, функция x разрывна в нуле и в точках $\tau_k = \frac{1}{k+1}$. Таким образом, $x \in \mathrm{R}[0,1]$, однако $x \notin \mathrm{G}[0,1]$ (так как нет предела $x(0+0)$).

Прерывистые функции можно интегрировать не только в смысле Римана, но и в более расширительном смысле: в смысле Римана–Стилтьеса, Перрона–Стилтьеса [7], в квазиинтегральном смысле [8, 9]. Приведем формулировку для интеграла Римана–Стилтьеса [10].

Теорема 3. *Для любых $x \in \mathrm{G}[a,b]$ и $y \in \mathrm{CBV}[a,b]$ интегралы Римана–Стилтьеса $\int_a^b x dy$ и $\int_a^b y\, dx$ существуют и справедливы оценки*

$$\Big|\int_a^b x dy\Big| \leqslant \|x\| \cdot \operatorname*{Var}_K y \qquad \text{и} \qquad \Big|\int_a^b x dy\Big| \leqslant \sup_{t \in (a,b)} |x(t)| \cdot \operatorname*{Var}_K y.$$

Следствие 2. *Если последовательность $\{x_n\}$, $x_n \in \mathrm{G}[a,b]$, сходится по $\sup$-норме к (прерывистой) функции $x \in \mathrm{G}[a,b]$, а функция $y \in \mathrm{CBV}[a,b]$, то $\lim\limits_n \int_a^b x_n dy = \int_a^b x dy$.*

Следствие 3. *Если $x \in \mathrm{G}[a,b]$, а последовательность $\{y_n\}$ и функция y таковы, что $y_n, y \in \mathrm{CBV}[a,b]$ и $\operatorname*{Var}_K (y_n - y) \underset{n}{\to} 0$, то $\lim\limits_n \int_a^b x dy_n = \int_a^b x dy$.*

Следствие 4. *Если $x \in \mathrm{G}[a,b]$, $y \in \mathrm{CBV}[a,b]$, $z(t) \doteq \int_\alpha^t x dy$, то $z \in \mathrm{CBV}[a,b]$ (точка α из $[a,b]$ фиксирована). В частности, если $y \in \mathrm{AC}[a,b]$, то $z \in \mathrm{AC}[a,b]$.*

Для произвольного разбиения $a = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n = b$ имеем

$$\sum_{k=1}^n \big|z(\tau_k) - z(\tau_{k-1})\big| = \sum_{k=1}^n \Big|\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} x dy\Big| \leqslant \|x\| \cdot \operatorname*{Var}_K y.$$

Если $t,\, t+\Delta t\in[a,b]$ (можно считать, что $\Delta t>0$), то

$$\bigl|z(t+\Delta t)-z(t)\bigr|=\Bigl|\int_t^{t+\Delta t}x dy\,\Bigr|\leqslant\|x\|\cdot\operatorname*{Var}_{[t,t+\Delta t]}y\underset{\Delta t\to0}{\longrightarrow}0.$$

Наконец, если $y\in\mathrm{AC}[a,b]$, то вещественнозначная неубывающая функция $v(t)=\operatorname*{Var}_{s\in[a,t]}y(s)$ также абсолютно непрерывна на $[a,b]$ (аналогичное утверждение для вещественнозначных функций y можно найти в [11, с. 344]), поэтому для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что какова бы ни была система попарно непересекающихся интервалов (a_k,b_k), $k=1,\ldots,n$, такая, что $\sum\limits_{k=1}^n(b_k-a_k)<\delta$, выполнено $\sum\limits_{k=1}^n\bigl(v(b_k)-v(a_k)\bigr)<\varepsilon$. Для этой же системы интервалов

$$\sum_{k=1}^n\bigl|z(b_k)-z(a_k)\bigr|=\sum_{k=1}^n\Bigl|\int_{a_k}^{b_k}x dy\,\Bigr|\leqslant\|x\|\cdot\sum_{k=1}^n\operatorname*{Var}_{[a_k,b_k]}y=\|x\|\cdot\sum_{k=1}^n\bigl(v(b_k)-v(a_k)\bigr)<\varepsilon\,\|x\|.$$

Утверждение 5. *Пусть A — квадратная матрица порядка n с элементами $A_{ij}\in\mathbb{C}$, скалярная функция $q\in\mathrm{CBV}[a,b]$. Для $\alpha\in[a,b]$ и вектор-функций $x,y\in\mathrm{G}^n[a,b]$ справедливо*

$$y(t)=x(t)-\int_\alpha^t Ax\,dq\iff x(t)=y(t)-\int_\alpha^t\bigl[\,d\,e^{A(q(t)-q(s))}\,\bigr]\,y(s)$$

$$\iff x(t)=e^{Aq(t)}\Bigl[e^{-Aq(\alpha)}\,y(\alpha)+\int_\alpha^t e^{-Aq(\cdot)}\,dy\Bigr]. \tag{1.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если ввести обозначение $z\doteq e^{-Aq(\cdot)}\,x$, то

$$y(t)=e^{Aq(t)}\,z(t)-\int_\alpha^t Ae^{Aq(\cdot)}z\,dq=e^{Aq(t)}\,z(t)-\int_\alpha^t\bigl[\,d\,e^{Aq(\cdot)}\,\bigr]\,z=e^{Aq(\alpha)}\,z(\alpha)+\int_\alpha^t e^{Aq(\cdot)}\,dz,$$

$$z(t)-z(\alpha)=\int_\alpha^t dz=\int_\alpha^t e^{-Aq(s)}\,d\Bigl(\int_\alpha^s e^{Aq(\cdot)}\,dz\Bigr)=\int_\alpha^t e^{-Aq(\cdot)}\,dy.$$

Возвращаясь к исходной переменной x (с учетом $x(\alpha)=y(\alpha)$), получаем третье равенство, а второе получается из него интегрированием по частям.

1.2. Алгебры $\mathrm{G}_0[a,b]$, $\mathrm{G}_L[a,b]$ и $\mathrm{G}_R[a,b]$

Лемма 2. *Для функции $x:[a,b]\to\mathbb{C}$ следующие утверждения эквивалентны:*

a) $x\in\mathrm{G}_0$;

b) $x\in\mathrm{G}$ *и* $x(t-0)=0$ *для всех* $t\in(a,b]$;

c) $x\in\mathrm{G}$ *и* $x(t+0)=0$ *для всех* $t\in[a,b)$;

d) $x\in\mathrm{G}$ *и* $\displaystyle\int_\tau^t x(s)\,ds=0$ *для всех* $\tau,t\in[a,b]$;

e) $x\in\mathrm{G}$ *и* $\displaystyle\int_\tau^t x dy=0$ *для всех* $\tau,t\in[a,b]$ *и любых* $y\in\mathrm{CBV}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равносильность утверждений *a) – d)* показана в [5, с. 19], а импликация *e) ⇒ d)* тривиальна.

a) ⇒ e). Зафиксируем $\tau,t\in[a,b]$ (считаем $\tau<t$), функцию $y\in\mathrm{CBV}$ и $\varepsilon>0$. Точки τ и t и все точки конечного множества $\bigl\{s\in[\tau,t]:|x(s)|\geqslant\varepsilon\bigr\}$ порождают такое разбиение $\tau=s_0<s_1<\ldots<s_n=t$, что $|x(s)|<\varepsilon$ для всех $s\in(s_{k-1},s_k)$, $k=1,\ldots,n$. Следовательно,

$$\Bigl|\int_\tau^t x dy\,\Bigr|\leqslant\sum_{k=1}^n\Bigl|\int_{s_{k-1}}^{s_k}x dy\,\Bigr|\leqslant\varepsilon\sum_{k=1}^n\operatorname*{Var}_{[s_{k-1},s_k]}y=\varepsilon\operatorname*{Var}_{[\tau,t]}y,$$

поэтому в силу произвольности $\varepsilon>0$ справедливо равенство $\displaystyle\int_\tau^t x dy=0$.

Пример 3. Примером прерывистой функции из G_0 служит функция Римана, то есть функция $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ такая, что $x = \frac{1}{n}$ в каждой не равной нулю рациональной точке $r = \frac{m}{n}$ $(m \neq 0)$, где $\frac{m}{n}$ — несократимая рациональная дробь, и $x = 0$ во всех остальных точках отрезка $[0,1]$. Эта функция разрывна во всех нетривиальных рациональных точках, а в иррациональных точках она непрерывна.

Лемма 3. *Пространства* G_0, G_L *и* G_R *замкнуты в* G *относительно* sup*-нормы и, следовательно, банаховы.*

Формулировка леммы совпадает с утверждениями из [5, с. 20], однако там через G_L обозначено несколько иное подпространство: оно состоит из тех функций, что $x(t-0) = x(t)$ при $t \in (a,b]$ и $x(a) = 0$ (аналогично определяется пространство G_R). Это же замечание относится к приводимой ниже лемме.

