ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

МАТЕМАТИКА 2019. Т. 29. Вып. 4. С. 532–547.

УДК 517.912, 514.1

© *В. А. Кыров*

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ВЛОЖЕНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ГЕОМЕТРИЙ ГЕЛЬМГОЛЬЦЕВА ТИПА

Для современной геометрии важное значение имеет изучение геометрий максимальной подвижности. Максимальная подвижность для n-мерной геометрии, задаваемой функцией f пары точек означает существование $n(n+1)/2$-мерной группы преобразований, оставляющей эту функцию инвариантной. Известно много геометрий максимальной подвижности (геометрия Евклида, симплектическая, Лобачевского и т. д.), но полной классификации таких геометрий нет. В данной статье методом вложения решается одна из таких классификационных задач. Суть этого метода состоит в следующем: по известной функции пары точек g трехмерной геометрии находим все невырожденные функции f пары точек четырехмерных геометрий, являющиеся инвариантами группы Ли преобразований размерности 10. В этой статье g — это невырожденные функции пары точек двух гельмгольцевых трехмерных геометрий:

$$g = 2\ln(x_i - x_j) + \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} + 2z_i + 2z_j,$$

$$\ln[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2] + 2\gamma \operatorname{arctg}\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} + 2z_i + 2z_j.$$

Данные геометрии локально максимально подвижны, то есть их группы движений шестимерны. Задача, решаемая в этой работе, сводится к решению аналитическими методами специальных функциональных уравнений, решения которых ищутся в виде рядов Тейлора. Для перебора различных вариантов применяется пакет математических программ Maple 15. В результате получаются только вырожденные функции пары точек.

Ключевые слова: функциональное уравнение, функция пары точек, группа движений, геометрия максимальной подвижности, гельмгольцевы геометрии.

DOI: 10.20537/vm190405

Введение

Известны две трехмерные геометрии гельмгольцева типа, задаваемые функциями пары точек:

$$g = 2\ln(x_i - x_j) + \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} + 2z_i + 2z_j; \tag{0.1}$$

$$g = \ln[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2] + 2\gamma \operatorname{arctg}\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} + 2z_i + 2z_j; \tag{0.2}$$

где $\gamma = \text{const} > 0$, (x_i, y_i, z_i) — координаты точки i, а (x_j, y_j, z_j) — координаты точки j. Геометрия с функцией (0.1) называется — дуальногельмгольцевой, с функцией (0.2) — собственно гельмгольцевой.

Эти трехмерные геометрии впервые появились при классификации феноменологически симметричных трехмерных геометрий [1] и являются геометриями локальной максимальной подвижности, то есть группы их движений шестипараметрические [1–3]. Классификация трехмерных геометрий локальной максимальной подвижности (феноменологически симметричные геометрии) была получена в 80-е годы 20 века В. Х. Левом [1] и дополнена В. А. Кыровым [4]. Также была построена классификация двумерных геометрий локальной максимальной подвижности (феноменологически симметричные геометрии) [5], [2, с. 54]. Следует отметить, что для современной математики важную роль играет изучение трехмерных геометрий максимальной подвижности. Одна из таких классификаций была построена Тёрстоном [6, 7]. Эта классификация содержит все трехмерные максимально односвязные геометрии, допускающие компактные фактор-геометрии. Отметим, что часть геометрий из классификации Лева [1] содержится в классификации Тёрстона [6, 7] (трехмерные геометрии с постоянной секционной кривизной). Классификация Лева, кроме геометрий постоянной секционной кривизны, содержит псевдоевклидову геометрию, симплициальные геометрии, геометрии гельмгольцева типа.

В данной статье решается задача, являющаяся частью глобальной задачи вложения для геометрий локальной максимальной подвижности. Суть задачи вложения состоит в поиске всех четырехмерных геометрий локальной максимальной подвижности, то есть в нахождении четырехмерных геометрий, задаваемых функциями пары точек, являющимися двухточечными инвариантами групп движений размерности 10, вида $f = \chi(g, w_i, w_j)$, где g — функция пары точек, задающая известную трехмерную геометрию локальной максимальной подвижности, i и j — точки многообразия. Вместо g можно взять, например, метрику евклидовой или симплектической геометрий (эта задача решена автором) [8, 9], а также функцию пары точек трехмерных симплициальных геометрий или двумерных геометрий гельмгольцева типа [4, 10]. В данной работе вместо g берется либо функция пары точек трехмерной дуальногельмгольцевой геометрии (0.1), либо функция пары точек трехмерной собственно гельмгольцевой геометрии (0.2). Такая задача не имеет положительного решения в классе геометрий локальной максимальной подвижности. Результатами вложения являются четырехмерные геометрии с вырожденными функциями пары точек, которые не являются геометриями максимальной подвижности.

Поставленная задача сводится к аналитическому решению специальных геометрических функциональных уравнений. В данной работе эти функциональные уравнения принимают следующий вид:

для функции пары точек (0.1):

$$[(2(x_i - x_j) - (y_i - y_j))(X_1(i) - X_1(j)) + (x_i - x_j)(X_2(i) - X_2(j)) + \\ + 2(x_i - x_j)^2(X_3(i) + X_3(j))]\frac{\partial g}{\partial \theta} + (x_i - x_j)^2\left(X_4(i)\frac{\partial \chi}{\partial w_i} + X_4(j)\frac{\partial \chi}{\partial w_j}\right) = 0,$$

для функции пары точек (0.2):

$$2[((x_i - x_j) - \gamma(y_i - y_j))(X_1(i) - X_1(j)) + ((y_i - y_j) + \gamma(x_i - x_j))(X_2(i) - X_2(j)) + \\ + ((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2)(X_3(i) + X_3(j))]\frac{\partial \chi}{\partial g} + \\ + ((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2)\left(X_4(i)\frac{\partial \chi}{\partial w_i} + X_4(j)\frac{\partial \chi}{\partial w_j}\right) = 0,$$

где X_1, X_2, X_3, X_4, χ — неизвестные. Схожие функциональные уравнения рассматриваются в работах [5, 11, 12]. В работе [13] изучается связь одномерной геометрии локальной максимальной подвижности с алгебраическими системами, которые получаются из решения особых функциональных уравнений вида

$$\varphi(\varphi(x, z), \varphi(y, z)) = \varphi(x, y),$$

где φ — неизвестная функция. Отметим, что задача классификации геометрий локальной максимальной подвижности выросла из теории физических структур. Другой важной задачей этой теории является классификация и изучение феноменологически симметричных геометрий на двух множествах, которая применяет методы, также сводящиеся к решению специальных функциональных уравнений [14]. В последние годы активно изучается связь геометрий на двух множествах с алгебраическими системами, в частности, с обобщенными точно транзитивными группами и псевдоматричными группами [15, 16]. Изучение этой связи сводится к исследованию особого функционального уравнения, возникающего в алгебраических системах

$$\phi(x\phi(y^{-1}))y = \phi(\phi(x)\phi(y)),$$

дополненного условием

$$\phi(\phi(x)) = x,$$

где ϕ — неизвестная функция.

