ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА 2019. Т. 29. Вып. 4. С. 558–568.

УДК 517.926

© *А. Х. Сташ*

СВОЙСТВА ПОКАЗАТЕЛЕЙ КОЛЕБЛЕМОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

В данной работе исследуются различные разновидности показателей колеблемости (верхние или нижние, сильные или слабые) нулей, корней, гиперкорней, строгих и нестрогих знаков ненулевых решений линейных однородных автономных дифференциальных систем на положительной полуоси. На множестве ненулевых решений автономных систем установлены соотношения между этими показателями колеблемости. Полностью изучены спектры показателей колеблемости автономных систем. Оказалось, что они напрямую зависят от корней соответствующего характеристического многочлена системы. Как следствие, найдены спектры всех показателей колеблемости автономных систем с симметричной матрицей. Доказано, что они состоят из одного нулевого значения. Кроме того, дано полное описание главных значений показателей колеблемости таких систем. Эти значения для показателей колеблемости нестрогих знаков, корней и гиперкорней совпали с множеством модулей мнимых частей собственных значений матрицы системы, а показатели колеблемости строгих знаков могут состоять из нуля и наименьшего по модулю из мнимых частей комплексных корней соответствующего характеристического многочлена.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, линейные системы, колеблемость, число нулей, показатели колеблемости, показатели Ляпунова.

DOI: 10.20537/vm190407

Введение

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathcal{M}^n$ множество линейных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+ \equiv [0; \infty), \tag{0.1}$$

с *ограниченными непрерывными* оператор-функциями $A: \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End} \mathbb{R}^n$ (каждую из которых будем отождествлять с соответствующей системой). Подмножество множества $\mathcal{M}^n$, состоящее из *автономных* систем, обозначим через $\mathcal{C}^n$. Пространство решений системы $A \in \mathcal{M}^n$ обозначим через $\mathcal{S}(A)$, а подмножество всех ненулевых решений — через $\mathcal{S}_*(A)$. Далее, звездочкой снизу будем помечать любое линейное пространство, в котором выколот нуль. Положим

$$\mathcal{S}_* = \bigcup_{A \in \mathcal{M}^n} \mathcal{S}_*(A), \quad \mathcal{S}_*(\mathcal{C}) = \bigcup_{A \in \mathcal{C}^n} \mathcal{S}_*(A).$$

В работах [1–3] И. Н. Сергеева на полупрямой вводились и исследовались различные характеристики ляпуновского типа ненулевых решений линейных дифференциальных уравнений и систем. Эти характеристики отвечают за колеблемость, вращаемость и блуждаемость решения. В 2015 году в статье [4] были систематизированы все введенные И. Н. Сергеевым к настоящему моменту характеристики ляпуновского типа, что привело к изменению названий некоторых из них. В частности, полные и векторные частоты переименованы соответственно в сильные и слабые показатели колеблемости.

Данная работа посвящена изучению сильных и слабых показателей колеблемости автономных систем вида (0.1) и их решений. В первой теореме приводится возможное соотношение между этими показателями колеблемости на множестве $\mathcal{S}_*(\mathcal{C})$, а в следующих утверждениях перечислены множества их значений на ненулевых решениях. Доказательства всех сформулированных теорем даны в последнем параграфе.

§ 1. Показатели колеблемости решений дифференциальных систем

Определение 1 (см. [1]). Скажем, что в точке $t > 0$ происходит *строгая* (*нестрогая*) *смена знака* функции $y\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, если в любой окрестности этой точки функция y принимает как положительные (неотрицательные), так и отрицательные (неположительные) значения.

Определение 2 (см. [1,2]). Для момента $t > 0$ и функции $y\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ введем следующие обозначения:

$\nu^-(y,t)$ — число точек ее *строгой смены знака* на промежутке $(0,t]$;

$\nu^\sim(y,t)$ — число точек ее *нестрогой смены знака* на промежутке $(0,t]$;

$\nu^0(y,t)$ — число ее *нулей* на промежутке $(0,t]$;

$\nu^+(y,t)$ — число ее *корней* (т. е. нулей с учетом их *кратности*) на промежутке $(0,t]$;

$\nu^*(y,t)$ — число ее *гиперкратных корней* на промежутке $(0,t]$: при его подсчете каждый некратный корень берется ровно один раз, а кратный — бесконечно много раз.

Далее, для ненулевого вектора $m \in \mathbb{R}^n_*$ и вектор-функции $x \in \mathcal{S}_*$ введем обозначение $\nu^\alpha(x,m,t) \equiv \nu^\alpha(\langle x,m\rangle,t)$, где $\alpha \in \{-,\sim,0,+,*\}$, $\langle x(\cdot),m\rangle$ — скалярное произведение.