Лемма 4. *Произвольная функция* $x \in \mathrm{G}$ *единственным образом представима в виде суммы* $x = x_L + x_0$ *двух функций* $x_L \in \mathrm{G}_L$ *и* $x_0 \in \mathrm{G}_0$*. Симметричное представление* $x = x_R + x_0$*, где* $x_R \in \mathrm{G}_R$*,* $x_0 \in \mathrm{G}_0$*, также имеет место.*

Замечание 1. В процессе доказательства леммы 4 в [5] устанавливается, что $\mathrm{G}_L \cap \mathrm{G}_0 = \{0\}$. Таким образом, леммы 3 и 4 позволяют представить пространство G в виде прямой суммы двух замкнутых подпространств: $\mathrm{G} = \mathrm{G}_L \oplus \mathrm{G}_0$ (используем определение прямой суммы из [12, с. 120]) или $\mathrm{G} = \mathrm{G}_R \oplus \mathrm{G}_0$. При этом операторы $\mathrm{P}, \mathrm{Q} : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$,

$$\mathrm{P} : x(t) \to x_L(t) \doteq \begin{cases} x(a+0), & t = a \\ x(t-0), & t \in (a,b] \end{cases}, \qquad \mathrm{Q} : x(t) \to x_R(t) \doteq \begin{cases} x(t+0), & t \in [a,b) \\ x(b-0), & t = b \end{cases},$$

обладают следующими свойствами: $\operatorname{Im}\mathrm{P} = \mathrm{G}_L$, $\operatorname{Ker}\mathrm{P} = \mathrm{G}_0$, $\operatorname{Im}\mathrm{Q} = \mathrm{G}_R$, $\operatorname{Ker}\mathrm{Q} = \mathrm{G}_0$,

$$\mathrm{P}^2 = \mathrm{P}, \quad \mathrm{PQ} = \mathrm{P}, \quad \mathrm{QP} = \mathrm{Q}, \quad \mathrm{Q}^2 = \mathrm{Q}. \tag{1.3}$$

Проекторы P и Q непрерывны по sup-норме, что следует из очевидных неравенств

$$\|\mathrm{P}x\| \leqslant \|x\| \quad \text{и} \quad \|\mathrm{Q}x\| \leqslant \|x\| \qquad \forall x \in \mathrm{G}. \tag{1.4}$$

В частности, $\|\mathrm{P}x\| = \|\mathrm{Q}x\|$ для всех $x \in \mathrm{G}$. Действительно, в соответствии с (1.3) и (1.4) справедливо $\|\mathrm{P}x\| = \|\mathrm{PQ}x\| \leqslant \|\mathrm{Q}x\|$ и, аналогично, $\|\mathrm{Q}x\| \leqslant \|\mathrm{P}x\|$.

Замечание 2. Если $x \in \mathrm{G}_0$, а $y \in \mathrm{G}$, то $xy = yx \in \mathrm{G}_0$. Действительно, если $y(t) \equiv 0$, то утверждение очевидно, если же $y(t) \not\equiv 0$, то $\|y\| > 0$, поэтому для любого $\varepsilon > 0$ множество $\{t \in K : |x(t)\; y(t)| \geqslant \varepsilon\} \subseteq \{t \in K : |x(t)| \geqslant \frac{\varepsilon}{\|y\|}\}$ конечно, то есть $xy \in \mathrm{G}_0$. Таким образом, G_0 является двусторонним идеалом в G, причем если функции $x, y \in \mathrm{G}$ считать эквивалентными $(x \sim y)$ при $x - y \in \mathrm{G}_0$, то в соответствии с замечанием 1 справедливо $\mathrm{G}_L \approx \mathrm{G}/\mathrm{G}_0 \approx \mathrm{G}_R$. Другими словами, в каждом классе эквивалентности имеются ровно одна непрерывная слева и ровно одна непрерывная справа прерывистые функции ($x \sim \mathrm{P}x \sim \mathrm{Q}x$). Заметим также, что операторы P и Q являются эндоморфизмами алгебры G, а их ядро $\operatorname{Ker}\mathrm{P} = \operatorname{Ker}\mathrm{Q} = \mathrm{G}_0$ является двусторонним идеалом этой алгебры.

Замечание 3. Всякий линейный непрерывный функционал $\Phi : \mathrm{G}_L \to \mathbb{C}$ допускает представление в виде интеграла Душника–Стилтьеса [5, с. 38], то есть существует такая функция Q ограниченной вариации, что $\Phi(x) = \displaystyle\int_K x\,dQ$ для любой $x \in \mathrm{G}_L$. Там же приводится общий вид линейного непрерывного функционала в пространстве G. Заметим, что такое представление отнюдь не единственно возможное; в частности, существует представление функционала Φ через интеграл Перрона–Стилтьеса (см., например, [13]).

§ 2. Алгебры $\mathrm{G}^T[a,b]$, $\Gamma[a,b]$ и $\mathrm{BV}[a,b]$

Конечное или счетное множество $T \doteq \{\tau_1, \tau_2, \ldots\}$ попарно различных точек $\tau_k \in K$ будем называть *разбиением* отрезка K, а совокупность всех разбиений K обозначим через $\mathbb{T}(K)$. Пустое множество мы также включаем в $\mathbb{T}(K)$ — оно является наименьшим элементом частичного порядка на $\mathbb{T}(K)$, заданного естественным образом: полагаем, что разбиение T предшествует разбиению S, если $T \subseteq S$.

Зафиксируем $T \in \mathbb{T}(K)$ и для любой функции $x \in \mathrm{G}$ введем обозначения:

$$x_k^- \doteq x(\tau_k - 0) - x(\tau_k), \quad x_k^+ \doteq x(\tau_k + 0) - x(\tau_k) \quad \forall\, \tau_k \in T. \tag{2.1}$$

Полагаем $x_k^- = 0$, если $a = \tau_k$ для некоторого k, и $x_k^+ = 0$, если $b = \tau_k$ для некоторого k.

Через $\lceil x \rceil_T$ обозначим ряд (и его сумму, если ряд сходится)

$$\lceil x \rceil_T \doteq \sum_{\tau_k \in T} (|x_k^-| + |x_k^+|), \tag{2.2}$$

а через $\mathrm{G}^T \doteq \mathrm{G}^T[a,b]$ обозначим совокупность всех тех функций $x \in \mathrm{G}$, что ряд $\lceil x \rceil_T$ сходится. Поскольку T — не более чем счетное множество, то ряд $\lceil x \rceil_T$ трактуется естественным образом: $|x_1^-| + |x_1^+| + |x_2^-| + |x_2^+| + \ldots$. Относительно естественных операций сложения и умножения G^T является алгеброй над $\mathbb{C}$. Действительно, если $\lambda \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathrm{G}^T$, $u = \lambda x$, $v = x + y$, $w = xy$, то справедливы равенства

$$\begin{gathered} u_k^- = \lambda x_k^-, \quad u_k^+ = \lambda x_k^+, \quad v_k^- = x_k^- + y_k^-, \quad v_k^+ = x_k^+ + y_k^+, \\ w_k^- = x(\tau_k - 0)\, y(\tau_k - 0) - x(\tau_k)\, y(\tau_k), \quad w_k^+ = x(\tau_k + 0)\, y(\tau_k + 0) - x(\tau_k)\, y(\tau_k), \end{gathered} \tag{2.3}$$

поэтому $w_k^- = x(\tau_k - 0)\, y_k^- + x_k^-\, y(\tau_k)$, $\quad w_k^+ = x(\tau_k + 0)\, y_k^+ + x_k^+\, y(\tau_k)$,

$$\lceil u \rceil_T = |\lambda| \cdot \lceil x \rceil_T < \infty, \quad \lceil v \rceil_T \leqslant \lceil x \rceil_T + \lceil y \rceil_T < \infty, \quad \lceil w \rceil_T \leqslant \|x\| \cdot \lceil y \rceil_T + \lceil x \rceil_T \cdot \|y\| < \infty.$$

Следовательно, $u, v, w \in \mathrm{G}^T$.

Если T — конечное множество, то справедливо равенство $\mathrm{G}^T = \mathrm{G}$, в частности, $\mathrm{G}^{\varnothing} = \mathrm{G}$. Всякая функция ограниченной вариации принадлежит G^T, каково бы ни было $T \in \mathbb{T}(K)$. Действительно, если $x \in \mathrm{BV}$ и $S \doteq T \cap T(x)$, то $x_k^- = x_k^+ = 0$ для любого $\tau_k \in T \backslash S$, поэтому $\lceil x \rceil_T = \lceil x \rceil_S \leqslant \lceil x \rceil_{T(x)} < \infty$, следовательно, $x \in \mathrm{G}^T$. Таким образом, для любого T справедливы включения $\mathrm{BV} \subset \mathrm{G}^T \subseteq \mathrm{G}$, а поскольку любая непрерывная функция, имеющая неограниченное изменение, принадлежит G^T, то первое включение — строгое. Более того, между BV и G^T заключено пространство $\Gamma \doteq \Gamma[a,b]$, состоящее из тех функций $x \in \mathrm{G}$, что ряд $\lceil x \rceil_{T(x)}$ сходится. Примером функции из G, не принадлежащей Γ, служит функция из примера 1. Так же, как это сделано для пространств G^T (см. (2.3)), доказывается, что Γ — это алгебра. Действительно, если $T \doteq T(x) \cup T(y)$, то $T(u) \subseteq T(x)$, $T(v) \subseteq T$, $T(w) \subseteq T$,

$$\lceil u \rceil_{T(u)} = |\lambda|\, \lceil x \rceil_{T(x)} < \infty, \quad \lceil v \rceil_{T(v)} = \lceil v \rceil_T \leqslant \lceil x \rceil_T + \lceil y \rceil_T = \lceil x \rceil_{T(x)} + \lceil y \rceil_{T(y)} < \infty,$$

$$\lceil w \rceil_{T(w)} = \lceil w \rceil_T \leqslant \|x\|\, \lceil y \rceil_T + \lceil x \rceil_T \|y\| = \|x\|\, \lceil y \rceil_{T(y)} + \lceil x \rceil_{T(x)} \|y\| < \infty.$$

Заметим, что $\mathrm{KC} \subset \Gamma$, то есть имеет место диаграмма включения подалгебр алгебры G прерывистых функций:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{CBV} & \to & \mathrm{C} \to \mathrm{KC} & & & & \\ & \searrow & & \searrow & & & \\ & & \mathrm{BV} & \to & \Gamma & \to & \left\{ \mathrm{G}^T \right\}_{T \in \mathbb{T}(K)} \to \mathrm{G}\,. \end{array} \tag{2.4}$$

Относительно решетки пространств $\{\, \mathrm{G}^T \,\}$ в зависимости от параметра $T \in \mathbb{T}(K)$ можно сказать следующее. Назовем разбиения T и S *эквивалентными* ($T \sim S$), если их симметрическая разность конечна, то есть $\operatorname{card}(T\Delta S) < \infty$. Рефлексивность и симметричность очевидны, а транзитивность следует из легко проверяемого тождества $T\Delta S = (T\Delta R)\,\Delta\,(R\Delta S)$. Очевидно, все конечные разбиения эквивалентны между собой.