§ 1. Точные определения и основные результаты

Рассмотрим четырехмерное аналитическое многообразие M, которое локально диффеоморфно прямому произведению трехмерного аналитического многообразия N и одномерного аналитического многообразия L. Локальный диффеоморфизм осуществляет аналитическое отображение $h\colon M \to N \times L$. Пусть $\pi_1\colon N \times L \to N$ и $\pi_2\colon N \times L \to L$ — проекции. Рассмотрим функции $g\colon N \times N \to R$, с открытой и плотной областью определения S_g в N^2, и $\chi\colon R \times L \times L \to R$. Определим проекции $p_1\colon M \times M \to M$ и $p_2\colon M \times M \to M$, которые на точках действуют так: $p_1\colon \langle i, j\rangle \mapsto i$ и $p_2\colon \langle i, j\rangle \mapsto j$, где $\langle i, j\rangle$ — произвольная точка в $M \times M$. Построим функцию $f\colon M \times M \to R$ по следующей формуле:

$$f = \chi(g(\pi_1(h(p_1)), \pi_1(h(p_2))), \pi_2(h(p_1)), \pi_2(h(p_2))),$$

область определения S_f которой открыта и плотна в M^2. Для произвольных $i, j \in M$ таких, что $\langle i, j\rangle \in S_f$ имеем

$$f(i, j) = \chi(g(\pi_1(h(p_1(\langle i, j\rangle))), \pi_1(h(p_2(\langle i, j\rangle)))), \pi_2(h(p_1(\langle i, j\rangle))), \pi_2(h(p_2(\langle i, j\rangle)))). \quad (1.1)$$

Для произвольной точки из M рассмотрим координатную окрестность $U \subset M$, в которой h является диффеоморфизмом и для любых точек $i, j \in U$, $\langle i, j\rangle \in S_f$, существуют окрестности $U(i) \subset U$, $U(j) \subset U$ такие, что $\langle i', j'\rangle \in S_f$, $\forall i' \in U(i)$, $\forall j' \in U(j)$. Из выше сказанного имеем диффеоморфизм окрестностей $h\colon U \to V \times W$, где V, W — некоторые координатные окрестности в N и L соответственно. Координаты в окрестности V обозначим через (x, y, z), а координату в окрестности W — через (w). Тогда в локальных координатах функция (1.1) принимает следующий вид:

$$f = f(i, j) = \chi(\theta, w_i, w_j), \quad (1.2)$$

где $g(\pi_1(h(i)), \pi_1(h(j))) = \theta = \theta(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j)$ — либо (0.1), либо (0.2), $\pi_2(h(i)) = w_i$, $\pi_2(h(j)) = w_j$.

Пусть выполняются аксиомы:

Аксиома аналитичности. Функция $\chi\colon R \times L \times L \to R$ аналитическая во всех точках области определения.

Аксиома невырожденности. Для функции (1.2) в произвольной точке окрестности $U(i) \times U(j) \subset M^2$ справедливы неравенства:

$$\frac{\partial \chi}{\partial \theta} \neq 0, \qquad \frac{\partial \chi}{\partial w_i} \neq 0, \qquad \frac{\partial \chi}{\partial w_j} \neq 0.$$

Пусть группа Ли G действует эффективно и аналитично в $U \subset M$ [3]. Это означает, что задано аналитическое инъективное отображение (эффективное действие)

$$\lambda \colon U \times G \to U',$$

где $U' \subset M$ — открытая область, причем выполняются свойства:

(1) $\lambda(i, e) = i$, $e \in G$ — единица, $i \in U$;

(2) $\lambda(\lambda(i, a), b) = \lambda(i, ab)$, для любых $a, b \in G$ и $i \in U$;

(3) Для любого $i \in U$ $\lambda(i, a) = i$, только если $a = e$.

Действие λ_a, определяемое произвольным элементом $a \in G$, называется *движением*, если для любых точек $i, j \in U$ таких, что $\langle i, j\rangle \in S_f$, $\langle \lambda_a(i), \lambda_a(j)\rangle \in S_f$, выполняется равенство

$$f(\lambda_a(i), \lambda_a(j)) = f(i, j).$$

Действия группы G можно определить в окрестностях $U(i)$ и $U(j)$ точек i и j, причем если эти окрестности пересекаются, то действия в пересечении совпадают. Множество всех движений образует группу движений.

Аксиома максимальной подвижности. Размерность группы Ли G равна 10.

Алгебра Ли действия группы Ли G состоит из операторов

$$X = X_1\partial_x + X_2\partial_y + X_3\partial_z + X_4\partial_w, \tag{1.3}$$

где $X_\alpha = X_\alpha(x, y, z, w)$ — аналитическая функция в U, $\alpha = 1, 2, 3, 4$ [3]. Через операторы (1.3) записывается условие локальной инвариантности [3], [17, с. 229]:

$$X(i)f(i, j) + X(j)f(i, j) = 0, \tag{1.4}$$

которое выполняется в окрестностях $U(i) \subset U$ и $U(j) \subset U$ точек i и j.

Ниже ищем все функции вида (1.2), являющиеся двухточечными инвариантами десятипараметрической группы движений, причем θ — либо (0.1), либо (0.2).

Пусть $k \in U \subset M$ — начало некоторой системы координат в U, в которой эта точка имеет нулевые координаты $(0, 0, 0, 0)$. В такой системе координат справедливы разложения в ряд Тейлора для компонент оператора (1.3) и функции (1.2) [18, с. 365]:

$$\begin{cases} X_1 = X_1(z, w) + D_1(X_1)(z, w)x + D_2(X_1)(z, w)y + \\ + \frac{1}{2}D_{1,1}(X_1)(z, w)x^2 + \frac{1}{2}D_{2,2}(X_1)(z, w)y^2 + D_{1,2}(X_1)(z, w)xy + \cdots, \\ X_2 = X_2(z, w) + D_1(X_2)(z, w)x + D_2(X_2)(z, w)y + \\ + \frac{1}{2}D_{1,1}(X_2)(z, w)x^2 + \frac{1}{2}D_{2,2}(X_2)(z, w)y^2 + D_{1,2}(X_2)(z, w)xy + \cdots, \\ X_3 = X_3(z, w) + D_1(X_3)(z, w)x + D_2(X_3)(z, w)y + \\ + \frac{1}{2}D_{1,1}(X_3)(z, w)x^2 + \frac{1}{2}D_{2,2}(X_3)(z, w)y^2 + D_{1,2}(X_3)(z, w)xy + \cdots, \\ X_4 = X_4(z, w) + D_1(X_4)(z, w)x + D_2(X_4)(z, w)y + \\ + \frac{1}{2}D_{1,1}(X_4)(z, w)x^2 + \frac{1}{2}D_{2,2}(X_4)(z, w)y^2 + D_{1,2}(X_4)(z, w)xy + \cdots, \end{cases} \tag{1.5}$$

$$f(\theta, w_i, w_j) = f(w_i, w_j) + D_1(f)(w_i, w_j)\theta + \frac{1}{2}D_{1,1}(f)(w_i, w_j)\theta^2 + \cdots, \tag{1.6}$$

где, например,

$$X_1(z,w)=X_1(0,0,z,w), \qquad D_1(X_1)(z,w)=\left.\frac{\partial X_1(x,y,z,w)}{\partial x}\right|_{x=y=0},$$
$$D_2(X_1)(z,w)=\left.\frac{\partial X_1(x,y,z,w)}{\partial y}\right|_{x=y=0}, \qquad D_{1,2}(X_2)(z,w)=\left.\frac{\partial^2 X_2(x,y,z,w)}{\partial x\partial y}\right|_{x=y=0},$$
$$f(w_i,w_j)=\chi(0,w_i,w_j), \qquad D_1(f)(w_i,w_j)=\left.\frac{\partial \chi(\theta,w_i,w_j)}{\partial \theta}\right|_{\theta=0}.$$

Основной результат работы сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1. *Рассмотрим произвольную точку $k\in M$ и ее координатную окрестность U. Возьмем также две точки $i,j\in U$ с окрестностями $U(i)$ и $U(j)$ такие, что*

$$U(i)\cup U(j)\subset U,\ \textit{причем}\ \langle i,j\rangle,\langle i',j'\rangle\in S_f,\ \ \forall i'\in U(i),\ \ \forall j'\in U(j).$$

Тогда функция пары точек (1.2) *в аналитическом многообразии M, где θ — либо* (0.1), *либо* (0.2), *вырождена, то есть не задает геометрию локальной максимальной подвижности.*

Как сказано выше, функция (1.2) является двухточечным инвариантом действия десятимерной группы Ли G, поэтому условие локальной инвариантности (1.4) в явном виде записывается так:

