

УДК 532.5.031, 519-7

© *Е. М. Артемова*

## ДИНАМИКА ДВУХ ВИХРЕЙ НА КОНЕЧНОМ ПЛОСКОМ ЦИЛИНДРЕ

В данной работе получена модель, описывающая движение точечных вихрей в идеальной несжимаемой жидкости на конечном плоском цилиндре. Подробно рассмотрен случай двух вихрей. Показано, что уравнения движения вихрей могут быть представлены в гамильтоновой форме и обладают дополнительным первым интегралом. Предложена процедура редукции на фиксированный уровень первого интеграла. Для полученной редуцированной системы построены фазовые портреты, указаны неподвижные точки и особенности системы.

*Ключевые слова:* точечные вихри, идеальная жидкость, неподвижные точки, особенности, фазовый портрет.

DOI: [10.35634/vm230407](https://doi.org/10.35634/vm230407)

### Введение

Движение вихрей на плоскости часто рассматривается в рамках модели точечных вихрей в идеальной жидкости, которая берет свое начало с работы Гельмгольца [1]. В настоящее время уравнения, описывающие движение точечных вихрей на плоскости, хорошо изучены [2–18]. В частности, известно, что задача о движении трех вихрей является интегрируемой и изучалась, например, в работах [2–5]. Движение четырех вихрей в общем случае уже может быть хаотическим [5, 8–10]. Однако существуют частные случаи, при которых движение четырех вихрей становится интегрируемым [6–8]. Помимо вопросов интегрируемости при изучении  $N$  точечных вихрей возникают задачи о существовании и устойчивости специальных вихревых конфигурации (томсоновских, коллинеарных и других частных решений), которые исследовались, например, в [11–16]. Более сложные частные решения, которые представляют из себя хореографии вихрей, были найдены в [17, 18], по аналогии с решениями в небесной механике.

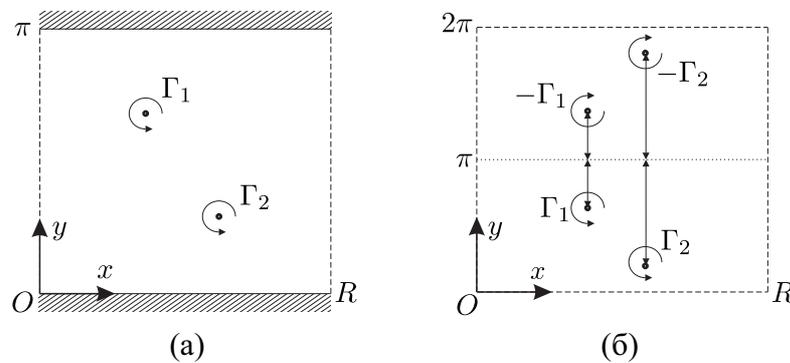
Модель точечных вихрей на плоскости несложно обобщается на другие поверхности постоянной кривизны, например, сферу [19–22] и плоскость Лобачевского [30]. В настоящее время наиболее подробно изучено движение вихрей на поверхности сферы. Подобно исследованиям вихрей на плоскости, для вихрей на сфере изучались вопросы интегрируемости [23–25], существования специальных вихревых конфигураций и их устойчивости (томсоновские [26, 27], коллинеарные [16, с. 63], статические [28]), а также хореографии вихрей на сфере [18, 29]. Помимо движения вихрей на плоскости и сфере исследовались модели, описывающие движение точечных вихрей в других областях, например, на полуплоскости [31], в полосе [32], в круге [33], в круге с учетом вращения в нем жидкости (модель в конденсате Бозе–Эйнштейна) [34, 35], в кольцевой области [36].

Исследования периодических вихревых структур восходят к работе Кармана [37], в которой он исследовал вихревую дорожку, образующуюся за телом, движущимся в жидкости. Изучение движения вихревой дорожки сводится к исследованию динамики точечных вихрей на бесконечном (плоском) цилиндре. Динамика движения вихрей на цилиндре рассматривалась, например, в [38–41]. Уравнения движения для произвольных вихревых решеток были получены [42] и сводятся к исследованию движения вихрей на плоском торе. Движение двух, трех и четырех квадратных решеток (или 2, 3, 4 вихрей на плоском торе) рассматривалось в работе [43].

Работ, посвященных исследованию движения вихревых дорожек в ограниченной полосе или, что тоже самое, исследованию движения вихрей на плоском цилиндре конечной длины, в настоящее время не так много. В работе [41] был предложен потенциал, описывающий движение вихрей в жидкости на поверхности конечного цилиндра. Указанный потенциал имеет достаточно сложный вид и выражается через специальные функции. В данной работе мы приводим вывод модели, описывающей движение точечных вихрей в жидкости на конечном плоском цилиндре, без перехода к специальным функциям. В рамках полученной модели рассматривается движение двух вихрей.

### § 1. Уравнения движения вихрей

**Общий случай.** Рассмотрим движение  $N$  вихрей в идеальной несжимаемой жидкости на плоском цилиндре высоты  $L = \pi$  и длины  $R$  (см. рис. 1, а). На рис. 1, а непрерывной линией обозначены твердые стенки цилиндра, а пунктирной — границы, которые отождествляются (периодические границы).



**Рис. 1.** Схематичное изображение вихрей: (а) на цилиндре, (б) на торе

Оказывается, что движение  $N$  вихрей на цилиндре соответствует движению  $2N$  вихрей на плоском торе: на инвариантном многообразии для  $N$  пар вихрей (интенсивности вихрей в паре  $\Gamma_{2k-1} = -\Gamma_{2k}$ ), которое задается соотношениями

$$z_{2k-1} = 2\pi i + \bar{z}_{2k}, \quad k = 1, \dots, N, \tag{1.1}$$

где  $z_k = x_k + iy_k$ , ( $x_k \in [0, R)$ ,  $y_k \in [0, 2\pi)$ ). Конфигурация вихрей, соответствующая указанному инвариантному многообразию, приведена на рис. 1, б. На рис. 1, б показано, что вихри на торе разделены на «вихревые пары». При этом в каждой «паре» вихри имеют одинаковые по модулю, но противоположные по знаку интенсивности. Их координаты связаны соотношениями  $x_{2k} = x_{2k-1}$ ,  $\pi - y_{2k-1} = y_{2k} - \pi$ .

**Замечание 1.1.** Движение на указанном инвариантном многообразии можно рассматривать как движение антиподальных вихрей на торе, по аналогии с моделью антиподальных вихрей на сфере [23]. Если для сферы антиподальные вихри расположены симметрично относительно ее центра, то для тора они симметричны относительно прямой  $y = \pi$ .

Уравнения движения вихрей на плоском торе приведены в [16]. Подставляя в эти уравнения параметры рассматриваемого тора (периоды  $2\pi$  и  $R$ ), запишем уравнения движения

на инвариантном многообразии (1.1) в виде

$$\begin{aligned} \dot{\bar{z}}_k = & -\frac{\Gamma_k}{2\pi i} \left[ \zeta(z_k - \bar{z}_k) + \frac{1}{R}(1 - 2\zeta(R))(z_k - \bar{z}_k) \right] + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \sum_{\substack{n=1, \\ n \neq k}}^N \Gamma_n (\zeta(z_k - z_n) - \zeta(z_k - \bar{z}_n) - \frac{1}{R}(1 - 2\zeta(R))(z_n - \bar{z}_n)). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь  $z_k = x_k + iy_k$  — комплексная координата  $k$ -го вихря,  $\zeta(z)$  —  $\zeta$ -функция Вейерштрасса с полупериодами  $R/2$  и  $i\pi$ .