Определение 3 (см. [2–4]). *Верхние* (*нижние*) *сильный* и *слабый показатели колеблемости знаков, нулей, корней* и *гиперкорней* функции $x \in \mathcal{S}_*$ при $\alpha \in \{-,\sim,0,+,*\}$ соответственно зададим формулами

$$\hat{\nu}^\alpha_\bullet(x) \equiv \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \varlimsup_{t\to\infty} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x,m,t) \qquad \left(\check{\nu}^\alpha_\bullet(x) \equiv \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \varliminf_{t\to\infty} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x,m,t)\right),$$
$$\hat{\nu}^\alpha_\circ(x) \equiv \varlimsup_{t\to\infty} \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x,m,t) \qquad \left(\check{\nu}^\alpha_\circ(x) \equiv \varliminf_{t\to\infty} \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x,m,t)\right).$$

В случае совпадения сильного или слабого верхнего показателя колеблемости решения x с одноименным нижним будем называть его *точным* и обозначать $\nu^\alpha_\bullet(x)$ или $\nu^\alpha_\circ(x)$.

Замечание 1. Для любого $x \in \mathcal{S}_*$ имеют место следующие соотношения

$$\hat{\nu}^-_\circ(x) \le \hat{\nu}^\sim_\circ(x) \le \hat{\nu}^0_\circ(x) \le \hat{\nu}^+_\circ(x) \le \hat{\nu}^*_\circ(x), \quad \hat{\nu}^-_\bullet(x) \le \hat{\nu}^\sim_\bullet(x) \le \hat{\nu}^0_\bullet(x) \le \hat{\nu}^+_\bullet(x) \le \hat{\nu}^*_\bullet(x),$$
$$\check{\nu}^-_\circ(x) \le \check{\nu}^\sim_\circ(x) \le \check{\nu}^0_\circ(x) \le \check{\nu}^+_\circ(x) \le \check{\nu}^*_\circ(x), \quad \check{\nu}^-_\bullet(x) \le \check{\nu}^\sim_\bullet(x) \le \check{\nu}^0_\bullet(x) \le \check{\nu}^+_\bullet(x) \le \check{\nu}^*_\bullet(x).$$

§ 2. Показатели колеблемости дифференциальных систем

Определение 4 (см. [1–3]). Для каждого

$$\omega^\alpha = \hat{\nu}^\alpha_\bullet, \check{\nu}^\alpha_\bullet, \hat{\nu}^\alpha_\circ, \check{\nu}^\alpha_\circ, \quad \alpha \in \{-,\sim,0,+,*\} \tag{2.1}$$

назовем i-ым верхним $\omega^\alpha_{\bar{i}}(A)$ и нижним $\omega^\alpha_{\underline{i}}(A)$ *главными* (или *регуляризованными по Миллионщикову*) *значениями* соответствующего показателя колеблемости системы $A \in \mathcal{M}^n$ величины, задаваемые равенствами

$$\omega^\alpha_{\bar{i}}(A) \equiv \inf_{L\in G^i_*(A)} \sup_{x\in L} \omega^\alpha(x), \qquad \omega^\alpha_{\underline{i}}(A) \equiv \sup_{L\in G^{n-i+1}_*(A)} \inf_{x\in L} \omega^\alpha(x),$$

где $i = 1,2,\ldots,n$, а через $G^i(A)$ обозначено множество i-мерных подпространств пространства $\mathcal{S}(A)$.

Доказательство теоремы VI [1] переносится на рассматриваемые функционалы (2.1), следовательно, для любой системы $A \in \mathcal{M}^n$ справедливы соотношения

$$\omega^\alpha_{\bar{1}}(A) = \omega^\alpha_{\underline{1}}(A) = \inf_{x\in\mathcal{S}_*(A)} \omega^\alpha(x), \qquad \omega^\alpha_{\underline{n}}(A) = \omega^\alpha_{\bar{n}}(A) = \sup_{x\in\mathcal{S}_*(A)} \omega^\alpha(x).$$

Последние величины обозначим через $\omega^\alpha_1(A)$ и $\omega^\alpha_n(A)$ соответственно.

§ 3. Обзор результатов и постановка задач

В работе [3] установлено, что для любого решения системы $A \in \mathcal{C}^n$ сильный показатель колеблемости нулей является точным, а его спектр системы $A \in \mathcal{C}^n$ (то есть множество ее значений на всех ненулевых решениях этой системы) совпадает с множеством модулей мнимых частей корней его характеристического уравнения. Регуляризованные же по Миллионщикову i-ые верхний и нижний сильный показатель колеблемости нулей системы $A \in \mathcal{C}^n$ совпадают между собой и равны $|\mathrm{Im}\,\lambda_i(A)|$, где $\lambda_i(A)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, — корни характеристического многочлена системы A, упорядоченные по неубыванию модулей их мнимых частей. В работе [5] доказано, что сильный показатель колеблемости нулей любого решения автономной системы совпадает со слабым, а значит, все приведенные выше результаты работы [3] справедливы и для слабого показателя колеблемости нулей.

