МАТЕМАТИКА 2019. Т. 29. Вып. 4. С. 483–500.

УДК 517.518.244, 519.6

© *О. Е. Галкин, С. Ю. Галкина*

ПРИМЕНЕНИЕ КРАЙНИХ ПОД- И НАДАРГУМЕНТОВ, ВЫПУКЛЫХ И ВОГНУТЫХ ОБОЛОЧЕК ДЛЯ ПОИСКА ГЛОБАЛЬНЫХ ЭКСТРЕМУМОВ

Для вещественнозначных функций f, заданных на подмножествах вещественных линейных пространств, введены понятия крайних подаргументов и крайних надаргументов, а также понятия естественных выпуклой $\check{f}$ и вогнутой $\hat{f}$ оболочек. Показано, что для любой строго выпуклой функции g любая точка глобального максимума функции $f+g$ является крайним подаргументом для функции f. Аналогичный результат получен для функций вида $f/v+g$. На основе этих результатов предложен метод, облегчающий поиск глобальных экстремумов функций в некоторых случаях. Доказано, что при определенных условиях функции $f/v+g$ и $\hat{f}/v+g$ имеют одинаковые глобальные максимумы и одинаковые точки глобального максимума. Приведены необходимые и достаточные условия естественности выпуклой оболочки функции. Указано достаточное условие того, что при сужении области определения f, значения вогнутой оболочки $\hat{f}$ на суженной области не меняются. Найдены крайние под- и надаргументы для непрерывной нигде не дифференцируемой функции Кобаяши–Грея–Такаги $K(x)$ на отрезке $[0;1]$. Кроме того, на отрезке $[0;1]$ вычислены глобальные экстремумы функции $K(x)/\cos x$ и глобальный максимум функции $K(x)-\sqrt{x(1-x)}$. Работа снабжена примерами и проиллюстрирована графиками.

Ключевые слова: недифференцируемая оптимизация, крайние подаргументы (подабсциссы) и крайние надаргументы (надабсциссы) функции, естественные вогнутая и выпуклая оболочки функции, функция Кобаяши–Грея–Такаги.

DOI: 10.20537/vm190402

Введение

Целью работы является изучение свойств крайних подаргументов и надаргументов функций, естественных выпуклых и вогнутых оболочек функций, а также применение этих понятий для поиска глобальных экстремумов функций (не обязательно дифференцируемых).

Задачи поиска глобальных экстремумов, глобальной оптимизации, в том числе для недифференцируемых функций, часто возникают в технике, экономике и самой математике. Такие задачи необходимо решать, в частности, при чебышевской аппроксимации (см., например, [1, 2]) и при оценках цифровых сумм (см., например, [3], [4, sect. 1], [5]) . Интерес к недифференцируемой оптимизации особенно вырос в последние годы. Помимо работ, ставших уже классическими ([1, 6–9] и других), постоянно появляются новые исследования (см., например, [10–14]).

Все результаты нашей статьи являются новыми. Мы используем элементы выпуклого анализа (см. [7–9]), но наш подход к поиску глобальных экстремумов отличается от уже известных (в частности, описанных в [1, 6–8, 10–12]). Предлагаемая нами методика приводит к более простой экстремальной задаче, которая в некоторых случаях допускает непосредственное решение (см. предложения 4 и 5), а иногда требует привлечения других алгоритмов (см. описание нашего метода на стр. 487).

Краткое содержание работы и некоторые замечания. Работа состоит из введения и трех параграфов. В начале *параграфа* 1 для функций $f\colon D\to\mathbb{R}$, где D — подмножество *вещественного линейного пространства* X, вводятся множество $\mathrm{ExtrSA}(f, D)$ *крайних подаргументов* и множество $\mathrm{ExtrEA}(f, D)$ *крайних надаргументов* (определение 1). *Крайний подаргумент* (соответственно, *надаргумент*) функции f — это аргумент, то есть первая компонента x, любой крайней точки (x, y) выпуклой оболочки подграфика (соответственно, надграфика) функции f. Оба этих множества лежат в D (предложение 2). Выпуклая оболочка множества D обозначается через $\mathrm{Conv}(D)$ или $\widetilde{D}$. В теореме 1 показано, в частности, что для любой строго выпуклой функции $g\colon \widetilde{D} \to \mathbb{R}$ любая точка глобального максимума функции $f + g$ на D является крайним подаргументом для f на D. Таким образом, крайние подаргументы и надаргументы для недифференцируемых функций могут играть роль, аналогичную роли стационарных точек для дифференцируемых функций. Результат теоремы 1 усилен в теореме 2, где речь идет о глобальных максимумах функций вида $f/v + g$.

