МАТЕМАТИКА 2023. Т. 33. Вып. 4. С. 571–580.

УДК 517.518.126, 517.911

© *В. Я. Дерр*

К ОБЩЕМУ ВИДУ ЛИНЕЙНОГО НЕПРЕРЫВНОГО ФУНКЦИОНАЛА В ПРОСТРАНСТВЕ ПРАВИЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

В работе продолжаются исследования автора по теории *правильных* функций (функций, имеющих в каждой точке конечные односторонние пределы) и σ-*непрерывных* функций (ограниченных функций, имеющих не более, чем счетное множество точек разрыва), а также по теории *-интеграла. Доказана представимость правильной функции в виде суммы непрерывной справа и непрерывной слева функций (rl-представимость правильной функции).

Показано, что общий вид линейного непрерывного функционала в пространстве правильных функций (σ-непрерывных функций) — это *-интеграл правильной (σ-непрерывной) функции по функции ограниченной вариации.

Ключевые слова: правильные функции, σ-непрерывные функции, rl-представление, *-интеграл, линейный непрерывный функционал.

DOI: 10.35634/vm230403

Введение

Пусть J — промежуток вещественной оси. Напомним: функция $x\colon J \to \mathbb{R}$ называется *правильной* (σ-*непрерывной*), если она в каждой точке $t \in J$ обладает конечными односторонними пределами $x(t+)$, $x(t-)$ (если она ограничена и имеет в J не более, чем счетное множество точек разрыва). В работах автора [1, 2] вводится и изучается понятие *-интеграла, позволяющего интегрировать разрывные функции по разрывным функциям ограниченной вариации, а также связанные с этим понятием пространства правильных и σ-непрерывных функций. В частности введено понятие rl-представимости (это возможность представить функцию в виде суммы непрерывной справа и непрерывной слева функций), которое восходит к работе [3]. В [2] приведено условие, при котором правильная функция rl-представима. Ниже показано, что *в с е* правильные функции rl-представимы.

В статье [4] приведен общий вид линейного непрерывного функционала в пространстве *регуляризованных* правильных функций $\Big($так в этой работе названы правильные функции, обладающие свойством $f(t) = \dfrac{1}{2}\big(f(t+) + f(t-)\big)\Big)$. В предлагаемой работе показано, что общий вид линейного непрерывного функционала в пространствах правильных и σ-непрерывных функций — это *-интеграл.

§ 1. Об rl-представимости правильных функций

1°. Всюду ниже рассматриваются функции $x\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, определенные на фиксированном отрезке $[a,b]$ вещественной оси. Если потребуется, будем продолжать эти функции влево от $t = a$ и вправо от $t = b$ по следующему правилу:

$$x(t) = x(a) \ \text{ для } \ t < a, \quad x(t) = x(b) \ \text{ для } \ t > b; \tag{1.1}$$

таким образом, полагается $x(a-) = 0$, $x(b+) = 0$.

Множество непрерывных (правильных, σ-непрерывных) функций с нормой $\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$ $\big(\|x\| = \sup\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|\big)$ обозначаем $\mathbf{C}(\mathbf{R},\mathbf{N})$. Через $\mathbf{BV}$ обозначим банахово пространство функций ограниченной вариации с нормой $\|x\| \doteq |x(a)| + \bigvee\limits_a^b(x)$. Иногда удобнее использовать норму $\|x\|^* \doteq \sup\limits_{t\in[a,b]} |x(t)| + \bigvee\limits_a^b(x)$. Нетрудно убедиться в том, что $\frac{1}{2}\|x\|^* \leqslant \|x\| \leqslant \|x\|^*$, поэтому обе нормы эквивалентны.

Обозначим $\sigma_s(x) = x(s+)-x(s-)$ $\big(\sigma_s^+(x) = x(s+)-x(s),\, \sigma_s^-(x) = x(s)-x(s-)\big)$ — скачок (соответственно правый скачок, левый скачок) функции $x(\cdot)$ в точке $s \in [a,b]$. Как известно (см., например, [5, с. 9, 22]), функция ограниченной вариации может быть представлена в виде суммы

$$x(t) = x_{\mathfrak{c}}(t) + x_{\mathfrak{d}}(t) \quad (x_{\mathfrak{c}},\ x_{\mathfrak{d}} \in \mathbf{BV}), \quad \text{где} \tag{1.2}$$

$$x_{\mathfrak{d}}(a) = 0, \quad x_{\mathfrak{d}}(t) = \sum_{s\in T(x)} \sigma_s(x)\mathfrak{h}_s(t) + \sigma_t^-(x)\ (t>a) - \tag{1.3}$$