Лемма 5. *Пусть* $T, S \in \mathbb{T}(K)$.
1. *Если* $S \subseteq T$, *то* $\mathrm{G}^T \subseteq \mathrm{G}^S$.
2. $\mathrm{G}^T = \mathrm{G}^S$ *тогда и только тогда, когда* $T \sim S$.
3. *Если* $U = T \cup S$, *то* $\mathrm{G}^T \cap \mathrm{G}^S = \mathrm{G}^U$.
4. *Если* $V = T \cap S$, *то* $\mathrm{G}^T \cup \mathrm{G}^S \subseteq \mathrm{G}^V$.

Доказательство. 1. Если $x \in \mathrm{G}^T$ и $S \subseteq T$, то $\lceil x \rceil_S \leqslant \lceil x \rceil_T < \infty$ и $x \in \mathrm{G}^S$.

2. Пусть разбиение $T\Delta S$ конечно. Справедливо тождество $T\Delta S = Q \cup R$, где $Q \doteq T\backslash S$, $R \doteq S\backslash T$, следовательно, очевидное равенство $\lceil x \rceil_T + \lceil x \rceil_R = \lceil x \rceil_S + \lceil x \rceil_Q$ и конечность множеств Q и R означают, что ряды $\lceil x \rceil_T$ и $\lceil x \rceil_S$ сходятся или расходятся одновременно.

Обратно. Если T и S не эквивалентны, то по крайней мере одно из разбиений Q или R бесконечно. Допустим, что это Q. Тогда функция x, у которой $x(\tau_k) = \frac{1}{k}$ при $\tau_k \in Q$ и $x(t) = 0$ при $t \in K\backslash Q$, принадлежит G^S, но не принадлежит G^T. Действительно, включение $x \in \mathrm{G}_0$ очевидно, поэтому в силу леммы 2 справедливо $x(\tau_k - 0) = 0$ при $\tau_k \in S \cap (a, b]$ и $x(\tau_k + 0) = 0$ при $\tau_k \in S \cap [a, b)$. Кроме того, $x(\tau_k) = 0$ для всех $\tau_k \in S$, следовательно, $x_k^- = x_k^+ = 0$ для всех $\tau_k \in S$, поэтому $x \in \mathrm{G}^S$. С другой стороны, $\lceil x \rceil_T \geqslant \lceil x \rceil_Q = 2\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, поэтому $x \notin \mathrm{G}^T$.

3. Включения $T \subseteq U$ и $S \subseteq U$ влекут включения $\mathrm{G}^U \subseteq \mathrm{G}^T$ и $\mathrm{G}^U \subseteq \mathrm{G}^S$, следовательно, $\mathrm{G}^U \subseteq \mathrm{G}^T \cap \mathrm{G}^S$. Если же $x \in \mathrm{G}^T \cap \mathrm{G}^S$, то $x \in \mathrm{G}^T$ и $x \in \mathrm{G}^S$, поэтому $\lceil x \rceil_T < \infty$ и $\lceil x \rceil_S < \infty$, а поскольку $\lceil x \rceil_U \leqslant \lceil x \rceil_T + \lceil x \rceil_S < \infty$, то $x \in \mathrm{G}^U$.

4. Поскольку $V \subseteq T$ и $V \subseteq S$, то $\mathrm{G}^T \subseteq \mathrm{G}^V$ и $\mathrm{G}^S \subseteq \mathrm{G}^V$, поэтому $\mathrm{G}^T \cup \mathrm{G}^S \subseteq \mathrm{G}^V$. $\square$

Функция Хевисайда $\theta(t) \doteq \begin{cases} 0 & , \ t \leqslant 0 \\ 1 & , \ t > 0 \end{cases}$ и произвольная точка $\tau \in K$ порождают ступенчатые функции $\xi_\tau(t) \doteq -\,\theta(\tau - t)$ и $\eta_\tau(t) \doteq \theta(t - \tau)$. В дальнейшем будем использовать следующие обозначения: если $\tau = 0 \in K$, то $\xi(\cdot) \doteq \xi_0(\cdot)$ и $\eta(\cdot) \doteq \eta_0(\cdot)$, а если $\tau = \tau_k \in T$, то $\xi_k(\cdot) \doteq \xi_{\tau_k}(\cdot)$ и $\eta_k(\cdot) \doteq \eta_{\tau_k}(\cdot)$. Другими словами,

$$\xi_k(t) = \begin{cases} -1 & , \ t < \tau_k \\ 0 & , \ t \geqslant \tau_k \end{cases}, \qquad \eta_k(t) = \begin{cases} 0 & , \ t \leqslant \tau_k \\ 1 & , \ t > \tau_k \end{cases}.$$

Легко проверить, что для всякой функции $x : K \to \mathbb{C}$, непрерывной в точке $\tau \in K$, и для любых $\alpha, \beta \in K$ существуют интегралы Римана–Стилтьеса $\int_\alpha^\beta x d\xi_\tau$ и $\int_\alpha^\beta x d\eta_\tau$, причем

$$\int_\alpha^\beta x d\xi_\tau = x(\tau)\int_\alpha^\beta d\xi_\tau \quad \text{и} \quad \int_\alpha^\beta x d\eta_\tau = x(\tau)\int_\alpha^\beta d\eta_\tau. \tag{2.5}$$

В дальнейшем мы будем иметь дело в основном с интегралами Римана–Стилтьеса и оговаривать название интеграла будем лишь в исключительных случаях.

Замечание 4. Для любых $\alpha \in K$ и $x \in \mathrm{G}^T$ функциональный ряд

$$x_T(t) \doteq x_T(t, \alpha) \doteq -\sum_{\tau_k \in T} x_k^- \int_\alpha^t d\xi_k + \sum_{\tau_k \in T} x_k^+ \int_\alpha^t d\eta_k \tag{2.6}$$

абсолютно и равномерно на K сходится, так как

$$\sum_{\tau_k \in T} \Big| x_k^- \int_\alpha^t d\xi_k \Big| + \sum_{\tau_k \in T} \Big| x_k^+ \int_\alpha^t d\eta_k \Big| \leqslant \lceil x \rceil_T < \infty.$$

Сумму ряда будем обозначать так же, как и сам ряд, — через $x_T(t)$. В случае $T = \varnothing$ полагаем $x_T(t) \equiv 0$. В соответствии с [11, с. 336] функции вида (2.6) будем называть *функциями скачков*. Там же отмечается, что $x_T \in \mathrm{BV}$ и

$$\operatorname{Var} x_T = \lceil x \rceil_T. \tag{2.7}$$

Здесь и в дальнейшем через $\operatorname{Var} y$ обозначаем полную вариацию функции y на отрезке K. Наряду с (2.6) определена функция

$$x^T(t) \doteq x^T(t, \alpha) \doteq x(t) - x_T(t), \tag{2.8}$$

также зависящая от параметра α. В дальнейшем мы считаем, что точка $\alpha \in K$ фиксирована, поэтому зависимость от α в обозначении функций x_T и x^T чаще всего будет отсутствовать. Заметим также, что ряд (2.6) более правильно следовало бы писать в виде

$$-\sum_{\tau_k \in T \cap (a,b]} x_k^- \int_\alpha^t d\xi_k + \sum_{\tau_k \in T \cap [a,b)} x_k^+ \int_\alpha^t d\eta_k,$$

подчеркивая его независимость от левого скачка функции x в точке a и от правого скачка в точке b, однако в соответствии с соглашением в (2.1) мы полагаем $x_k^- = 0$ при $\tau_k = a$ и $x_k^+ = 0$ при $\tau_k = b$, и в дальнейшем используем запись (2.6).

Замечание 5. Поскольку $x_T \in \mathrm{BV} \subset \mathrm{G}^T$, то и $x^T \in \mathrm{G}^T$. Более того, в соответствии с [11, с. 336] справедливы равенства $(x_T)_k^- = x_k^-$ и $(x_T)_k^+ = x_k^+$, поэтому $(x^T)_k^- = (x^T)_k^+ = 0$. Последнее равенство означает, в частности, что x^T непрерывна в каждой точке разбиения T. Таким образом,

$$\lceil x_T \rceil_T = \lceil x \rceil_T < \infty, \;\; \lceil x^T \rceil_T = 0, \;\; (x_T)_T = x_T, \;\; (x_T)^T = 0, \;\; (x^T)_T = 0, \;\; (x^T)^T = x^T. \tag{2.9}$$

Кроме того, легко показать, что если $x, y \in \mathrm{G}^T$ и $x, y \in \mathrm{G}^S$, то

$$(x_T)_S = x_{T \cap S}, \;\; (x_T)^S = x_{T \setminus S}, \;\; (x^T)_S = x_{S \setminus T}, \;\; (x^T)^S = x^{T \cup S}. \tag{2.10}$$

Действительно, согласно лемме 5 справедливо $x, y \in \mathrm{G}^{T \cup S}$, поэтому все функции в формулах определены. Если $z \doteq x_T$, $Q \doteq T \setminus S$, $P \doteq T \cap S$, $R \doteq S \setminus T$, то $x_T = x_Q + x_P$ и

$$(x_T)_S = z_S = z_P + z_R = (x_Q + x_P)_P + (x_T)_R = (x_P)_P = x_P = x_{T \cap S}.$$

Остальные формулы (2.10) легко выводятся из первой.