Показатели колеблемости (строгих и нестрогих) знаков и корней эти вопросы были исследованы только для линейных однородных автономных уравнений. Показатели колеблемости нестрогих знаков и корней решений линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами обладали всеми выше перечисленными свойствами [6], но эти свойства лишь частично имели место для показателей колеблемости строгих знаков [7]. Показатели колеблемости гиперкорней вовсе не были исследованы на множестве $\mathcal{S}_*(\mathcal{C})$. В связи с этим возникали следующие задачи.

Задача 1. *Сохраняются ли все эти свойства, справедливые для показателей колеблемости знаков и корней решений автономных уравнений, и для решений автономных систем*?

Задача 2. *Будут ли отличаться показатели колеблемости гиперкорней на множестве решений всех линейных автономных систем от показателей знаков или корней*?

§ 4. Формулировка результатов

Теорема 1. *Для любого решения $x \in \mathcal{S}_*(A)$ любой системы $A \in \mathcal{C}^n$ справедливы равенства*

$$\nu_\bullet^-(x) = \nu_\circ^-(x) \le \nu_\bullet^\sim(x) = \nu_\circ^\sim(x) = \nu_\bullet^0(x) = \nu_\circ^0(x) = \nu_\bullet^+(x) = \nu_\circ^+(x) = \nu_\bullet^*(x) = \nu_\circ^*(x). \quad (4.1)$$

Откуда с учетом результатов работ [3, 5] вытекают следующие два следствия.

Следствие 1. *Для любой системы $A \in \mathcal{C}^n$ при любом $\omega^\alpha = \hat{\nu}_\bullet^\alpha, \check{\nu}_\bullet^\alpha, \hat{\nu}_\circ^\alpha, \check{\nu}_\circ^\alpha$ выполнены равенства*

$$\omega_{\bar{j}}^\alpha(A) = \omega_{\underline{j}}^\alpha(A) = |\mathrm{Im}\,\lambda_j(A)|, \quad \alpha \in \{\sim, 0, +, *\}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Следствие 2. *Спектры показателей колеблемости нулей, нестрогих знаков, корней и гиперкорней автономных систем состоят из множества модулей мнимых частей собственных значений ее матрицы.*

Из курса алгебры известно, что все собственные значения симметричной матрицы являются действительными. Поэтому имеет место следующее

Следствие 3. *Спектры всех показателей колеблемости автономных систем с симметричной матрицей состоят из одного нулевого значения.*

Теорема 2. *Спектры показателей колеблемости строгих знаков любой системы $A \in \mathcal{C}^n$ содержат наименьший из модулей мнимых частей корней соответствующего характеристического многочлена, а если $n > 2$, то еще и число 0, но не содержат никаких других чисел.*

Теорема 3. *При $n > 1$ для любой системы $A \in \mathcal{C}^n$ при каждом $\omega^- = \hat{\nu}_\bullet^-, \check{\nu}_\bullet^-, \hat{\nu}_\circ^-, \check{\nu}_\circ^-$ имеют место равенства*

$$\omega_n^-(A) = \omega_{\overline{n-1}}^-(A) = \omega_{\underline{n-1}}^-(A) = |\mathrm{Im}\,\lambda_1(A)|, \qquad \omega_{\overline{j}}^-(A) = \omega_{\underline{j}}^-(A) = 0, \quad j < n-1.$$

§ 5. Вспомогательные определения и факты

Определение 5 (см. [5]). Будем называть *подобными*:

а) матрицы $A, B \in \mathcal{C}^n$, если для некоторой невырожденной матрицы $C \in \mathcal{C}^n$ выполняется равенство $B = CAC^{-1}$;

б) вектор-функции $x, y \in \mathcal{S}_*$, если для некоторой невырожденной матрицы $C \in \mathcal{C}^n$ имеет место представление $y = Cx$.