Уравнения движения (1.2) для численных расчетов удобнее представить в вещественной форме [43], не переходя к  $\zeta$ -функциям. Тогда уравнения движения вихрей на плоском цилиндре (на инвариантном многообразии тора), после замены  $y_k \mapsto y_k/2$ , примут вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_k = & \sum_{i=1, i \neq k}^N \frac{\Gamma_i}{4\pi} X(x_k - x_i, y_k, y_i) + \frac{\Gamma_k}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2y_k)}{\cosh(nR) - \cos(2y_k)}, \\ \dot{y}_k = & \sum_{i=1, i \neq k}^N \frac{\Gamma_i}{4\pi} Y(x_k - x_i, y_k, y_i), \end{aligned} \quad (1.3)$$

где  $X, Y$  — функции, описывающие взаимодействие  $k$ -го вихря с остальными вихрями и имеющие вид

$$\begin{aligned} X(x, y_1, y_2) = & \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(\sin(y_1 + y_2) - \sin(y_1 - y_2)) \cosh(x - nR) - \sin(2y_2)}{(\cosh(x - nR) - \cos(y_1 - y_2)) (\cosh(x - nR) - \cos(y_1 + y_2))}, \\ Y(x, y_1, y_2) = & \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sinh(x - nR) (\cos(y_1 - y_2) - \cos(y_1 + y_2))}{(\cosh(x - nR) - \cos(y_1 - y_2)) (\cosh(x - nR) - \cos(y_1 + y_2))}. \end{aligned}$$

Уравнения (1.3) могут быть представлены в гамильтоновой форме

$$\dot{x}_k = \frac{1}{\Gamma_k} \frac{\partial H}{\partial y_k}, \quad \dot{y}_k = -\frac{1}{\Gamma_k} \frac{\partial H}{\partial x_k} \quad (1.4)$$

с гамильтонианом

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{8\pi} \sum_{k,m=1}^N \Gamma_k \Gamma_m \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln \frac{\cosh(x_k - x_m - nR) - \cos(y_k + y_m)}{\cosh(x_k - x_m - nR) - \cos(y_k - y_m)} + \\ & + \frac{1}{8\pi} \sum_{k=1}^N \Gamma_k^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln \frac{\cosh(nR) - \cos(2y_k)}{\cosh(nR)}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где штрих у знака суммы означает исключение слагаемого при  $k = m$ . Помимо интеграла энергии, который совпадает с гамильтонианом, уравнения (1.4) допускают дополнительный первый интеграл

$$P = \sum_{k=1}^N \Gamma_k y_k. \quad (1.6)$$

Данный интеграл связан с инвариантностью уравнений (1.4) относительно параллельных переносов вдоль оси  $Ox$ . Заметим, что в силу ограниченности рассматриваемой области по оси  $Oy$ , уравнения движения не инвариантны относительно параллельных сдвигов вдоль этой оси. Следовательно отсутствует интеграл  $Q = \sum_{k=1}^N \Gamma_k x_k$ , возникающий при рассмотрении вихрей на плоскости или торе.

**Замечание 1.2.** Уравнения движения (1.4) с гамильтонианом (1.5), описывающие движение вихрей в плоском цилиндре, можно построить с помощью метода образов из функции тока  $\psi$  течения жидкости в бесконечной полосе. Функция  $\psi$  для бесконечной полосы определяется из решения уравнения в частных производных

$$\begin{cases} \Delta\psi(z, z_0) = -\Gamma\delta(z, z_0), \\ \psi(z, z_0)|_{y=0} = \psi(z, z_0)|_{y=\pi} = 0, \\ \psi(z, z_0) \text{ ограничена при } z \rightarrow \pm\infty. \end{cases}$$

**Случай двух вихрей.** Рассмотрим движение двух ( $N = 2$ ) вихрей на плоском конечном цилиндре. В этом случае уравнения (1.4) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{\Gamma_2}{4\pi}X(x_1 - x_2, y_1, y_2) + \frac{\Gamma_1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2y_1)}{\cosh(nR) - \cos(2y_1)}, & \dot{y}_1 &= \frac{\Gamma_2}{4\pi}Y(x_1 - x_2, y_1, y_2), \\ \dot{x}_2 &= \frac{\Gamma_1}{4\pi}X(x_2 - x_1, y_2, y_1) + \frac{\Gamma_2}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2y_2)}{\cosh(nR) - \cos(2y_2)}, & \dot{y}_2 &= \frac{\Gamma_1}{4\pi}Y(x_2 - x_1, y_2, y_1), \end{aligned} \tag{1.7}$$

а гамильтониан (1.5) и первый интеграл  $P$  запишутся как

$$\begin{aligned} H &= \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln \frac{\cosh(x_1 - x_2 - nR) - \cos(y_1 + y_2)}{\cosh(x_1 - x_2 - nR) - \cos(y_1 - y_2)} + \\ &+ \frac{\Gamma_1^2}{8\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln \frac{\cosh(nR) - \cos(2y_1)}{\cosh(nR)} + \frac{\Gamma_2^2}{8\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln \frac{\cosh(nR) - \cos(2y_2)}{\cosh(nR)}, \tag{1.8} \\ P &= \Gamma_1 y_1 + \Gamma_2 y_2. \tag{1.9} \end{aligned}$$

В системе уравнений (1.7) будем считать, что вихрь с большей по модулю интенсивностью обозначен индексом 1, а также будем полагать  $\Gamma_1 = 1$ . Этого всегда можно добиться с помощью перенумерации вихрей и замены времени  $\tau = \Gamma_1 t$ . В результате, в рассматриваемой системе (1.7) и интегралах (1.8), (1.9) останется два параметра: длина цилиндра  $R$  и относительная интенсивность  $\gamma = \Gamma_2/\Gamma_1 \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ .

## § 2. Редукция

Для удобства анализа уравнений (1.7) введем масштабирование интеграла  $\hat{P} = P/2$  и проведем редукцию на фиксированный уровень интеграла  $\hat{P} = p$ . Для этого перейдем от переменных  $(x_1, y_1, x_2, y_2)$  к переменным  $(\xi, \eta, \zeta, p)$  следующим образом:

$$\xi = x_1 - x_2, \quad \eta = \frac{y_1 - \gamma y_2}{2}, \quad \zeta = x_1 + x_2, \quad p = \frac{y_1 + \gamma y_2}{2}. \tag{2.1}$$

Обратная замена переменных имеет вид

$$x_1 = \frac{\zeta + \xi}{2}, \quad y_1 = p + \eta, \quad x_2 = \frac{\zeta - \xi}{2}, \quad y_2 = \frac{p - \eta}{\gamma}. \tag{2.2}$$

Из выражений (2.2) видно, что замена (2.1) определена при всех значениях параметра  $\gamma$ , то есть не имеет особенностей. При этом новые переменные  $(\xi, \eta, \zeta, p)$  выбраны так, чтобы скобка Пуассона оставалась канонической.

В новых переменных на фиксированном уровне интеграла  $\hat{P}$  уравнения движения для переменных  $\xi$  и  $\eta$  отделяются, образуют редуцированную систему и имеют следующий вид

$$\begin{aligned} \dot{\xi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta} = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} & \left[ \frac{((\gamma - 1) \sin \frac{(p+\eta)\gamma+p-\eta}{\gamma} - (\gamma + 1) \sin \frac{(p+\eta)\gamma-p+\eta}{\gamma}) \cosh(\xi - nR)}{(\cosh(\xi - nR) - \cos \frac{(p+\eta)\gamma-p+\eta}{\gamma}) (\cosh(\xi - nR) - \cos \frac{(p+\eta)\gamma+p-\eta}{\gamma})} - \right. \\ & - \frac{\gamma \sin \frac{2(p-\eta)}{\gamma} - \sin(2(p+\eta))}{(\cosh(\xi - nR) - \cos \frac{(p+\eta)\gamma-p+\eta}{\gamma}) (\cosh(\xi - nR) - \cos \frac{(p+\eta)\gamma+p-\eta}{\gamma})} + \\ & \left. + \frac{\sin(2(p+\eta))}{\cosh(nR) - \cos(2(p+\eta))} - \frac{\gamma \sin \frac{2(p-\eta)}{\gamma}}{\cosh(nR) - \cos \frac{2(p-\eta)}{\gamma}} \right], \quad (2.3) \\ \dot{\eta} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi} = \frac{\gamma}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} & \frac{\sinh(\xi - nR) (\cos \frac{(p+\eta)\gamma-p+\eta}{\gamma} - \cos \frac{(p+\eta)\gamma+p-\eta}{\gamma})}{(\cosh(\xi - nR) - \cos \frac{(p+\eta)\gamma-p+\eta}{\gamma}) (\cosh(\xi - nR) - \cos \frac{(p+\eta)\gamma+p-\eta}{\gamma})}, \end{aligned}$$

где  $\mathcal{H}$  — гамильтониан (1.8), записанный в новых переменных (2.1)

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = \frac{\gamma}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln & \frac{\cosh(\xi - nR) - \cos \frac{(p+\eta)\gamma+p-\eta}{\gamma}}{\cosh(\xi - nR) - \cos \frac{(p+\eta)\gamma-p+\eta}{\gamma}} + \\ + \frac{1}{8\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln & \frac{\cosh(nR) - \cos(2(p+\eta))}{\cosh(nR)} + \frac{\gamma^2}{8\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln \frac{\cosh(nR) - \cos \frac{2(p-\eta)}{\gamma}}{\cosh(nR)}. \end{aligned}$$