Замечание 6. Одновременно мы выяснили, что каждый из операторов $P_T : x \to x_T$ и $P^T : x \to x^T$ является проектором в G^T. Образ $\operatorname{Im} P^T$ состоит из функций, непрерывных в каждой точке $\tau_k \in T$, а ядро $\operatorname{Ker} P^T$ состоит из функций скачков вида

$$z(t) \doteq -\sum_{\tau_k \in T} g_k \int_\alpha^t d\xi_k + \sum_{\tau_k \in T} h_k \int_\alpha^t d\eta_k, \qquad \sum_{\tau_k \in T} (|g_k| + |h_k|) < \infty,$$

причем если $\tau_k = a$, то $g_k = 0$, а если $\tau_k = b$, то $h_k = 0$. Эти же пространства являются соответственно ядром и образом другого оператора, то есть $\operatorname{Ker} P_T = \operatorname{Im} P^T$ и $\operatorname{Im} P_T = \operatorname{Ker} P^T$.

Замечание 7. Если $x \in \Gamma$ [или если $x \in \mathrm{BV}$], то для всех T, таких, что $T \supseteq T(x)$, справедливо $x_T = x_{T(x)}$ и $x^T = x^{T(x)}$, причем $x^T \in \mathrm{C}$ [соответственно $x^T \in \mathrm{CBV}$]. Введя обозначения $x_c \doteq x_{T(x)}$ и $x^c \doteq x^{T(x)}$, обнаруживаем, что представление (2.8) при $x \in \mathrm{BV}$ совпадает с известным разложением Лебега функции ограниченной вариации на сумму непрерывной функции ограниченной вариации и функции скачков: $x = x^c + x_c$. Здесь функция скачков понимается в смысле [6, с. 206]. Таким образом, в пространстве Γ [или в BV] также определены проекторы $P_c : x \to x_c$ и $P^c : x \to x^c$, и их свойства идентичны свойствам операторов P_T и P^T. Кроме того, в BV имеет место равенство $\operatorname{Var} x = \operatorname{Var} x^c + \operatorname{Var} x_c$.

Формулы (2.3) порождают равенства $u_{_T} = \lambda x_{_T}$, $v_{_T} = x_{_T} + y_{_T}$, $u^T = \lambda x^T$, $v^T = x^T + y^T$, а для того чтобы найти формулы для $w_{_T}$ и w^T, следует доказать ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 6. *При* $k \neq m$ *справедливы формулы*

$$\int_\alpha^t d\xi_k \int_\alpha^t d\xi_m = \int_\alpha^{\tau_k} d\xi_m \int_\alpha^t d\xi_k + \int_\alpha^{\tau_m} d\xi_k \int_\alpha^t d\xi_m,$$

$$\int_\alpha^t d\xi_k \int_\alpha^t d\eta_m = \int_\alpha^{\tau_k} d\eta_m \int_\alpha^t d\xi_k + \int_\alpha^{\tau_m} d\xi_k \int_\alpha^t d\eta_m,$$

$$\int_\alpha^t d\eta_k \int_\alpha^t d\eta_m = \int_\alpha^{\tau_k} d\eta_m \int_\alpha^t d\eta_k + \int_\alpha^{\tau_m} d\eta_k \int_\alpha^t d\eta_m$$

и при всех k

$$\Big[\int_\alpha^t d\xi_k\Big]^2 = -\big(1 + 2\xi_k(\alpha)\big)\int_\alpha^t d\xi_k, \quad \Big[\int_\alpha^t d\eta_k\Big]^2 = \big(1 - 2\eta_k(\alpha)\big)\int_\alpha^t d\eta_k,$$

$$\int_\alpha^t d\xi_k \int_\alpha^t d\eta_k = -\eta_k(\alpha)\int_\alpha^t d\xi_k - \xi_k(\alpha)\int_\alpha^t d\eta_k.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Левая часть первой формулы равна

$$\int_\alpha^t \Big[\int_\alpha^t d\xi_k\Big] d\xi_m = \int_\alpha^t \Big[\int_s^t d\xi_k + \int_\alpha^s d\xi_k\Big] d\xi_m(s) = \int_\alpha^t \Big[\int_\alpha^s d\xi_m\Big] d\xi_k(s) + \int_\alpha^t \Big[\int_\alpha^s d\xi_k\Big] d\xi_m(s).$$

В последнем равенстве мы поменяли порядок интегрирования у первого слагаемого. Обе подынтегральные функции непрерывны в точках τ_k и τ_m соответственно, и нам остается лишь сослаться на формулы (2.5).

Вторая и третья формулы доказываются аналогично. Последние три формулы проверяются непосредственно, опираясь на тождества $\xi_k^2 = -\xi_k$, $\eta_k^2 = \eta_k$ и $\xi_k\eta_k = 0$ соответственно.

Лемма 7. *Пусть* $T \in \mathbb{T}(K)$, $\alpha \in K$ *и ограниченная функция* $x : K \to \mathbb{C}$ *непрерывна в каждой точке* $\tau_k \in T$. *Для любой функции скачков*

$$y(\tau) \doteq -\sum_{\tau_k \in T} y_k^- \int_\alpha^\tau d\xi_k + \sum_{\tau_k \in T} y_k^+ \int_\alpha^\tau d\eta_k, \qquad \sum_{\tau_k \in T} (|y_k^-| + |y_k^+|) < \infty,$$

существует интеграл $\displaystyle\int_\alpha^t x dy$ *(при любом* $t \in K$*), и он равен функции скачков*

$$z(t) \doteq -\sum_{\tau_k \in T} x(\tau_k)\, y_k^- \int_\alpha^t d\xi_k + \sum_{\tau_k \in T} x(\tau_k)\, y_k^+ \int_\alpha^t d\eta_k. \tag{2.11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\operatorname{card} T < \infty$ или если x тождественно равна нулю, то утверждение очевидно; в противном случае справедливо неравенство $M \doteq \sup\limits_{t\in K} |x(t)| > 0$. Для любого $r \geqslant 1$ через T_r обозначим конечное разбиение $\{\tau_1, \ldots, \tau_r\}$, состоящее из первых r точек разбиения T, а через y_r — ступенчатую функцию y_{T_r}. Согласно формуле (2.7) справедливо $\operatorname{Var}(y_r - y) = \lceil y \rceil_{T \setminus T_r} \underset{r}{\to} 0$, следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует N_1 такое, что неравенство $r > N_1$ влечет оценку $\operatorname{Var}(y_r - y) < \frac{\varepsilon}{3M}$.

В силу (2.5) для любого r существуют интегралы $z_r(t) \doteq \displaystyle\int_\alpha^t x dy_r$, причем $z_r = z_{T_r}$, следовательно, $\{z_r\}$ является последовательностью частичных сумм равномерно сходящегося ряда

(2.11) (сумма которого равна z). Тем самым, существует N_2 такое, что для любых $r > N_2$ и любых $t \in K$ справедлива оценка $\bigl|z(t) - z_r(t)\bigr| < \frac{\varepsilon}{3}$ или $\Bigl|z(t) - \int_\alpha^t x dy_r\Bigr| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Пусть $r \doteq 1 + \max\{N_1, N_2\}$, и зафиксируем $t \in K$ (без ограничения общности считаем, что $t \geqslant \alpha$). Поскольку существует интеграл $\displaystyle\int_\alpha^t x dy_r$, то существует $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения $\alpha = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = t$, в котором $\max\limits_i (s_i - s_{i-1}) < \delta$, и для любого набора чисел $\gamma_i \in [s_{i-1}, s_i]$, $i = 1, \ldots, n$, выполнено $\Bigl|\displaystyle\int_\alpha^t x dy_r - \sum_{i=1}^n x(\gamma_i)\,[y_r(s_i) - y_r(s_{i-1})]\Bigr| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Тогда

$$\Bigl|z(t) - \sum_{i=1}^n x(\gamma_i)\,[y(s_i) - y(s_{i-1})]\Bigr| \leqslant \Bigl|z(t) - \int_\alpha^t x dy_r\Bigr| + \Bigl|\int_\alpha^t x dy_r - \sum_{i=1}^n x(\gamma_i)\,[y_r(s_i) - y_r(s_{i-1})]\Bigr| +$$

$$+ \sum_{i=1}^n |x(\gamma_i)| \cdot \bigl|[y_r(s_i) - y(s_i)] - [y_r(s_{i-1}) - y(s_{i-1})]\bigr| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + M \cdot \mathrm{Var}\,(y_r - y) < \varepsilon,$$

поэтому существует интеграл $\displaystyle\int_\alpha^t x dy$ и он равен $z(t)$, то есть сумме сходящегося ряда (2.11).

Следствие 5. *Если $x \in \mathrm{G}$ и $y \in \mathrm{BV}$ таковы, что $T(x) \cap T(y) = \varnothing$, то существует интеграл $\displaystyle\int_\alpha^t x dy$, причем* $\displaystyle\int_\alpha^t x dy = \int_\alpha^t x dy^c - \sum_{\tau_k \in T(y)} x(\tau_k)\, y_k^- \int_\alpha^t d\xi_k + \sum_{\tau_k \in T(y)} x(\tau_k)\, y_k^+ \int_\alpha^t d\eta_k.$

Утверждение справедливо в силу теоремы 3.