Лемма 1. *Для каждого функционала* (2.1) *и подобных векторов $x, y \in \mathcal{S}_*$ справедливо равенство*

$$\omega^\alpha(x) = \omega^\alpha(y). \tag{5.1}$$

Доказательство леммы (см. [5]). Пусть вектор-функции $x, y \in \mathcal{S}_*$ подобны. Тогда для некоторой невырожденной матрицы $C \in \mathcal{C}^n$ выполнено равенство $y = Cx$. Далее, при любом $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ имеем

$$\hat{\nu}_\bullet^\alpha(y) \equiv \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \varlimsup_{t\to\infty} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(y, m, t) = \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \varlimsup_{t\to\infty} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(Cx, m, t) =$$

$$= \inf_{(C^T m) \in \mathbb{R}_*^n} \varlimsup_{t\to\infty} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x, C^T m, t) = \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \varlimsup_{t\to\infty} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x, m, t) = \hat{\nu}_\bullet^\alpha(x).$$

Для остальных показателей колеблемости равенство (5.1) доказывается аналогично. □

Определение 6 (см. [8]). Под *вещественным аналогом жордановой матрицы* будем понимать клеточно-диагональную матрицу с клетками вида

$$J_{\lambda,s} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^s, \; J_{\alpha,\beta,p} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha & 0 & 1 & \ldots & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & \alpha & \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & -\beta & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & -\beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^p,$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $s, j \in \mathbb{N}$, $p = 2j$; при этом клетки первого вида будем называть *одиночными*, а второго — *парными*.

§ 6. Доказательство основных результатов

Доказательство теорем 1–3 разобьем на пункты.

1. Как известно [8], матрица $A \in \mathcal{C}^n$ подобна некоторому вещественному аналогу жордановой матрицы, при переходе к которому каждое решение системы A заменяется подобной вектор-функцией, отчего значения рассматриваемых показателей колеблемости не изменится (лемма 1). Поэтому матрицу A изначально будем считать вещественным аналогом жордановой матрицы.

2. При $n=1$ сформулированные теоремы, очевидно, верны, поскольку любое решение $x\in\mathcal{S}_*(A)$ любого одномерного уравнения $A\in\mathcal{C}^1$ в нуль не обращается на $\mathbb{R}^+$.

3. Пусть теперь $n\geq 2$. Упорядочим собственные значения $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ матрицы A по нестрогому убыванию модулей их мнимых частей (заметим, что в формулировке теоремы 3 собственные значения упорядочены в обратном порядке) и построим действительную фундаментальную систему решений

$$x^1=\begin{pmatrix}x_{11}\\x_{21}\\\vdots\\x_{n1}\end{pmatrix},\quad x^2=\begin{pmatrix}x_{12}\\x_{22}\\\vdots\\x_{n2}\end{pmatrix},\quad\ldots,\quad x^n=\begin{pmatrix}x_{1n}\\x_{2n}\\\vdots\\x_{nn}\end{pmatrix}\tag{6.1}$$

системы $A\in\mathcal{C}^n$ по нескольким подсистемам, каждая из которых соответствует своей клетке матрицы A:

а) каждой одиночной клетке $J_{\lambda_k,s}$ порядка s, отвечающей собственному значению $\lambda_k\in\mathbb{R}$, поставим в соответствие подсистему из s решений

$$x^k(t)=e^{\lambda_k t}h_k,\quad\ldots,\quad x^{k+s-1}(t)=\frac{t^{s-1}}{(s-1)!}e^{\lambda_k t}h_k+\cdots+te^{\lambda_k t}h_{k+s-2}+e^{\lambda_k t}h_{k+s-1},$$

где j-ая компонента каждого вектора h_j из этой подсистемы равна единице, а все остальные равны нулю;

б) каждой парной клетке $J_{\alpha,\beta,p}$ порядка $p=2s$, отвечающей собственному значению $\lambda_k=\alpha+i\beta$, соответствует подсистема решений $x^k,x^{k+1},\ldots,x^{k+2s-1}$

$$\begin{pmatrix}x_{1k}\\\vdots\\x_{k-1k}\\x_{kk}\\x_{k+1k}\\x_{k+2k}\\\vdots\\x_{nk}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\e^{\alpha t}\cos\beta t\\-e^{\alpha t}\sin\beta t\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\qquad\begin{pmatrix}x_{1k+1}\\\vdots\\x_{k-1k+1}\\x_{kk+1}\\x_{k+1k+1}\\x_{k+2k+1}\\\vdots\\x_{nk+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\e^{\alpha t}\sin\beta t\\e^{\alpha t}\cos\beta t\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}x_{1k+2}\\\vdots\\x_{kk+2}\\x_{k+1k+2}\\x_{k+2k+2}\\x_{k+3k+2}\\\vdots\\x_{nk+2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\te^{\alpha t}\cos\beta t\\-te^{\alpha t}\sin\beta t\\e^{\alpha t}\cos\beta t\\-e^{\alpha t}\sin\beta t\\\vdots\\0\end{pmatrix},\qquad\begin{pmatrix}x_{1k+3}\\\vdots\\x_{kk+3}\\x_{k+1k+3}\\x_{k+2k+3}\\x_{k+3k+3}\\\vdots\\x_{nk+3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\te^{\alpha t}\sin\beta t\\te^{\alpha t}\cos\beta t\\e^{\alpha t}\sin\beta t\\e^{\alpha t}\cos\beta t\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad\ldots,$$

