ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

МЕХАНИКА 2019. Т. 29. Вып. 4. С. 583–598.

УДК 531.011, 537.634

© *А. В. Борисов, А. В. Цыганов*

ВЛИЯНИЕ ЭФФЕКТОВ БАРНЕТТА–ЛОНДОНА И ЭЙНШТЕЙНА–ДЕ ГААЗА НА ДВИЖЕНИЕ НЕГОЛОНОМНОЙ СФЕРЫ РАУСА

Рассматривается качение неуравновешенного динамически симметричного шара по плоскости без проскальзывания в присутствии внешнего магнитного поля. Предполагается, что шар может полностью или частично состоять из диэлектрического, ферромагнитного или сверхпроводящего материалов. Согласно существующей феноменологической теории в этом случае при изучении динами шара требуется учитывать момент силы Лоренца, момент Барнетта–Лондона и момент Эйнштейна–де Гааза. В рамках данной математической модели нами получены условия существования интегралов движения, которые позволяют свести интегрирование уравнений движения к квадратуре аналогичной квадратуре Лагранжа для тяжелого твердого тела.

Ключевые слова: неголономные системы, магнитное поле, интегрируемые системы.

DOI: 10.20537/vm190409

§ 1. Введение

Когда магнитное поле прикладывается к заряженному диэлектрическому твердому телу, оно начинает вращаться, и равномерная частота прецессии магнитного волчка не является частотой Лармора, а включает в себя дополнительные условия, зависящие от более высоких мощностей магнитного поля (квадратичный эффект Зеемана). Когда магнитное поле приложено к ферромагнитному твердому телу, оно также начинает вращаться (эффект Эйнштейна–де Гааза). Когда магнитное поле прикладывается к сверхпроводящему твердому телу, оно также начинает вращаться (гиромагнитный эффект), а когда нормальный металл в магнитном поле становится сверхпроводящим и вытесняет магнитное поле (эффект Мейснера), тело также начинает вращаться. Все эти эффекты играют ключевую роль в современной астрофизике (теория динамо), магнитоупругости, в физике молекулярных и атомных магнитов, макро-, микро- и наномагнитных систем, спинтроники, сверхбыстрого магнетизма и т. д., см. [23, 25, 39].

В начале 1820-х годов Ампер предположил, что магнитное поле ферромагнитного тела создается постоянными «молекулярными токами» [1]. Роуланд в 1870-х годах экспериментально подтвердил, что механическое вращение электростатически заряженных дисков генерирует магнитные поля, используя сверхчувствительный торсионно-волоконный компас, способный измерять изменения поля [41]. В 1908 году Ричардсон предположил, что должна существовать связь между намагниченностью (или магнитным моментом) и механическим угловым моментом в ферромагнетике [42]. Он предложил механический эксперимент, включающий кусок железа, подвешенный на торсионной струне, который испытал бы поворот, когда «магнитные атомы» в железе придают ему механический момент импульса, когда они переключали свою «ось вращения» с одного направления на другой вдоль направления струны.

В 1909 году Барнетт, размышляя о происхождении магнитного поля Земли, предположил, чтобы ферромагнетик без суммарного момента стал бы намагничиваться при механическом вращении (в противоположность предложению Ричардсона), и указал на предварительный экспериментальный успех этой теории [2]. В 1915 году он опубликовал свои результаты о том, что сейчас известно как эффект Барнетта [3].

В том же году Эйнштейн и де Гааз объявили о своих открытиях, полагая, что они подтвердили существование предсказанных Ампером «молекулярных течений» [21]. Их эксперимент был похож на эксперимент Ричардсона, в который они добавили ключевой прирост чувствительности путем изменения приложенного поля (и переключения намагниченности) на частоте механического резонанса торсионного баланса. Механические гиромагнитные исследования, проведенные Ричардсоном, Барнеттом, Эйнштейном-де-Гаазом и другими, составляют самые ранние спин-механические измерения, которые предшествовали открытию спина в 1925 году [50]. Обзор, опубликованный Барнеттом в 1935 году, предоставил подробное изложение классической точки зрения и хронологию первого столетия мысли и экспериментов на эту тему, восходящую к Амперу и Веберу [4].

Основные эксперименты, показывающие связь между моментом импульса и магнитным моментом в ферромагнетиках и сверхпроводники приведены в таблице 1. Эти экспериментальные результаты следуют из законов сохранения классической механики. Однако вопрос о том, как угловой момент вызывает намагничивание или намагниченность вызывает угловой момент, является отдельным вопросом, который необходимо рассмотреть и понять на квантовом и классическом уровне. Для ферромагнетиков этот вопрос начал рассматриваться только недавно и пока остается нерешенным, а для сверхпроводников пока даже не признается, что такой вопрос существует и на него нужно ответить, см. обсуждение в работах [18, 19, 23, 39].

Таблица 1. Эксперименты по связи магнетизации и вращения

	Вращение возникающее при наложении магнитного поля	Магнитное поле возникающее при вращении
ферромагнентики	эффект Эйнштейна–де Гааза (1915) [21]	эффект Барнетта (1915) [3]
сверхпроводники	гиромагнитный эффект Кикоин и Губарь (1940) [30], см. также Pry et al. (1952) [40]	эффект Лондона Becker et al. (1933) [6], Hildebrandt (1964) [22]

Классическое описание динамики намагниченности микроскопических объектов включает феноменологические уравнения Ландау–Лифшица–Гильберта, см. обзор [38]. В рамках аналогичной феноменологической теории для макро или микроскопического твердого тела мы начнем со стандартных уравнений движения, описывающих вращение твердого тела вокруг неподвижной точки в потенциальном поле:

$$\dot{M} = M \times \omega - \frac{\partial V}{\partial \gamma} \times \gamma, \qquad \dot{\gamma} = \gamma \times \omega. \tag{1.1}$$

Здесь M — вектор углового момента, γ — вектор Пуассона, $\omega = AM$ — вектор угловой скорости, $A = I^{-1} = \mathrm{diag}(a_1, a_2, a_3)$ — матрица, обратная к тензору инерции I твердого тела, который приведен к диагональному виду выбором системы координат [13].