Лемма 8. *Каковы бы ни были функции $x, y \in \mathrm{G}^T$, интегралы $\displaystyle\int_\alpha^t x^T dy_T$, $\displaystyle\int_\alpha^t y^T dx_T$, $\displaystyle\int_\alpha^t x_T dy^T$ и $\displaystyle\int_\alpha^t y_T dx^T$ существуют и справедливы равенства*

$$\bigl(xy\bigr)_T(t) = x_T(t) y_T(t) + \int_\alpha^t x^T dy_T + \int_\alpha^t y^T dx_T, \quad (xy)^T(t) = x^T(t) y^T(t) + \int_\alpha^t x_T dy^T + \int_\alpha^t y_T dx^T. \tag{2.12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Формулы из леммы 6 имеют более компактный вид (через δ_{km} обозначен символ Кронекера):

$$\int_\alpha^t d\xi_k \int_\alpha^t d\xi_m = -\delta_{km} \int_\alpha^t d\xi_k + \int_\alpha^{\tau_k} d\xi_m \int_\alpha^t d\xi_k + \int_\alpha^{\tau_m} d\xi_k \int_\alpha^t d\xi_m,$$

$$\int_\alpha^t d\xi_k \int_\alpha^t d\eta_m = \int_\alpha^{\tau_k} d\eta_m \int_\alpha^t d\xi_k + \int_\alpha^{\tau_m} d\xi_k \int_\alpha^t d\eta_m,$$

$$\int_\alpha^t d\eta_k \int_\alpha^t d\eta_m = \delta_{km} \int_\alpha^t d\eta_k + \int_\alpha^{\tau_k} d\eta_m \int_\alpha^t d\eta_k + \int_\alpha^{\tau_m} d\eta_k \int_\alpha^t d\eta_m.$$

В следующей цепочке равенств фигурируют абсолютно и равномерно на K сходящиеся функциональные ряды, поэтому все операции корректны, а суммирование ведется по разбиению T (и мы пишем $\sum\limits_k$ вместо $\sum\limits_{\tau_k \in T}$):

$$\sigma \doteq x_T(t)\, y_T(t) = \Bigl[-\sum_k x_k^- \int_\alpha^t d\xi_k + \sum_k x_k^+ \int_\alpha^t d\eta_k\Bigr]\Bigl[-\sum_m y_m^- \int_\alpha^t d\xi_m + \sum_m y_m^+ \int_\alpha^t d\eta_m\Bigr] =$$

$$= \sum_{k,m} x_k^- y_m^- \Big[\int_\alpha^{\tau_k} d\xi_m \int_\alpha^t d\xi_k \ + \int_\alpha^{\tau_m} d\xi_k \int_\alpha^t d\xi_m \Big] - \sum_k x_k^- y_k^- \int_\alpha^t d\xi_k -$$

$$- \sum_{k,m} x_k^- y_m^+ \Big[\int_\alpha^{\tau_k} d\eta_m \int_\alpha^t d\xi_k + \int_\alpha^{\tau_m} d\xi_k \int_\alpha^t d\eta_m \Big] - \sum_{k,m} x_k^+ y_m^- \Big[\int_\alpha^{\tau_k} d\xi_m \int_\alpha^t d\eta_k + \int_\alpha^{\tau_m} d\eta_k \int_\alpha^t d\xi_m \Big] +$$

$$+ \sum_{k,m} x_k^+ y_m^+ \Big[\int_\alpha^{\tau_k} d\eta_m \int_\alpha^t d\eta_k \ + \int_\alpha^{\tau_m} d\eta_k \int_\alpha^t d\eta_m \Big] + \sum_k x_k^+ y_k^+ \int_\alpha^t d\eta_k.$$

Приведя подобные члены, имеем равенства

$$\sigma = - \sum_k x_k^- \left[y(\tau_k) - y^T(\tau_k) \right] \int_\alpha^t d\xi_k + \sum_k x_k^+ \left[y(\tau_k) - y^T(\tau_k) \right] \int_\alpha^t d\eta_k - \sum_k x_k^- y_k^- \int_\alpha^t d\xi_k +$$

$$+ \sum_k x_k^+ y_k^+ \int_\alpha^t d\eta_k - \sum_m y_m^- \left[x(\tau_m) - x^T(\tau_m) \right] \int_\alpha^t d\xi_m + \sum_m y_m^+ \left[x(\tau_m) - x^T(\tau_m) \right] \int_\alpha^t d\eta_m =$$

$$= \sigma_1 - \sum_k \left[x_k^- y_k^- + x_k^- y(\tau_k) + x(\tau_k) y_k^- \right] \int_\alpha^t d\xi_k + \sum_k \left[x_k^+ y_k^+ + x_k^+ y(\tau_k) + x(\tau_k) y_k^+ \right] \int_\alpha^t d\eta_k =$$

$$= \sigma_1 + \big(xy\big)_T(t),$$

где через σ_1 обозначена функция

$$\sigma_1 \doteq \sum_k x_k^- y^T(\tau_k) \int_\alpha^t d\xi_k - \sum_k x_k^+ y^T(\tau_k) \int_\alpha^t d\eta_k + \sum_k y_k^- x^T(\tau_k) \int_\alpha^t d\xi_k - \sum_k y_k^+ x^T(\tau_k) \int_\alpha^t d\eta_k.$$

Приведя еще раз подобные члены (в силу непрерывности функций x^T и y^T в точках $\tau_k \in T$ справедлива лемма 7), получаем

$$\sigma_1 = \int_\alpha^t y^T d\Big[\sum_k x_k^- \xi_k - \sum_k x_k^+ \eta_k \Big] + \int_\alpha^t x^T d\Big[\sum_k y_k^- \xi_k - \sum_k y_k^+ \eta_k \Big] = - \int_\alpha^t y^T dx_T - \int_\alpha^t x^T dy_T.$$

Одновременно мы доказали существование интегралов.

Сравнивая начало и конец цепочки для σ, получаем первое равенство (2.12). Что касается второго, то в силу формулы интегрирования по частям и равенств $x_T(\alpha) = y_T(\alpha) = 0$ для его доказательства достаточно сложить левые и правые части формул (2.12) и получить тождество.

Замечание 8. Возвращаясь к формулам (2.3), мы можем теперь сказать следующее: если $\lambda \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathrm{G}^T$, $u = \lambda x$, $v = x + y$, $w = xy$, то $u, v, w \in \mathrm{G}^T$ и

$$u_T = \lambda x_T, \ u^T = \lambda x^T, \ v_T = x_T + y_T, \ v^T = x^T + y^T,$$

$$w_T(t) = x_T(t)\, y_T(t) + \int_\alpha^t x^T dy_T + \int_\alpha^t y^T dx_T, \quad w^T(t) = x^T(t)\, y^T(t) + \int_\alpha^t x_T dy^T + \int_\alpha^t y_T dx^T.$$

Замечание 9. Пусть $x, y \in \Gamma$ [или $x, y \in \mathrm{BV}$], $w = xy$ и T таково, что $T \supseteq T(x) \cup T(y)$, тогда $x^T, y^T, w^T \in \mathrm{C}$ [соответственно $x^T, y^T, w^T \in \mathrm{CBV}$], поэтому непрерывные составляющие x^c, y^c, w^c этих функций (см. замечание 7) связаны соотношением

$$w^c(t) = (xy)^c(t) = x^c(t)\, y^c(t) + \int_\alpha^t x_c dy^c + \int_\alpha^t y_c dx^c,$$

а для функций скачков x_c, y_c, w_c справедливо тождество

$$w_c(t) = (xy)_c(t) = x_c(t)\, y_c(t) + \int_\alpha^t x^c dy_c + \int_\alpha^t y^c dx_c.$$

Следствие 6. *Пусть* $x, y \in \mathrm{G}^T$. *Если существует один из интегралов*

$$\int_K x_{_T} dy_{_T}, \quad \int_K y_{_T} dx_{_T}, \quad \int_K x dy_{_T}, \quad \int_K y_{_T} dx, \quad \int_K x_{_T} dy, \quad \int_K y dx_{_T}, \tag{2.13}$$

то существуют остальные интегралы (2.13), *а первая формула* (2.12) *принимает вид*

$$\big(xy\big)_{_T}(t) = \int_\alpha^t x dy_{_T} + \int_\alpha^t y dx_{_T}. \tag{2.14}$$

Если существует один из интегралов

$$\int_K x^{T} dy^{T}, \quad \int_K y^{T} dx^{T}, \quad \int_K x dy^{T}, \quad \int_K y^{T} dx, \quad \int_K x^{T} dy, \quad \int_K y dx^{T}, \tag{2.15}$$

то существуют остальные интегралы (2.15), *а вторая формула* (2.12) *принимает вид*

$$\big(xy\big)^{T}(t) = x(\alpha)\, y(\alpha) + \int_\alpha^t x dy^{T} + \int_\alpha^t y dx^{T}. \tag{2.16}$$

Докажем формулу (2.16). Если, например, существует интеграл $\displaystyle\int_K x^T dy^T$, то существуют интегралы $\displaystyle\int_\alpha^t x^T dy^T$ и $\displaystyle\int_\alpha^t y^T dx^T$, причем $\displaystyle\int_\alpha^t x^T dy^T + \int_\alpha^t y^T dx^T = x^T(t) y^T(t) - x^T(\alpha) y^T(\alpha)$. В силу леммы 8 существуют интегралы $\displaystyle\int_\alpha^t x dy^T$ и $\displaystyle\int_\alpha^t y dx^T$, а с учетом последнего равенства второе тождество (2.12) трансформируется в (2.16). Формула (2.14) доказывается аналогично (здесь применяем равенства $x_{_T}(\alpha) = y_{_T}(\alpha) = 0$).

Следствие 7. *Пусть* $T \in \mathbb{T}(K)$ *и* $x, y \in \mathrm{G}^T$. *Если существует интеграл* $\displaystyle\int_K x dy$, *то существует еще тринадцать интегралов: интеграл* $\displaystyle\int_K y dx$ *и интегралы* (2.13) *и* (2.15).

Существование интеграла $\displaystyle\int_K y dx$ хорошо известно. Поскольку существует интеграл $\displaystyle\int_K x dy$, то в соответствии с [14, с. 117] одна из функций x или y непрерывна во всякой точке $t \in K$, то есть $T(x) \cap T(y) = \varnothing$. Если $S \doteq T \cap T(y)$, то, очевидно, $y_{_T} = y_{_S}$, а функция x непрерывна в каждой точке $\tau_k \in S$. В силу леммы 7 существует интеграл $\displaystyle\int_K x dy_{_S}$, а вместе с ним и интегралы $\displaystyle\int_K x dy_{_T}$, $\displaystyle\int_K x dy^T$ и другие интегралы (2.13) и (2.15).