если θ имеет вид (0.1):

$$\begin{gathered}\big((2u-v)(X_1(i)-X_1(j))+u(X_2(i)-X_2(j))+2u^2(X_3(i)+X_3(j))\big)\frac{\partial\chi}{\partial\theta}+\\+u^2\left(X_4(i)\frac{\partial\chi}{\partial w_i}+X_4(j)\frac{\partial\chi}{\partial w_j}\right)=0;\end{gathered}\tag{1.7}$$

если θ имеет вид (0.2):

$$\begin{gathered}2\big((u-\gamma v)(X_1(i)-X_1(j))+(v+\gamma u)(X_2(i)-X_2(j))+\\+(u^2+v^2)(X_3(i)+X_3(j))\big)\frac{\partial\chi}{\partial\theta}+(u^2+v^2)\left(X_4(i)\frac{\partial\chi}{\partial w_i}+X_4(j)\frac{\partial\chi}{\partial w_j}\right)=0,\end{gathered}\tag{1.8}$$

где X_1, X_2, X_3, X_4 — компоненты оператора (1.3). Здесь и везде ниже введены сокращающие обозначения: $u=x_i-x_j$, $v=y_i-y_j$. Заметим, что выражения (1.7) и (1.8) выполняются тождественно по координатам точек i и j из окрестностей $U(i)$ и $U(j)$.

§ 2. Вспомогательные утверждения

Доказательству теоремы предпошлем несколько вспомогательных утверждений, которые справедливы не только для аналитических функций, но также и для функций класса C^3.

Лемма 1. *В некоторой окрестности $U(i)\times U(j)$ для тождеств* (1.7) *и* (1.8) *выполняются неравенства:*

$$(2u-v)(X_1(i)-X_1(j))+u(X_2(i)-X_2(j))+2u^2(X_3(i)+X_3(j))\neq 0;$$

$$(u-\gamma v)(X_1(i)-X_1(j))+(v+\gamma u)(X_2(i)-X_2(j))+(u^2+v^2)(X_3(i)+X_3(j))\neq 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим сначала, что первое неравенство не выполняется в некоторой окрестности $U(i) \times U(j)$, т. е. справедливо равенство

$$(2u - v)(X_1(i) - X_1(j)) + u(X_2(i) - X_2(j)) + 2u^2(X_3(i) + X_3(j)) = 0. \tag{2.1}$$

Продифференцируем равенство (2.1) дважды: сначала по координате точки i, а затем по координате точки j. Перебирая все варианты, имеем

$$\begin{gathered} 2X'_{1x}(j) + 2X'_{1x}(i) + X'_{2x}(j) + X'_{2x}(i) + 4(X_3(i) + X_3(j)) - 4uX'_{3x}(j) + 4uX'_{3x}(i) = 0, \\ X'_{1y}(j) + X'_{1y}(i) = 0, \qquad 2X'_{1y}(i) + X'_{2y}(i) - X'_{1x}(j) + 4uX'_{3y}(i) = 0, \\ 2X'_{1z}(i) + X'_{2z}(i) - 4uX'_{3z}(i) = 0, \qquad X'_{1z}(i) = 0, \\ 2X'_{1w}(i) + X'_{2w}(i) - 4uX'_{3w}(i) = 0, \qquad X'_{1w}(i) = 0. \end{gathered}$$

Далее в полученном выражении снова дважды дифференцируем: сначала по координате точки i, а затем по координате точки j; перебирая все варианты, имеем

$$\begin{gathered} X''_{3xx} = X''_{3xy} = X''_{3yy} = X''_{3xz} = X''_{3yz} = X''_{3xw} = X''_{3yw} = \\ = X'_{3z} = X'_{1z} = X'_{2z} = X'_{3w} = X'_{1w} = X'_{2w} = 0, \end{gathered}$$

следовательно

$$\begin{gathered} X_3 = ax + by + c, \quad a,\, b,\, c = \mathrm{const}, \\ 2X'_{1x}(j) + 2X'_{1x}(i) + X'_{2x}(j) + X'_{2x}(i) + 4(ax_i + ax_j + by_i + by_j + 2c) = 0, \\ X'_{1y}(j) + X'_{1y}(i) = 0,\ 2X'_{1y}(i) + X'_{2y}(i) - X'_{1x}(j) + 4bu = 0. \end{gathered}$$

Затем разделяем переменные:

$$X'_{1x} = -4bx + d, \quad X'_{2y} = -4bx + d, \quad X'_{2x} = -2d - 4c - 4by - 4ax + 8bx, \quad X'_{1y} = 0,$$

где $d = \mathrm{const}$. Интегрируя последние уравнения и возвращаясь в (2.1), получаем первые три компоненты оператора (1.3):

$$X_1 = -2bx^2 + dx + p, \ \ X_2 = d(y - 2x) - 4cx - 4bxy - 2ax^2 + 4bx^2 + q, \ \ X_3 = ax + by + c,$$

причем $a, b, c, d, p, q = \mathrm{const}$.

В тождестве (1.7) возможно либо $X_4 = 0$, либо $X_4 \neq 0$.

Если $X_4 = 0$, то имеем следующий оператор алгебры Ли группы движений:

$$X = (-2bx^2 + dx + p)\partial_x + (d(y - 2x) - 4cx - 4bxy - 2ax^2 + 4bx^2 + q)\partial_y + (ax + by + c)\partial_z.$$

Придавая постоянным a, b, c, d, p, q значения 0 и 1, получаем шесть базисных операторов, а должно быть десять. Противоречие.

Пусть теперь $X_4 \neq 0$. Тогда решаем уравнение $X_4(i)\dfrac{\partial \chi}{\partial w_i} + X_4(j)\dfrac{\partial \chi}{\partial w_j} = 0$, получаем $X_4 = X_4(w)$. Произвольный оператор алгебры Ли группы движений четырехмерного пространства примет следующий вид:

$$X = (-2bx^2 + dx + p)\partial_x + (d(y - 2x) - 4cx - 4bxy - 2ax^2 + 4bx^2 + q)\partial_y + (ax + by + c)\partial_z + \partial_{\overline{w}},$$

где $\overline{w} = \int dw/X_4(w)$. Придавая постоянным значения 0 и 1, имеем семь базисных операторов, а должно быть десять.

Предположим теперь, что второе неравенство не выполняется в $U(i) \times U(j)$, т. е. справедливо равенство

$$(u - \gamma v)(X_1(i) - X_1(j)) + (v + \gamma u)(X_2(i) - X_2(j)) + (u^2 + v^2)(X_3(i) + X_3(j)) = 0. \quad (2.2)$$

Продифференцируем равенство (2.2) дважды: сначала по координате точки i, а затем по координате точки j; перебирая все варианты, имеем

$$\begin{gathered}
-X'_{1x}(j) - X'_{1x}(i) - \gamma X'_{2x}(j) - \gamma X'_{2x}(i) - 2(X_3(i) + X_3(j)) + 2uX'_{3x}(j) - 2uX'_{3x}(i) = 0, \\
\gamma X'_{1y}(j) + \gamma X'_{1y}(i) - X'_{2y}(j) - X'_{2y}(i) - 2(X_3(i) + X_3(j)) + 2vX'_{3y}(j) - 2vX'_{3y}(i) = 0, \\
-X'_{1y}(j) + \gamma X'_{1x}(i) - \gamma X'_{2y}(j) - X'_{2x}(i) + 2uX'_{3y}(j) - 2vX'_{3x}(i) = 0, \\
X'_{1z}(j) + \gamma X'_{2z}(j) - 2uX'_{3z}(j) = 0, \qquad \gamma X'_{1z}(j) - X'_{2z}(j) + 2vX'_{3z}(j) = 0, \\
2X'_{1w}(j) + \gamma X'_{2w}(j) - 2uX'_{3w}(j) = 0, \qquad \gamma X'_{1w}(j) - X'_{2w}(j) + 2vX'_{3w}(j) = 0.
\end{gathered}$$