Наложение внешнего магнитного поля изменяет эти уравнения движения (1.1) следующим образом:

$$\dot{M} = M \times \omega + M_{ext} - \frac{\partial V}{\partial \gamma} \times \gamma, \qquad \dot{\gamma} = \gamma \times \omega,$$

в которые мы добавили внешний магнитный момент M_{ext},

$$M_{ext} = B\gamma \times \omega + C\omega \times \gamma + D\big(\gamma \times \omega\big), \tag{1.2}$$

который состоит из момента силы Лоренца

$$M_b = B\gamma \times \omega,$$

момента Барнетта–Лондона

$$M_c = C\omega \times \gamma$$

и момента Эйнштейна–де Гааза

$$M_d = D\gamma \times \omega + D\omega \times \gamma + D(\gamma \times \omega).$$

Здесь B, C, D — симметричные 3×3-матрицы, описывающие свойства твердого тела. Аналогичные уравнения возникают и при рассмотрении движения твердого тела в жидкости с учетом магнитных свойств и тела, и самой жидкости [33]. Подробности этой феноменологической теории и все необходимые ссылки можно найти в работах [16,26–28,34–36,44,51].

При рассмотрении неголономного движения твердого тела, например качения по поверхности, основное формальное изменение уравнений (1.1) связано с изменением связи между вектором кинетического момента M и вектором угловой скорости:

$$\text{вместо} \quad M = A\omega \quad \text{подставляем} \quad M = A_\gamma \omega.$$

Здесь A и A_γ — симметричные 3×3-матрицы, первая из которых — числовая матрица, обратная к тензору инерции I твердого тела, а вторая является функцией от координат γ_1, γ_2 и γ_3. Современное описание подобных неголономных систем с вращением может быть найдено в [5,8,10–12,15].

Для неголономных систем без вращения, например саней Чаплыгина, изменение исходных уравнений движения при наложении магнитного поля пока не получено. Современные методы построения подобных уравнений движения обсуждаются в [9,14,24,31,32,37].

§ 2. Неголономная сфера Рауса

Следуя [17,20,43], рассмотрим качение неуравновешенного динамически симметричного шара по плоскости без проскальзывания. Неуравновешенный означает, что центр масс не совпадает с геометрическим центром, а симметричный означает, что два момента инерции совпадают друг с другом. Условие отсутствия проскальзывания в точке контакта имеет вид

$$v + \omega \times r = 0,$$

где ω и v — угловая скорость и скорость центра масс тела, r — вектор из центра масс в точку контакта относительно подвижной системы координат, связанной с главными осями шара. Скобки (a, b) обозначают обычное скалярное произведение, а $a \times b$ — векторное произведение трехмерных векторов.

В подвижной системе координат угловой момент подвижной сферы относительно точки касания имеет вид

$$M = \mathbf{I_Q}\omega, \qquad \mathbf{I_Q} = \mathbf{I} + mr^2\mathbf{E} - mr \otimes r.$$

Здесь m — масса шара, $\mathbf{E}$ — единичная матрица, а $\mathbf{I} = \mathrm{diag}(I_1, I_2, I_3)$ — тензор инерции динамически симметричного шара, что означает равенство двух моментов инерции

$$I_1 = I_2.$$

Если $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ — единичный вектор нормали в точке контакта, то

$$r = (R\gamma_1, R\gamma_2, R\gamma_3 + a),$$

где R — радиус шара и a — расстояние от геометрического центра до центра масс шара.

Фазовое пространство, уравнения движения и их редукция детально изложены в работах [17, 20, 43]. В силу этого мы сразу перейдем к уравнениям движения, возникающим после исключения множителя Лагранжа. Эти уравнения движения на шестимерном редуцированном пространстве с координатами $x = (\gamma, M)$ имеют вид

$$\dot{M} = M \times \omega + m\dot{r} \times (\omega \times r) + \gamma \times \frac{\partial V}{\partial \gamma}, \qquad \dot{\gamma} = \gamma \times \omega, \tag{2.1}$$

где $V(\gamma_3)$ — произвольный потенциал; например, в случае движения в гравитационном поле $V = -mg(r, \gamma)$, где g — ускорение свободного падения.

Уравнения движения (2.1) обладают геометрическим первым интегралом

$$(\gamma, \gamma) = 1$$

и инвариантной мерой

$$\mu = \mathrm{g}^{-1/2}\, \mathrm{d}\gamma\, \mathrm{d}M, \qquad \mathrm{g} = I_1 I_3 + I_1 m R^2(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) + I_3 m(R\gamma_3 + a)^2, \tag{2.2}$$

которая является строго положительной функцией, принимающей значения на интервале

$$[m(R-a)^2 I_3 + I_1 I_3, m(R+a)^2 I_3 + I_1 I_3].$$

Кроме этого сохраняется и полная механическая энергия системы

$$H = \frac{1}{2}(M, \omega) + V(\gamma_3). \tag{2.3}$$

Как и в случае движения симметричного волчка, для сферы Рауса существуют два линейных по скоростям интеграла движения, которые являются обобщениями циклических интегралов, соответствующих прецессии и собственному вращению. Первый из них

$$H_{jell} = (M, r)$$

представляет собой интеграл Джеллета[1], который имеется также при достаточно общем законе трения в точке контакта [29], см. также § 243, стр. 192 в книге Рауса [43] .

Второй линейный по скоростям интеграл

$$\hat{H}_{rau} = g(\gamma)\, \omega_3$$

был найден Э. Раусом в 1884 году [43] и С. А. Чаплыгиным в работе [17].

Для сферы Рауса, находящейся в гравитационном поле, к уравнениям движения (2.1) добавится одно слагаемое.

Согласно [20], отвечающее уравнениям (2.1) векторное поле X имеет гомоклинические траектории. Как следствие, сфера становится гироскопически нестабильной и опрокидывается, если центр масс находится выше геометрического центра, с которым они находятся на одной вертикальной оси, а движение либо слишком медленное, либо такое, что значение интеграла Джеллета меньше порогового значения, описанного в [20].

Как и в случае волчка Лагранжа уравнение

$$\frac{d\gamma_3}{dt} = \frac{\gamma_2 M_1 - \gamma_1 M_2}{m(R^2 + 2aR\gamma_3 + a^2) + I_1} \tag{2.4}$$

[1] в отличие от встречающейся в российской литературе французской транскрипции «Желле», мы используем более корректную транскрипцию фамилии ирландского ученого J. H. Jellet.