$$\begin{pmatrix} x_{1k+2s-2} \\ \vdots \\ x_{kk+2s-2} \\ x_{k+1k+2s-2} \\ \vdots \\ x_{k+2s-4k+2s-2} \\ x_{k+2s-3k+2s-2} \\ x_{k+2s-2k+2s-2} \\ x_{k+2s-1k+2s-2} \\ \vdots \\ x_{nk+2s-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \frac{t^{s-1}}{(s-1)!}e^{\alpha t}\cos\beta t \\ -\frac{t^{s-1}}{(s-1)!}e^{\alpha t}\sin\beta t \\ \vdots \\ te^{\alpha t}\cos\beta t \\ -te^{\alpha t}\sin\beta t \\ e^{\alpha t}\cos\beta t \\ -e^{\alpha t}\sin\beta t \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{1k+2s-1} \\ \vdots \\ x_{kk+2s-1} \\ x_{k+1k+2s-1} \\ \vdots \\ x_{k+2s-4k+2s-1} \\ x_{k+2s-3k+2s-1} \\ x_{k+2s-2k+2s-1} \\ x_{k+2s-1k+2s-1} \\ \vdots \\ x_{nk+2s-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \frac{t^{s-1}}{(s-1)!}e^{\alpha t}\sin\beta t \\ \frac{t^{s-1}}{(s-1)!}e^{\alpha t}\cos\beta t \\ \vdots \\ te^{\alpha t}\sin\beta t \\ te^{\alpha t}\cos\beta t \\ e^{\alpha t}\sin\beta t \\ e^{\alpha t}\cos\beta t \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix};$$

в) собрав решения всех таких подсистем, получим общую упорядоченную фундаментальную систему решений (6.1);

Следовательно, общее решение системы A принимает вид

$$x = c_1x^1(t) + c_2x^2(t) + \cdots + c_nx^n(t), \tag{6.2}$$

где $c_1,\ c_2, \ldots, c_n$ — произвольные постоянные.

4. При $n = 2$ в зависимости от собственных значений матрицы A для вида фундаментальной системы решений могут представиться четыре случая:

а)

$$x^1 = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2;$$

б)

$$x^1 = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{\lambda t} \end{pmatrix}, \quad \lambda = \lambda_1 = \lambda_2;$$

в)

$$x^1 = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^2 = \begin{pmatrix} te^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} \end{pmatrix}, \quad \lambda = \lambda_1 = \lambda_2;$$

г)

$$x^1 = \begin{pmatrix} e^{\alpha t}\cos\beta t \\ -e^{\alpha t}\sin\beta t \end{pmatrix}, \quad x^2 = \begin{pmatrix} e^{\alpha t}\sin\beta t \\ e^{\alpha t}\cos\beta t \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = \alpha + i\beta,\ \lambda_2 = \alpha - i\beta.$$

В первых трех случаях для решения вида $x = c_1x^1(t) + c_2x^2(t)$ выбираем вектор $m_1 = (0, 1)$, если $c_2 \neq 0$, и вектор $m_2 = (1, 0)$, если $c_2 = 0$. Каждый из этих случаев приводит к цепочке равенств

$$\nu_\bullet^-(x) = \nu_\circ^-(x) = \nu_\bullet^\sim(x) = \nu_\circ^\sim(x) = \nu_\bullet^0(x) = \nu_\circ^0(x) = \nu_\bullet^+(x) = \nu_\circ^+(x) = \nu_\bullet^*(x) = \nu_\circ^*(x) = 0,$$

из которой при любом $\omega^- = \nu_\bullet^-,\ \nu_\circ^-$ получим $\omega_1^-(A) = \omega_2^-(A) = 0$.

В случае г) для любого решения $x \in \mathcal{S}_*(A)$ и вектора $m \in \mathbb{R}^2_*$ имеет место представление

$$\langle x(\tau), m\rangle = ae^{\alpha t}\sin(\beta\tau + \tau_0), \quad a \neq 0,$$

где τ_0 — вспомогательный угол. Следовательно, имеет место

$$\nu_\bullet^-(x) = \nu_\circ^-(x) = \nu_\bullet^\sim(x) = \nu_\circ^\sim(x) = \nu_\bullet^0(x) = \nu_\circ^0(x) = \nu_\bullet^+(x) = \nu_\circ^+(x) = \nu_\bullet^*(x) = \nu_\circ^*(x) = \beta,$$

откуда при каждом $\omega^- = \nu_\bullet^-, \nu_\circ^-$ находим $\omega_1^-(A) = \omega_2^-(A) = \beta$.