Далее в полученном снова дважды дифференцируем: сначала по координате точки i, а затем по координате точки j; в итоге имеем

$$\begin{gathered}
X''_{3xx} = X''_{3xy} = X''_{3yy} = X''_{3xz} = X''_{3yz} = X''_{3xw} = X''_{3yw} = \\
= X'_{3z} = X'_{1z} = X'_{2z} = X'_{3w} = X'_{1w} = X'_{2w} = 0,
\end{gathered}$$

следовательно,

$$\begin{gathered}
X_3 = ax + by + c, \\
-X'_{1x}(j) - X'_{1x}(i) - \gamma X'_{2x}(j) - \gamma X'_{2x}(i) - 2(ax_i + by_i + ax_j + by_j + 2c) = 0, \\
\gamma X'_{1y}(j) + \gamma X'_{1y}(i) - X'_{2y}(j) - X'_{2y}(i) - 2(ax_i + by_i + ax_j + by_j + 2c) = 0, \\
-X'_{1y}(j) + \gamma X'_{1x}(i) - \gamma X'_{2y}(j) - X'_{2x}(i) + 2bx_i - 2ay_i - 2bx_j + 2ay_j = 0.
\end{gathered}$$

Затем разделяем переменные:

$$\begin{gathered}
X'_{1x} + \gamma X'_{2x} = -2ax - 2by - 2c, \qquad \gamma X'_{1y} - X'_{2y} = 2ax + 2by + 2c, \\
\gamma X'_{1x} - X'_{2x} = -2bx + 2ay + d, \qquad X'_{1y} + \gamma X'_{2y} = -2bx + 2ay + d.
\end{gathered}$$

Интегрируя последние уравнения, получаем

$$\begin{gathered}
X_1 + \gamma X_2 = a(y^2 - x^2) - 2bxy - 2cx + dy + p, \\
\gamma X_1 - X_2 = b(y^2 - x^2) + 2axy + 2cy + dx + q,
\end{gathered}$$

причем $a, b, c, d, p, q = \mathrm{const}$. Далее рассуждая так же, как и выше, приходим к алгебре Ли с числом базисных операторов либо 6, либо 7, то есть меньше 10. В результате получается противоречие аксиоме максимальной подвижности. Лемма 1 доказана. □

Лемма 2. *В некоторой окрестности $U(i) \times U(j)$ для тождеств (1.7) и (1.8) справедливо неравенство $X_4 \neq 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство вытекает из леммы 1 и из аксиомы невырожденности. □

Лемма 3. *В некоторой окрестности $U(i) \times U(j)$ функция $X_4(x, y, z, w)$, входящая в тождества (1.7) и (1.8), зависит либо от x, либо от y, т. е.*

$$\left(\frac{\partial X_4(x, y, z, w)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial X_4(x, y, z, w)}{\partial y}\right)^2 \neq 0.$$

Доказательство. Эта лемма сформулирована сразу для двух тождеств. Случаи для всех этих тождеств проверяются аналогично, поэтому подробно мы остановимся на втором случае. Доказательство проводится методом от противного. Полагаем $X_4 = X_4(z, w) \neq 0$.

Тождество (1.8) в окрестности $U(i) \times U(j)$ представим в виде:

$$\begin{gathered}(u-\gamma v)(X_1(i)-X_1(j))+(v+\gamma u)(X_2(i)-X_2(j))+\\ (u^2+v^2)(X_3(i)+X_3(j))=(u^2+v^2)F=\overline{F},\end{gathered} \tag{2.3}$$

где введено сокращающее обозначение

$$F = F(\vartheta, z_i, z_j, w_i, w_j) = -\frac{1}{2}\left(X_4(z_i, w_i)\frac{\partial\chi}{\partial w_i} + X_4(z_j, w_j)\frac{\partial\chi}{\partial w_j}\right)\Big/\frac{\partial\chi}{\partial\theta},$$

причем, как и выше, $u = x_i - x_j$, $v = y_i - y_j$, аргумент θ имеет вид (0.2), $\vartheta = \ln(u^2+v^2) + 2\gamma\mathrm{arctg}\dfrac{v}{u}$; по лемме 1 $F \neq 0$. Продифференцируем равенство (2.3) по переменным x_i, x_j, y_i, y_j:

$$\begin{gathered}X_1(i)-X_1(j)+\gamma(X_2(i)-X_2(j))+(u-\gamma v)X'_{1x}(i)+(v+\gamma u)X'_{2x}(i)+\\ +(u^2+v^2)X'_{3x}(i)+2u(X_3(i)+X_3(j))=\overline{F}'_u,\\ X_1(i)-X_1(j)+\gamma(X_2(i)-X_2(j))+(u-\gamma v)X'_{1x}(j)+(v+\gamma v)X'_{2x}(j)-\\ -(u^2+v^2)X'_{3x}(j)+2u(X_3(i)+X_3(j))=\overline{F}'_u,\\ -\gamma(X_1(i)-X_1(j))+X_2(i)-X_2(j)+(u-\gamma v)X'_{1y}(i)+(v+\gamma u)X'_{2y}(i)+\\ +(u^2+v^2)X'_{3y}(i)+2v(X_3(i)+X_3(j))=\overline{F}'_v,\\ -\gamma(X_1(i)-X_1(j))+X_2(i)-X_2(j)+(u-\gamma v)X'_{1y}(j)+(v+\gamma u)X'_{2y}(j)-\\ -(u^2+v^2)X'_{3y}(j)+2v(X_3(i)+X_3(j))=\overline{F}'_v.\end{gathered}$$

Далее комбинируем первое и второе, а также третье и четвертое равенства:

$$\begin{cases}(u-\gamma v)(X'_{1x}(i)-X'_{1x}(j))+(v+\gamma u)(X'_{2x}(i)-X'_{2x}(j))+\\ \qquad +(u^2+v^2)(X'_{3x}(i)+X'_{3x}(j))=0,\\ (u-\gamma v)(X'_{1y}(i)-X'_{1y}(j))+(v+\gamma u)(X'_{2y}(i)-X'_{2y}(j))+\\ \qquad +(u^2+v^2)(X'_{3y}(i)+X'_{3y}(j))=0.\end{cases} \tag{2.4}$$

Дифференцируя по z_i и по w_i, а затем по x_j и y_j, получаем $X'_{1x}(x,y)$, $X'_{1y}(x,y)$, $X'_{2x}(x,y)$, $X'_{2y}(x,y)$, $X'_{3x}(x,y)$, $X'_{3y}(x,y)$. Тогда $X_1 = X_1(x,y) + p(z,w)$, $X_2 = X_2(x,y) + q(z,w)$, $X_3 = X_3(x,y) + r(z,w)$.