на общей поверхности уровня интегралов движения

$$(\gamma,\gamma)=1,\qquad H_{jell}=\ell,\qquad H_{rau}=k,\qquad 2H=h$$

зависит только от одной переменной и ее производной, т. е. согласно Эйлеру имеет место быть разделение переменных. Переписав уравнение (2.4) в стандартном виде

$$\left(\frac{d\gamma_3}{dt}\right)^2=F(\gamma_3)\equiv\frac{mI_1^2R^2(1-\gamma_3^2)(h-\gamma_3)-m\ell^2I_1+k^2I_1I_3-\bigl(k\mathrm{g}^{1/2}-(R\gamma_3+a)m\ell\bigr)^2}{mI_1^2R^2\bigl(m(R^2+2aR\gamma_3+a^2)+I_1\bigr)},$$

получим стандартную по форме квадратуру

$$\int^{\gamma_3}\frac{d\gamma}{\sqrt{F(\gamma)}}=t,\tag{2.5}$$

в которую, в отличие от волчка Лагранжа, входит квадратный корень от $\mathrm{g}(\gamma_3)$. Для того чтобы получить алгебраическую кривую, перепишем разделенное уравнение (2.4) в полиномиальной форме

$$X:\qquad \Phi(\mu,\lambda)=0,\qquad \mu=\dot\gamma_3,\qquad \lambda=\gamma_3,$$

где

$$\Phi(\mu,\lambda)=\Bigl(I_1^2R^2\bigl(m(R^2+2aR\lambda+a^2)+I_1\bigr)\mu^2+I_1^2R^2\lambda^3-(I_1^2h-I_1k^2+I_3k^2+\ell^2m)R^2\lambda^2+$$
$$+R\bigl(2a(I_3k^2+\ell^2m)+I_1^2R\bigr)\lambda+I_1^2R^2h-I_1k^2R^2-I_3k^2a^2-a^2\ell^2m-I_1\ell^2\Bigr)^2-4k^2\ell^2(R\lambda+a)^2\mathrm{g}$$

и

$$\mathrm{g}=I_1I_3-mR^2(I_1-I_3)\lambda^2+2amI_3R\lambda+m(I_1R^2+I_3a^2).$$

При $I_1\neq I_3$ род кривой X равен трем, а при $I_1=I_3$ род кривой равен двум. Напомним, что для волчка Лагранжа род соответствующей кривой равен единице, т. е. кривая была эллиптическая. Для сферы Рауса соответствующая алгебраическая кривая всегда будет гиперэллиптической.

Таким образом, интегрирование квадратуры (2.5) будет достаточно трудоемкой процедурой. Тем не менее квадратуру (2.5) можно использовать для построения траекторий с помощью симплектических интеграторов, т. е. дискретных преобразований сохраняющих и форму интегралов движения и симплектическую форму [45–48].

§ 3. Обобщенная задача Гриоли

Рассмотрим уравнения движения

$$\dot M=\bigl(M+b\bigr)\times\omega+m\dot r\times(\omega\times r)-\frac{\partial V}{\partial\gamma}\times\gamma,\qquad \dot\gamma=\gamma\times\omega,\tag{3.1}$$

в которые входит вектор угловой скорости

$$\omega=A_\gamma M,\qquad A_\gamma=\bigl(I+mr^2E-mr\otimes r\bigr)^{-1}$$

и вектор

$$b=\bigl(\beta_1(\gamma),\beta_2(\gamma),\beta_3(\gamma)\bigr),$$

описывающий воздействие внешнего соленоидального поля. Так как отвечающие этому полю силы не совершают работу [15, 26, 27], то эти уравнения по прежнему

(1) сохраняют геометрический первый интеграл

$$(\gamma, \gamma) = 1;$$

(2) обладают инвариантной мерой (2.2)

$$\mu = \mathrm{g}^{-1/2}\, d\gamma\, dM, \qquad \mathrm{g}(\gamma) = I_1 I_3 + I_1 m R^2(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) + I_3 m (R\gamma_3 + a)^2;$$

(3) сохраняют полную механическую энергию (2.3)

$$H = \frac{1}{2}(M, \omega) + V(\gamma_3).$$

При дополнительных условиях

$$\beta_1(\gamma) = b_1\gamma_1, \qquad \beta_2(\gamma) = b_1\gamma_2, \qquad \beta_3(\gamma) = U(\gamma_3), \qquad b_{1,b_2} \in \mathbb{R},$$

где $U(\gamma_3)$ — произвольная функция, уравнения (3.1) обладают линейными по M первыми интегралами вида

$$\begin{aligned} H^b_{jell} &= H_{jell} + v(\gamma_3), \qquad v(\gamma_3) = R\int U(\gamma_3)\, d\gamma_3 - \frac{1}{2}Rb_1\gamma_3^2 - ab_1\gamma_3, \\ H^b_{rau} &= H_{rau} + u(\gamma_3), \qquad u(\gamma_3) = \int \mathrm{g}^{-1/2}(\gamma)\Big(b_1\big(m(R\gamma_3 + a)^2 + I_1\big) - mR(R\gamma_3 + a)U(\gamma_3)\Big)\, d\gamma_3. \end{aligned}$$

Например, если рассмотреть качение шара, сделанного из диэлектрика (задачу Гриоли)

$$\beta(\gamma) = B\,\gamma, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix},$$

при специальном выборе матрицы B, описывающей распределение зарядов, то деформации исходных интегралов Джеллета и Рауса имеют вид

$$H^b_{jell} = (M, r) - \frac{R(b_1 - b_3)\gamma_3^2}{2} - ab_1\gamma_3,$$

второй интеграл в общем случае $I_1 \neq I_3$ равен

$$\begin{aligned} H^b_{rau} = \sqrt{\mathrm{g}}\left(\omega_3 + \frac{(b_1 - b_3)\gamma_3}{2(I_1 - I_3)} + \frac{a\Big(2(2b_1 - b_3)I_1 - (b_1 + b_3)I_3\Big)}{2(I_1 - I_3)^2 R}\right) + \\ + \frac{I_1}{(I_1 - I_3)^{3/2}}\left(\frac{(3ma^2 + I_1 - I_3)b_3 I_3}{2R(I_1 - I_3)\sqrt{m}} - \frac{ma^2 b_1(2I_1 + I_3) + b_1(2I_1 - I_3)(I_1 - I_3)}{2R(I_1 - I_3)\sqrt{m}} - \right. \\ \left. - \frac{(b_1 - b_3)\sqrt{m}R}{2}\right)\arctan\left(\frac{\sqrt{m}\big(R\gamma_3(I_1 - I_3) - aI_3\big)}{\sqrt{\mathrm{g}}\sqrt{I_1 - I_3}}\right). \end{aligned}$$

Здесь и далее мы полагаем $I_1 \geq I_3$ так что H^b_{rau} является однозначно определенной функцией на всем фазовом пространстве.