В случае $n = 2$ справедливость теорем 1–3 установлена.

5. Далее, рассмотрим случай $n > 2$. Возьмем произвольное решение

$$x = c_q x^q(t) + c_{q+1} x^{q+1}(t) + \ldots + c_r x^r(t), \quad c_r \neq 0, \quad 1 \leq q \leq r \leq n, \tag{6.3}$$

системы $A \in \mathcal{C}^n$.

а) Пусть $\lambda_r \in \mathbb{R}$. Тогда для вектора $m_3 = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ с нулевыми компонентами кроме r-го и выбранного решения x имеем $\langle x(\tau), m_3 \rangle = c_r e^{\lambda_r \tau}$, откуда получим

$$\nu_\bullet^\sim(x) = \nu_\circ^\sim(x) = \nu_\bullet^0(x) = \nu_\circ^0(x) = \nu_\bullet^+(x) = \nu_\circ^+(x) = \nu_\bullet^*(x) = \nu_\circ^*(x) = 0.$$

б) Пусть $\lambda_r \notin \mathbb{R}$. Тогда для вектора m_3 и решения (6.3) будем иметь

$$\langle x(\tau), m_3 \rangle = b e^{\alpha_r \tau} \sin(\beta_r \tau + \tau_1), \quad b \neq 0, \tag{6.4}$$

где $\operatorname{Re} \lambda_r = \alpha_r$, $|\operatorname{Im} \lambda_r| = \beta_r$, τ_1 — вспомогательный угол.

Из равенства (6.4) следует, что

$$\nu_\circ^\sim(y) = \nu_\circ^0(x) = \nu_\circ^+(x) = \nu_\circ^*(x) = \beta_r.$$

Справедливость последней цепочки следует из того, что наименьшая характеристическая частота строгих знаков (то есть величина $\varliminf\limits_{t\to\infty} \frac{\pi}{t} \nu^-(\langle x, m \rangle, t)$) функций вида $\langle x, m \rangle$ при любом ненулевом $m \in \mathbb{R}_*^n$ совпадает с β_r (см. доказательство теоремы IV в работе [1]).

Из определений показателей колеблемости следует, что для рассматриваемого решения (6.3) при любом $\alpha \in \{\sim, 0, +, *\}$ выполняются неравенства как с одной стороны

$$\hat{\nu}_\bullet^\alpha(x) \geq \check{\nu}_\bullet^\alpha(x) \geq \check{\nu}_\circ^\alpha(x) = \beta_r,$$

так и с другой

$$\hat{\nu}_\bullet^\alpha(x) \equiv \inf_{m \in \mathbb{R}^n} \varlimsup_{t\to\infty} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(x, m, t) \leq \varlimsup_{t\to\infty} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(x, m_3, t) = \hat{\nu}_\circ^\alpha(x) = \beta_r,$$

которые приводят к равенствам

$$\nu_\bullet^\sim(x) = \nu_\bullet^0(x) = \nu_\bullet^+(x) = \nu_\bullet^*(x) = \beta_r.$$

6. Если матрица A имеет хотя бы одно действительное собственное значение, то для вектора $m_4 = (0, \ldots, 0, 1)$ и решения (6.3) будем иметь представление $\langle x(\tau), m_4 \rangle = c_n e^{\lambda_n t}$. Откуда при любом c_n следует справедливость равенств $\nu_\bullet^-(x) = \nu_\circ^-(x) = 0$, влекущие за собой при каждом $\omega^- = \nu_\bullet^-, \nu_\circ^-$ равенства

$$\omega_{\bar{j}}^-(A) = \omega_{\underline{j}}^-(A) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

7. Пусть теперь матрица A не имеет действительных собственных значений. Представим множество всех решений системы $A \in \mathcal{C}^n$ в виде

$$\mathcal{S}(A) = L^{n-2}(A) \oplus L^2(A),$$

где $L^{n-2}(A) \equiv \operatorname{span}\{x^1, x^2, \ldots, x^{n-2}\}, \quad L^2(A) \equiv \operatorname{span}\{x^{n-1}, x^n\}$.