Затем уравнения в системе (2.4) дифференцируем по x_i и x_j, по x_i и y_j, по y_i и y_j:

$$\begin{gathered}-U'_x(i)-U'_x(j)-\gamma V'_x(i)-\gamma V'_x(j)-2uW'_x(i)+2uW'_x(j)-2W(i)-2W(j)=0,\\ \gamma U'_x(i)-U'_y(j)-V'_x(i)-\gamma V'_y(j)-2vW'_x(i)+2uW'_y(j)=0,\\ \gamma U'_y(i)+\gamma U'_y(j)-V'_y(i)-V'_y(j)-2vW'_y(i)+2vW'_y(j)-2W(i)-2W(j)=0,\end{gathered}$$

где $U = X'_{1x}$ или X'_{1y}, $V = X'_{2x}$ или X'_{2y}, $W = X'_{3x}$ или X'_{3y}. Дифференцируя в последней системе по координатам точек i и j, а потом интегрируя, имеем $W = ax + by + c$, $a, b, c = \mathrm{const}$, следовательно получаем систему

$$\begin{gathered}-U'_x(i)-U'_x(j)-\gamma V'_x(i)-\gamma V'_x(j)-2ax_i-2by_i-2ax_j-2by_j-4c=0,\\ \gamma U'_y(i)+\gamma U'_y(j)-V'_y(i)-V'_y(j)-2ax_i-2by_i-2ax_j-2by_j-4c=0,\\ \gamma U'_x(i)-U'_y(j)-V'_x(i)-\gamma V'_y(j)-2ay_i+2bx_i+2ay_j-2bx_j=0,\end{gathered}$$

после чего производим разделение переменных:

$$U'_x + \gamma V'_x = -2ax - 2by - 2c, \qquad U'_y + \gamma V'_y = 2ay - 2bx + d,$$
$$\gamma U'_y - V'_y = 2ax + 2by + 2c, \qquad \gamma U'_x - V'_x = 2ay - 2bx + d, \quad d = \mathrm{const}.$$

После интегрирования имеем

$$U + \gamma V = a(y^2 - x^2) - 2bxy - 2cx + dy + p,$$
$$\gamma U - V = 2axy + b(y^2 - x^2) + dx + 2cy + q, \qquad W = ax + by + c.$$

Тогда

$$X'_{1x} + \gamma X'_{2x} = a_1(y^2 - x^2) - 2b_1xy - 2c_1x + d_1y + p_1,$$
$$X'_{1y} + \gamma X'_{2y} = a_2(y^2 - x^2) - 2b_2xy - 2c_2x + d_2y + p_2,$$
$$\gamma X'_{1x} - X'_{2x} = 2a_1xy + b_1(y^2 - x^2) + d_1x + 2c_1y + q_1, \qquad X'_{3x} = a_1x + b_1y + c_1,$$
$$\gamma X'_{1y} - X'_{2y} = 2a_2xy + b_2(y^2 - x^2) + d_2x + 2c_2y + q_2, \qquad X'_{3y} = a_2x + b_2y + c_2,$$

где $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2, p_1, p_2, q_1, q_2 = \mathrm{const}$. Из совместности частных производных вытекает: $a_2 = b_1$, $b_2 = -a_1$, $d_1 = -2c_2$, $d_2 = 2c_1$, поэтому

$$X'_{1x} + \gamma X'_{2x} = a_1(y^2 - x^2) - 2b_1xy - 2c_1x - 2c_2y + p_1,$$
$$X'_{1y} + \gamma X'_{2y} = b_1(y^2 - x^2) + 2a_1xy - 2c_2x + 2c_1y + p_2,$$
$$\gamma X'_{1x} - X'_{2x} = 2a_1xy + b_1(y^2 - x^2) - 2c_2x + 2c_1y + q_1,$$
$$\gamma X'_{1y} - X'_{2y} = 2b_1xy - a_1(y^2 - x^2) + 2c_1x + 2c_2y + q_2,$$
$$X_3 = \frac{a_1}{2}(x^2 - y^2) + b_1xy + c_1x + c_2y + r(z, w).$$

Продифференцируем равенство (2.3) дважды: по x_i и x_j, по x_i и y_j, а также по y_i и y_j:

$$-X'_{1x}(i) - \gamma X'_{2x}(i) - X'_{1x}(j) - \gamma X'_{2x}(j) - 2uX'_{3x}(i) + 2uX'_{3x}(j) - 2(X_3(i) + X_3(j)) =$$
$$= -2F - \frac{6u^2 + 2v^2 - 4\gamma uv}{u^2 + v^2}F'_\vartheta - 4\frac{u^2 + \gamma^2v^2 - 2\gamma uv}{u^2 + v^2}F''_{\vartheta\vartheta},$$

$$\gamma X'_{1x}(i) - X'_{2x}(i) - X'_{1y}(j) - \gamma X'_{2y}(j) - 2vX'_{3x}(i) + 2uX'_{3y}(j) =$$
$$= -\frac{2\gamma u^2 - 2\gamma v^2 + 4uv}{u^2 + v^2}F'_\vartheta - 4\frac{(1 - \gamma^2)uv + \gamma u^2 - \gamma v^2}{u^2 + v^2}F''_{\vartheta\vartheta},$$

$$\gamma X'_{1y}(i) - X'_{2y}(i) + \gamma X'_{1y}(j) - X'_{2y}(j) - 2vX'_{3y}(i) + 2vX'_{3y}(j) - 2(X_3(i) + X_3(j)) =$$
$$= -2F - \frac{6u^2 + 2v^2 + 4\gamma uv}{u^2 + v^2}F'_\vartheta - 4\frac{u^2 + \gamma^2v^2 + 2\gamma uv}{u^2 + v^2}F''_{\vartheta\vartheta}.$$

В данную систему подставляем явные выражения для X_1, X_2 и X_3:

$$-2p_1 - 2b_1uv - 2a_1u^2 - 2r(z_i, w_i) - 2r(z_j, w_j) =$$
$$= -2F - \frac{6u^2 + 2v^2 - 4\gamma uv}{u^2 + v^2}F'_\vartheta - 4\frac{u^2 + \gamma^2v^2 - 2\gamma uv}{u^2 + v^2}F''_{\vartheta\vartheta},$$

$$q_1 - p_2 - b_1(u^2 + v^2) = -\frac{2\gamma u^2 - 2\gamma v^2 + 4uv}{u^2 + v^2}F'_\vartheta - 4\frac{(1 - \gamma^2)uv + \gamma u^2 - \gamma v^2}{u^2 + v^2}F''_{\vartheta\vartheta},$$

$$2q_2 - 2b_1uv + 2a_1v^2 - 2r(z_i, w_i) - 2r(z_j, w_j) =$$
$$= -2F - \frac{6u^2 + 2v^2 + 4\gamma uv}{u^2 + v^2}F'_\vartheta - 4\frac{u^2 + \gamma^2v^2 + 2\gamma uv}{u^2 + v^2}F''_{\vartheta\vartheta}.$$

Из первого уравнения вычитаем третье:

$$-2(p_1+q_2)-2a_1(u^2+v^2)=\frac{8\gamma uv}{u^2+v^2}F'_\vartheta+\frac{8\gamma uv}{u^2+v^2}F''_{\vartheta\vartheta},$$

$$q_1-p_2-b_1(u^2+v^2)=-\frac{2\gamma u^2-2\gamma v^2+4uv}{u^2+v^2}F'_\vartheta-4\frac{(1-\gamma^2)uv+\gamma u^2-\gamma v^2}{u^2+v^2}F''_{\vartheta\vartheta}.$$

Разрешая данную систему относительно F'_ϑ и $F''_{\vartheta\vartheta}$, учитывая зависимость этих выражений от ϑ, получаем $a_1=b_1=0$, $q_2=-p_1$, $p_2=q_1$, $F'_\vartheta=0$ и $F''_{\vartheta\vartheta}=0$, следовательно

$$F=p_1+r(z_i,w_i)+r(z_j,w_j),$$

$$(1+\gamma^2)X_1=c_1(y^2-x^2+2\gamma xy)-c_2(2xy+\gamma(x^2-y^2))+p_1(x-\gamma y)+q_1(y+\gamma x)+p(z,y),$$
$$(1+\gamma^2)X_2=c_2(x^2-y^2-2\gamma xy)+c_1(\gamma(y^2-x^2)-2xy)+q_1(\gamma y-x)+p_1(\gamma x+y)+q(z,w),$$
$$X_3=c_1x+c_2y+r(z,w).$$