В частном случае $I_3 = I_1$, который является аналогом случая В.В. Козлова [35] в динамике твердого тела в магнитном поле, второй линейный по M интеграл имеет вид

$$H^b_{rau} = H_{rau} + \frac{\mathrm{g}^{1/2}}{(R^2 + 2Ra\gamma_3 + a^2)amRI_1^2}\left(-I_1^2R(a\gamma_3 + R)b_1 + \frac{(R^2 - Ra\gamma_3 - 2a^2)b_1\mathrm{g}}{3}\right) -$$
$$-\frac{\sqrt{\mathrm{g}}(b_1 - b_3)}{15a^3m^2RI_1}\left(2\left(I_1 + \frac{m(4R^2 - 2Ra\gamma_3 - a^2)}{4}\right)^2 + \frac{5m^2a^2(4R^2\gamma_3^2 + 4Ra\gamma_3 - 5a^2)}{8}\right).$$

Таким образом, в общем случае наложение внешнего магнитного поля приводит к появлению не алгебраического интеграла движения H^b_{rau}. Аналогичный эффект, т. е. появление не алгебраического первого интеграла, наблюдается и при движении шара по вращающейся платформе, т. е. при наложении сил Кориолиса [49].

В этом частном случае приведение уравнений движения (3.1) к квадратурам осуществляется аналогично приведению в случае шара Чаплыгина на вращающейся платформе, так как векторное поле X_b (3.1) раскладывается по гамильтоновым векторным полям, построенным с помощью двух совместных бивекторов Пуассона, являющихся деформациями бивекторов Пуассона, приведенных в работе [7].

Таким образом мы доказали следующую теорему

Теорема 1. *Согласно теореме Эйлера–Якоби уравнения движения* (3.1) *интегрируются в квадратурах квадратурными уравнениями, если вектор соленоидального поля имеет вид*

$$b_1 = b_1\gamma_1, \qquad b_2 = b_1\gamma_2, \qquad b_3 = U(\gamma_3), \qquad b_1 \in \mathbb{R},$$

где $U(\gamma_3)$ — произвольная функция от γ_3.

При $V = 0$ на совместном уровне первых интегралов движения

$$(\gamma,\gamma) = 1, \qquad H^b_{jell} = \ell, \qquad H^b_{rau} = k, \qquad 2H = h$$

соответствующая квадратура имеет вид (2.5)

$$\int^{\gamma_3} \frac{d\gamma}{\sqrt{F_b(\gamma)}} = t, \tag{3.2}$$

где

$$F_b(\gamma) = \frac{mI_1^2R^2(1-\gamma^2)(h-\gamma) - m\ell_b^2I_1 + k_b^2I_1I_3 - \big(k_b\mathrm{g}^{1/2} - (R\gamma + a)m\ell_b\big)^2}{mI_1^2R^2\big(m(R^2 + 2aR\gamma + a^2) + I_1\big)}.$$

Таким образом, наложение внешнего соленоидального поля «сдвигает» исходные значения линейных первых интегралов на функции от γ_3

$$\ell_b = \ell - v(\gamma), \qquad k_b = k - u(\gamma). \tag{3.3}$$

В результате наложение внешнего соленоидального поля приводит к появлению не алгебраической квадратуры так же, как и при рассмотрении движения неголономного шара Чаплыгина на вращающейся платформе [49].

§ 4. Эффект Барнетта–Лондона

Если в общем магнитном моменте M_{ext} (1.2) учитывать только момент силы Лоренца, момент Барнетта–Лондона и постоянный гиростатический момент, то уравнения движения для сферы Рауса имеют вид

$$\dot{M} = \big(M + B\gamma + \alpha\big) \times \omega + m\dot{r} \times (\omega \times r) + C\omega \times \gamma - \frac{\partial V}{\partial \gamma} \times \gamma, \qquad \dot{\gamma} = \gamma \times \omega, \tag{4.1}$$

где

$$\omega = A_\gamma M, \qquad A_\gamma = \big(I + mr^2 E - mr \otimes r\big)^{-1},$$

B и C — 3×3-симметричные матрицы, а $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ — вектор постоянного гиростатического момента.

Уравнения (4.1)

(1) сохраняют геометрический первый интеграл

$$(\gamma, \gamma) = 1;$$

(2) обладают инвариантной мерой (2.2)

$$\mu = \mathrm{g}^{-1/2}\, \mathrm{d}\gamma\, \mathrm{d}M, \qquad \mathrm{g}(\gamma) = I_1 I_3 + I_1 m R^2(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) + I_3 m(R\gamma_3 + a)^2$$

при условии

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

(3) при выполнении условия (4.2) и условия

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix}, \qquad \alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}, \tag{4.3}$$

обладают двумя линейными по M интегралами движения

$$H^{bc}_{jell} = H^{b}_{jell} + \upsilon(\gamma_3), \qquad H^{bc}_{rau} = H^{b}_{rau} + \nu(\gamma_3),$$

(4) при выполнении условий (4.2)–(4.3) обладают квадратичным по M интегралом движения (аналог полной механической энергии)

$$H^{bc} = H + (c_1 - c_3)\Big(f_1(\gamma_3)M_3 + f_2(\gamma_3)H^{bc}_{jell} + f_3(\gamma_3)\Big). \tag{4.4}$$