При этом эволюция переменной  $\zeta$  определяется дополнительной квадратурой вида

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} & \left[ \frac{((\gamma + 1) \sin \frac{(p+\eta)\gamma+p-\eta}{\gamma} - (\gamma - 1) \sin \frac{(p+\eta)\gamma-p+\eta}{\gamma}) \cosh(\xi - nR)}{(\cosh(\xi - nR) - \cos \frac{(p+\eta)\gamma-p+\eta}{\gamma}) (\cosh(\xi - nR) - \cos \frac{(p+\eta)\gamma+p-\eta}{\gamma})} - \right. \\ & - \frac{\gamma \sin \frac{2(p-\eta)}{\gamma} + \sin(2(p+\eta))}{(\cosh(\xi - nR) - \cos \frac{(p+\eta)\gamma-p+\eta}{\gamma}) (\cosh(\xi - nR) - \cos \frac{(p+\eta)\gamma+p-\eta}{\gamma})} + \\ & \left. + \frac{\sin(2(p+\eta))}{\cosh(nR) - \cos(2(p+\eta))} + \frac{\gamma \sin \frac{2(p-\eta)}{\gamma}}{\cosh(nR) - \cos \frac{2(p-\eta)}{\gamma}} \right]. \end{aligned}$$

Данная квадратура может быть вычислена после построения решения системы уравнений (2.3) для восстановления траекторий вихрей в абсолютном пространстве.

Переменная  $\xi$  определена на промежутке  $(-R, R]$ , а область определения  $\eta$  зависит от значений  $p$  и  $\gamma$ . На фиксированном уровне  $p$  в зависимости от значения  $\gamma$  переменная  $\eta$  может иметь следующие области определения:

(1) При  $\gamma > 0$  и  $p > 0$  ( $p \in (0, \frac{\pi+\gamma\pi}{2})$ ):

$$\eta \in \left( p - \gamma \min \left( \frac{2p}{\gamma}, \pi \right), -p + \min(2p, \pi) \right);$$

(2) При  $\gamma < 0$ ,  $p > 0$  ( $p \in (0, \frac{\pi}{2})$ ):

$$\eta \in \left( p, \frac{1}{2} \min(2p - \gamma\pi, \pi) - \frac{\gamma}{2} \min \left( \frac{2p - \pi}{\gamma}, \pi \right) \right);$$

(3) При  $\gamma < 0, p < 0$  ( $p \in (\frac{\gamma\pi}{2}, 0)$ ):

$$\eta \in \left( -p, \frac{1}{2} \min(2p - \gamma\pi, \pi) - \frac{\gamma}{2} \min\left(\frac{2p - \pi}{\gamma}, \pi\right) \right).$$

В результате редукции от системы четырех дифференциальных уравнений (1.7) переходим к рассмотрению системы из двух уравнений (2.3). Далее по отдельности рассмотрим уравнения (2.3) в случаях вихревой пары ( $\gamma = -1$ ), вихрей одинаковой интенсивности ( $\gamma = 1$ ) и при произвольных значениях  $\gamma \in (-1, 1)/\{0\}$ .

### § 3. Случай $\gamma = -1$

Фазовые портреты системы (2.3) в случае вихревой пары при  $R = 1$  и следующих значениях параметра  $p$ : (а)  $p = 0$ , (б)  $p = \pm 0.5$ , (в)  $p = \pm 0.75$  приведены на рис. 2. Отметим, что в рассматриваемом случае область определения переменной  $\eta$  может быть записана как  $\eta \in (|p|, \pi - |p|)$ .

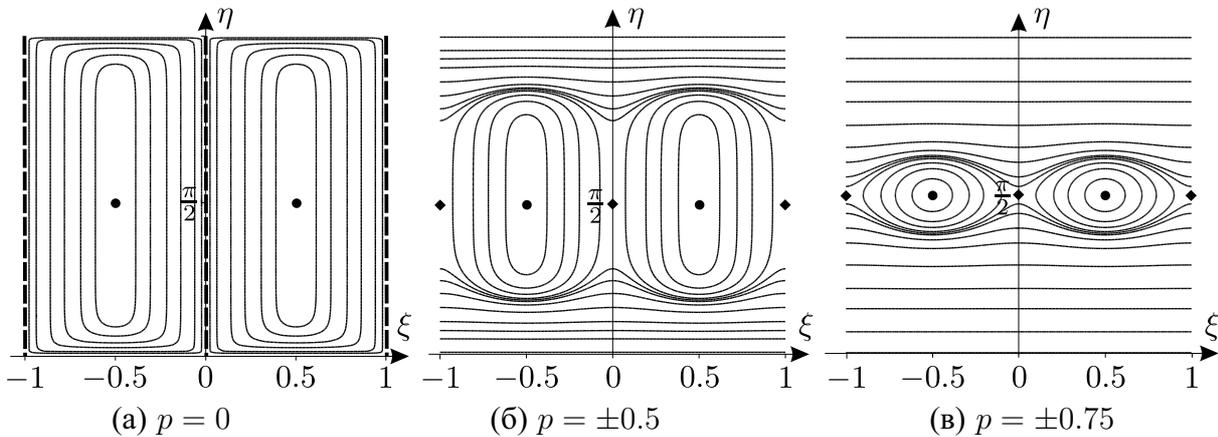


Рис. 2. Фазовые портреты при  $R = 1$

Из рис. 2 видно, что при увеличении значения уровня интеграла  $p$ , вид фазовых портретов качественно не изменяется (за исключением случая  $p = 0$ ). На всех приведенных фазовых портретах отмечены неподвижные точки рассматриваемой системы. Точками отмечены *устойчивые* неподвижные точки  $(\xi, \eta) = (\pm R/2, \pi/2)$ , ромбами — *неустойчивые* неподвижные точки  $(\xi, \eta) = (0, \pi/2)$  (или  $(\xi, \eta) = (R, \pi/2)$ ). Также в случае  $p = 0$  пунктирными прямыми отмечены особые прямые  $\xi = 0, \xi = \pm R$ . Все указанные неподвижные точки и особенности далее рассмотрим отдельно.

**Неподвижные точки.** *Неустойчивые* неподвижные точки  $(\xi, \eta) = (0, \pi/2)$  (или  $(\xi, \eta) = (R, \pi/2)$ ) соответствуют конфигурации вихрей в абсолютном пространстве, представленной на рис. 3, а. В этом случае вихри располагаются на одной **вертикальной** прямой друг над другом, причем их координаты  $x$  совпадают:  $x_1 = x_2$ , а координаты  $y$  связаны соотношением  $y_1 + y_2 = \pi$ . Описанная вихревая конфигурация будет двигаться вдоль цилиндра.

На нулевом уровне интеграла, то есть при  $p = 0$ , данная неустойчивая конфигурация не существует.

*Устойчивые* неподвижные точки  $(\xi, \eta) = (\pm R/2, \pi/2)$  соответствуют конфигурации вихрей в абсолютном пространстве, представленной на рис. 3, б. В этом случае вихри смещены друг от друга по оси  $Ox$  на расстояние  $R/2$ , то есть их координаты связаны соотношениями  $x_2 - x_1 = \pm R/2, y_1 + y_2 = \pi$ . Указанная вихревая конфигурация также движется вдоль цилиндра.

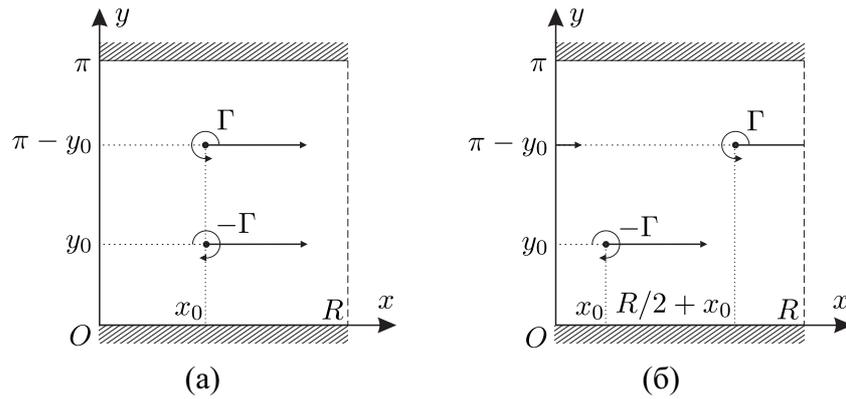


Рис. 3. Движения вихрей, соответствующие неподвижным точкам

В случае  $p = 0$  устойчивая неподвижная точка соответствует конфигурации вихрей, при которой вихри расположены на одной **горизонтальной** прямой на расстоянии  $R/2$ . При этом такая конфигурация будет статической (то есть вихри будут стоять на месте, чего не происходит при всех остальных значениях параметра  $p$ ).