Следствие 8. *Для любых* $x, y \in \mathrm{G}^T$ *справедливы равенства*

$$(x_{_T} y_{_T})_{_T} = x_{_T} y_{_T}, \quad (x_{_T} y_{_T})^{T} = 0, \quad (x^{T} y^{T})_{_T} = 0, \quad (x^{T} y^{T})^{T} = x^{T} y^{T}.$$

Утверждение немедленно следует из формул (2.12) и (2.9).

Следствие 9. *Если* $x, y \in \mathrm{G}^T$ *и существует интеграл* $\displaystyle\int_K x dy$, *то справедливо равенство*

$$\int_\alpha^t x dy = \int_\alpha^t x dy^{T} - \sum_{\tau_k \in T} x(\tau_k)\, y_k^- \int_\alpha^t d\xi_k + \sum_{\tau_k \in T} x(\tau_k)\, y_k^+ \int_\alpha^t d\eta_k.$$

Утверждение следует из леммы 7.

Замечание 10. Пусть $x, y \in \Gamma$ [или $x, y \in \mathrm{BV}$]. Если существует один из интегралов

$$\int_K x_c dy_c, \quad \int_K y_c dx_c, \quad \int_K x dy_c, \quad \int_K y_c dx, \quad \int_K x_c dy, \quad \int_K y dx_c, \tag{2.17}$$

то существуют остальные интегралы (2.17) и $\big(xy\big)_c(t) = \int_\alpha^t x dy_c + \int_\alpha^t y dx_c$. Если существует один из интегралов

$$\int_K x^c dy^c, \quad \int_K y^c dx^c, \quad \int_K x dy^c, \quad \int_K y^c dx, \quad \int_K x^c dy, \quad \int_K y dx^c, \tag{2.18}$$

то существуют остальные интегралы (2.18) и $\big(xy\big)^c(t) = x(\alpha)\, y(\alpha) + \int_\alpha^t x dy^c + \int_\alpha^t y dx^c$. Если существует интеграл $\int_K x dy$, то существует еще тринадцать интегралов: интеграл $\int_K y dx$ и интегралы (2.17), (2.18).

Замечание 11. Пусть $x, y \in \Gamma$ [или $x, y \in \mathrm{BV}$]. Тогда

$$(x_c y_c)_c = x_c y_c, \quad (x_c y_c)^c = 0, \quad (x^c y^c)_c = 0, \quad (x^c y^c)^c = x^c y^c.$$

§ 3. Топологические свойства

3.1. Полнота $\mathrm{G}^T[a, b]$

Поскольку $\mathrm{G}^T = \mathrm{G}$ при $\operatorname{card} T < \infty$, то G^T — полное пространство, однако, как показывает следующий пример, при счетном T пространство G^T не замкнуто в G по норме

$$\|x\| \doteq \sup_{t \in K} |x(t)|. \tag{3.1}$$

Пример 4. Функция $x \in \mathrm{G}[0,1]$ такая, что $x(0) = 0$ и $x(t) = t\{\frac{1}{t}\}$ при $t \neq 0$, является предельной (по норме (3.1)) для последовательности прерывистых функций

$$x_n(t) \doteq \begin{cases} 0 & , \quad t \in [0, \frac{1}{n}] \\ t\{\frac{1}{t}\} & , \quad t \in (\frac{1}{n}, 1] \end{cases}, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Поскольку функции x_n имеют конечное число точек разрыва, то $x_n \in \mathrm{G}^T$ для любого T. В частности, $x_n \in \mathrm{G}^T$ для $T \doteq T(x)$, в то время как $x \notin \mathrm{G}^T$ (см. пример 1), следовательно, пространство G^T не является полным по норме (3.1).

Таким образом, решетка пространств $\big\{\mathrm{G}^T\big\}_{T \in \mathbb{T}(K)}$ содержит как полные, так и неполные пространства. Ниже мы покажем, что пространство G^T будет полным, если ввести норму

$$\|x\|_T \doteq \|x^T\| + \lceil x \rceil_T = \|x^T\| + \operatorname{Var} x_T. \tag{3.2}$$

Проверка аксиом нормы (3.2) не составляет труда. Более важно то, что норма (3.1) входит в семейство (3.2), — это имеет место при $T = \varnothing$. Заметим также, что в соответствии с замечанием 4 функция x^T зависит от выбора точки $\alpha \in K$, то есть $x^T(\cdot) = x^T(\cdot, \alpha)$, поэтому и норма (3.2) зависит от α, то есть $\|\cdot\|_T = \|\cdot\|_T^\alpha$.

Лемма 9. *Пусть* $T, S \in \mathbb{T}(K)$.
1. *Если* $S \subseteq T$, *то* $\mathrm{G}^T \subseteq \mathrm{G}^S$ *и для любого* $x \in \mathrm{G}^T$ *справедливо* $\|x\|_S \leqslant \|x\|_T$.
2. *Для любого* $x \in \mathrm{G}^T$ *имеет место неравенство* $\|x\| \leqslant \|x\|_T$.
3. *Если* $T \sim S$, *то* $\mathrm{G}^T = \mathrm{G}^S$ *и в* G^T $(= \mathrm{G}^S)$ *нормы* $\|\cdot\|_T$ *и* $\|\cdot\|_S$ *эквивалентны.*
4. *Для любых* $\alpha, \beta \in K$ *нормы* $\|\cdot\|_T^\alpha$ *и* $\|\cdot\|_T^\beta$ *эквивалентны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Включение $\mathrm{G}^T \subseteq \mathrm{G}^S$ доказано в лемме 5. Пусть $x \in \mathrm{G}^T$. В силу представления (2.8) имеет место равенство

$$x^S(t) = x^T(t) + x_{T\setminus S}(t), \tag{3.3}$$

следовательно, $|x^S(t)| \leqslant |x^T(t)| + \lceil x\rceil_{T\setminus S}$, $t \in K$, поэтому $|x^S(t)| + \lceil x\rceil_S \leqslant |x^T(t)| + \lceil x\rceil_T \leqslant \|x\|_T$. Поскольку последняя оценка справедлива при всех $t \in K$, то $\|x\|_S \leqslant \|x\|_T$.

2. Неравенство $\|x\| \leqslant \|x\|_T$ следует из предыдущего пункта при $S = \varnothing$.

3. Равенство $\mathrm{G}^T = \mathrm{G}^S$ доказано в лемме 5. Если $R \doteq T \cap S$, то в соответствии с первым пунктом леммы $\mathrm{G}^T = \mathrm{G}^S \subseteq \mathrm{G}^R$ и для любого $x \in \mathrm{G}^T$ имеют место равенства вида (3.3): $x^R(t) = x^T(t) + x_{T\setminus R}(t)$, $x^R(t) = x^S(t) + x_{S\setminus R}(t)$. Вычитая одно из другого, получаем, что при всех $t \in K$ справедливо $|x^S(t)| \leqslant |x^T(t)| + \lceil x\rceil_{T\Delta S}$, поэтому $\|x^S\| \leqslant \|x^T\| + \lceil x\rceil_{T\Delta S}$, следовательно, выражая $\|x^S\|$ и $\|x^T\|$ через $\|x\|_S$ и $\|x\|_T$ по формуле (3.2), получаем цепочку

$$\|x\|_S \leqslant \|x\|_T + 2\lceil x\rceil_{S\setminus R} = \|x\|_T + 2\lceil x\rceil_{S\setminus T} \leqslant \|x\|_T + 8\,\|x\| \cdot \mathrm{card}\,(S\setminus T) \leqslant \bigl(1 + 8\,\mathrm{card}\,(S\setminus T)\bigr) \cdot \|x\|_T.$$

Мы воспользовались очевидными неравенствами $|x_k^-| \leqslant 2\,\|x\|$ и $|x_k^+| \leqslant 2\,\|x\|$. Аналогично получается симметричное неравенство $\|x\|_T \leqslant \bigl(1 + 8\,\mathrm{card}\,(T\setminus S)\bigr) \cdot \|x\|_S$.

4. Через $x^T(t,\alpha)$ и $x^T(t,\beta)$ обозначим функции вида (2.8), подчеркивая их зависимость от точек α и β. В соответствии с (2.6) следующие соотношения носят элементарный характер:

$$x_T(t,\alpha) = x_T(t,\beta) + x_T(\beta,\alpha), \quad x^T(t,\alpha) - x^T(t,\beta) = x_T(\alpha,\beta), \quad \bigl|x^T(t,\alpha) - x^T(t,\beta)\bigr| \leqslant \lceil x\rceil_T,$$

$$\bigl\|x^T(\,\cdot\,,\alpha)\bigr\| \leqslant \bigl\|x^T(\,\cdot\,,\beta)\bigr\| + \lceil x\rceil_T, \quad \|x\|_T^\alpha = \bigl\|x^T(\,\cdot\,,\alpha)\bigr\| + \lceil x\rceil_T \leqslant \bigl\|x^T(\,\cdot\,,\beta)\bigr\| + 2\,\lceil x\rceil_T \leqslant 2\,\|x\|_T^\beta.$$

Аналогично $\|x\|_T^\beta \leqslant 2\,\|x\|_T^\alpha$, что и доказывает эквивалентность данных норм.

Следствие 10. *Если* $\mathrm{card}\,T < \infty$, *то* $\mathrm{G}^T = \mathrm{G}$ *и нормы* $\|\cdot\|_T$ *и* $\|\cdot\|$ *эквивалентны в* G.

Достаточно взять $S = \varnothing$ в третьем пункте леммы.