Заметим, что множества $\mathrm{ExtrSA}(f, D)$ и $\mathrm{ExtrEA}(f, D)$ не зависят от функций g и v. Поэтому, найдя эти множества один раз, дальше можно применять их с помощью теорем 1 и 2 для поиска экстремумов функций $f/v + g$ при различных g и v. Иногда этот поиск можно еще облегчить, подобрав достаточно гладкую функцию, интерполирующую f на (не обязательно всем) множестве $\mathrm{ExtrSA}(f, D)$ (*верхнюю интерполянту* $\psi_\vartriangle$) или множестве $\mathrm{ExtrEA}(f, D)$ (*нижнюю интерполянту* $\psi_\triangledown$). На основе полученных результатов предложен метод, облегчающий поиск глобальных экстремумов функций в некоторых случаях (см. стр. 487).

В начале *параграфа* 2 (определение 2) мы напоминаем определения выпуклой $\check{f}$ и вогнутой $\hat{f}$ оболочек функции $f\colon D \to \mathbb{R}$, а затем (определение 3) объясняем, когда мы называем их естественными. Затем мы изучаем свойства таких оболочек и применение для поиска глобальных экстремумов. В теореме 3 показано, в частности, что при некоторых условиях функции $f/v + g$ на D и $\hat{f}/v + g$ на $\widetilde{D}$ имеют одинаковые глобальные максимумы и одинаковые точки глобального максимума. Этот результат важен по двум причинам. *Во-первых*, функции $\hat{f}$ и $\check{f}$ могут иметь гораздо лучшие дифференциальные свойства, чем f (см. [9, теорема 1.5.2], [7, теорема 25.5]). *Во-вторых*, $\hat{f}$ и $\check{f}$ не зависят от g и v. Поэтому, найдя $\hat{f}$ и $\check{f}$ один раз, можно использовать их для поиска глобальных экстремумов функций $f/v+g$ при различных g и v.

Далее в теореме 5 приводятся достаточные условия естественности выпуклой оболочки $\check{f}$ функции f. В примерах 1 и 2 для модельных функций, заданных на отрезке, найдены их вогнутая и выпуклая оболочки, а также множества крайних подаргументов и надаргументов. В теореме 6 приводятся необходимые и достаточные условия того, что выпуклая функция $h\colon \widetilde{D} \to \mathbb{R}$ является естественной выпуклой оболочкой функции $f\colon D \to \mathbb{R}$. В теореме 7 для случая $D_0 \subset D$ дано достаточное условие совпадения на множестве D_0 значений функции $\hat{f}_{D_0}$ со значениями функции $\hat{f}_D$.

В *параграфе* 3 в качестве иллюстрации полученные результаты применяются к непрерывной нигде не дифференцируемой функция Кобаяши–Грея–Такаги $K(x)$ (см. [5]). В предложении 4 найдены на $[0; 1]$ ее верхняя и нижняя интерполянты, функции $\hat{K}_{[0;1]}$ и $\check{K}_{[0;1]}$, а также множества $\mathrm{ExtrSA}(K, [0; 1])$ и $\mathrm{ExtrEA}(K, [0; 1])$. В предложении 5 вычислены на отрезке $[0; 1]$ глобальный максимум функции $K(x) - \sqrt{x(1 - x)}$ и глобальные экстремумы функции $K(x)/\cos x$.