**Замечание 3.1.** Указанные частные решения можно рассматривать как шахматную (устойчивая неподвижная точка) и симметричную (неустойчивая неподвижная точка) вихревые дорожки в бесконечной полосе. Полученные результаты качественно согласуются с результатами устойчивости вихревых дорожек на неограниченной плоскости [44].

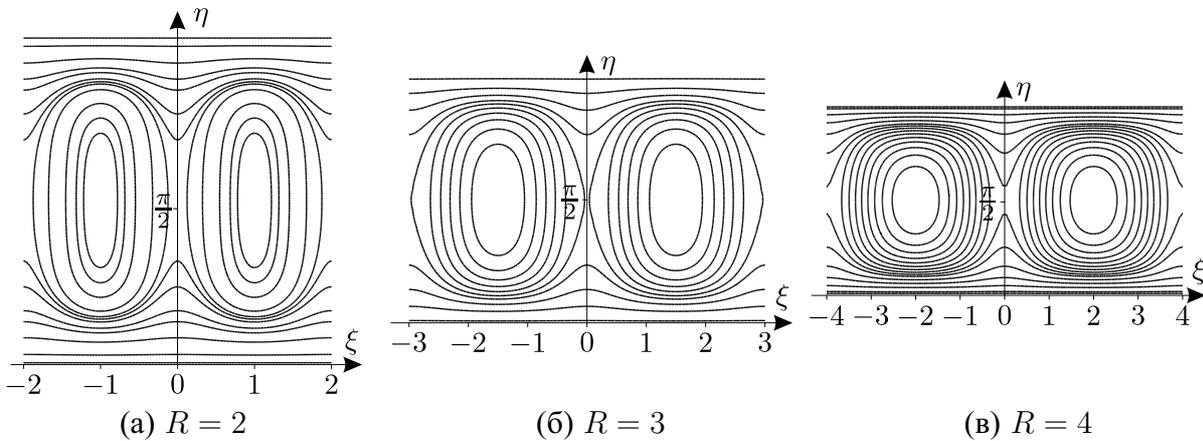
**Особенности.** В зависимости от значения интеграла  $p$  в рассматриваемой системе существуют следующие особенности (семейства особенностей).

1. Совпадение вихрей при  $p = 0$  и  $\xi = 0$  (или  $\xi = \pm R$ ), то есть  $x_1 = x_2, y_1 = y_2$ . Прямые, соответствующие этому семейству особенностей, отмечены на фазовом портрете (см. рис. 3, а) пунктиром. При приближении к этой особенности гамильтониан  $\mathcal{H} \rightarrow -\infty$ .
2. Приближение одного из вихрей к нижней границе цилиндра:
  - при  $\eta \rightarrow -p$  первый вихрь (с координатами  $(x_1, y_1)$ ) приближается к границе, то есть  $y_1 \rightarrow 0$ , при этом гамильтониан  $\mathcal{H} \rightarrow -\infty$ ;
  - при  $\eta \rightarrow p$  второй вихрь (с координатами  $(x_2, y_2)$ ) приближается к границе, то есть  $y_2 \rightarrow 0$ , при этом гамильтониан  $\mathcal{H} \rightarrow -\infty$ .
3. Приближение одного из вихрей к верхней границе цилиндра:
  - при  $\eta \rightarrow \pi - p$  первый вихрь (с координатами  $(x_1, y_1)$ ) приближается к границе, то есть  $y_1 \rightarrow \pi$ , при этом гамильтониан  $\mathcal{H} \rightarrow -\infty$ ;
  - при  $\eta \rightarrow \pi + p$  второй вихрь (с координатами  $(x_2, y_2)$ ) приближается к границе, то есть  $y_2 \rightarrow \pi$ , при этом гамильтониан  $\mathcal{H} \rightarrow -\infty$ .
4. Одновременное приближение вихрей к одной границе цилиндра:
  - при  $p = 0$  и  $\eta \rightarrow 0$  оба вихря приближаются к нижней границе, то есть  $y_1 \rightarrow 0, y_2 \rightarrow 0$ , при этом гамильтониан  $\mathcal{H} \rightarrow -\infty$ ;
  - при  $p = 0$  и  $\eta \rightarrow \pi$  оба вихря приближаются к верхней границе, то есть  $y_1 \rightarrow \pi, y_2 \rightarrow \pi$ , при этом гамильтониан  $\mathcal{H} \rightarrow -\infty$ .

5. Одновременное приближение вихрей к разным границам цилиндра при  $p = \pm\pi/2$  и  $\eta \rightarrow \pi/2$ , то есть  $y_1 \rightarrow 0, y_2 \rightarrow \pi$  (или  $y_2 \rightarrow 0, y_1 \rightarrow \pi$ ), при этом гамильтониан  $\mathcal{H} \rightarrow -\infty$ .

**Замечание 3.2.** В случае  $p = \pm\pi/2$  все фазовое пространство рассматриваемой системы вырождается в прямую  $\eta = \pi/2$ , на которой система не определена, а следовательно, не имеет динамики.

На рис. 4 показаны фазовые портреты системы (2.3) при  $p = 0.5$  и разных значениях  $R$ . Из рисунка видно, что при изменении длины цилиндра  $R$  динамика системы качественно не изменяется, а фазовые портреты «растягиваются» при увеличении  $R$  или «сжимаются» при его уменьшении. Однако строгое доказательство данного утверждения остается открытым вопросом.

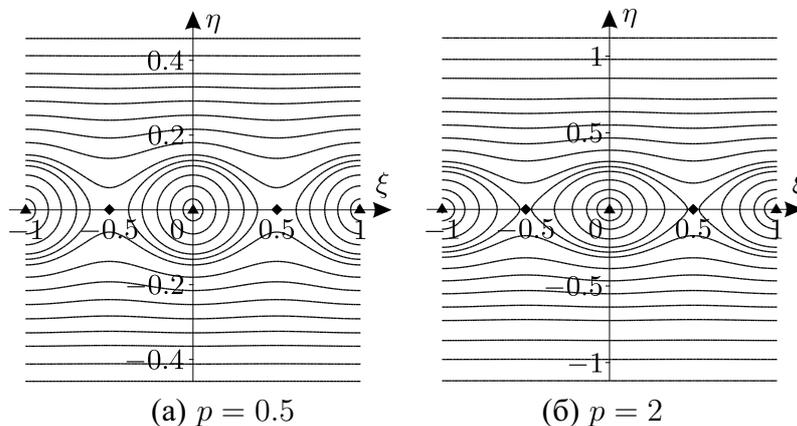


**Рис. 4.** Фазовые портреты при  $p = 0.5$  и разных значениях  $R$

**§ 4. Случай  $\gamma = 1$**

Фазовые портреты системы (2.3) в случае вихрей одинаковой интенсивности при  $R = 1$  и следующих значениях параметра  $p$ : (а)  $p = 0.5$ , (б)  $p = 2$  приведены на рис. 5. Область определения переменной  $\eta$  в этом случае запишется как

$$\eta \in (p - \min(2p, \pi), -p + \min(2p, \pi)).$$



**Рис. 5.** Фазовый портрет при  $R = 1$  и разных значениях  $p$

Из рис. 5 видно, что при изменении параметра  $p$  не происходит качественного изменения фазового портрета системы. На рис. 5 ромбами отмечены *неустойчивые* неподвижные точки, а треугольниками — особенности, которые будут подробно рассмотрены далее.

Фазовые портреты, приведенные на рис. 5, построены при  $R = 1$ . Другие значения параметра  $R$  не рассматриваются в силу численного исследования, которое показывает, что изменение параметра  $R$  приводит только к «растяжению» или «сжатию» фазовых траекторий (как описано в § 3).

**Неподвижные точки.** *Неустойчивые* неподвижные точки  $(\xi, \eta) = (\pm R/2, 0)$  соответствуют конфигурации вихрей в абсолютном пространстве, приведенной на рис. 6. В такой конфигурации вихри расположены на одной **горизонтальной** прямой, но на расстоянии  $R/2$  друг от друга, то есть их координаты связаны соотношениями  $x_2 - x_1 = \pm R$ ,  $y_1 = y_2$ .