функция скачков (дискретная часть), а $x_{\mathfrak{c}}(t) = x(t) - x_{\mathfrak{d}}(t)$ — непрерывная часть функции $x(\cdot)$; выше $T(x)$ означает множество точек разрыва функции $x(\cdot)$, а $\mathfrak{h}_c(\cdot)$ — единичная функция, $\mathfrak{h}_c(t) = \begin{cases} 0, & \text{для } t \leqslant c\ (a \leqslant c < b), \\ 1, & \text{для } t > c\ (a < c < b), \\ 1, & \text{для } t = b\ (c = b). \end{cases}$ Ввиду соглашения $x_{\mathfrak{d}}(a) = 0$ выполняется равенство $x_{\mathfrak{c}}(a) = x(a)$. В силу этого представление функции ограниченной вариации в виде (1.2) единственно. При этом (см., например, [5, с. 26])

$$\bigvee_a^b(x) = \bigvee_a^b(x_{\mathfrak{c}}) + \bigvee_a^b(x_{\mathfrak{d}}), \qquad \bigvee_a^b(x_{\mathfrak{d}}) = \sum_{s\in T(x)} \big(|\sigma_s^-(x)| + |\sigma_s^+(x)|\big). \tag{1.4}$$

Если $T(x)$ — счетное множество, $T(x) = \{c_1, c_2, \ldots\}$, то предполагаем нумерацию его элементов фиксированной; говорим также: *определенно занумерованное множество;* изменив нумерацию, получаем *другое* определенно занумерованное множество.

Рассмотрим векторное пространство $\mathbf{H}$ функций $x \in \mathbf{BV}$, имеющих представление (1.3); в $\mathbf{H}$ определим норму: $\|x\| = \sum\limits_{s\in T(x)} \big(|\sigma_s^-(x)| + |\sigma_s^+(x)|\big)$ $\Big(= \bigvee\limits_a^b(x)\Big)$. Соответствие

$$\big(x \in \mathbf{H}\big) \ \rightleftarrows\ a(x) = \sigma(x) \doteq \big(\sigma_{c_1}^-(x),\, \sigma_{c_1}^+(x),\, \sigma_{c_2}^-(x),\, \sigma_{c_2}^+(x), \ldots\big) \in \mathbf{l},$$

между $\mathbf{H}$ и пространством последовательностей $\mathbf{l}$, очевидно, является изометрическим изоморфизмом, так что $\mathbf{H}$ — банахово пространство, подпространство $\mathbf{BV}$.

Положим $\mathbf{CH} \doteq \mathbf{C}\dot{+}\mathbf{H}$; элементы $x \in \mathbf{CH}$, таким образом, однозначно представимы в виде (1.2), где $x_{\mathfrak{d}} \in \mathbf{H}$, а непрерывная функция $x_{\mathfrak{c}}(\cdot)$ теперь может иметь *бесконечную полную вариацию*; положим также $\|x\|_{\mathbf{CH}} \doteq \sup\limits_{t\in[a,b]} |x(t)| + \sum\limits_{t\in T(x)} |\sigma_t(x)|$; $\mathbf{CH}$ — банахово пространство относительно этой нормы. Очевидно, имеет место теоретико-множественное включение $\mathbf{BV} \subset \mathbf{CH}$.

По аналогии с пространством $\mathbf{CH}(\subset \mathbf{R})$ определим следующее линейное нормированное пространство $(\subset \mathbf{R})$.

Пусть $T = \{c_1, c_2, \ldots\}$ — не более, чем счетное, определенно занумерованное множество, тройка (y, T, a) такова, что $y(\cdot)$ пробегает пространство $\mathbf{C}$, $a = (a_1, a_2, \ldots)$ пробегает банахово пространство

$$\mathbf{cs} \doteq \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots)\colon \text{ ряд } \sum_{k=1}^{\infty} x_k \text{ сходится, } \|x\| \doteq \sup_n \left| \sum_{k=1}^{n} x_k \right| \right\}$$

[6, с. 260]. Векторное пространство функций вида

$$x(t) \doteq y(t) + z(t), \tag{1.5}$$

где

$$z(a) = 0, \quad z(t) \doteq \sum_{c_j < t} s_j + p_t, \quad p_j \doteq a_{2j-1}, \quad q_j \doteq a_{2j}, \quad s_j \doteq p_j + q_j,$$

$$j = 1, 2, \ldots \quad (\text{при } \ t \notin T \ p_t = q_t = s_t = 0), \tag{1.6}$$

обозначим $\mathcal{C}s$. Тогда $x_{\mathfrak{c}}(t) = y(t)$, $T(x) = T$, $\sigma_{c_j}^-(x) = a_{2j-1}$, $\sigma_{c_j}^+(x) = a_{2j}$, $j = 1, 2, \ldots$, $\sigma(x) = a$. При этом определение (1.5) соответствует представлению (1.2), определение (1.6) — представлению (1.3); теперь ряд в (1.6) может сходиться и неабсолютно.