Заметим, что кроме $K(x)$ авторам удалось найти множества крайних под- и надаргументов и у некоторых других непрерывных нигде не дифференцируемых функций на отрезке, например у функции Такаги (см. [17, sect. 1.1]). Но эти результаты мы не включили в данную работу. Кроме того, если область определения D функции f конечна и лежит в $\mathbb{R}^n$, то, как следует из [18, теор. 3.14 и 3.16], множества $\mathrm{ExtrSA}(f, D)$ и $\mathrm{ExtrEA}(f, D)$ могут быть найдены численными методами за конечное число операций $O\big(|D|^{[(n+3)/2]}\big)$.

§ 1. О крайних подаргументах, надаргументах и глобальных экстремумах

Пусть X — вещественное линейное пространство (ВЛП) и D — его подмножество. Для любой функции $f\colon D \to \mathbb{R}$ обозначим через $\operatorname{Gr} f$ ее *график* $\big\{\big(x, f(x)\big) \mid x \in D\big\}$, через $\operatorname{Sub} f$ — ее *подграфик* $\big\{(x, y) \in D \times \mathbb{R} \mid y \leqslant f(x)\big\}$, и через $\operatorname{Epi} f$ — ее *надграфик* $\big\{(x, y) \in D \times \mathbb{R} \mid y \geqslant f(x)\big\}$. *Глобальный максимум функции* f на D обозначим через $\max_D f$, а множество точек, где он достигается — через $\operatorname{Argmax}_D f$. Аналогично вводятся обозначения $\min_D f$ и $\operatorname{Argmin}_D f$. Через $\sup_D f$ и $\inf_D f$ обозначим, соответственно, *супремум* и *инфимум* функции f на D.

Напомним (см. [9, § 1.18]), что точка выпуклого множества называется *крайней*, если она не внутренняя ни для какого отрезка, лежащего в этом множестве. *Выпуклую оболочку* множества D будем обозначать через $\operatorname{Conv}(D)$ или $\widetilde{D}$, а *множество* его *крайних точек* — через $\operatorname{Extr}(D)$.

Предложение 1 (ср. [9, теорема 1.18.2]). *Любое множество D в ВЛП содержит все крайние точки своей выпуклой оболочки, то есть* $\operatorname{Extr}(\widetilde{D}) \subset D$.

Доказательство. Пусть z — произвольная крайняя точка множества $\widetilde{D}$. Если z не лежит в D, то множество $\widetilde{D} \setminus \{z\}$ содержит D и, согласно определению крайней точки, выпукло. Но это противоречит тому, что $\widetilde{D}$ — наименьшее выпуклое множество, содержащее D. Следовательно, z лежит в D. □

Введем понятия крайнего подаргумента и крайнего надаргумента.

Определение 1. Пусть X — ВЛП и $D \subset X$. *Крайним подаргументом* (соответственно *крайним надаргументом*) функции $f\colon D \to \mathbb{R}$ назовем аргумент x (то есть первую компоненту) любой крайней точки (x, y) множества $\operatorname{Conv}(\operatorname{Sub} f)$ (соответственно $\operatorname{Conv}(\operatorname{Epi} f)$). Множество всех крайних подаргументов (соответственно надаргументов) функции f на множестве D будем обозначать через $\operatorname{ExtrSA}(f, D)$ (соответственно $\operatorname{ExtrEA}(f, D)$). В случае $X = \mathbb{R}$ крайний подаргумент (соответственно надаргумент) будем называть также *крайней подабсциссой* (соответственно *крайней надабсциссой*).

Замечание 1. Для любой функции $f\colon D \to \mathbb{R}$ верны равенства $\min_D(f) = -\max_D(-f)$, $\operatorname{Argmin}_D f = \operatorname{Argmax}_D(-f)$, а также $\operatorname{ExtrEA}(f, D) = \operatorname{ExtrSA}(-f, D)$. Поэтому для любого утверждения про максимумы и крайние подаргументы можно сформулировать равносильное ему двойственное утверждение про минимумы и крайние надаргументы (и наоборот).

Предложение 2. *Если X — ВЛП и $D \subset X$, то для любой функции $f\colon D \to \mathbb{R}$ верны включения* $\operatorname{Extr}(\widetilde{D}) \subset \operatorname{ExtrSA}(f, D) \subset D$ *и* $\operatorname{Extr}(\widetilde{D}) \subset \operatorname{ExtrEA}(f, D) \subset D$.