В определение обобщенного интеграла Джеллета H^{bc}_{jell} входит полиномиальная по γ_3 функция

$$\upsilon(\gamma_3) = (R\alpha_3 + ac_1)\gamma_3.$$

В определение обобщенного интеграла Рауса H^{bc}_{rau} входит функция

$$\nu(\gamma_3) = \int \frac{m(R\gamma_3 + a)\big(\alpha_3 - ac_1\big) + c_1 I_1}{\sqrt{\mathrm{g}}}\, d\gamma_3,$$

которая при $I_3 = I_3$ является алгебраической функцией от γ_3:

$$\nu(\gamma_3) = \frac{\mathrm{g}^{1/2}}{(R^2 + 2Ra\gamma_3 + a^2)amRI_1^2}\Big(I_1^2 R\big(c_1(R + a\gamma_3) - (R\gamma_3 + a)\alpha_3\big) - \\ - \frac{(R^2 - Ra\gamma_3 - 2a^2)(ac_1 + \alpha_3 R)\mathrm{g}}{3a}\Big),$$

а при $I_3 \neq I_1$ не алгебраической функцией

$$\nu(\gamma_3) = \frac{I_1\big(amR\alpha + a^2c_1m + (I_1 - I_3)c_1\big)\arctan\left(\frac{(R\gamma_3(I_1-I_3)-aI_3)\sqrt{m}}{\sqrt{\mathrm{g}}\sqrt{I_1-I_3}}\right)}{R\sqrt{m}(I_1 - I_3)^{3/2}} - \frac{\sqrt{\mathrm{g}}(\alpha R + ac_1)}{(I_1 - I_3)R}$$

Если $I_3 = I_1$, то квадратичный по M интеграл H^{bc} имеет вид

$$H^{bc} = H + \\ + \frac{c_1 - c_3}{amR}\left(M_3 - \frac{\left(\left(\frac{b_3-b_1}{3}\gamma_3 + \alpha_3\right)mR^2\gamma_3 - 2\left(\frac{a(b_1-c_1)\gamma_3}{2} + H^{bc}_{jell}\right)mR + 2I_1(b_1 - c_1)\right)\gamma_3}{2I_1}\right).$$

При $I_3 \neq I_1$ функции, входящие в определение H^{bc} (4.4), имеют вид

$$f_1(\gamma_3) = \frac{I_1}{\sqrt{\mathrm{g}}\sqrt{m}R\sqrt{I_1 - I_3}}\arctan\left(\frac{\sqrt{m}\big(R\gamma_3(I_1 - I_3) - aI_3\big)}{\sqrt{\mathrm{g}}\sqrt{I_1 - I_3}}\right);$$

для остальных двух функций существует только интегральное представление

$$f_2(\gamma_3) = \int \frac{mR(amR\gamma_3 + mR^2 + I_3)f_1(\gamma_3) + m(R\gamma_3 + a)}{\mathrm{g}}\,d\gamma_3$$

и

$$f_3(\gamma_3) = \int\left(c_1f_1(\gamma_3) - \gamma_3\frac{df_2(\gamma_3)}{d\gamma_3}(\alpha_3R + ac_1)\right)d\gamma_3.$$

Здесь по прежнему

$$\mathrm{g} = I_1I_3 - mR^2(I_1 - I_3)\gamma_3^2 + 2amI_3R\gamma_3 + m(I_1R^2 + I_3a^2).$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему

Теорема 2. *Согласно теореме Эйлера–Якоби уравнения движения* (4.1) *интегрируются в квадратурах, если*

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

Соответствующую квадратуру вида (2.5) *можно получить, сдвигая параметры h, ℓ и k на приведенные выше функции от γ_3, как и в случае* (3.2)–(3.3), *отвечающему задаче Гриоли.*

Вопрос о возможном применении полученных результатов обсуждается в Заключении.

§ 5. Эффект Эйнштейна-де Гааза

Если в общем магнитном моменте M_{ext} (1.2) учитывать все возможные слагаемые, то уравнения движения для сферы Рауса имеют вид

$$\dot{M} = \big(M + B\gamma + \alpha\big) \times \omega + m\dot{r} \times (\omega \times r) + C\omega \times \gamma + D(\omega \times \gamma) - \frac{\partial V}{\partial \gamma} \times \gamma, \qquad \dot{\gamma} = \gamma \times \omega, \quad (5.1)$$

где

$$\omega = A_\gamma M, \qquad A_\gamma = \big(I + mr^2 E - mr \otimes r\big)^{-1},$$

B, C и D — 3×3-симметричные числовые матрицы, а $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ — вектор постоянного гиростатического момента сферы Рауса.

Уравнения (5.1)

(1) сохраняют геометрический первый интеграл

$$(\gamma, \gamma) = 1;$$

(2) обладают инвариантной мерой (2.2)

$$\mu = \mathrm{g}^{-1/2}\, \mathrm{d}\gamma\, \mathrm{d}M, \qquad \mathrm{g}(\gamma) = I_1 I_3 + I_1 m R^2(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) + I_3 m (R\gamma_3 + a)^2,$$

при условии

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}; \qquad (5.2)$$

(3) при выполнении условия (5.2) и условия

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix}, \qquad \alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_3 \end{pmatrix},$$

обладают двумя линейными по M интегралами движения

$$H_{jell}^{bcd} = H_{jell}^{bc} + \tilde{\upsilon}(\gamma_3), \qquad H_{rau}^{bcd} = H_{rau}^{bc} + \tilde{\nu}(\gamma_3),$$

(4) при выполнении условий (4.2)–(4.3) обладают квадратичным по M интегралом движения (аналог полной механической энергии)

$$H^{bcd} = H^b + (d_1 - d_3)\Big(\tilde{f}_1(\gamma_3)M_3 + \tilde{f}_2(\gamma_3)H_{jell}^{bc} + \tilde{f}_3(\gamma_3)\Big). \qquad (5.3)$$

В определение обобщенного интеграла Джеллета H_{jell}^{bcd} входит полиномиальная по γ_3 функция

$$\tilde{\upsilon}(\gamma_3) = -\frac{R\gamma_3^2(d_1 - d_3)}{2} + a d_3 \gamma_3$$