По построению имеет место (*теоретико-множественное*) включение $\mathcal{C}s \subset \mathbf{R}$. Векторное пространство $\mathcal{C}s$ с нормой $\|x\|_{\mathbf{Cs}} \doteq \|y\|_{\mathbf{C}} + \|a\|_{\mathbf{cs}}$ образует банахово пространство $\mathbf{C}s$. Очевидно, для $x \in \mathbf{C}s$ выполняется неравенство $\|x\|_{\mathbf{R}} \leqslant \|x\|_{\mathbf{Cs}}$.

2. Назовем функцию $x\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ rl-представимой (имеющей rl-представление), если (см. [3])

$$x(t) = x_+(t) + x_-(t), \tag{1.7}$$

где $x_+(\cdot)$ ($x_-(\cdot)$) непрерывна справа (слева).

Наличие у функции rl-представления еще не гарантирует ее правильность. *Пусть*

$$T(x) \doteq \{0, \ldots t_{n+1}, t_n, \ldots t_2, t_1\ (= 1)\},\ t_{n+1} < t_n,\ \ t_n \to 0\ (n \to \infty),$$

$x(t) = \begin{cases} \sqrt{1 - t^2}, & \text{для } \ -1 \leqslant t \leqslant 0, \\ (-1)^n, & \text{для } \ t_{n+1} < t \leqslant t_n,\ n = 1, 2, \ldots . \end{cases}$ Очевидно, $x(\cdot)$ — непрерывна слева, значит, имеет rl-представление (второе слагаемое — нулевое), однако $x \notin \mathbf{R}$ $\big($так как не существует $x(0+)\big)$. Более того, односторонне непрерывная (а значит, и rl-представимая) функция может не быть ограниченной.

Обозначим $\mathcal{RL} = \mathcal{RL}[a, b]$ — векторное пространство функций $x\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, представимых в виде (1.7). Как показано в статье [3], $\mathbf{BV} \subset \mathcal{RL}$; при этом выкладки в [3] годятся и для $\mathbf{CH}$, $\mathcal{C}s$ (за исключением равенств, касающихся полных вариаций), поэтому $\mathbf{CH} \subset \mathcal{RL}$, $\mathcal{C}s \subset \mathcal{RL}$.

Перечисленными подмножествами $\mathcal{RL}$ не исчерпывается, см. примеры в [2], в частности, пример правильной функции $x\colon (0, 1) \to \mathbb{R}$, разрывной во всех рациональных точках, $T(x) = \mathbb{Q} \bigcap (0, 1)$, но имеющей rl-представление, несмотря на расходимость ряда скачков (заметим, что в этом примере $T(x)$ даже всюду плотно на $[0, 1]$).

3. Ниже доказывается основное утверждение этого п.°, но сначала приведем вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Пусть* $x \in \mathbf{R}$, t^* — *предельная точка множества* $T(x)$, *последовательность* $\{t_k\}_{k=1}^{\infty} \subset T(x)$ *такова, что* $t_k \to t^*$ *при* $k \to \infty$, *и* $\mathfrak{s}_t(x) \doteq \max\{|\sigma_t(x)|, |\sigma_t^+(x)|, |\sigma_t^-(x)|\}$. *Тогда* $\mathfrak{s}_{t_k}(x) \to 0$ *при* $k \to \infty$.

Доказательство. При доказательстве теоремы 5.2 в [5, с. 59, 257] было установлено, что есть лишь конечное число точек разрыва, в которых $\mathfrak{s}_{t_k}(x)$ больше заданной величины. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Найдем такой номер N_0, что при $n > N_0$ для всех членов последовательности $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$, кроме, быть может, конечного их числа, выполняется неравенство $\mathfrak{s}_{t_k}(x) < \varepsilon$. Значит, $\mathfrak{s}_{t_k}(x) \to 0$ при $k \to \infty$. □

Теорема 1. $\mathbf{R} \subset \mathcal{RL}$.

Доказательство. Пусть $x \in \mathbf{R}$. Если $T(x)$ — конечное множество, то можно считать, что $x \in \mathbf{CH}$, значит, требуемое включение доказано. Поэтому считаем в дальнейшем, что $T(x) = \{t_1, t_2, \ldots\}$ — произвольное определенно занумерованное счетное множество.