Доказательство. Множество $\operatorname{ExtrSA}(f, D)$ лежит в D, поскольку множество $\operatorname{Extr}\big(\operatorname{Conv}(\operatorname{Sub} f)\big)$ лежит в $\operatorname{Sub} f$ в силу предложения 1. Докажем обратное включение $\operatorname{Extr}(\widetilde{D}) \subset \operatorname{ExtrSA}(f, D)$. Так как $\operatorname{Extr}(\widetilde{D}) \subset D$ по предложению 1, то достаточно показать, что для любого $x \in \operatorname{Extr}(\widetilde{D})$ точка $\big(x, f(x)\big)$ лежит в $\operatorname{Extr}\big(\operatorname{Conv}(\operatorname{Sub} f)\big)$. Для этого, в свою очередь, достаточно вывести равенство $A = B$ из равенства $\big(x, f(x)\big) = \gamma A + (1-\gamma)B$ при любых $A, B \in \operatorname{Conv}(\operatorname{Sub} f)$ и $0 < \gamma < 1$. Имеем: $A = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i (x_i, y_i)$, $B = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i (x_i, y_i)$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geqslant 0$, $\beta_1, \ldots \beta_n \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i = 1$, и $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ — элементы из $\operatorname{Sub} f$. Точки $x_1, \ldots, x_n$, очевидно, можно считать различными. Отсюда следует равенство $x = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i$, где $c_i = \gamma\alpha_i + (1-\gamma)\beta_i$ при $i = 1, \ldots n$. Значит, поскольку $x \in \operatorname{Extr}(\widetilde{D})$, то существует такое $j \in \{1,\dots,n\}$, что $c_i = \gamma\alpha_i + (1-\gamma)\beta_i = 0$ при всех $i \neq j$. Следовательно, так как $\alpha_i \geqslant 0$, $\beta_i \geqslant 0$ и $0 < \gamma < 1$, то $\alpha_i = \beta_i = 0$ при $i \neq j$. Поэтому $\alpha_j = \beta_j = 1$ и $A = B$.

Включения $\operatorname{Extr}(\widetilde{D}) \subset \operatorname{ExtrEA}(f,D) \subset D$ следуют из доказанных включений для $\operatorname{ExtrSA}(f,D)$ и замечания 1. □

Для доказательства теоремы 1 нам будет нужна следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть X — ВЛП, $D \subset X$, заданы функция $f\colon D \to \mathbb{R}$ и выпуклая функция $g\colon \widetilde{D} \to \mathbb{R}$. Пусть, кроме того, $x_* \in \operatorname{Argmax}_D(f+g)$ и верно равенство*

$$\big(x_*, f(x_*)\big) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i, y_i), \tag{1.1}$$

где числа $c_1,\dots,c_n$ неотрицательны, $\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$ и $(x_1,y_1),\dots,(x_n,y_n)$ — элементы из множества $\operatorname{Sub} f$, причем точки $x_1,\dots,x_n$ различны. Тогда

(1) *при любом $i = 1,\dots,n$, таком что $c_i > 0$, точка x_i является точкой глобального максимума функции $f+g$ на D;*

(2) *если g строго выпукла, то $c_i = 0$ для всех $i \neq j$ при некотором $j \in \{1,\dots,n\}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из равенства (1.1) следует, что $x_* = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$. Отсюда, в силу выпуклости функции g, имеем:

$$g(x_*) = g\Big(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{n} c_i g(x_i). \tag{1.2}$$

Кроме того, из (1.1), в силу включения $(x_1,y_1),\dots,(x_n,y_n) \in \operatorname{Sub} f$, вытекают соотношения $f(x_*) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i)$. Прибавляя сюда неравенство (1.2), приходим к выводу, что $\max_D(f+g) = f(x_*)+g(x_*) \leqslant \sum_{i=1}^{n} c_i\big(f(x_i)+g(x_i)\big) \leqslant \max_D(f+g)$. Здесь, поскольку крайние члены равны, оба неравенства являются равенствами. Отсюда следует утверждение пункта (1), а также то, что является равенством и неравенство в (1.2). Это, если функция g строго вогнута, возможно лишь при обращении в ноль всех коэффициентов c_i, кроме одного. □