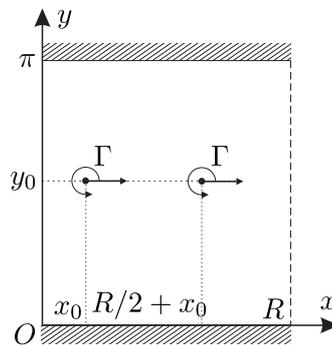


Рис. 6. Движение вихрей, соответствующее неподвижной точке

**Особенности.** Так же как и в случае  $\gamma = -1$ , укажем на существующие в рассматриваемой системе особенности и семейства особенностей.

1. Совпадение вихрей при  $(\xi, \eta) = (0, 0)$  (или  $(\xi, \eta) = (\pm R, 0)$ ), то есть  $x_1 = x_2$ ,  $y_1 = y_2$ . Указанная особенность существует при любом значении уровня интеграла  $p$ . При приближении к этой особенности гамильтониан  $\mathcal{H} \rightarrow +\infty$ .
2. Приближение одного из вихрей к нижней границе цилиндра:
  - при  $\eta \rightarrow -p$  первый вихрь (с координатами  $(x_1, y_1)$ ) приближается к границе, то есть  $y_1 \rightarrow 0$ , при этом гамильтониан  $\mathcal{H} \rightarrow -\infty$ ;
  - при  $\eta \rightarrow p$  второй вихрь (с координатами  $(x_2, y_2)$ ) приближается к границе, то есть  $y_2 \rightarrow 0$ , при этом гамильтониан  $\mathcal{H} \rightarrow -\infty$ .
3. Приближение одного из вихрей к верхней границе цилиндра:
  - при  $\eta \rightarrow \pi - p$  первый вихрь (с координатами  $(x_1, y_1)$ ) приближается к границе, то есть  $y_1 \rightarrow \pi$ , при этом гамильтониан  $\mathcal{H} \rightarrow -\infty$ ;
  - при  $\eta \rightarrow -\pi + p$  второй вихрь (с координатами  $(x_2, y_2)$ ) приближается к границе, то есть  $y_2 \rightarrow \pi$ , при этом гамильтониан  $\mathcal{H} \rightarrow -\infty$ .
4. Одновременное приближение вихрей на одну границу цилиндра:
  - при  $p = 0$  и  $\eta \rightarrow 0$  оба вихря приближаются к нижней границе ( $y_1 \rightarrow 0$ ,  $y_2 \rightarrow 0$ ), при этом гамильтониан  $\mathcal{H} \rightarrow -\infty$ ;

- при  $p = \pi$  и  $\eta \rightarrow 0$  оба вихря приближаются к верхней границе ( $y_1 \rightarrow \pi, y_2 \rightarrow \pi$ ), при этом гамильтониан  $\mathcal{H} \rightarrow -\infty$ .

5. Одновременное приближение вихрей к разным границам цилиндра при  $p = \pi/2$  и  $\eta \rightarrow \pm\pi/2$  ( $\eta \rightarrow -\pi/2$  соответствует  $y_1 \rightarrow 0, y_2 \rightarrow \pi$ , а  $\eta \rightarrow \pi/2 - y_2 \rightarrow 0, y_1 \rightarrow \pi$ ), при этом гамильтониан  $\mathcal{H} \rightarrow -\infty$ .

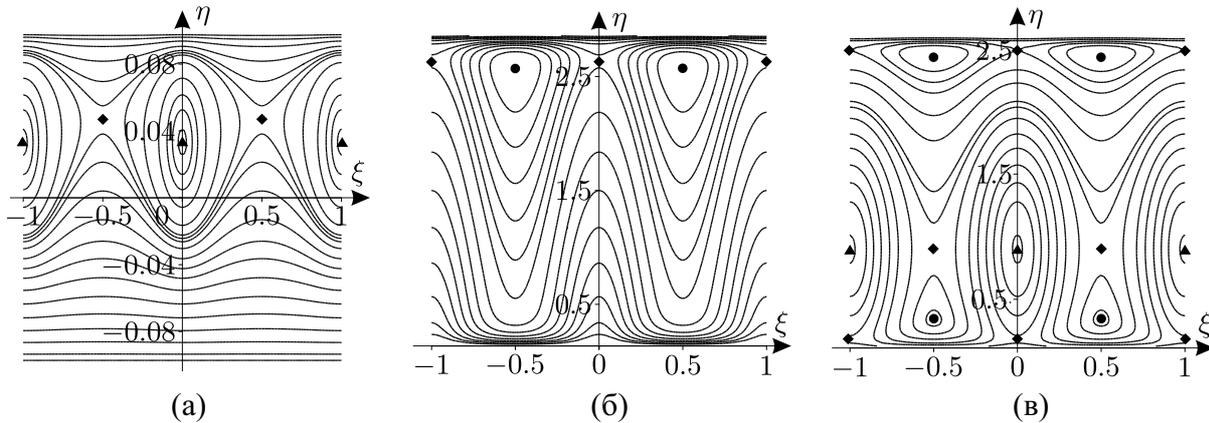
**Замечание 4.1.** В случаях  $p = 0, p = \pi$  фазовое пространство рассматриваемой системы вырождается в прямую  $\eta = 0$ , на которой система не определена.

**§ 5. Случай  $|\gamma| \neq 1$  и  $\gamma \neq 0$**

Фазовые портреты системы (2.3) для случая произвольных интенсивностей приведены на рис. 7 при следующих значениях параметров  $p, \gamma$ :

- (а)  $p = 0.1, \quad \gamma = 0.5;$
- (б)  $p = -0.1, \quad \gamma = -0.95;$
- (в)  $p = 0.1, \quad \gamma = -0.8.$

На рис. 7 точками и ромбами обозначены устойчивые и неустойчивые неподвижные точки соответственно. Треугольником отмечена особенность  $(\xi, \eta) = (0, p\frac{1-\gamma}{1+\gamma})$  (или  $(\xi, \eta) = (\pm R, p\frac{1-\gamma}{1+\gamma})$ ), соответствующая совпадению вихрей.



**Рис. 7.** Фазовый портрет при  $R = 1$  и разных значениях параметров  $p, \gamma_1, \gamma_2$

**Неподвижные точки.** В силу нечетности гиперболического синуса ( $\sinh x$ ) из уравнения (2.3) для  $\dot{\eta}$  следует, что неподвижные точки могут быть расположены только на вертикальных прямых  $\xi = 0$  (они же  $\xi = \pm R$ ),  $\xi = \pm R/2$ . При этом координаты  $\eta$  для неподвижных точек определяются из решения уравнений

$$\dot{\xi}|_{\xi=0} = 0, \quad \dot{\xi}|_{\xi=R/2} = 0. \tag{5.1}$$

Из уравнений (5.1) не удастся получить явное выражение для  $\eta$ , поэтому оно определяется численно. Неподвижные точки редуцированной системы соответствуют конфигурациям вихрей в абсолютном пространстве, при которых вихри либо располагаются друг над другом (выполняется соотношение  $x_1 = x_2$ ), либо расположены на расстоянии  $R/2$  по оси  $Ox$  (выполняется соотношение  $x_2 - x_1 = \pm R/2$ ). При этом расстояние между вихрями по оси  $Oy$  сохраняется при движении вихрей и определяется значением  $\eta_0$ , соответствующим неподвижной точке, то есть координаты  $y$  в любой момент времени должны удовлетворять равенству  $y_1 - \gamma y_2 = 2\eta_0$ .

Из рис. 7 видно, что в зависимости от значения параметров  $p, \gamma$  неподвижные точки могут становиться устойчивыми (например, рис. 7,  $a \rightarrow 7, б$ ) или терять устойчивость. Также на одной вертикальной прямой  $\xi = 0$  или  $\xi = \pm R$  могут возникать несколько неподвижных точек (см. рис. 7,  $в$ ) одного или разных типов. Подробное исследование неподвижных точек и построение бифуркационной диаграммы остается пока открытой неисследованной задачей.

**Особенности.** Укажем на особенности и семейства особенностей, существующие в системе (2.3), в зависимости от значений  $p$  и  $\gamma$ .