Функция $y(t) = x(t+)$ $\big(y(t) = x(t-)\big)$, очевидно, непрерывна справа (слева). Рассмотрим функцию (отображение $\mathcal{W}$)

$$(\mathcal{W}x)(t) \doteq x(t) - \frac{1}{2}\big(x(t+) + x(t-)\big).$$

Легко видеть, что в точках непрерывности $x(\cdot)$ $(\mathcal{W}x)(t) = 0$, а при $t \in T(x)$

$$(\mathcal{W}x)(t) = x(t) - \frac{1}{2}\big(x(t+) + x(t-)\big) = \frac{1}{2}\big(\sigma_t^-(x) - \sigma_t^+(x)\big) \doteq \delta_t(x).$$

Если обозначить через $\widetilde{H} = \widetilde{H}[a,b]$ векторное пространство функций, отличных от тождественного нуля разве лишь на не более, чем счетном множестве, то $\mathcal{W}\colon \mathbf{R} \to \widetilde{H}$, и так как правая часть $\delta_t(x)$ также равна нулю в точках непрерывности функции $x(\cdot)$, то

$$(\mathcal{W}x)(t) = \delta_t(x) \quad (t \in [a,b]). \tag{1.8}$$

Так как $x(t) = \frac{1}{2}x(t+) + \frac{1}{2}x(t-) + (\mathcal{W}x)(t)$, то для доказательства принадлежности $x \in \mathcal{RL}$ достаточно показать, что

$$\mathcal{W}x \in \mathcal{RL}. \tag{1.9}$$

Докажем соотношение (1.9). Пусть для произвольного n

$$\Theta_n \doteq \{t_1, \ldots, t_n\} \subset \{t_1, \ldots, t_n, t_{n+1}\} = \Theta_{n+1};$$

заметим, что t_{n+1} может попасть в любой из промежутков, образованных точками множества Θ_n. Выберем $t'_{jn} > t_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ так, чтобы в интервале (t_j, t'_{jn}) не было точек множества Θ_n. При переходе от n к $n+1$ могут измениться только одно из чисел t'_{jn} $\big($если $t_{n+1} < \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant n}\{t_j\}$ или $t_{n+1} > \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n}\{t_j\}\big)$ или два (в противном случае). Для остальных точек $t'_{j,n+1} = t'_{jn}$. (При выборе точек t'_{jn} учитываем соглашение (1.1).) Полагаем

$$r_{jn}(t) = \begin{cases} 0, & \text{для } t < t_j \text{ и } t \geqslant t'_{jn}, \\ \delta_{t_j}(x)\dfrac{t - t'_{jn}}{t_j - t'_{jn}}, & \text{для } t_j \leqslant t < t'_{jn}, \end{cases}$$

$$l_{jn}(t) = \begin{cases} 0, & \text{для } t \leqslant t_j \text{ и } t \geqslant t'_{jn}, \\ -\delta_{t_j}(x)\dfrac{t - t'_{jn}}{t_j - t'_{jn}}, & \text{для } t_j < t < t'_{j}, \end{cases} \qquad j = 1, \ldots, n;$$

по построению функции $r_{jn}(\cdot)$ $\big(l_{jn}(\cdot)\big)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ непрерывны справа (слева). Так как $x(\cdot)$ — правильная функция, то в силу леммы 1 $\delta_{t_n}(x) \to 0$ $(n \to \infty)$, а значит $\big($так как $|r_{nn}(t)|, |l_{nn}(t)| \leqslant |\delta_{t_n}(x)|\big)$,

$$r_{nn}(t),\ l_{nn}(t) \rightrightarrows 0 \ \text{ при } \ n \to \infty. \tag{1.10}$$

Кроме того, в окрестности t_n (см. (1.8))

$$r_{nn}(t)+l_{nn}(t)=\begin{cases}\delta_{t_n}(x), & \text{для}\ \ t=t_n,\\ 0, & \text{для}\ \ t\neq t_n\end{cases} = \big(\mathcal{W}\big)(t).$$

Полагаем далее

$$y_+(t)=\sum_{n=1}^{\infty} r_{nn}(t), \qquad y_-(t)=\sum_{n=1}^{\infty} l_{nn}(t).$$

В каждой из частичных сумм этих рядов при каждом $t\in[a,b]$ может быть только одно, отличное от тождественного нуля слагаемое, поэтому в силу (1.10) ряды равномерно сходятся; при этом $y_+(\cdot)$ $\big(y_-(\cdot)\big)$ непрерывна справа (слева), а так как, очевидно, $y_+(t)+y_-(t)=(\mathcal{W}x)(t)$, то соотношение (1.9), а с ним и теорема доказаны. □

§ 2. Общий вид линейного непрерывного функционала в $\mathbf{R}$, $\mathbf{N}$. Сопряженное пространство