Теорема 1. *Пусть X — ВЛП, $D \subset X$, заданы функция $f\colon D \to \mathbb{R}$ и выпуклая функция $g\colon \widetilde{D} \to \mathbb{R}$. Тогда множество $\operatorname{Extr}\big(\operatorname{Conv}(\operatorname{Argmax}_D(f+g))\big)$ включено в множество $\operatorname{ExtrSA}(f,D)$. Если, кроме того, функция g строго выпукла, то любая точка глобального максимума функции $f+g$ на D является крайним подаргументом для f на D, то есть верно включение $\operatorname{Argmax}_D(f+g) \subset \operatorname{ExtrSA}(f,D)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1) Пусть $x_* \in \operatorname{Extr}\big(\operatorname{Conv}(\operatorname{Argmax}_D(f+g))\big)$. Тогда, по предложению 1, $x_* \in \operatorname{Argmax}_D(f+g)$. В силу определения крайнего подаргумента, нам достаточно доказать, что $\big(x_*, f(x_*)\big)$ — крайняя точка множества $\operatorname{Conv}(\operatorname{Sub} f)$. В свою очередь, для этого достаточно при любых $A, B \in \operatorname{Conv}(\operatorname{Sub} f)$ и любых $0 < \gamma < 1$ вывести равенство $A = B$ из равенства $\big(x_*, f(x_*)\big) = \gamma A + (1-\gamma)B$. Имеем: $A = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x_i,y_i)$, $B = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(x_i,y_i)$, где $\alpha_1,\dots,\alpha_n,\beta_1,\dots\beta_n \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 1$, $\sum_{i=1}^{n}\beta_i = 1$ и $(x_1,y_1),\dots,(x_n,y_n)$ — элементы из $\operatorname{Sub} f$. Точки $x_1,\dots,x_n$, очевидно, можно считать различными. Отсюда следует равенство (1.1), где $c_i = \gamma\alpha_i + (1-\gamma)\beta_i$ при $i = 1,\dots,n$. Ясно, что числа $c_1,\dots,c_n$

неотрицательны. Кроме того, $\sum_{i=1}^{n} c_i = \gamma \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + (1-\gamma) \sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1$. Следовательно, по пункту (1) леммы 1, $x_i \in \operatorname{Argmax}_D(f+g)$ при всех $i = 1, \ldots, n$, таких что $c_i > 0$. Это, с учетом соотношений $x_* = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ и $x_* \in \operatorname{Extr}\big(\operatorname{Conv}(\operatorname{Argmax}_D(f+g))\big)$, доказывает наличие такого $j \in \{1, \ldots, n\}$, что $c_i = \gamma\alpha_i + (1-\gamma)\beta_i = 0$ при всех $i \neq j$. Отсюда, так как $\alpha_i \geqslant 0$, $\beta_i \geqslant 0$ и $0 < \gamma < 1$, получаем, что $\alpha_i = \beta_i = 0$ при $i \neq j$. Тогда $\alpha_j = \beta_j = 1$ и $A = B$.

(2) Доказательство второго утверждения теоремы аналогично, но в конце него вместо пункта (1) леммы 1 нужно использовать пункт (2) той же леммы. □

При $g \equiv 0$ из теоремы 1 и двойственной к ней сразу вытекает такое утверждение:

Предложение 3. *Если X — ВЛП и $D \subset X$, то для любой функции $f\colon D \to \mathbb{R}$ верны включения* $\operatorname{Extr}\big(\operatorname{Conv}(\operatorname{Argmax}_D f)\big) \subset \operatorname{ExtrSA}(f, D)$ *и* $\operatorname{Extr}\big(\operatorname{Conv}(\operatorname{Argmin}_D f)\big) \subset \operatorname{ExtrEA}(f, D)$.