В определение обобщенного интеграла Рауса H_{rau}^{bcd} входит функция

$$\tilde{\nu}(\gamma_3) = -\int \frac{m(R\gamma_3 + a)\big(R(d_1 - d_2)\gamma_3 - a d_3\big) - d_3 I_1}{\sqrt{\mathrm{g}}}\, d\gamma_3$$

которая при $I_3 = I_3$ является алгебраической функцией от γ_3

$$\tilde{\nu}(\gamma_3) = -\frac{(d_1-d_2)\sqrt{\mathrm{g}}\Big(3a^2m^2R^2\gamma_3^2 + (2mR^2 - 3ma^2 + 2I_1)(mR^2 - amR\gamma_3 + ma^2 + I_1)\Big)}{15a^3m^2RI_1} + \\ + \frac{d_3(2I_1 - m(R^2 - aR\gamma_3 - 2a^2)\sqrt{\mathrm{g}}}{3amRI_1},$$

а при $I_3 \neq I_1$ не алгебраической функцией

$$\tilde{\nu}(\gamma_3) = \frac{I_1\left(d_3(ma^2 + I_1 - I_3) - \frac{(d_1-d_3)\left(3a^2mI_3 + (mR^2+I_3)(I_1-I_3)\right)}{2(I_1-I_3)}\right)\arctan\left(\frac{(R\gamma_3(I_1-I_3)-aI_3)\sqrt{m}}{\sqrt{\mathrm{g}}\sqrt{I_1-I_3}}\right)}{\sqrt{m}R(I_1-I_3)^{3/2}} \\ + \frac{\sqrt{\mathrm{g}}}{R(I_1-I_3)}\left(\frac{(d_1-d_3)\big(R\gamma_3(I_1-I_3) + (2I_1+I_3)a\big)}{2(I_1-I_3)} - ad_3\right).$$

Если $I_3 = I_1$, то квадратичный по M интеграл H^{bcd} имеет вид

$$H^{bcd} = H^{bc} - \frac{d_1-d_3}{amR}M_3 - \frac{(d_1-d_3)\gamma_3}{aI_1}H^{bc}_{jell} - \\ - \frac{R\gamma_3^3(d_1-d_3)^2}{6aI_1} - \frac{\gamma_3(d_1-d_3)d_3(2I_1 - amR\gamma_3)}{2amRI_1}.$$

При $I_3 \neq I_1$ функции, входящие в определение H^{bcd} (5.3), имеют вид

$$\tilde{f}_1(\gamma_3) = -\frac{I_1}{\sqrt{\mathrm{g}}\sqrt{m}R\sqrt{I_1-I_3}}\arctan\left(\frac{\sqrt{m}\big(R\gamma_3(I_1-I_3) - aI_3\big)}{\sqrt{\mathrm{g}}\sqrt{I_1-I_3}}\right);$$

для остальных двух функций существует только интегральное представление

$$\tilde{f}_2(\gamma_3) = \int\left(\frac{mR(mR^2 + amR\gamma_3 + I_3)\tilde{f}_1(\gamma_3) - m(R\gamma_3 + a)}{\mathrm{g}}\right)d\gamma_3$$

и

$$\tilde{f}_3(\gamma_3) = \int\left(d_3\tilde{f}_1(\gamma_3) + \frac{\gamma_3\big(R\gamma_3(d_1-d_2) - 2ad_3\big)}{2}\frac{d\tilde{f}_2(\gamma_3)}{d\gamma_3}\right)d\gamma_3.$$

Отметим, что функции $f_1(\gamma_3)$ и $\tilde{f}_1(\gamma_3)$, отвечающие эффекту Барнетта–Лондона H^{bc} (4.4) и эффекту Эйнштейна–де Гааза, отличаются только знаком, т. е. $f_1(\gamma_3) = -\tilde{f}_1(\gamma_3)$.

Таким образом, мы доказали следующую теорему

Теорема 3. *Согласно теореме Эйлера–Якоби уравнения движения* (5.1) *интегрируются в квадратурах, если*

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

Соответствующую квадратуру вида (2.5) *можно получить сдвигая параметры h, ℓ и k на приведенные выше функции от γ_3, как и в случае* (3.2)–(3.3)*, отвечающему задаче Гриоли.*

§ 6. Заключение

Полученные нами квадратуры, по-видимому, не имеет никакой практической пользы для явного интегрирования уравнений движения в общем виде. Однако, полученные интегралы движения могут быть использованы для бифуркационного и топологического анализа рассмотренных механических систем, для исследования вопросов устойчивости частных решений, для исследования возможных интегрируемых обобщений и т. д.

Например, согласно работе [20], движение сферы Рауса является гироскопически нестабильным и сфера опрокидывается, если центр масс находится выше геометрического центра, которые находятся на одной вертикальной оси, а движение либо слишком медленное, либо такое, что значение интеграла Джеллета меньше порогового значения.

Естественным образом возникает вопрос о том, как влияет наложение магнитного поля на этот эффект: стабилизируется ли движение; как меняется порог устойчивости в зависимости от различных вкладов эффектов Барнетта–Лондона и Эйнштейна–де Гааза; как эти теоретические результаты согласуются с экспериментами и т. д. Исследованию этих вопросов будет посвящена отдельная публикация.

Финансирование. Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 19–71–30012).

Поступила в редакцию 01.11.2019

Борисов Алексей Владимирович, д. ф.-м. н., профессор, Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, 119991, Россия, г. Москва, ул. Губкина, 8.
E-mail: borisov@rcd.ru

Цыганов Андрей Владимирович, д. ф.-м. н., Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, 119991, Россия, г. Москва, ул. Губкина, 8.
E-mail: andrey.tsiganov@gmail.com

Цитирование: А. В. Борисов, А. В. Цыганов. Влияние эффектов Барнетта–Лондона и Эйнштейна–де Гааза на движение неголономной сферы Рауса // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2019. Т. 29. Вып. 4. С. 583–598.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'UTERNYE NAUKI
MECHANICS 2019. Vol. 29. Issue 4. Pp. 583–598.

A. V. Borisov, A. V. Tsiganov

Influence of Bartnett–London and Einstein–de Haas effects on the motion of the nonholonomic sphere of Routh

Keywords: nonholonomic systems, magnetic field, integrable systems.