1°. Пусть $f\in\mathbf{N}$, $g\in\mathbf{BV}$, $a<b$. Напомним определение *-интеграла (см. [1, 2]):

$$(*)\int\limits_a^b f(t)\,dg(t)\doteq\int_a^b f(t)\,dg_{\mathfrak{c}}(t)+\Big(f(a)\sigma_a^+(g)+\sum_{t\in T(g)\bigcap(a,b)} f(t)\sigma_t(g)+f(b)\sigma_b^-(g)\Big). \tag{2.1}$$

Первое слагаемое в правой части (2.1) представляет собой интеграл Римана–Стилтьеса по отрезку $[a,b]$. Как было доказано в [1], σ-непрерывные функции RS-интегрируемы по непрерывным функциям ограниченной вариации. В силу конечности полной вариации функции g абсолютно сходится ряд $\sum\limits_{t\in T(g)\bigcap(a,b)}\sigma_t(g)$, а из ограниченности функции $\big($и, следовательно, ограниченности последовательности $\{f(t)\}_{t\in T(g)\bigcap(a,b)}\big)$ следует и абсолютная сходимость ряда в (2.1).

Отметим утверждения (см. [1, § 3.2]);

а) *-интеграл линеен, как относительно интегрируемой (x), так и относительно интегрирующей (g) функций;

б) имеет место оценка $\left|(*)\int\limits_a^b f(t)\,dg(t)\right|\leqslant\|f\|_{\mathbf{N}}\cdot\bigvee\limits_a^b(g)$.

2°. Рассмотрим линейные непрерывные функционалы на B-пространствах $\mathbf{BV}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{N}$. Положим

$$f(x)\doteq(*)\int\limits_a^b \mathfrak{f}(t)\,dx(t),\quad \mathfrak{f}\in\mathbf{N}, \tag{2.2}$$

и

$$g(x)\doteq(*)\int\limits_a^b x(t)\,d\mathfrak{g}(t),\quad \mathfrak{g}\in\mathbf{BV}. \tag{2.3}$$

Это линейные ограниченные (а, значит, непрерывные) функционалы на пространствах $\mathbf{BV}$ (в случае (2.2)) и $\mathbf{R}$, $\mathbf{N}$ (в случае (2.3)).

Линейность следует из утверждения а), ограниченность — из утверждения б). Таким образом, имеем оценки сверху

$$\|f\|\leqslant\|\mathfrak{f}\|_{\mathbf{N}}\quad \text{и}\quad \|g\|\leqslant\|\mathfrak{g}\|_{\mathbf{BV}}. \tag{2.4}$$

Найдем норму функционала (2.2). Для этого осталось доказать неравенство, противоположное первому неравенству из (2.4).

Так как $\|\mathfrak{f}\|_{\mathbf{N}} = \sup\limits_{t\in[a,b]} |\mathfrak{f}(t)|$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая точка $t_\varepsilon \in [a,b]$, что $|\mathfrak{f}(t_\varepsilon)| > \|f\|_{\mathbf{N}} - \varepsilon$; выберем $\widehat{x}(t) = \mathfrak{h}_{t_\varepsilon}(t)$; тогда $\|\widehat{x}\|_{\mathbf{BV}} = 1$ и

$$\|f\| = \sup_{x\in\mathbf{BV},\ \|x\|=1} |f(x)| \geqslant |f(\widehat{x})| = \left|(*)\int\limits_a^b \mathfrak{f}(t)\, d\widehat{x}(t)\right| = |\mathfrak{f}(t_\varepsilon)| > \|f\|_{\mathbf{N}} - \varepsilon.$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$, это означает, что $\|f\| \geqslant \|\mathfrak{f}\|_{\mathbf{N}}$, а вместе с (2.4) — что $\|f\| = \|f\|_{\mathbf{N}}$.

Найдем также норму функционала (2.3).

Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое разбиение τ_1, что $v_{\tau_1}(\mathfrak{g}_c) > \bigvee\limits_a^b (g_c) - \dfrac{\varepsilon}{2}$. Расширим, если понадобится, τ_1 до $\tau \doteq \{t_k\}_{k=0}^m$ так, чтобы выполнялось неравенство $\sum\limits_{s\in\tau} \big|\sigma_s(\mathfrak{g})\big| > \bigvee\limits_a^b (\mathfrak{g}_d) - \dfrac{\varepsilon}{2}$ $\Big(\bigvee\limits_a^b (\mathfrak{g}_d) = \sum\limits_{s\in\mathbb{T}(\mathfrak{g})} \big|\sigma_s(\mathfrak{g})\big|$, см. (1.4)$\Big)$; будет также выполняться неравенство

$$v_\tau(\mathfrak{g}_c) \ \Big(\geqslant v_{\tau_1}(\mathfrak{g}_c)\Big) \ > \bigvee_a^b (g_c) - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.5}$$