Замечание 2. Множества $\operatorname{ExtrSA}(f, D)$ и $\operatorname{ExtrEA}(f, D)$ не зависят от функции g. Поэтому, найдя эти множества один раз, дальше можно использовать их, с помощью теоремы 1 и двойственной к ней, для поиска глобальных экстремумов функции $f + g$ при различных вогнутых или выпуклых функциях g.

Замечание 3. Поиск глобальных максимумов (минимумов) функции $f + g$ может быть еще облегчен, если удастся подобрать достаточно гладкую *верхнюю интерполянту* $\psi_\vartriangle$ (соответственно *нижнюю интерполянту* $\psi_\triangledown$), интерполирующую функцию f на (не обязательно всем) множестве $\operatorname{ExtrSA}(f, D)$ (соответственно $\operatorname{ExtrEA}(f, D)$).

Следующая теорема обобщает результат теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть X — ВЛП, $D \subset X$ и заданы функции $f\colon D \to \mathbb{R}$, $g\colon \widetilde{D} \to \mathbb{R}$, $v\colon \widetilde{D} \to \mathbb{R}$, причем v строго положительна на D. Пусть, кроме того, строго выпукла на $\widetilde{D}$ функция $(g - M)\cdot v$, где $M = \sup_D(f/v + g) < \infty$. Тогда все точки глобального максимума на множестве D функции $f/v + g$ являются крайними подаргументами функции f на D, то есть верно включение* $\operatorname{Argmax}_D(f/v + g) \subset \operatorname{ExtrSA}(f, D)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $x \in D$, поскольку $v(x) > 0$, оценка $g(x) + f(x)/v(x) \leqslant M$ равносильна оценке $f(x) + (g(x) - M)v(x) \leqslant 0$. Поэтому на D все точки глобального максимума функции $f/v + g$ являются точками глобального максимума (равного нулю) функции $f + (g - M)v$. Отсюда, в силу теоремы 1 и строгой выпуклости функции $(g - M)v$, вытекает, что точки глобального максимума функции $f/v + g$ являются крайними подаргументами для f на D. □

На основе полученных результатов предлагается следующий метод, который может облегчить поиск глобальных экстремумов некоторых функций вида $f/v + g$, не подразумевая дифференцируемости f в какой-либо точке (он применен далее в предложении 5).

Метод поиска глобальных экстремумов. Метод содержит четыре шага:

(1) убеждаемся (например, с помощью теорем 1, 2, двойственных к ним или аналогичных утверждений), что точки глобального экстремума функции $f/v + g$ принадлежат множеству $\operatorname{ExtrSA}(f, D)$ или множеству $\operatorname{ExtrEA}(f, D)$;

(2) вычисляем нужное множество $\operatorname{ExtrSA}(f, D)$ или $\operatorname{ExtrEA}(f, D)$;

(3) подбираем, если возможно, верхнюю интерполянту $\psi_\vartriangle$ или нижнюю интерполянту $\psi_\triangledown$ (см. замечание 3);

(4) вычисляем глобальный экстремум функции $f/v + g$ на множестве $\operatorname{ExtrSA}(f, D)$ или $\operatorname{ExtrEA}(f, D)$ (возможно, используя при этом интерполянту $\psi_\vartriangle$ или $\psi_\triangledown$).

§ 2. Связь вогнутых и выпуклых оболочек функций с глобальными экстремумами

В данном параграфе мы коснемся некоторых свойств выпуклых и вогнутых оболочек функций, заданных на подмножествах линейного пространства.

Пусть X — вещественное линейное пространство (ВЛП), $D \subset X$. Для любой функции $f\colon D \to \mathbb{R}$ и любого $M \in \mathbb{R}$ зададим множество $\operatorname{Epi}_M f = \{(x,y) \in D \times \mathbb{R} \mid f(x) \leqslant y \leqslant M\}$. Слегка изменив определение [9, опр. 1.6.3], получаем следующее определение.