1. Совпадение вихрей при  $(\xi, \eta) = (0, p \frac{1-\gamma}{1+\gamma})$  (или  $(\xi, \eta) = (\pm R, p \frac{1-\gamma}{1+\gamma})$ ). Указанная особенность не существует при  $\gamma = -1$ , за исключением случая  $p = 0$ . Также данная особенность не возникает при  $p < 0, \gamma < 0$ , поскольку не входит в область определения  $\eta$ . При приближении к этой особенности гамильтониан  $\mathcal{H} \rightarrow \text{sign}(\gamma) \infty$ .
2. Приближение одного из вихрей к нижней границе цилиндра:
  - при  $\eta \rightarrow -p$  первый вихрь (с координатами  $(x_1, y_1)$ ) приближается к границе, то есть  $y_1 \rightarrow 0$ , при этом гамильтониан  $\mathcal{H} \rightarrow -\infty$ ;
  - при  $\eta \rightarrow p$  второй вихрь (с координатами  $(x_2, y_2)$ ) приближается к границе, то есть  $y_2 \rightarrow 0$ , при этом гамильтониан  $\mathcal{H} \rightarrow -\infty$ .
3. Приближение одного из вихрей к верхней границе цилиндра:
  - при  $\eta \rightarrow \pi - p$  первый вихрь (с координатами  $(x_1, y_1)$ ) приближается к границе, то есть  $y_1 \rightarrow \pi$ , при этом гамильтониан  $\mathcal{H} \rightarrow -\infty$ ;
  - при  $\eta \rightarrow -\gamma\pi + p$  второй вихрь (с координатами  $(x_2, y_2)$ ) приближается к границе, то есть  $y_2 \rightarrow \pi$ , при этом гамильтониан  $\mathcal{H} \rightarrow -\infty$ .
4. Одновременное приближение вихрей к одной границе цилиндра:
  - при  $p = 0$  и  $\eta \rightarrow 0$  оба вихря приближаются к нижней границе ( $y_1 \rightarrow 0, y_2 \rightarrow 0$ ), при этом гамильтониан  $\mathcal{H} \rightarrow -\infty$ ;
  - при  $p = \frac{\pi}{2}(1 + \gamma)$  и  $\eta \rightarrow \frac{\pi}{2}(1 - \gamma)$  оба вихря приближаются к верхней границе ( $y_1 \rightarrow \pi, y_2 \rightarrow \pi$ ), при этом гамильтониан  $\mathcal{H} \rightarrow -\infty$ .
5. Одновременное приближение вихрей к разным границам цилиндра происходит при  $p = \gamma \frac{\pi}{2}, \eta \rightarrow -\gamma \frac{\pi}{2}$  (соответствует  $y_1 \rightarrow 0, y_2 \rightarrow \pi$ ) и при  $p = \frac{\pi}{2}, \eta \rightarrow \frac{\pi}{2}$  (соответствует  $y_2 \rightarrow 0, y_1 \rightarrow \pi$ ), при этом гамильтониан  $\mathcal{H} \rightarrow -\infty$ .

## Заключение

В данной работе получены уравнения, описывающие движение точечных вихрей в идеальной несжимаемой жидкости на поверхности плоского цилиндра конечной высоты. Показано, что уравнения движения могут быть представлены в гамильтоновой форме и допускают один дополнительный первый интеграл. Наличие только одного дополнительного первого интеграла отличает рассматриваемую задачу от задачи о движении вихрей на бесконечном цилиндре.

Подробно рассмотрен интегрируемый случай двух вихрей, приведен явный вид уравнений. Предложена процедура редукции на уровень дополнительного первого интеграла. Отдельно рассмотрены случаи вихревой пары и вихрей одинаковых интенсивностей. Для

каждого случая приведены характерные фазовые портреты, показано существование неподвижных точек, указаны особенности рассматриваемой системы. Приведена классификация особенностей и неподвижных точек.

Рассмотрен случай двух вихрей при произвольных интенсивностях, приведены фазовые портреты системы при различных параметрах системы. Показано существование неподвижных точек в системе. Открытым вопросом остается построение бифуркационной диаграммы системы при произвольных интенсивностях вихрей и исследование большего количества вихрей на плоском цилиндре.

Автор выражает благодарность А. А. Килину и И. С. Мамаеву за полезные обсуждения, внимательное прочтение работы и ряд важных замечаний.

**Финансирование.** Исследование выполнено в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (FEWS–2020–0009).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Helmholtz H. Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen // Journal für die reine und angewandte Mathematik. 1858. Vol. 1858. Issue 55. P. 25–55. <https://doi.org/10.1515/crll.1858.55.25>
2. Aref H. Motion of three vortices // The Physics of Fluids. 1979. Vol. 22. Issue 3. P. 393–400. <https://doi.org/10.1063/1.862605>
3. Новиков Е. А. Динамика и статистика системы вихрей // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1975. Т. 68. Вып. 5. С. 1868–1882.
4. Rott N. Three-vortex motion with zero total circulation // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. 1989. Vol. 40. Issue 4. P. 473–494. <https://doi.org/10.1007/BF00944801>
5. Castilla M. S. A. C., Moauro V., Negrini P. The non-integrability of the four positive vortices problem. Università di Trento. Dipartimento di Matematica, 1992.
6. Borisov A. V., Pavlov A. E. Dynamics and statics of vortices on a plane and a sphere — I // arXiv: nlin/0503049v1 [nlin.CD]. 2005. <https://doi.org/10.48550/arXiv.nlin/0503049>
7. Aref H., Stremler M. A. Four-vortex motion with zero total circulation and impulse // Physics of Fluids. 1999. Vol. 11. Issue 12. P. 3704–3715. <https://doi.org/10.1063/1.870233>
8. Aref H., Pomphrey N. Integrable and chaotic motions of four vortices. I. The case of identical vortices // Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences. 1982. Vol. 380. Issue 1779. P. 359–387. <https://doi.org/10.1098/rspa.1982.0047>
9. Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Переход к хаосу в динамике четырех точечных вихрей на плоскости // Доклады Академии наук. 2006. Т. 408. № 1. С. 49–54. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=9214117>
10. Зиглин С. Л. Неинтегрируемость задачи о движении четырех точечных вихрей // Доклады Академии наук СССР. 1980. Т. 250. № 6. С. 1296–1300. <https://www.mathnet.ru/rus/dan43376>
11. Glass K. Equilibrium configurations for a system of  $N$  particles in the plane // Physics Letters A. 1997. Vol. 235. Issue 6. P. 591–596. [https://doi.org/10.1016/S0375-9601\(97\)00720-2](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(97)00720-2)
12. Kurakin L. G., Ostrovskaya I. V. Resonances in the stability problem of a point vortex quadrupole on a plane // Regular and Chaotic Dynamics. 2021. Vol. 26. Issue 5. P. 526–542. <https://doi.org/10.1134/S1560354721050051>
13. Thomson J. J. A treatise on the motion of vortex rings. An essay to which the Adams prize was adjudged in 1882, in the university of Cambridge. London: Macmillan and Co., 1883.
14. Aref H. On the equilibrium and stability of a row of point vortices // Journal of Fluid Mechanics. 1995. Vol. 290. P. 167–181. <https://doi.org/10.1017/S002211209500245X>
15. Aref H. Point vortex motions with a center of symmetry // The Physics of Fluids. 1982. Vol. 25. Issue 12. P. 2183–2187. <https://doi.org/10.1063/1.863710>
16. Борисов А. В., Мамаев И. С. Математические методы динамики вихревых структур. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005.

17. Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A. Absolute and relative choreographies in the problem of point vortices moving on a plane // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2004. Vol. 9. No. 2. P. 101–111. <https://doi.org/10.1070/RD2004v009n02ABEH000269>
18. Calleja R. C., Doedel E. J., García-Azpeitia C. Choreographies in the  $n$ -vortex problem // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2018. Vol. 23. Issue 5. P. 595–612. <https://doi.org/10.1134/S156035471805009X>
19. Громека И. С. О вихревых движениях жидкости на сфере // Ученые записки Казанского университета. Собр. протоколов заседания секции физ.-мат. общ-ва естествоиспытателей при Казанском ун-те. Т. III. 1885.
20. Богомолов В. А. Динамика завихренности на сфере // *Известия Академии наук СССР. Механика жидкости и газа*. 1977. № 6. С. 57–65. <https://mzg.ipmnet.ru/ru/Issues/1977/6/57>
21. Богомолов В. А. О двумерной гидродинамике на сфере // *Известия Академии наук СССР. Физика атмосферы и океана*. 1979. Т. 15. № 1. С. 29–35.
22. Цермело Э. Гидродинамические исследования вихревых движений на поверхности сферы // *Нелинейная динамика*. 2007. Т. 3. № 1. С. 81–109. <https://doi.org/10.20537/nd0701006>
23. Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. A new integrable problem of motion of point vortices on the sphere // *IUTAM Symposium on Hamiltonian Dynamics, Vortex Structures, Turbulence: Proceedings of the IUTAM Symposium held in Moscow, 25–30 August, 2006*. Dordrecht: Springer, 2008. P. 39–53. [https://doi.org/10.1007/978-1-4020-6744-0\\_4](https://doi.org/10.1007/978-1-4020-6744-0_4)
24. Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. Reduction and chaotic behavior of point vortices on a plane and a sphere // arXiv: nlin/0507057v1 [nlin.SI]. 2005. <https://doi.org/10.48550/arXiv.nlin/0507057>
25. Kidambi R., Newton P. K. Motion of three point vortices on a sphere // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1998. Vol. 116. Issues 1–2. P. 143–175. [https://doi.org/10.1016/S0167-2789\(97\)00236-4](https://doi.org/10.1016/S0167-2789(97)00236-4)
26. Borisov A. V., Kilin A. A. Stability of Thomson’s configurations of vortices on a sphere // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2000. Vol. 5. No. 2. P. 189–200. <https://doi.org/10.1070/RD2000v005n02ABEH000141>
27. Kurakin L. G. On nonlinear stability of the regular vortex systems on a sphere // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2004. Vol. 14. Issue 3. P. 592–602. <https://doi.org/10.1063/1.1764432>
28. García-Azpeitia C., García-Naranjo L. C. Platonic solids and symmetric solutions of the  $N$ -vortex problem on the sphere // *Journal of Nonlinear Science*. 2022. Vol. 32. Issue 3. Article number: 39. <https://doi.org/10.1007/s00332-022-09792-y>
29. Tronin K. G. Absolute choreographies of point vortices on a sphere // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2006. Vol. 11. Issue 1. P. 123–130. <https://doi.org/10.1070/RD2006v011n01ABEH000338>
30. Borisov A. V., Mamaev I. S., Bizyaev I. A. Three vortices in spaces of constant curvature: Reduction, Poisson geometry, and stability // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2018. Vol. 23. Issue 5. P. 613–636. <https://doi.org/10.1134/S1560354718050106>
31. Yang Cheng. Vortex motion of the Euler and Lake equations // *Journal of Nonlinear Science*. 2021. Vol. 31. Issue 3. Article number: 48. <https://doi.org/10.1007/s00332-021-09705-5>
32. Гешев П. И., Ездин Б. С. Движение вихревой пары между параллельными стенками // *Прикладная механика и техническая физика*. 1983. № 5. С. 62–67. [https://www.sibran.ru/journals/issue.php?ID=119903&ARTICLE\\_ID=134688](https://www.sibran.ru/journals/issue.php?ID=119903&ARTICLE_ID=134688)
33. Havelock T. H. LII. The stability of motion of rectilinear vortices in ring formation // *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*. 1931. Vol. 11. Issue 70 suppl. P. 617–633. <https://doi.org/10.1080/14786443109461714>
34. Килин А. А., Артемова Е. М. Устойчивость правильных вихревых многоугольников в конденсате Бозе–Эйнштейна // *Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета*. 2020. Т. 56. С. 20–29. <https://doi.org/10.35634/2226-3594-2020-56-02>
35. Artemova E. M., Kilin A. A. Nonlinear stability of regular vortex polygons in a Bose–Einstein condensate // *Physics of Fluids*. 2021. Vol. 33. Issue 12. 127105. <https://doi.org/10.1063/5.0070763>
36. Erdakova N. N., Mamaev I. S. On the dynamics of point vortices in an annular region // *Fluid Dynamics Research*. 2014. Vol. 46. No. 3. 031420. <https://doi.org/10.1088/0169-5983/46/3/031420>

37. von Kármán Th. Über den Mechanismus des Widerstandes, den ein bewegter Körper in einer Flüssigkeit erfährt // Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse. 1911. Vol. 1911. P. 509–517. <http://eudml.org/doc/58812>
38. Aref H., Stremler M. A. On the motion of three point vortices in a periodic strip // Journal of Fluid Mechanics. 1996. Vol. 314. P. 1–25. <https://doi.org/10.1017/S0022112096000213>
39. Basu S., Stremler M. A. On the motion of two point vortex pairs with glide-reflective symmetry in a periodic strip // Physics of Fluids. 2015. Vol. 27. Issue 10. 103603. <https://doi.org/10.1063/1.4932534>
40. Фридман А. А., Полубаринова П. Я. О перемещающихся особенностях плоского движения несжимаемой жидкости // Геофизический сборник. 1928. Т. 5. № 2. С. 9–23.
41. Guenther N.-E., Massignan P., Fetter A. L. Quantized superfluid vortex dynamics on cylindrical surfaces and planar annuli // Physical Review A. 2017. Vol. 96. Issue 6. 063608. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.96.063608>
42. O’Neil K. A. On the Hamiltonian dynamics of vortex lattices // Journal of Mathematical Physics. 1989. Vol. 30. Issue 6. P. 1373–1379. <https://doi.org/10.1063/1.528605>
43. Kilin A. A., Artemova E. M. Integrability and chaos in vortex lattice dynamics // Regular and Chaotic Dynamics. 2019. Vol. 24. Issue 1. P. 101–113. <https://doi.org/10.1134/S1560354719010064>
44. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Физматлит, 1963.

Поступила в редакцию 03.11.2023

Принята к публикации 10.12.2023

Артемова Елизавета Марковна, Уральский математический центр, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7637-2757>

E-mail: [liz-artemova2014@yandex.ru](mailto:liz-artemova2014@yandex.ru)

**Цитирование:** Е. М. Артемова. Динамика двух вихрей на конечном плоском цилиндре // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2023. Т. 33. Вып. 4. С. 642–658.

**E. M. Artemova**

### Dynamics of two vortices on a finite flat cylinder

*Keywords:* point vortices, ideal fluid, fixed points, singularities, phase portrait.

MSC2020: 76B47, 70H05, 37Jxx, 34Cxx

DOI: [10.35634/vm230407](https://doi.org/10.35634/vm230407)

In this work, a model that describes the motion of point vortices in an ideal incompressible fluid on a finite flat cylinder is obtained. The case of two vortices is considered in detail. It is shown that the equations of motion of vortices can be represented in Hamiltonian form and have an additional first integral. A procedure of reduction to a fixed level of the first integral is proposed. For the reduced system, phase portraits are constructed, fixed points and singularities of the system are indicated.

**Funding.** The study was supported by the framework of the state assignment or the Ministry of Science and Higher Education (No. FEWS–2020–0009).

#### REFERENCES

1. Helmholtz H. Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1858, vol. 1858, issue 55, pp. 25–55. <https://doi.org/10.1515/crll.1858.55.25>
2. Aref H. Motion of three vortices, *The Physics of Fluids*, 1979, vol. 22, issue 3, pp. 393–400. <https://doi.org/10.1063/1.862605>
3. Novikov E. A. Dynamics and statistics of a system of vortices, *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1976, vol. 41, no. 5, pp. 937–943.
4. Rott N. Three-vortex motion with zero total circulation, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 1989, vol. 40, issue 4, pp. 473–494. <https://doi.org/10.1007/BF00944801>
5. Castilla M. S. A. C., Moauro V., Negrini P. The non-integrability of the four positive vortices problem. Università di Trento. Dipartimento di Matematica, 1992.
6. Borisov A. V., Pavlov A. E. Dynamics and statics of vortices on a plane and a sphere — I, *arXiv: nlin/0503049v1 [nlin.CD]*, 2005. <https://doi.org/10.48550/arXiv.nlin/0503049>
7. Aref H., Stremler M. A. Four-vortex motion with zero total circulation and impulse, *Physics of Fluids*, 1999, vol. 11, issue 12, pp. 3704–3715. <https://doi.org/10.1063/1.870233>
8. Aref H., Pomphrey N. Integrable and chaotic motions of four vortices. I. The case of identical vortices, *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 1982, vol. 380, issue 1779, pp. 359–387. <https://doi.org/10.1098/rspa.1982.0047>
9. Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. Transition to chaos in dynamics of four point vortices on a plane, *Doklady Physics*, 2006, vol. 51, issue 5, pp. 262–267. <https://doi.org/10.1134/S1028335806050089>
10. Ziglin S. L. Nonintegrability of a problem of the motion of four point vortices, *Soviet Mathematics. Doklady*, 1980, vol. 21, pp. 296–299. <https://zbmath.org/0464.76021>
11. Glass K. Equilibrium configurations for a system of  $N$  particles in the plane, *Physics Letters A*, 1997, vol. 235, issue 6, pp. 591–596. [https://doi.org/10.1016/S0375-9601\(97\)00720-2](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(97)00720-2)
12. Kurakin L. G., Ostrovskaya I. V. Resonances in the stability problem of a point vortex quadrupole on a plane, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2021, vol. 26, issue 5, pp. 526–542. <https://doi.org/10.1134/S1560354721050051>
13. Thomson J. J. *A treatise on the motion of vortex rings. An essay to which the Adams prize was adjudged in 1882, in the university of Cambridge*, London: Macmillan and Co., 1883.
14. Aref H. On the equilibrium and stability of a row of point vortices, *Journal of Fluid Mechanics*, 1995, vol. 290, pp. 167–181. <https://doi.org/10.1017/S002211209500245X>
15. Aref H. Point vortex motions with a center of symmetry, *The Physics of Fluids*, 1982, vol. 25, issue 12, pp. 2183–2187. <https://doi.org/10.1063/1.863710>