MSC2010: 37J60, 70F25, 74F15

DOI: 10.20537/vm190409

We consider the rolling of an unbalanced dynamically symmetric ball along a plane without slipping in the presence of an external magnetic field. We assume that the ball may be wholly or partially composed of dielectric, ferromagnetic, or superconducting materials. According to the existing phenomenological theory, in this case, when studying the dynamics of a ball, it is required to take into account the Lorentz force moment, Barnett–London moment, and Einstein–de Haas moment. Within the framework of this mathematical model, we obtain the conditions for the existence of integrals of motion, which allow us to reduce the integration of equations of motion to a quadrature similar to the Lagrange quadrature for a heavy rigid body.

Funding. The study was funded by the Russian Science Foundation (project no. 19–71–30012).

REFERENCES

1. Ampere A.M. Sur deux Mémoires lus par M. Ampère à l'Académie royale des Sciences, *Journal de Physique, de Chimie et d'Histoire Naturelle*, 1821, vol. 92, pp. 160–165.
2. Barnett S.J. On magnetization by angular acceleration, *Science*, 1909, vol. 30, issue 769, pp. 413. https://doi.org/10.1126/science.30.769.413
3. Barnett S.J. Magnetization by rotation, *Physical Review*, 1915, vol. 6, issue 4, pp. 239–270. https://doi.org/10.1103/PhysRev.6.239
4. Barnett S.J. Gyromagnetic and electron-inertia effects, *Reviews of Modern Physics*, 1935, vol. 7, issue 2, pp. 129–166. https://doi.org/10.1103/RevModPhys.7.129
5. Bai Y., Svinin M., Yamamoto M. Dynamics-based motion planning for a pendulum-actuated spherical rolling robot, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2018, vol. 23, issue 4, pp. 372–388. https://doi.org/10.1134/S1560354718040020
6. Becker R., Heller G., Sauter F. Über die Stromverteilung in einer supraleitenden Kugel, *Zeitschrift für Physik*, 1933, vol. 85, issue 11–12, pp. 772–787. https://doi.org/10.1007/BF01330324
7. Bizayev I.A., Tsiganov A.V. On the Routh sphere problem, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2013, vol. 46, issue 8, 085202. https://doi.org/10.1088/1751-8113/46/8/085202
8. Bizyaev I.A. The inertial motion of a roller racer, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2017, vol. 22, issue 3, pp. 239–247. https://doi.org/10.1134/S1560354717030042
9. Bizyaev I.A., Borisov A.V., Mamaev I.S. The Chaplygin sleigh with parametric excitation: chaotic dynamics and nonholonomic acceleration, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2017, vol. 22, issue 8, pp. 955–975. https://doi.org/10.1134/S1560354717080056
10. Bizyaev I.A., Borisov A.V., Mamaev I.S. An invariant measure and the probability of a fall in the problem of an inhomogeneous disk rolling on a plane, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2018, vol. 23, issue 6, pp. 665–684. https://doi.org/10.1134/S1560354718060035
11. Bizyaev I.A., Borisov A.V., Mamaev I.S. Exotic dynamics of nonholonomic roller racer with periodic control, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2018, vol. 23, issue 7–8, pp. 983–994. https://doi.org/10.1134/S1560354718070122
12. Borisov A.V., Mamaev I.S., Tsiganov A.V. Non-holonomic dynamics and Poisson geometry, *Russian Mathematical Surveys*, 2014, vol. 69, no. 3, pp. 481–538. https://doi.org/10.1070/RM2014v069n03ABEH004899

13. Borisov A.V., Mamaev I.S. *Rigid body dynamics*, De Gruyter Stud. Math. Phys., vol. 52, Berlin: De Gruyter, 2018.
14. Borisov A.V., Kuznetsov S.P. Comparing dynamics initiated by an attached oscillating particle for the nonholonomic model of a Chaplygin sleigh and for a model with strong transverse and weak longitudinal viscous friction applied at a fixed point on the body, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2018, vol. 23, issue 7–8, pp. 803–820. https://doi.org/10.1134/s1560354718070018
15. Borisov A.V., Tsiganov A.V. On the Chaplygin sphere in a magnetic field, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2019, vol. 24, issue 6, pp. 739–754. https://doi.org/10.1134/S156035471906011X
16. Burov A.A., Subkhankulov G.I. On the motion of a solid in a magnetic field, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1986, vol. 50, issue 6, pp. 743–748. https://doi.org/10.1016/0021-8928(86)90083-3
17. Chaplygin S.A. On motion of heavy rigid body of revolution on horizontal plane, *Collection of works: Vol. 1*, Moscow–Leningrad: OGIZ, 1948, pp. 57–75.
18. Jaafar R., Chudnovsky E.M., Garanin D.A. Dynamics of the Einstein–de Haas effect: Application to a magnetic cantilever, *Physical Review B*, 2009, vol. 79, issue 10, 104410. https://doi.org/10.1103/physrevb.79.104410
19. Garanin D.A., Chudnovsky E.M. Angular momentum in spin-phonon processes, *Physical Review B*, 2015, vol. 92, issue 2, 024421. https://doi.org/10.1103/physrevb.92.024421
20. Cushman R. Routh's sphere, *Reports on Mathematical Physics*, 1998, vol. 42, issue 1–2, pp. 47–70. https://doi.org/10.1016/S0034-4877(98)80004-9
21. Einstein A. Experimenteller nachweis der ampèreschen molekularströme, *Naturwissenschaften*, 1915, vol. 3, issue 19, pp. 237–238. https://doi.org/10.1007/BF01546392
22. Hildebrandt A.F. Magnetic field of a rotating superconductor, *Physical Review Letters*, 1964, vol. 12, issue 8, pp. 190–191. https://doi.org/10.1103/physrevlett.12.190
23. Hirsch J.E. Moment of inertia of superconductors, *Physics Letters A*, 2019, vol. 383, issue 1, pp. 83–90. https://doi.org/10.1016/j.physleta.2018.09.031
24. Hu S., Santoprete M. Suslov problem with the Clebsch–Tisserand potential, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2018, vol. 23, issue 2, pp. 193–211. https://doi.org/10.1134/S1560354718020053
25. Felderhof B.U. Self-propulsion of a spherical electric or magnetic microbot in a polar viscous fluid, *Physical Review E*, 2015, vol. 91, issue 2, 023014. https://doi.org/10.1103/physreve.91.023014
26. Grioli G. Moto attorno al baricentro di un giroscopio soggetto a forze di potenza nulla, *Univ. Roma Ist. Naz. Alta Mat. Rend. Mat. e Appl. (5)*, 1947, vol. 6, pp. 439–463.
27. Grioli G. Sul moto di un corpo rigido asimmetrico soggetto a forze di potenza nulla, *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, 1957, vol. 27, pp. 90–102.
28. Goldstein H. The classical motion of a rigid charged body in a magnetic field, *American Journal of Physics*, 1951, vol. 19, issue 2, pp. 100–109. https://doi.org/10.1119/1.1932721
29. Jellet J.H. *A treatise on the theory of friction*, London: MacMillan, 1872.
30. Kikoin I.K., Gubar S.W. Gyromagnetic effects in super conductors, *J. Phys. USSR*, 1940, vol. 3, pp. 333–354.
31. Kilin A.A., Pivovarova E.N. The rolling motion of a truncated ball without slipping and spinning on a plane, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2017, vol. 22, issue 3, pp. 298–317. https://doi.org/10.1134/S156035471703008X
32. Kilin A.A., Pivovarova E.N. Integrable nonsmooth nonholonomic dynamics of a rubber wheel with sharp edges, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2018, vol. 23, issue 7–8, pp. 887–907. https://doi.org/10.1134/S1560354718070067
33. Kirchhoff G.R. Über die bewegung eines rotationskörpers in einer flüssigkeit, *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 1870, vol. 1870, issue 71, pp. 237–262. https://doi.org/10.1515/crll.1870.71.237
34. Kobrin A.I., Martynenko Yu.G. Motion of a conducting solid body near the center of mass in a slowly