Полученное подставляем в (2.3), имеем $p(z,w)=p=\mathrm{const}$, $q(z,w)=q=\mathrm{const}$. Тогда приходим к алгебре Ли, произвольный оператор которой, после переобозначения постоянных, имеет вид:

$$\begin{gathered}X=(c_1(y^2-x^2+2\gamma xy)-c_2(2xy+\gamma(x^2-y^2))+p_1(x-\gamma y)+q_1(y+\gamma x)+p)\partial_x+\\+(c_2(x^2-y^2-2\gamma xy)+c_1(\gamma(y^2-x^2)-2xy)+q_1(\gamma y-x)+p_1(\gamma x+y)+q)\partial_y+\\+(c_1x+c_2y+r(z,w))\partial_z+X_4(z,w)\partial_w.\end{gathered}$$

Придавая постоянным значения 0 и 1, выделяем базис:

$$X_1=(y^2-x^2+2\gamma xy)\partial_x+(\gamma(y^2-x^2)-2xy)\partial_y+x\partial_z,$$

$$X_2=-(2xy+\gamma(x^2-y^2))\partial_x+(x^2-y^2-2\gamma xy)\partial_y+y\partial_z,\quad X_3=(y+\gamma x)\partial_x+(\gamma y-x)\partial_y,$$
$$X_4=(x-\gamma y)\partial_x+(\gamma x+y)\partial_y,\quad X_5=\partial_x,\quad X_6=\partial_y,\quad X'=r(z,w)\partial_z+X_4(z,w)\partial_w,$$

причем $X'=\alpha X_7+\alpha_2X_8+\cdots$. Алгебра Ли должна быть замкнута относительно операции коммутирования, поэтому $[X_1,X']=xr'_z\partial_z+xX'_{4z}\partial_w=\alpha X'+\beta X_1+\gamma X_2$, следовательно, $r'_z=X'_{4z}=0$, $\alpha=\beta=\gamma=0$. Тогда $r=r(w)$, $X_4=X_4(w)\neq 0$. Далее вводится замена координат: $\overline{z}=z-\displaystyle\int\frac{r(w)dw}{X_4(w)}$, $\overline{w}=\displaystyle\int\frac{dw}{X_4(w)}$, поэтому $X'=\partial_{\overline{w}}$. Значит размерность алгебры Ли меньше 10. Противоречие. Аналогично доказывается первый случай. Лемма 3 доказана. □

§ 3. Доказательство теоремы

Функциональные уравнения (1.7) и (1.8) в окрестности $U(i)\times U(j)$ удобно переписать в виде:

$$(2u-v)(X_1(i)-X_1(j))+u(X_2(i)-X_2(j))+u^2(2X_3(i)+2X_3(j)+X_4(i)F_1+X_4(j)F_2)=0; \tag{3.1}$$

$$\begin{gathered}2(u-\gamma v)(X_1(i)-X_1(j))+2(v+\gamma u)(X_2(i)-X_2(j))+\\+2(u^2+v^2)(X_3(i)+X_3(j))+(u^2+v^2)\left(X_4(i)F_1+X_4(j)F_2\right)=0,\end{gathered}\tag{3.2}$$

где введены обозначения

$$F_1(\theta,w_i,w_j)=\frac{\partial\chi}{\partial w_i}\Big/\frac{\partial\chi}{\partial\theta},\qquad F_2(\theta,w_i,w_j)=\frac{\partial\chi}{\partial w_j}\Big/\frac{\partial\chi}{\partial\theta}.\tag{3.3}$$

Из аксиом аналитичности и невырожденности, очевидно, следуют аналитичность функций (3.3) в окрестности $U(i) \times U(j)$ и справедливость неравенств $F_1 \neq 0$, $F_2 \neq 0$. Тогда, учитывая (1.6), имеем разложения в ряд Тейлора [18, с. 365]

$$\begin{cases} F_1 = f_1(w_i, w_j) + D_1(f_1)(w_i, w_j)\theta + 1/2D_{1,1}(f_1)(w_i, w_j)\theta^2 + \cdots, \\ F_2 = f_2(w_i, w_j) + D_1(f_2)(w_i, w_j)\theta + 1/2D_{1,1}(f_2)(w_i, w_j)\theta^2 + \cdots. \end{cases} \tag{3.4}$$

Далее разложения (1.5) и (3.4) подставим в тождества (3.1) и (3.2).

I. Разложения (1.5) и (3.4) подставляем в тождество (3.1), в котором аргумент θ имеет вид (0.1), затем сравниваем коэффициенты слева и справа перед одинаковыми степенями произведений переменных x_i, y_i, x_j, y_j, а также перед отрицательными степенями $(x_i - x_j)^{-n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, и перед степенями $\ln(x_i - x_j)$ Отметим, что отрицательные степени $(x_i - x_j)^{-n}$ и степени $\ln(x_i - x_j)$, входящие в тождество (3.1), в окрестности нуля в ряд Тейлора не разлагаются, поэтому коэффициенты перед ними обращаются в нуль. Эта задача существенно упрощается с применением математического пакета программ Maple 15 [19, с. 289].

Сравнивая коэффициенты перед отрицательными степенями $(x_i - x_j)^{-n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, имеем

$$D_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots}(X_4)(z_i, w_i)\overline{F_1}(w_i, w_j) = 0, \qquad D_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots}(X_4)(z_j, w_j)\overline{F_2}(w_i, w_j) = 0,$$

причем $\alpha_n = 1, 2$, $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$,

$$\overline{F_1} = (D_{1,1,1}(f_1), D_{1,1,1,1}(f_1), \ldots), \qquad \overline{F_2} = (D_{1,1,1}(f_2), D_{1,1,1,1}(f_2), \ldots).$$

Поэтому из леммы 3 следует $\overline{F_1} = \overline{F_2} = 0$. Значит

$$F_1 = f_1(w_i, w_j) + D_1(f_1)(w_i, w_j)\theta + 1/2D_{1,1}(f_1)(w_i, w_j)\theta^2 \neq 0,$$

$$F_2 = f_2(w_i, w_j) + D_1(f_2)(w_i, w_j)\theta + 1/2D_{1,1}(f_2)(w_i, w_j)\theta^2 \neq 0,$$

следовательно,

$$\begin{cases} (f_1(w_i, w_j))^2 + (D_1(f_1)(w_i, w_j))^2 + (D_{1,1}(f_1)(w_i, w_j))^2 \neq 0, \\ (f_2(w_i, w_j))^2 + (D_1(f_2)(w_i, w_j))^2 + (D_{1,1}(f_2)(w_i, w_j))^2 \neq 0. \end{cases}$$

Сравнивая коэффициенты перед $\ln^2(x_i - x_j)$, имеем

$$D_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots}(X_4)(z_i, w_i)D_{1,1}(f_1)(w_i, w_j) = 0, \qquad D_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots}(X_4)(z_j, w_j)D_{1,1}(f_2)(w_i, w_j) = 0,$$

причем $\alpha_n = 1, 2$, $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$. Поэтому из леммы 3 следует $D_{1,1}(f_1) = D_{1,1}(f_2) = 0$. Аналогично, сравнивая коэффициенты перед $\ln(x_i - x_j)$, имеем

$$D_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots}(X_4)(z_i, w_i)D_1(f_1)(w_i, w_j) = 0, \qquad D_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots}(X_4)(z_j, w_j)D_1(f_2)(w_i, w_j) = 0,$$

причем $\alpha_n = 1, 2$, $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$. Поэтому из леммы 3 вытекает $D_1(f_1) = D_1(f_2) = 0$.