Полагаем далее

$$\widehat{x}(t) = \begin{cases} 0, & \text{для}\ \ t \in T \doteq T(\mathfrak{g}) \setminus \tau, \\ \operatorname{sign} \sigma_{t_k}(g), & \text{для}\ \ t \in \tau, \\ \operatorname{sign}\big(\mathfrak{g}(t_k) - \mathfrak{g}(t_{k-1})\big), & \text{для}\ \ t \in (t_{k-1}, t_k) \setminus T; \end{cases}$$

Очевидно, $\widehat{x} \in \mathbf{N}$, $\|\widehat{x}\|_{\mathbf{N}} = 1$. Имеем (учитывая (2.5))

$$\|g\| = \sup_{x\in\mathbf{N},\ \|x\|=1} |g(x)| \geqslant |g(\widehat{x})| = \left|(*)\int_a^b \widehat{x}(t)\, d\mathfrak{g}(t)\right| =$$
$$= \left|\int_a^b \widehat{x}(t)\, d\mathfrak{g}_{\mathfrak{c}}(t) + \sum_{t\in T(\mathfrak{g})} \widehat{x}(t)\sigma_t(g)\right| = \sum_{k=1}^m \big|\mathfrak{g}(t_k) - \mathfrak{g}(t_{k-1})\big| + \sum_{k=0}^m \big|\sigma_{t_k}(g)\big| =$$
$$= v_\tau(\mathfrak{g}_c) + \sum_{t\in\tau} \big|\sigma_t(\mathfrak{g})\big| > \bigvee_a^b (g_c) - \frac{\varepsilon}{2} + \bigvee_a^b (g_d) - \frac{\varepsilon}{2} = \bigvee_a^b (g) - \varepsilon$$

(см. первое равенство (1.4)). Ввиду произвольности ε получаем неравенство, противоположное второму неравенству из (2.4), то есть имеет место равенство $\|g\| = \|\mathfrak{g}\|_{\mathbf{BV}}$.

3°. Покажем, что равенство (2.3) представляет собой общий вид линейного непрерывного функционала на пространствах $\mathbf{R}$, $\mathbf{N}$ (ср. [4]).

Ниже $\mathbf{X}_0$ означает подпространство B-пространства $\mathbf{X}$ функций $x\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, обладающих свойством $x(a) = 0$.

Теорема 2. *Пространством, сопряженным банаховым пространствам* $\mathbf{N}$ *и* $\mathbf{R}$*, является пространство* $\mathbf{BV}_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равенство (2.3) определяет отображение

$$\mathfrak{G}\colon \mathbf{BV}_0 \to \mathbf{N}^*, \quad \mathfrak{G}(\mathfrak{g}) = g \quad (\mathfrak{g} \in \mathbf{BV}_0,\ g \in \mathbf{N}^*). \tag{2.6}$$

Представим утверждение теоремы в виде следующей цепочки более простых утверждений.

1. *Отображение* (2.6) *инъективно.*

Пусть $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2 \in \mathbf{BV}_0$, $\mathfrak{g}_1 \neq \mathfrak{g}_2$; обозначим $\mathfrak{h}(t) \doteq \mathfrak{g}_1(t) - \mathfrak{g}_2(t)$.

Если $\mathfrak{h}_c(t) \equiv 0$, то найдется такая точка $t_0 \in [a,b]$, что $\sigma \doteq |\sigma_{t_0}(\mathfrak{h})| > 0$; положив $x_0(t) = \operatorname{sign}\sigma_{t_0}(\mathfrak{h})$ при $t = t_0$, $x_0(t) = 0$ при $t \neq t_0$, получаем (см. (2.3)), что $(g_1 - g_2)(x_0) = |\sigma_{t_0}(\mathfrak{h})| > 0$.

Пусть $\mathfrak{h}_c(t)$ не является тождественным нулем. Тогда найдется такая точка $t_1 \in [a,b]$, что $\mathfrak{h}_c(t_1) \neq 0$. В этом случае полагаем $x_0(t) = \begin{cases} 1, & \text{для } t \in [0,t_1] \setminus T(\mathfrak{h}), \\ 0, & \text{для } t \in [0,t_1] \bigcap T(\mathfrak{h}), \\ 0, & \text{для } t_1 < t \leqslant 1. \end{cases}$

Тогда

$$|(g_1 - g_2)(x_0)| = (*)\int_a^b x_0(t)\, d\mathfrak{h}(t) = \int_a^b x_0(t)\, d\mathfrak{h}_c(t) + \sum_{s \in [0,t_0] \bigcap T(x_0)} x_0(s)\sigma_s(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}_c(t_0) \neq 0.$$

Таким образом, $g_1 \neq g_2$.