Замечание 12. При счетном T нормы $\|\cdot\|_T$ и $\|\cdot\|$ не являются эквивалентными в пространстве G^T. Например, семейство функций $x_n \in \mathrm{G}[0,1]$ таких, что $x_n(t) = 0$ при $t \in [0,\frac{1}{n}]$ и $x_n(t) = \{\frac{1}{t}\}$ при $t \in [\frac{1}{n}, 1]$, вне множества $T \doteq \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$ разрывов не имеет. Очевидно, $\|x_n\| = 1$ при всех $n \geqslant 2$. С другой стороны, каждая из функций x_n принадлежит G^T, так как имеет конечное число точек разрыва (их количество равно $n-1$). Более того, все x_n непрерывны слева, а правые скачки равны по 1, поэтому какое бы $\gamma > 0$ мы ни взяли, найдется такая функция x_n из семейства, что $\|x_n\|_T > \gamma$. Это означает, что нет такого $\gamma > 0$, что неравенство $\|x\|_T \leqslant \gamma\|x\|$ выполнено для всех $x \in \mathrm{G}^T$.

Замечание 13. Для любого $x \in \mathrm{G}^T$ справедливо $\|x\| \leqslant \|x\|_T \leqslant \|x\| + 2\,\lceil x\rceil_T$.

Первое неравенство мы уже доказали. Что касается второго, то в силу (3.2) и (2.8) справедлива цепочка $\|x\|_T = \|x^T\| + \lceil x\rceil_T \leqslant \|x\| + \|x_T\| + \lceil x\rceil_T \leqslant \|x\| + \mathrm{Var}\,x_T + \lceil x\rceil_T = \|x\| + 2\,\lceil x\rceil_T$.

Теорема 4. *Пространство* $\mathrm{G}^T[a,b]$ *банахово по норме* $\|\cdot\|_T$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При конечном T утверждение очевидно в силу следствия 10. Пусть T счетно и $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность в G^T по норме $\|\cdot\|_T$, то есть $\|x_m - x_n\|_T \underset{m,n}{\longrightarrow} 0$. Если $y_n \doteq (x_n)^T$ и $z_n \doteq (x_n)_T$, то $x_n = y_n + z_n$, $z_n(\alpha) = 0$ и, согласно замечанию 13 и определению (3.2),

$$\|x_m - x_n\| \underset{m,n}{\longrightarrow} 0, \quad \|y_m - y_n\| \underset{m,n}{\longrightarrow} 0, \quad \|z_m - z_n\|_{\mathrm{BV}} = \mathrm{Var}\,(z_m - z_n) \underset{m,n}{\longrightarrow} 0$$

(применяем норму $\|x\|_{\mathrm{BV}} = |x(\alpha)| + \operatorname{Var} x$). В силу полноты пространств $\{\mathrm{G}, \|\cdot\|\}$ и $\{\mathrm{BV}, \|\cdot\|_{\mathrm{BV}}\}$ существуют $x, y \in \mathrm{G}$ и $z \in \mathrm{BV} \subset \mathrm{G}^T$ такие, что

$$\|x_n - x\| \underset{n}{\to} 0, \quad \|y_n - y\| \underset{n}{\to} 0, \quad \|z_n - z\|_{\mathrm{BV}} \underset{n}{\to} 0, \quad \|z_n - z\| \underset{n}{\to} 0.$$

Так как $\|z_n - (x-y)\| \leqslant \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \underset{n}{\to} 0$, то $x - y = z$. Функция y является пределом равномерно сходящейся последовательности $\{y_n\}$ непрерывных в точках $\tau_k \in T$ функций, поэтому она непрерывна в этих точках, следовательно, $y_k^- = y_k^+ = 0$, $x_k^- = z_k^-$ и $x_k^+ = z_k^+$. Таким образом, $\lceil x \rceil_T = \lceil z \rceil_T < \infty$, то есть $x \in \mathrm{G}^T$, поэтому $y \in \mathrm{G}^T$, $x_T = z_T$ и $x^T = y + z^T$.

Так как $z_n^T = 0$, то $z^T = 0$. Действительно, если $w_n \doteq z - z_n$, то $w_n \in \mathrm{BV}$ и справедливо $\operatorname{Var} w_n = \operatorname{Var}(w_n)^c + \operatorname{Var}(w_n)_c$. Поскольку $z_n \rightrightarrows z$ и все функции z_n непрерывны в точках множества $K \backslash T$, то и функции z, w_n непрерывны в этих точках. Тем самым, $T(w_n) \subseteq T$ и $(w_n)^c = (w_n)^T = z^T - z_n^T = z^T$, следовательно,

$$\operatorname{Var} z^T + \operatorname{Var}(w_n)_c = \operatorname{Var}(w_n)^c + \operatorname{Var}(w_n)_c = \operatorname{Var} w_n = \operatorname{Var}(z - z_n) \underset{n}{\to} 0,$$

поэтому $\operatorname{Var} z^T = 0$ и, очевидно, $z^T = 0$, $x^T = y$, $x_T = z$. Таким образом, $(x_n - x)^T = y_n - y$ и $(x_n - x)_T = z_n - z$, следовательно, $\|x_n - x\|_T = \|y_n - y\| + \operatorname{Var}(z_n - z) \underset{n}{\to} 0$.

Теорема 5. *Алгебра* $\mathrm{G}^T[a,b]$, *наделенная нормой* $\|\cdot\|_T$, *является коммутативной банаховой алгеброй с единицей.*

Доказательство. Роль единицы играет функция, тождественно равная 1 на $[a,b]$. Коммутативность очевидна, поэтому остается показать непрерывность умножения по норме $\|\cdot\|_T$ относительно, например, первой переменной. Действительно, если $x, y \in \mathrm{G}^T$ и $w = xy$, то $w \in \mathrm{G}^T$ и в соответствии с замечанием 13 и леммой 9 справедлива цепочка неравенств

$$\|xy\|_T = \|w\|_T \leqslant \|w\| + 2\lceil w \rceil_T \leqslant \|xy\| + 2\|x\|\lceil y \rceil_T + 2\lceil x \rceil_T \|y\| \leqslant 5\|x\|_T \|y\|_T, \tag{3.4}$$

следовательно, условие $\|x_n - x\|_T \underset{n}{\to} 0$ влечет $\|x_n y - xy\|_T \underset{n}{\to} 0$.

3.2. Полнота $\Gamma[a,b]$

Лемма 10. *Имеет место равенство*

$$\Gamma = \bigcap_{T \in \mathbb{T}(K)} \mathrm{G}^T. \tag{3.5}$$

Доказательство. Напомним (см. (2.4)), что Γ состоит из тех функций $x \in \mathrm{G}$, что ряд $\lceil x \rceil_{T(x)}$ сходится. Включение $\Gamma \subseteq \bigcap_{T \in \mathbb{T}(K)} \mathrm{G}^T$ справедливо в силу включений $\Gamma \subset \mathrm{G}^T$. Если $x \in \bigcap_{T \in \mathbb{T}(K)} \mathrm{G}^T$, то $x \in \mathrm{G}^T$ для всех T, в частности, $x \in \mathrm{G}^T$ для $T \doteq T(x)$, то есть ряд $\lceil x \rceil_{T(x)}$ сходится, следовательно, $x \in \Gamma$. □

Легко проверить, что Γ является нормированным пространством относительно нормы

$$\|x\|_\Gamma \doteq \sup_{T \in \mathbb{T}(K)} \|x\|_T \tag{3.6}$$

и для любых $x \in \Gamma$ и $T \in \mathbb{T}(K)$ имеют место оценки

$$\|x\| \leqslant \|x\|_T \leqslant \|x\|_\Gamma \leqslant \|x\| + 2\lceil x \rceil_{T(x)} = \|x\| + 2 \operatorname{Var} x_c. \tag{3.7}$$

Заметим также, что в соответствии с (3.2) норма $\|\cdot\|_T$ зависит от выбора точки $\alpha \in K$, то есть $\|\cdot\|_T = \|\cdot\|_T^\alpha$, причем в силу леммы 9 нормы $\|\cdot\|_T^\alpha$ и $\|\cdot\|_T^\beta$ эквивалентны. Таким образом, норма $\|\cdot\|_\Gamma$ также зависит от α, то есть $\|\cdot\|_\Gamma = \|\cdot\|_\Gamma^\alpha$, и нетрудно показать, что для любых $\alpha, \beta \in K$ нормы $\|\cdot\|_\Gamma^\alpha$ и $\|\cdot\|_\Gamma^\beta$ эквивалентны.

Лемма 11. *Для любого* $x \in \Gamma$ *справедливо равенство*

$$\|x\|_{\Gamma} = \|x^c\| + \operatorname{Var} x_c. \tag{3.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно замечанию 7 доказательство формулы (3.8) сводится к доказательству равенства $\|x\|_{\Gamma} = \|x\|_{T}$, где $T \doteq T(x)$. Если $S \in \mathbb{T}(K)$ и $P \doteq T \cap S$, то $x_k^- = x_k^+ = 0$ для любого $\tau_k \in S \backslash P$, а так как $x \in \Gamma \subset \mathrm{G}^T$, то

$$\|x\|_{S} = \|x^S\| + \lceil x \rceil_{S} = \|x^S\| + \lceil x \rceil_{P}, \quad x^S(t) = x(t) - x_{S}(t) = x(t) - x_{P}(t) = x^T(t) + x_{T \backslash P}(t),$$

следовательно, $\|x^S\| \leqslant \|x^T\| + \lceil x \rceil_{T\backslash P}$ и $\|x\|_{S} \leqslant \|x^T\| + \lceil x \rceil_{T}$, то есть для любого S справедливо $\|x\|_{S} \leqslant \|x\|_{T}$, поэтому $\|x\|_{\Gamma} \leqslant \|x\|_{T}$. Обратное неравенство очевидно.