Значит,

$$F_1 = f_1(w_i, w_j) \neq 0, \qquad F_2 = f_2(w_i, w_j) \neq 0.$$

Далее сравниваем все коэффициенты со степенями выше 2 при произведениях переменных x_i, y_i, x_j, y_j, получаем

$$D_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots}(X_4)(z_i, w_i)f_1(w_i, w_j) = p_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots}(z_i, w_i),$$

$$D_{\alpha_1,\alpha_2,\dots}(X_4)(z_j,w_j)f_2(w_i,w_j)=p_{\alpha_1,\alpha_2,\dots}(z_j,w_j),$$

причем $\alpha_n=1,2$, $n=1,2,3,\dots$. Затем первую систему равенств дифференцируем по w_j, а вторую по w_i, имеем

$$D_{\alpha_1,\alpha_2,\dots}(X_4)(z_i,w_i)\frac{\partial f_1(w_i,w_j)}{\partial w_j}=0,\qquad D_{\alpha_1,\alpha_2,\dots}(X_4)(z_j,w_j)\frac{\partial f_2(w_i,w_j)}{\partial w_i}=0.$$

Применяя лемму 3, получаем $f_1(w_i,w_j)=\varphi(w_i)\neq 0$, $f_2(w_i,w_j)=\varphi(w_j)\neq 0$. Значит, система (3.3) сводится к следующей:

$$\varphi(w_i)\frac{\partial\chi}{\partial\theta}-\frac{\partial\chi}{\partial w_i}=0,\qquad \varphi(w_j)\frac{\partial\chi}{\partial\theta}-\frac{\partial\chi}{\partial w_j}=0.$$

Полученная система имеет решение [20, с. 254]

$$f=\overline{\psi}(\theta+\overline{w}_i+\overline{w}_j)=\overline{\psi}(2\ln(x_i-x_j)+\frac{y_i-y_j}{x_i-x_j}+\overline{z}_i+\overline{z}_j),\qquad \overline{w}=\int\varphi(w)\,dw,\ \overline{z}=2z+\overline{w}.$$

Видно, что подходящая замена координат приводит к уменьшению переменных (шесть вместо восьми), входящих в функцию пары точек, поэтому не удовлетворяется аксиома невырожденности, то есть функция пары точек вырождена.

II. Разложения (1.5) и (3.4) подставляем в тождество (3.2), в котором аргумент θ имеет вид (0.2), затем сравниваем коэффициенты слева и справа перед одинаковыми степенями произведений переменных x_i, y_i, x_j, y_j, а также перед степенями $\operatorname{arctg}\dfrac{y_i-y_j}{x_i-x_j}$. Отметим, что степени $\operatorname{arctg}\dfrac{y_i-y_j}{x_i-x_j}$, входящие в тождество (3.2), в окрестности нуля в ряд Тейлора не разлагаются, поэтому коэффициенты перед ними обращаются в нуль. Эта задача существенно упрощается с применением математического пакета программ Maple 15 [18, с. 365].

Сравнивая коэффициенты перед степенями $\operatorname{arctg}\dfrac{y_i-y_j}{x_i-x_j}$, имеем

$$D_{\alpha_1,\alpha_2,\dots}(X_4)(z_i,w_i)\overline{F_1}(w_i,w_j)=0,\qquad D_{\alpha_1,\alpha_2,\dots}(X_4)(z_j,w_j)\overline{F_2}(w_i,w_j)=0,$$

причем $\alpha_n=1,2$, $n=1,2,3,4,\dots$,

$$\overline{F_1}=(D_1(f_1),D_{1,1}(f_1),D_{1,1,1}(f_1),\dots),\qquad \overline{F_2}=(D_1(f_2),D_{1,1}(f_2),D_{1,1,1}(f_2),\dots).$$

Поэтому из леммы 3 следует $\overline{F_1}=\overline{F_2}=0$. Значит,

$$F_1=f_1(w_i,w_j)\neq 0,\qquad F_2=f_2(w_i,w_j)\neq 0.$$

Сравниваем коэффициенты со степенями 3 и выше при произведениях переменных x_i, y_i, x_j, y_j, получаем:

$$D_{\alpha_1,\alpha_2,\dots}X_4(z_i,w_i)f_1(w_i,w_j)=\varphi_{\alpha_1,\alpha_2,\dots}(z_i,w_i),$$

$$D_{\alpha_1,\alpha_2,\dots}X_4(z_j,w_j)f_2(w_i,w_j)=\varphi_{\alpha_1,\alpha_2,\dots}(z_j,w_j),$$

причем $\alpha_n=1,2$, $n=1,2,3,\dots$. Воспользовавшись леммой 3, имеем $f_1(w_i,w_j)=\phi(w_i)$, $f_2(w_i,w_j)=\phi(w_j)$. Найденное подставляем в формулы (3.4):

$$F_1=\phi(w_i),\qquad F_2=\phi(w_j).$$

Затем идем в (3.3):

$$\phi(w_i) = \frac{\partial\chi}{\partial w_i}\Big/\frac{\partial\chi}{\partial\theta}, \qquad \phi(w_j) = \frac{\partial\chi}{\partial w_j}\Big/\frac{\partial\chi}{\partial\theta}.$$

Из полученных соотношений вытекает система дифференциальных уравнений

$$\phi(w_i)\frac{\partial\chi}{\partial\theta} - \frac{\partial\chi}{\partial w_i} = 0, \qquad \phi(w_j)\frac{\partial\chi}{\partial\theta} - \frac{\partial\chi}{\partial w_j} = 0.$$

Полученная система имеет решение [20, с. 254]

$$f = \overline{\psi}(\theta + \overline{w}_i + \overline{w}_j) = \overline{\psi}(\ln[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2] + 2\gamma\mathrm{arctg}\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} + \overline{z}_i + \overline{z}_j),$$

где $\overline{w} = \displaystyle\int \varphi(w)\,dw$, $\overline{z} = 2z + \overline{w}$. Видно, что подходящая замена координат приводит к уменьшению переменных (шесть вместо восьми), входящих в функцию пары точек, поэтому эта функция вырождена (не выполняется аксиома невырожденности).

Теорема 1 полностью доказана. □

Заключение

Итак, поставленная выше задача об аналитическом вложении трехмерных гельмгольцевых геометрий с функциями пары точек (0.1) и (0.2) полностью решена. Результатом являются четырехмерные геометрии с вырожденными функциями пары точек, которые не являются геометриями максимальной подвижности.

Выражаю благодарность профессору Михайличенко Геннадию Григорьевичу за поддержку и обсуждение полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лев В. Х. Трехмерные геометрии в теории физических структур // Вычислительные системы. 1988. № 125. С. 90–103.
2. Михайличенко Г. Г. Математические основы и результаты теории физических структур. Горно-Алтайск: Горно-Алтайский государственный университет, 2016.
3. Кыров В. А., Богданова Р. А. Группы движений некоторых трехмерных геометрий максимальной подвижности // Сибирский математический журнал. 2018. Т. 59. № 2. С. 412–421. https://doi.org/10.17377/smzh.2018.59.215
4. Кыров В. А. Аналитическое вложение некоторых двумерных геометрий максимальной подвижности // Сибирские электронные математические известия. 2019. Т. 16. С. 916–937. https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.061
5. Михайличенко Г. Г. Двумерные геометрии // Доклады АН СССР. 1981. Т. 260. № 4. С. 803–805. http://mi.mathnet.ru/dan44753
6. Бердинский Д. А., Тайманов И. А. Поверхности в трехмерных группах Ли // Сибирский математический журнал. 2005. Т. 46. № 6. С. 1248–1264. http://mi.mathnet.ru/smj1037
7. Thurston W. P. Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry // Bulletin of the American Mathematical Society. 1982. Vol. 6. № 3. P. 357–381. https://doi.org/10.1090/S0273-0979-1982-15003-0
8. Кыров В. А., Михайличенко Г. Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия. 2017. Т. 14. С. 657–672. https://doi.org/10.17377/semi.2017.14.057