2. *Отображение* (2.6) *сюръективно.*

Пусть $f \in \mathcal{L}(\mathbf{N}, \mathbb{R})\ \big(= \mathbf{N}^*\big)$.

Полагаем $u_0(t) \equiv 0$; при $s \in (0,1]$, $u_s(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \leqslant t < s, \\ 0, & \text{при } t \leqslant 1; \end{cases}$ при каждом s, $u_s(\cdot) \in \mathbf{N}[0,1]$. Определим функцию $\mathfrak{f}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ равенством $\mathfrak{f}(s) \doteq f(u_s)$. Заметим, что $\mathfrak{f}(0) = 0$. Пусть $\tau = \{s_k\}_{k=0}^n$, $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = 1$ — разбиение отрезка $[0,1]$ и $\sigma_k \doteq \operatorname{sign}\big(\mathfrak{f}(s_k) - \mathfrak{f}(s_{k-1})\big)$. Тогда

$$\begin{aligned} v_\tau(\mathfrak{f}) &= \sum_{k=1}^n |\mathfrak{f}(s_k) - \mathfrak{f}(s_{k-1})| = \sum_{k=1}^n \sigma_k(\mathfrak{f}(s_k) - \mathfrak{f}(s_{k-1})) = \\ &= \sum_{k=1}^n \sigma_k\left(f(u_{s_k}) - f(u_{s_{k-1}})\right) = f\left(\sum_{k=1}^n \sigma_k\big(u_{s_k}(t) - u_{s_{k-1}}(t)\big)\right) \leqslant \|f\| \cdot \|y\|_{\mathbf{N}} = \|f\|, \end{aligned}$$

где $y(t) = \sum\limits_{k=1}^n \sigma_k\big(u_{s_k}(t) - u_{s_{k-1}}(t)\big)$, $y \in \mathbf{N}$, $\|y\|_{\mathbf{N}} = 1$.

Таким образом, $\mathfrak{f} \in \mathbf{BV}_0$; получаем отображение

$$\mathfrak{H}\colon \mathbf{N}^* \to \mathbf{BV}_0, \quad \mathfrak{H}(f) = \mathfrak{f} \quad (f \in \mathbf{N}^*,\ \mathfrak{f} \in \mathbf{BV}_0),$$

которое каждому линейному непрерывному функционалу на $\mathbf{N}$ ставит в соответствие функцию $\mathfrak{f} \in \mathbf{BV}_0$ согласно описанной выше процедуре, $\mathfrak{H}(f) = \mathfrak{f}$.

Пусть $g \in \mathbf{N}^*[0,1]$ определяется формулой (2.3) с помощью функции $\mathfrak{f}$, построенной по функционалу f $\Big(g = \mathfrak{G}(\mathfrak{f}) = \mathfrak{G}\big(\mathfrak{H}(f)\big)\Big)$. Последовательно получаем

$$g(u_s) = (*)\int\limits_a^b u_s(t)\,d\mathfrak{f}(t) = (*)\int\limits_a^s d\mathfrak{f}(t) =$$
$$= \int\limits_a^s d\mathfrak{f}_c(t) + \sum_{t\in T(\mathfrak{f})\bigcap[a,s)} \sigma_t(\mathfrak{f}) + \sigma_s^-(\mathfrak{f}) = \mathfrak{f}_c(s) + \mathfrak{f}_d(s) = \mathfrak{f}(s).$$

Это означает, что $g = f$, то есть отображение $\mathfrak{G}$ сюръективно.

3. $\mathbf{N}^* = \mathbf{R}^* = \mathbf{BV}_0$.

Ввиду линейности *-интеграла и равенства $\|g\| = \|\mathfrak{g}\|_{\mathbf{BV}}$, $\mathfrak{G}$ — изометрический изоморфизм $\mathbf{BV}_0$ на $\mathbf{N}^*$. Это и означает, что $\mathbf{N}^* = \mathbf{BV}_0$. Так как $\mathbf{C} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{N}$, то $\mathbf{N}^* \subset \mathbf{R}^* \subset \mathbf{C}^* = \mathbf{BV}_0$; поэтому $\mathbf{N}^* = \mathbf{R}^* = \mathbf{C}^* = \mathbf{BV}_0$. $\square$

Непосредственно из доказательства теоремы получаем следующие утверждения.