Теорема 6. *Пространство* $\Gamma[a,b]$ *банахово по норме* $\|\cdot\|_{\Gamma}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{x_n\}$, $x_n \in \Gamma$, — фундаментальная последовательность, то есть $\|x_m - x_n\|_{\Gamma} \underset{m,n}{\longrightarrow} 0$. В силу (3.6) эта последовательность является фундаментальной в каждом из банаховых пространств G^T, $T \in \mathbb{T}(K)$, по соответствующей норме $\|\cdot\|_{T}$. Это означает, что для любого T существует функция $x^{(T)} \in \mathrm{G}^T$ такая, что $\|x_n - x^{(T)}\|_{T} \underset{n}{\to} 0$, а в силу замечания 13 имеем $\|x_n - x^{(T)}\| \underset{n}{\to} 0$. Таким образом, все предельные функции $x^{(T)}$ совпадают между собой, то есть $x^{(T)} = x$ для любого T. Поскольку $x^{(T)} \in \mathrm{G}^T$, то $x \in \mathrm{G}^T$ для любого T, поэтому в силу (3.5) имеем $x \in \Gamma$, и нам остается доказать, что $\|x_n - x\|_{\Gamma} \underset{n}{\to} 0$.

Для любого $\varepsilon > 0$ существует N, что при $m, n > N$ и $T \in \mathbb{T}(K)$ выполнено $\|x_m - x_n\|_{T} < \varepsilon$, следовательно, при $m \to \infty$ имеем $\|x - x_n\|_{T} \leqslant \varepsilon$, поэтому $\|x_n - x\|_{\Gamma} = \sup\limits_{T \in \mathbb{T}(K)} \|x_n - x\|_{T} \leqslant \varepsilon$.

Теорема 7. *Алгебра* $\Gamma[a,b]$ *является коммутативной банаховой алгеброй с единицей по норме* $\|\cdot\|_{\Gamma}$.

Из (3.4) и (3.5) имеем $\|xy\|_{\Gamma} \leqslant 5\,\|x\|_{\Gamma}\,\|y\|_{\Gamma}$, откуда следует непрерывность умножения в Γ. $\square$

Пространство $\mathrm{BV}[a,b]$ с нормой

$$\|x\|_{\mathrm{BV}} \doteq |x(\alpha)| + \operatorname*{Var}_{[a,b]} x \tag{3.9}$$

также является коммутативной банаховой алгеброй с единицей. Это утверждение хорошо известно для нормы (3.9), в которой $\alpha = a$ (см. [11, с. 337]), а для остальных норм отметим, что в семействе (3.9), зависящем от параметра $\alpha \in [a,b]$, все нормы эквивалентны между собой. Напомним также, что в соответствии с замечанием 4 мы работаем с фиксированным α.

Лемма 12. *Если* $x \in \mathrm{BV}$, *то при любом* $T \in \mathbb{T}(K)$

$$\operatorname{Var} x = \operatorname{Var} x^T + \operatorname{Var} x_T \tag{3.10}$$

и, в частности, для компонент лебегова разложения справедливо $\operatorname{Var} x = \operatorname{Var} x^c + \operatorname{Var} x_c$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вторая часть утверждения хорошо известна (см., например, замечание 7). Пусть $Q \doteq T \backslash T(x)$, $P \doteq T \cap T(x)$, $R \doteq T(x) \backslash T$. Поскольку $x_k^- = x_k^+ = 0$ для всех $\tau_k \in Q$, то $x_T = x_P$ и $x^T = x^P$. Если $z \doteq x_P$ и $y \doteq x^P$, то $T(z) = P$ и $T(y) = R$. Согласно (2.10) имеем

$$z_c = z_{T(z)} = (x_P)_P = x_P, \quad y_c = y_{T(y)} = (x^P)_R = x_{R\backslash P} = x_R,$$

$$z^c = z^{T(z)} = (x_P)^P = 0, \quad y^c = y^{T(y)} = (x^P)^R = x^{P \cup R} = x^{T(x)} = x^c,$$

$$\operatorname{Var} x^T + \operatorname{Var} x_T = \operatorname{Var} y + \operatorname{Var} z = \operatorname{Var} y^c + \operatorname{Var} y_c + \operatorname{Var} z^c + \operatorname{Var} z_c = \operatorname{Var} x^c + \operatorname{Var} x_R + \operatorname{Var} x_P =$$

$$= \operatorname{Var} x^c + \lceil x \rceil_R + \lceil x \rceil_P = \operatorname{Var} x^c + \lceil x \rceil_{T(x)} = \operatorname{Var} x^c + \operatorname{Var} x_{T(x)} = \operatorname{Var} x^c + \operatorname{Var} x_c = \operatorname{Var} x.$$

Лемма 13. *Если* $x \in \mathrm{BV}$, *то при всех* $T \in \mathbb{T}(K)$

$$\|x\| \leqslant \|x\|_{T} \leqslant \|x\|_{\Gamma} \leqslant \|x\|_{\mathrm{BV}}. \tag{3.11}$$

Доказательство. Первые два неравенства уже доказаны, что касается третьего, то достаточно показать, что $\|x\|_{T} \leqslant \|x\|_{\mathrm{BV}}$ для любого $T \in \mathbb{T}(K)$. Действительно, в соответствии с леммой 12 и равенством $x^T(\alpha) = x(\alpha)$ справедлива цепочка равенств

$$\|x\|_{\mathrm{BV}} - \|x\|_{T} = |x(\alpha)| + \mathrm{Var}\, x - \|x^T\| - \mathrm{Var}\, x_{T} =$$

$$= |x(\alpha)| + \mathrm{Var}\, x^T - \|x^T\| = |x^T(\alpha)| + \mathrm{Var}\, x^T - \|x^T\| = \|x^T\|_{\mathrm{BV}} - \|x^T\|$$

с неотрицательной правой частью. Таким образом, $\|x\|_{\Gamma} = \sup\limits_{T \in \mathbb{T}(K)} \|x\|_{T} \leqslant \|x\|_{\mathrm{BV}}$.

Замечание 14. Подводя итог, можем сказать, что вторая строка диаграммы (2.4) состоит из коммутативных банаховых алгебр с единицей, причем каждая из алгебр полна по своей норме, — это соответственно нормы (3.9), (3.6), (3.2) и (3.1). Кроме того, если $x \in \mathrm{BV}$, то справедливы неравенства (3.11), если $x \in \Gamma$, то выполнены неравенства (3.7), а если $x \in \mathrm{G}^T$, то $\|x\| \leqslant \|x\|_{T}$ (см. замечание 13). Хорошо известно, что пространства C и CBV из диаграммы (2.4) также полны, каждое по своей норме, но мы на этом вопросе не останавливаемся.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Родионов В. И. О пространстве регулярно дифференцируемых функций // Известия Института математики и информатики. УдГУ. Ижевск, 2004. — Вып. 1 (29). — С. 3–32.
2. Родионов В. И. Присоединенный интеграл Римана–Стилтьеса в алгебре прерывистых функций // Известия Института математики и информатики. УдГУ. Ижевск, 2005. — Вып. 1 (31). — С. 3–78.
3. Родионов В. И. О сильных и слабых операторах в пространстве прерывистых функций // Известия Института математики и информатики. УдГУ. Ижевск, 2006. — Вып. 1 (35). — С. 3–32.
4. Родионов В. И. Присоединенный интеграл Римана–Стилтьеса // Известия вузов. Математика. — 2007. — № 2 (537). — С. 79–82; англ. пер.: Rodionov V. I. The adjoint Riemann–Stieltjes integral // Russian Mathematics (Iz. VUZ). — 2007. — Vol. 51, № 2. — С. 75–79. `http://www.springerlink.com/content/b5724677n40w88h0`
5. Hönig Ch. S. Volterra–Stieltjes integral equations. Mathematics Studies 16. — Amsterdam: North-Holland, 1975. — 152 p.
6. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной: учеб. пособие для вузов. — 3-е изд. — М.: Наука, 1974. — 480 с.
7. Курцвейль Я. Об обобщенных обыкновенных дифференциальных уравнениях, обладающих разрывными решениями // ПММ. — 1958. — Т. 22, № 1. — С. 27–45.
8. Родионов В. И. Квазиинтегральные уравнения в пространстве прерывистых функций // Известия Института математики и информатики. УдГУ. Ижевск, 1997. — Вып. 2 (10). — С. 3–51.
9. Родионов В. И. Квазиинтегралы // Дифференциальные уравнения. — 2000. — Т. 36, № 6. — С. 859.
10. Дерр В. Я. Об одном обобщении интеграла Римана–Стилтьеса // Известия Института математики и информатики. УдГУ. Ижевск, 1997. — Вып. 3 (11). — С. 3–29.
11. Колмогоров А. Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа: учеб. для вузов. — 5-е изд. — М.: Наука, 1981. — 544 с.
12. Рудин У. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1975. — 448 с.
13. Tvrdý M. Regulated functions and the Perron–Stieltjes integral // Časopis pěst. mat. — 1989. — № 114. — P. 187–209.
14. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3: учеб. для вузов. — 5-е изд. — М.: Наука, 1969. — 656 с.

МАТЕМАТИКА 2009. Вып. 4

Поступила в редакцию 25.09.09

V. I. Rodionov

On family of subspaces of the space of regulated functions

In the space of regulated functions the parametrical family of subspaces of special kind is investigated. Subspace crossing representing them is investigated too. It includes the space of functions of bounded variation. The lattice of subspaces depending from parameter is investigated. Questions of existence of integral Riemann–Stieltjes for elements of subspaces are investigated. Completeness of subspaces is proved (for everyone subspace own norm is used). Relations between norms are investigated.

Keywords: regulated function, Riemann–Stieltjes integral, Banach algebra.

Mathematical Subject Classifications: 46J30, 26A42

Родионов Виталий Иванович, к. ф.-м. н., декан факультета информационных технологий и вычислительной техники, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4), E-mail: rodionov@uni.udm.ru