9. Кыров В. А. Аналитический метод вложения многомерных псевдоевклидовых геометрий // Сибирские электронные математические известия. 2018. Т. 15. С. 741–758. https://doi.org/10.17377/semi.2018.15.060
10. Кыров В. А. Аналитическое вложение трехмерных симплициальных геометрий // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 2. С. 125–136. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-2-125-136
11. Богданова Р. А., Михайличенко Г. Г. Вывод уравнения феноменологической симметрии для некоторых трехмерных геометрий // Известия вузов. Математика. 2018. № 9. С. 11–20. http://mi.mathnet.ru/ivm9393
12. Михайличенко Г. Г. О групповой и феноменологической симметриях в геометрии // Доклады АН СССР. 1983. Т. 269. № 2. С. 284–288. http://mi.mathnet.ru/dan45986
13. Михайличенко Г. Г., Малышев В. М. Феноменологическая симметрия и функциональные уравнения // Известия вузов. Математика. 2001. № 7. С. 77–79. http://mi.mathnet.ru/ivm915
14. Михайличенко Г. Г. Решение функциональных уравнений в теории физических структур // Доклады АН СССР. 1972. Т. 206. № 5. С. 1056–1058. http://mi.mathnet.ru/dan37179
15. Симонов А. А. Обобщение точно транзитивных групп // Известия РАН. Серия математическая. 2014. Т. 78. № 6. С. 153–178. https://doi.org/10.4213/im8214
16. Симонов А. А. Псевдоматричные группы и физические структуры // Сибирский математический журнал. 2015. Т. 56. № 1. С. 211–226. http://mi.mathnet.ru/smj2633
17. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
18. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: Физматгиз, 1963.
19. Дьяконов В. П. Maple 10/11/12/13/14 в математических расчетах. М.: ДМС Пресс, 2011.
20. Эльсгольц Л. Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969.

Поступила в редакцию 04.07.2019

Кыров Владимир Александрович, к. ф.-м. н., доцент, Горно-Алтайский государственный университет, 649000, Россия, г. Горно-Алтайск, ул. Ленкина, 1.
E-mail: kyrovVA@yandex.ru

Цитирование: В. А. Кыров. Аналитическое вложение трехмерных геометрий гельмгольцева типа // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2019. Т. 29. Вып. 4. С. 532–547.

MATHEMATICS 2019. Vol. 29. Issue 4. Pp. 532–547.

V. A. Kyrov

Analytical embedding of three-dimensional Helmholtz-type geometries

Keywords: functional equation, function of a pair of points, group of motions, geometry of maximum mobility, Helmholtz geometry.

MSC2010: 39A05, 39B05

DOI: 10.20537/vm190405

For modern geometry, the study of maximum mobility geometries is important. The maximum mobility for n-dimensional geometry given by the function f of a pair of points means the existence of an $n(n+1)/2$-dimensional transformation group, which leaves this function invariant. Many geometries of maximum mobility are known (Euclidean, symplectic, Lobachevsky, etc.), but there is no complete classification of such geometries. In this article, the method of embedding solves one of these classification problems. The essence of this method is as follows: from the function of a pair of points g of three-dimensional geometry, we find all non-degenerate functions f of a pair of points of four-dimensional geometries that are invariants of the Lie group of transformations of dimension 10. In this article, g are non-degenerate functions of a pair of points of two Helmholtz three-dimensional geometries:

$$g = 2\ln(x_i - x_j) + \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} + 2z_i + 2z_j,$$

$$\ln[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2] + 2\gamma\mathrm{arctg}\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} + 2z_i + 2z_j.$$

These geometries are locally maximally mobile, that is, their groups of motions are six-dimensional. The problem solved in this work is reduced to solving special functional equations by analytical methods, the solutions of which are sought in the form of Taylor series. For searching various options, the math software package Maple 15 is used. As a result, only degenerate functions of a pair of points are obtained.

REFERENCES

1. Lev V. Kh. Three-dimensional geometry in the theory of physical structures, *Vychislitel'nye Sistemy*, 1988, no. 125, pp. 90–103 (in Russian).
2. Mikhailichenko G. G. *Matematicheskiye osnovy i rezul'taty teorii fizicheskikh struktur* (Mathematical foundations and results of the theory of physical structures), Gorno-Altaisk: Gorno-Altaisk State University, 2016.
3. Kyrov V. A., Bogdanova R. A. The groups of motions of some three-dimensional maximal mobility geometries, *Siberian Mathematical Journal*, 2018, vol. 59, no. 2, pp. 323–331. https://doi.org/10.1134/S0037446618020155
4. Kyrov V. A. Analytic embedding of some two-dimensional geometries of maximal mobility, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2019, vol. 16, pp. 916–937 (in Russian). https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.061
5. Mikhailichenko G. G. Two-dimensional geometries, *Soviet Mathematics. Doklady*, 1981, vol. 24, pp. 346–348. https://zbmath.org/?q=an:0489.51010
6. Berdinsky D. A., Taimanov I. A. Surfaces in three-dimensional Lie groups, *Siberian Mathematical Journal*, 2005, vol. 46, no. 6, pp. 1005–1019. https://doi.org/10.1007/s11202-005-0096-9
7. Thurston W. P. Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1982, vol. 6, no. 3, pp. 357–381. https://doi.org/10.1090/S0273-0979-1982-15003-0

8. Kyrov V. A., Mikhailichenko G. G. The analytic method of embedding symplectic geometry, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2017, vol. 14, pp. 657–672 (in Russian). https://doi.org/10.17377/semi.2017.14.057
9. Kyrov V. A. The analytical method for embedding multidimensional pseudo-Euclidean geometries, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2018, vol. 15, pp. 741–758 (in Russian). https://doi.org/10.17377/semi.2018.15.060
10. Kyrov V. A. Analytic embedding of three-dimensional simplicial geometries, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 2, pp. 125–136 (in Russian). https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-2-125-136
11. Bogdanova R. A., Mikhailichenko G. G. Derivation of an equation of phenomenological symmetry for some three-dimensional geometries, *Russian Mathematics*, 2018, vol. 62, no. 9, pp. 7–16. https://doi.org/10.3103/S1066369X18090025
12. Mikhailichenko G. G. On group and phenomenological symmetries in geometry, *Soviet Mathematics. Doklady*, 1983, vol. 27, pp. 325–329. https://zbmath.org/?q=an:0535.51020
13. Mikhailichenko G. G., Malyshev V. M. Phenomenological symmetry and functional equations, *Russian Mathematics*, 2001, vol. 45, no. 7, pp. 75–76.
14. Mikhailichenko G. G. The solution of functional equations in the theory of physical structures, *Soviet Mathematics. Doklady*, 1972, vol. 13, pp. 1377–1380. https://zbmath.org/?q=an:0268.50003
15. Simonov A. A. On generalized sharply n-transitive groups, *Izvestiya: Mathematics*, 2014, vol. 78, no. 6, pp. 1207–1231. https://doi.org/10.1070/IM2014v078n06ABEH002727
16. Simonov A. A. Pseudomatrix groups and physical structures, *Siberian Mathematical Journal*, 2015, vol. 56, no. 1, pp. 177–190. https://doi.org/10.1134/S0037446615010176
17. Ovsyannikov L. V. *Gruppovoi analiz differentsial'nykh uravnenii* (Group analysis of differential equations), Moscow: Nauka, 1978.
18. Fikhtengol'ts G. M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya. Tom 2* (A course of differential and integral calculus. Vol. 2), Moscow: Fizmatgiz, 1963.
19. D'yakonov V. P. *Maple 10/11/12/13/14 v matematicheskikh raschetakh* (Maple 10/11/12/13/14 in mathematical calculations), Moscow: DMS Press, 2011.
20. El'sgol'ts L. E. *Differentsial'nye uravneniya i variatsionnoe ischislenie* (Differential equations and calculus of variations), Moscow: Nauka, 1969.

Received 04.07.2019

Kyrov Vladimir Aleksandrovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Gorno-Altaisk State University, ul. Lenkina, 1, Gorno-Altaisk, 649000, Russia.
E-mail: kyrovVA@yandex.ru

Citation: V. A. Kyrov. Analytical embedding of three-dimensional Helmholtz-type geometries, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, issue 4, pp. 532–547.