varying magnetic field, *Soviet Physics Doklady*, 1981, vol. 26, no. 12, pp. 1134–1136.
35. Kozlov V.V. Problem of the rotation of a solid body in a magnetic field, *Izv. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela*, 1985, vol. 20, no. 6, pp. 28–33 (in Russian).
36. Kroh H.J., Felderhof B.U. Force and torque on a sphere with electric dipole moment moving in a dielectric fluid in the presence of a uniform magnetic field, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2000, vol. 280, issue 3–4, pp. 256–265. https://doi.org/10.1016/S0378-4371(00)00057-1
37. Kuznetsov S.P. Regular and chaotic dynamics of a Chaplygin sleigh due to periodic switch of the nonholonomic constraint, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2018, vol. 23, issue 2, pp. 178–192. https://doi.org/10.1134/S1560354718020041
38. Lakshmanan M. The fascinating world of the Landau–Lifshitz–Gilbert equation: an overview, *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2011, vol. 369, issue 1939, pp. 1280–1300. https://doi.org/10.1098/rsta.2010.0319
39. Mentink J.H., Katsnelson M.I., Lemeshko M. Quantum many-body dynamics of the Einstein–de Haas effect, *Physical Review B*, 2019, vol. 99, issue 6, 064428. https://doi.org/10.1103/physrevb.99.064428
40. Pry R.H., Lathrop A.L., Houston W.V. Gyromagnetic effect in a superconductor, *Physical Review*, 1952, vol. 86, issue 6, pp. 905–907. https://doi.org/10.1103/PhysRev.86.905
41. Rowland H.A. Magnetic effect of electric convection, *American Journal of Science*, 1878, series 3, vol. 15, pp. 30–38. https://doi.org/10.2475/ajs.s3-15.85.30
42. Richardson O.W. A mechanical effect accompanying magnetization, *Physical Review*, 1908, vol. 26, issue 3, pp. 248–253. https://doi.org/10.1103/PhysRevSeriesI.26.248
43. Routh E.J. *Advanced rigid bodies dynamics*, London: MacMillan and Co., 1884.
44. Samsonov V.A. On the rotation of a body in a magnetic field, *Izv. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela*, 1984, vol. 19, no. 4, pp. 32–34 (in Russian).
45. Tsiganov A.V. Bäcklund transformations for the nonholonomic Veselova system, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2017, vol. 22, issue 2, pp. 163–179. https://doi.org/10.1134/S1560354717020058
46. Tsiganov A.V. Integrable discretization and deformation of the nonholonomic Chaplygin ball, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2017, vol. 22, issue 4, pp. 353–367. https://doi.org/10.1134/S1560354717040025
47. Tsiganov A.V. On exact discretization of cubic-quintic Duffing oscillator, *Journal of Mathematical Physics*, 2018, vol. 59, issue 7, 072703. https://doi.org/10.1063/1.5034381
48. Tsiganov A.V. Discretization of Hamiltonian systems and intersection theory, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2018, vol. 197, issue 3, pp. 1806–1822. https://doi.org/10.1134/S0040577918120103
49. Tsiganov A.V. Hamiltonization and separation of variables for a Chaplygin ball on a rotating plane, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2019, vol. 24, issue 2, pp. 171–186. https://doi.org/10.1134/S1560354719020035
50. Uhlenbeck G.E., Goudsmit S. Ersetzung der hypothese vom unmechanischen zwang durch eine forderung bezüglich des inneren verhaltens jedes einzelnen elektrons, *Naturwissenschaften*, 1925, vol. 13, issue 47, pp. 953–954. https://doi.org/10.1007/BF01558878
51. Urman Yu.M. Influence of the Barnett–London effect on the motion of a superconducting rotor in a nonuniform magnetic field, *Technical Physics*, 1998, vol. 43, issue 8, pp. 885–889. https://doi.org/10.1134/1.1259095

Received 01.11.2019

Borisov Alexey Vladimirovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, ul. Gubkina, 8, Moscow, 119991, Russia.
E-mail: borisov@rcd.ru

Tsiganov Andrey Vladimirovich, Doctor of Physics and Mathematics, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, ul. Gubkina, 8, Moscow, 119991, Russia.
E-mail: andrey.tsiganov@gmail.com

Citation: A. V. Borisov, A. V. Tsiganov. Influence of Bartnett–London and Einstein–de Haas effects on the motion of the nonholonomic sphere of Routh, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, issue 4, pp. 583–598.