Следствие 1. *Отображения $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{H}$ взаимно обратны.*

Следствие 2. *Равенство* (2.3) *дает общий вид линейного непрерывного функционала на банаховых пространствах $\mathbf{N}$ и $\mathbf{R}$.*

Интересно сопоставить утверждение следствия 2 с точностью *-пары $(\mathbf{N}, \mathbf{BV})$ (см. [7]). Заметим, что B-пространство $\mathbf{N}$ не является рефлексивным:

$$\mathbf{N}^{**} = \mathbf{BV}_0^* \neq \mathbf{N}.$$

Пусть $\mathfrak{d}(t) \doteq \chi_{\mathbb{Q}}(t)$ — функция Дирихле, $T(d) = [a,b]$, $\mathfrak{d} \notin \mathbf{N}[a,b]$. Однако, LS-интеграл

$$d(x) \doteq (LS)\int\limits_a^b \mathfrak{d}(t)\,dx(t)$$

существует для любой $x \in \mathbf{BV}_0$, следовательно, d является линейным непрерывным функционалом на пространстве $\mathbf{BV}_0$, $d \in \mathbf{BV}_0^*$; при этом *-интеграл $(*)\int\limits_a^b \mathfrak{d}(t)\,dx(t)$ не существует.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дерр В. Я. О расширении интеграла Римана–Стилтьеса // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2019. Т. 29. Вып. 2. С. 135–152. https://doi.org/10.20537/vm190201
2. Дерр В. Я. О некоторых свойствах *-интеграла // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2023. Т. 33. Вып. 1. С. 66–89. https://doi.org/10.35634/vm230105
3. Левин А. Ю. Вопросы теории обыкновенного дифференциального уравнения. II // Вестник Ярославского университета. 1974. Вып. 8. С. 122–144.
4. Tvrdý M. Linear bounded functionals on the space of regular regulated functions // Tatra Mountains Mathematical Publications. 1996. Issue 8. P. 203–210.

5. Дерр В. Я. Теория функций действительной переменной. Лекции и упражнения. М.: Высшая школа, 2008.
6. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Том 1. Общая теория. М.: ИЛ, 1962.
7. Derr V. Ya. On the exact pairs of classes for the Stieltjes integral // Functional Differential Equations. 2020. Vol. 27. Nos. 3–4. P. 85–94.

Поступила в редакцию 15.09.2023

Принята к публикации 13.12.2023

Дерр Василий Яковлевич, д. ф.-м. н., профессор, кафедра математического анализа, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: derr@uni.udm.ru

Цитирование: В. Я. Дерр. К общему виду линейного непрерывного функционала в пространстве правильных функций // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2023. Т. 33. Вып. 4. С. 571–580.

V. Ya. Derr

On the general form of a linear continuous functional in the space of regulated functions

Keywords: regulated functions, σ-continuous functions, rl-representation, *-integral, linear continuous functional.

MSC2020: 26B30, 26A42, 46A20

DOI: 10.35634/vm230403

The author's research continues on the theory of *regulated* functions (functions having finite one-sided limits at each point) and σ*-continuous* functions (bounded functions having no more than a countable set of discontinuity points), as well as on the theory of the *-integral. The representability of a regulated function in the form of a sum of a right-continuous function and a left-continuous function is proved (rl-representability of the proper function).

It is shown that the general form of a linear continuous functional in the space of regulated functions (σ-continuous functions) is the *-integral of a regulated (σ-continuous) function over a function of bounded variation.

REFERENCES

1. Derr V. Ya. On the extension of a Rieman–Stieltjes integral, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, issue 2, pp. 135–152 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm190201
2. Derr V. Ya. On some propertits of *-integral, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2023, vol. 33, issue 1, pp. 66–89 (in Russian). https://doi.org/10.35634/vm230105
3. Levin A. Yu. On the theory of ordinary differential equations. II, *Vestnik Yaroslavskogo Universiteta*, 1974, issue 8, pp. 122–144 (in Russian).
4. Tvrdý M. Linear bounded functionals on the space of regular regulated functions, *Tatra Mountains Mathematical Publications*, 1996, issue 8, pp. 203–210.
5. Derr V. Ya. *Teoriya funktsii deistvitel'noi peremennoi. Lektsii i uprazhneniya* (Theory of functions of real argument. Lectures and exercises), Moscow: Vysshaya Shkola, 2008.
6. Dunford N., Schwartz J. T. *Linear operators. Part 1. General theory*, New York–London: Interscience Publishers, 1958.
7. Derr V. Ya. On the exact pairs of classes for the Stieltjes integral, *Functional Differential Equations*, 2020, vol. 27, nos. 3–4, pp. 85–94.

Received 15.09.2023

Accepted 13.12.2023

Vasiliy Yakovlevich Derr, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematical Analysis, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: derr@uni.udm.ru

Citation: V. Ya. Derr. On the general form of a linear continuous functional in the space of regulated functions, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2023, vol. 33, issue 4, pp. 571–580.