Для каждого решения $x \in L^{n-2}(A)$ скалярное произведение $\langle x(\tau), m_4 \rangle$ тождественно равно нулю. Следовательно, выполнены равенства

$$\nu_\bullet^-(x) = \nu_\circ^-(x) = 0, \tag{6.5}$$

из которых, так как $\dim L^{n-2}(A) = n-2$, при любом $\omega^- = \nu_\bullet^-$, $\nu_\circ^-$ вытекает

$$\omega_1^-(A) = \omega_{\overline{2}}^-(A) = \omega_{\underline{2}}^-(A) = \ldots = \omega_{\overline{n-2}}^-(A) = \omega_{\underline{n-2}}^-(A) = 0.$$

а) Если в решении (6.2) все коэффициенты отличны от нуля или ровно один из коэффициентов равен нулю, то тождество $\langle x(\tau), m\rangle \equiv 0$ возможно лишь при нулевом векторе $m = 0$. Поэтому для указанных решений $x \in \mathcal{S}_*(A)$ соблюдаются равенства (см. пункт 5. б) настоящего доказательства)

$$\nu_\bullet^-(x) = \nu_\circ^-(x) = \beta_n, \tag{6.6}$$

поскольку для них справедливо представление

$$\langle x(\tau), m_4\rangle = ce^{\alpha_n\tau}\sin(\beta_n\tau + \tau_2), \quad c \neq 0 \tag{6.7}$$

где $\operatorname{Re}\lambda_n = \operatorname{Re}\lambda_{n-1} = \alpha_n$, $|\operatorname{Im}\lambda_n| = |\operatorname{Im}\lambda_{n-1}| = \beta_n$, τ_2 — вспомогательный угол.

Следовательно, согласно определению 3, при любом $\omega^- = \nu_\bullet^-$, $\nu_\circ^-$ имеем

$$\omega_{\overline{n-1}}^-(A) = \omega_n^-(A) = \beta_n.$$

б) Введем следующие обозначения

$$y^1 = x^1 + x^3 + \cdots + x^{n-1}, \quad y^2 = x^2 + x^4 + \cdots + x^n.$$

Очевидно, что решения $y^1, y^2 \in \mathcal{S}_*(A)$ линейно независимы. Через V обозначим элемент $\operatorname{span}\{y^1, y^2\}$ множества $G_*^2(A)$. Для вектора m_4 и любого решения $x \in V$ выполняется равенство (6.7). Далее, повторяя рассуждения, проведенные в пункте 7. а) настоящего доказательства, получим равенство (6.6) для любого $x \in V$. Следовательно, при любом $\omega^- = \nu_\bullet^-$, $\nu_\circ^-$ имеем

$$\omega_{\underline{n-1}}^-(A) \equiv \sup_{L \in G_*^2(A)} \inf_{x \in L} \omega^-(x) = \beta_n.$$

8. Для случая, рассматриваемого в пункте 6 настоящего доказательства, все три теоремы доказаны для показателей колеблемости строгих знаков. В пункте 7 найдены два возможных значения показателей колеблемости строгих знаков. Поэтому для завершения доказательства теорем 1–3 в случае 7 остается убедиться, что для любого $x \in \mathcal{S}_*(A)$ значения $\nu_\bullet^-(x)$, $\nu_\circ^-(x)$ равны между собой и, в зависимости от решения, равны либо 0, либо β_n.

В самом деле, если у решения $x \in \mathcal{S}_*(A)$ все компоненты отличны от нуля, то повторяются рассуждения проведенные в пункте 7. а) настоящего доказательства, а значит, выполняются равенства (6.6)

Если же у решения x имеется нулевая компонента на r-ом месте, то скалярное произведение $\langle x(\tau), m_3\rangle$ тождественно равно нулю и, следовательно, имеет место равенства (6.5).

Теоремы 1–3 полностью доказаны. □

Замечание 2. Нестрогое неравенство в (4.1) автоматически следует из замечания 1. Из доказательства теоремы 1 видно, в каких случаях это неравенство превращается в равенство или будет строгим.

Автор выражает глубокую благодарность профессору И. Н. Сергееву за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сергеев И.Н. Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения // Труды Семинара им. И. Г. Петровского. 2006. Вып. 25. С. 249–294. http://mi.mathnet.ru/tsp65
2. Сергеев И.Н. Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Математический сборник. 2013. Т. 204. № 1. С. 119–138. https://doi.org/10.4213/sm7928
3. Сергеев И.Н. Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы // Известия РАН. Серия математическая. 2012. Т. 76. № 1. С. 149–172. https://doi.org/10.4213/im5035
4. Сергеев И.Н. Полный набор соотношений между показателями колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2015. Вып. 2 (46). С. 171–183. http://mi.mathnet.ru/iimi318
5. Бурлаков Д.С., Цой С.В. Совпадение полной и векторной частот решений линейной автономной системы // Труды Семинара им. И. Г. Петровского. 2014. Вып. 30. С. 75–93. http://mi.mathnet.ru/tsp71
6. Сташ А.Х. Свойства полных и векторных частот нестрогих знаков и корней решений линейных однородных автономных дифференциальных уравнений // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 4: Естественно–математические и технические науки. 2015. Вып. 3 (166). С. 18–22. https://elibrary.ru/item.asp?id=25413827
7. Сташ А.Х. Свойства полных и векторных частот знака решений линейных автономных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50. № 10. С. 1418–1422.
8. Тыртышников Е.Е. Матричный анализ и линейная алгебра. М.: Физматлит, 2007. 480 с.