16. Borisov A. V., Mamaev I. S. *Matematicheskie metody dinamiki vikhrevykh struktur* (Mathematical methods in the dynamics of vortex structures), Moscow–Izhevsk: Institute of Computer Science, 2005.
17. Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A. Absolute and relative choreographies in the problem of point vortices moving on a plane, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2004, vol. 9, no. 2, pp. 101–111. <https://doi.org/10.1070/RD2004v009n02ABEH000269>
18. Calleja R. C., Doedel E. J., García-Azpeitia C. Choreographies in the  $n$ -vortex problem, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2018, vol. 23, issue 5, pp. 595–612. <https://doi.org/10.1134/S156035471805009X>
19. Gromeka I. S. On vortex motions of a fluid on a sphere, *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta*, 1885 (in Russian).
20. Bogomolov V. A. Dynamics of vorticity at a sphere, *Fluid Dynamics*, 1977, vol. 12, issue 6, pp. 863–870. <https://doi.org/10.1007/bf01090320>
21. Bogomolov V. A. Two-dimensional fluid dynamics on a sphere, *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Fizika Atmosfery i Okeana*, 1979, vol. 15, no. 1, pp. 29–35 (in Russian).
22. Zermelo E. Hydrodynamische Untersuchungen über die Wirbelbewegungen in einer Kugelfläche, *Nonlineinaya Dinamika*, 2007, vol. 3, no. 1, pp. 81–109 (in Russian). <https://doi.org/10.20537/nd0701006>
23. Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. A new integrable problem of motion of point vortices on the sphere, *IUTAM Symposium on Hamiltonian Dynamics, Vortex Structures, Turbulence: Proceedings of the IUTAM Symposium held in Moscow, 25–30 August, 2006*, Dordrecht: Springer, 2008, pp. 39–53. [https://doi.org/10.1007/978-1-4020-6744-0\\_4](https://doi.org/10.1007/978-1-4020-6744-0_4)
24. Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. Reduction and chaotic behavior of point vortices on a plane and a sphere, *arXiv: nlin/0507057v1 [nlin.SI]*, 2005. <https://doi.org/10.48550/arXiv.nlin/0507057>
25. Kidambi R., Newton P. K. Motion of three point vortices on a sphere, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1998, vol. 116, issues 1–2, pp. 143–175. [https://doi.org/10.1016/S0167-2789\(97\)00236-4](https://doi.org/10.1016/S0167-2789(97)00236-4)
26. Borisov A. V., Kilin A. A. Stability of Thomson’s configurations of vortices on a sphere, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2000, vol. 5, no. 2, pp. 189–200. <https://doi.org/10.1070/RD2000v005n02ABEH000141>
27. Kurakin L. G. On nonlinear stability of the regular vortex systems on a sphere, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2004, vol. 14, issue 3, pp. 592–602. <https://doi.org/10.1063/1.1764432>
28. García-Azpeitia C., García-Naranjo L. C. Platonic solids and symmetric solutions of the  $N$ -vortex problem on the sphere, *Journal of Nonlinear Science*, 2022, vol. 32, issue 3, article number: 39. <https://doi.org/10.1007/s00332-022-09792-y>
29. Tronin K. G. Absolute choreographies of point vortices on a sphere, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2006, vol. 11, issue 1, pp. 123–130. <https://doi.org/10.1070/RD2006v011n01ABEH000338>
30. Borisov A. V., Mamaev I. S., Bizyaev I. A. Three vortices in spaces of constant curvature: Reduction, Poisson geometry, and stability, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2018, vol. 23, issue 5, pp. 613–636. <https://doi.org/10.1134/S1560354718050106>
31. Yang Cheng. Vortex motion of the Euler and Lake equations, *Journal of Nonlinear Science*, 2021, vol. 31, issue 3, article number: 48. <https://doi.org/10.1007/s00332-021-09705-5>
32. Geshev P. I., Ezdin B. S. Motion of a vortex pair between parallel walls, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1984, vol. 24, issue 5, pp. 663–667. <https://doi.org/10.1007/BF00905879>
33. Havelock T. H. LII. The stability of motion of rectilinear vortices in ring formation, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 1931, vol. 11, issue 70 suppl., pp. 617–633. <https://doi.org/10.1080/14786443109461714>
34. Kilin A. A., Artemova E. M. Stability of regular vortex polygons in Bose–Einstein condensate, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2020, vol. 56, pp. 20–29 (in Russian). <https://doi.org/10.35634/2226-3594-2020-56-02>
35. Artemova E. M., Kilin A. A. Nonlinear stability of regular vortex polygons in a Bose–Einstein condensate, *Physics of Fluids*, 2021, vol. 33, issue 12, 127105. <https://doi.org/10.1063/5.0070763>
36. Erdakova N. N., Mamaev I. S. On the dynamics of point vortices in an annular region, *Fluid Dynamics Research*, 2014, vol. 46, no. 3, 031420. <https://doi.org/10.1088/0169-5983/46/3/031420>

37. von Kármán Th. Über den Mechanismus des Widerstandes, den ein bewegter Körper in einer Flüssigkeit erfährt, *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1911, vol. 1911, pp. 509–517. <http://eudml.org/doc/58812>
38. Aref H., Stremler M. A. On the motion of three point vortices in a periodic strip, *Journal of Fluid Mechanics*, 1996, vol. 314, pp. 1–25. <https://doi.org/10.1017/S0022112096000213>
39. Basu S., Stremler M. A. On the motion of two point vortex pairs with glide-reflective symmetry in a periodic strip, *Physics of Fluids*, 2015, vol. 27, issue 10, 103603. <https://doi.org/10.1063/1.4932534>
40. Fridman A. A., Polubarinova P. Ya. On moving singularities of a flat motion of an incompressible fluid, *Geofizicheskii Sbornik*, 1928, vol. 5, no. 2, pp. 9–23 (in Russian).
41. Guenther N.-E., Massignan P., Fetter A. L. Quantized superfluid vortex dynamics on cylindrical surfaces and planar annuli, *Physical Review A*, 2017, vol. 96, issue 6, 063608. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.96.063608>
42. O’Neil K. A. On the Hamiltonian dynamics of vortex lattices, *Journal of Mathematical Physics*, 1989, vol. 30, issue 6, pp. 1373–1379. <https://doi.org/10.1063/1.528605>
43. Kilin A. A., Artemova E. M. Integrability and chaos in vortex lattice dynamics, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2019, vol. 24, issue 1, pp. 101–113. <https://doi.org/10.1134/S1560354719010064>
44. Kochin N. E., Kibel’ I. A., Rose N. V. *Teoreticheskaya gidromekhanika. Chast’ 1* (Theoretical hydro-mechanics. Part 1), Moscow: Fizmatlit, 1963.

Received 03.11.2023

Accepted 10.12.2023

Elizaveta Markovna Artemova, Ural Mathematical Center, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7637-2757>

E-mail: [liz-artemova2014@yandex.ru](mailto:liz-artemova2014@yandex.ru)

**Citation:** E. M. Artemova. Dynamics of two vortices on a finite flat cylinder, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp’yuternye Nauki*, 2023, vol. 33, issue 4, pp. 642–658.