Поступила в редакцию 20.08.2019

Сташ Айдамир Хазретович, к. ф.-м. н., доцент, декан факультета математики и компьютерных наук, Адыгейский государственный университет, 385000, Россия, г. Майкоп, ул. Первомайская, 208.
E-mail: aidamir.stash@gmail.com

Цитирование: А. Х. Сташ. Свойства показателей колеблемости решений линейных автономных дифференциальных систем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2019. Т. 29. Вып. 4. С. 558–568.

MATHEMATICS 2019. Vol. 29. Issue 4. Pp. 558–568.

A. Kh. Stash

Properties of exponents of oscillation of linear autonomous differential system solutions

Keywords: differential equations, linear systems, oscillation, number of zeros, exponents of oscillation, Lyapunov exponents.

MSC2010: 34C10

DOI: 10.20537/vm190407

In this paper, we study various types of exponents of oscillation (upper or lower, strong or weak) of zeros, roots, hyperroots, strict and non-strict signs of non-zero solutions of linear homogeneous autonomous differential systems on the positive semi-axis. On the set of non-zero solutions of autonomous systems the relations between these exponents of oscillation are established. The spectra of the exponents of autonomous systems' oscillation are fully studied. It turned out that they directly depend on the roots of the corresponding characteristic polynomial of the system. As a consequence, spectra of all exponents of oscillation of autonomous systems with symmetric matrix are found. It is proved that they consist of a single zero value. In addition, a full description of the main values of the exponents of oscillation of such systems is given. These values for the exponents of oscillation of non-strict signs, roots and hyperroots coincided with the set of modules of imaginary parts of the system matrix's eigenvalues, and the exponents of oscillation of strict signs can consist of zero and the least, in absolute magnitude, imaginary part of the complex roots of the corresponding characteristic polynomial.

REFERENCES

1. Sergeev I.N. Definition and properties of characteristic frequencies of a linear equation, *Journal of Mathematical Sciences*, 2006, vol. 135, no. 1, pp. 2764–2793.
https://doi.org/10.1007/s10958-006-0142-6
2. Sergeev I.N. The remarkable agreement between the oscillation and wandering characteristics of solutions of differential systems, *Sbornik: Mathematics*, 2013, vol. 204, no. 1, pp. 114–132.
https://doi.org/10.1070/SM2013v204n01ABEH004293
3. Sergeev I.N. Oscillation and wandering characteristics of solutions of a linear differential systems, *Izvestiya: Mathematics*, 2012, vol. 76, no. 1, pp. 139–162.
https://doi.org/10.1070/IM2012v076n01ABEH002578
4. Sergeev I.N. The complete set of relations between the oscillation, rotation and wandering indicators of solutions of differential systems, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2015, issue 2 (46), pp. 171–183 (in Russian).
http://mi.mathnet.ru/eng/iimi318
5. Burlakov D.S., Tsoii S.V. Coincidence of complete and vector frequencies of solutions of a linear autonomous system, *Journal of Mathematical Sciences*, 2015, vol. 210, no. 2, pp. 155–167.
https://doi.org/10.1007/s10958-015-2554-7
6. Stash A.Kh. Properties of full and vector frequencies of lax signs and roots of solutions of linear homogenous autonomous differential equations, *Vestnik Adygeiskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya 4: Estestvenno-Matematicheskie i Tekhnicheskie Nauki*, 2015, issue 3 (166), pp. 18–22 (in Russian).
7. Stash A.Kh. Properties of complete and vector sign frequencies of solutions of linear autonomous differential equations, *Differential Equations*, 2014, vol. 50, no. 10, pp. 1418–1422.
https://doi.org/10.1134/S0012266114100206
8. Tyrtyshnikov E.E. *Matrichnyi analiz i lineinaya algebra* (Matrix analysis and linear algebra), Moscow: Fizmatlit, 2007.

Received 20.08.2019

Stash Aidamir Khazretovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Dean of the Faculty of Mathematics and Computer Science, Adyghe State University, ul. Pervomaiskaya, 208, Maikop, 385000, Russia.
E-mail: aidamir.stash@gmail.com

Citation: A. Kh. Stash. Properties of exponents of oscillation of linear autonomous differential system solutions, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, issue 4, pp. 558–568.