Определение 2. *Выпуклой* (*вогнутой*) *оболочкой функции* $f\colon D \to \mathbb{R}$ называется функция $\check{f}_D\colon \widetilde{D} \to \mathbb{R}$ (соответственно функция $\hat{f}_D\colon \widetilde{D} \to \mathbb{R}$), которая определяется равенством $\check{f}_D(x) = \inf\{y \in \mathbb{R} \mid (x,y) \in \operatorname{Conv}(\operatorname{Epi} f)\}$ (или $\hat{f}_D(x) = \sup\{y \in \mathbb{R} \mid (x,y) \in \operatorname{Conv}(\operatorname{Sub} f)\}$ соответственно).

Введем также понятия *естественных* выпуклой и вогнутой оболочек:

Определение 3. Выпуклая (вогнутая) оболочка функции $f\colon D \to \mathbb{R}$ называется *естественной*, если верно равенство $\operatorname{Epi} \check{f}_D = \operatorname{Conv}(\operatorname{Epi} f)$ (или $\operatorname{Sub} \hat{f}_D = \operatorname{Conv}(\operatorname{Sub} f)$).

Будем писать $\hat{f}$ и $\check{f}$ вместо $\hat{f}_D$ и $\check{f}_D$, если понятно, о каком множестве D идет речь. Как показано ниже в примере 2, выпуклая и вогнутая оболочки функции не всегда являются естественными.

Замечание 4. На множестве D выполняются неравенства $\check{f}_D \leqslant f$ и $\hat{f}_D \geqslant f$, поскольку, в силу определения 2, верны включения $\operatorname{Epi} \check{f}_D \supset \operatorname{Epi} f$ и $\operatorname{Sub} \hat{f}_D \supset \operatorname{Sub} f$.

Замечание 5. Для любой функции $f\colon D \to \mathbb{R}$, очевидно, верно равенство $\check{f}_D = -\widehat{(-f)}_D$. Поэтому любое утверждение о функции $\hat{f}_D$ равносильно двойственному утверждению о функции $\check{f}_D$.

Нам понадобится также понятие локально симплициального множества в $\mathbb{R}^n$.

Определение 4 (см. [9, опр. 1.7.1], ср. [7, § 10]). Множество $D \subset \mathbb{R}^n$ называется *локально симплициальным*, если для каждой точки $x \in D$ найдется ее окрестность U, а также конечное число симплексов $S_1, \dots, S_m$, содержащихся в D и имеющих точку x своей вершиной, таких что $U \cap D = U \cap \big(\cup_{i=1}^m S_i\big)$.

Локально симплициальными множествами в $\mathbb{R}^n$ являются, в частности, все отрезки, многогранники и открытые множества.

Далее нам будут нужны еще несколько фактов. Они хорошо известны, поэтому приведем их без доказательства в следующем замечании.

Замечание 6. Для любых подмножеств A и B из ВЛП верны соотношения

(1) $\operatorname{Conv}(A \cup B) \supset \operatorname{Conv}(A) \cup \operatorname{Conv}(B)$;

(2) $\operatorname{Conv}(A \cap B) \subset \operatorname{Conv}(A) \cap \operatorname{Conv}(B)$;

(3) $\operatorname{Conv}(A \times B) = \operatorname{Conv}(A) \times \operatorname{Conv}(B)$ (ср. [7, теорема 3.5]).

Переходим к способам применения естественных вогнутой и выпуклой оболочек функции.

Теорема 3. *Пусть X — ВЛП, $D \subset X$, и заданы функции $f\colon D \to \mathbb{R}$, $g\colon \widetilde{D} \to \mathbb{R}$, $v\colon \widetilde{D} \to \mathbb{R}$, причем вогнутая оболочка $\hat{f}_D$ функции f естественна, v строго положительна на D, и кроме того, выпукла на $\widetilde{D}$ функция $(g - M) \cdot v$, где $M = \sup_D(f/v + g) < \infty$. Тогда*

(1) *выполняется равенство* $\sup_D(f/v + g) = \sup_{\widetilde{D}}(\hat{f}_D/v + g)$;

(2) $\mathrm{Argmax}_D(f/v+g) \subset \mathrm{Argmax}_{\widetilde{D}}(\hat{f}_D/v+g) \subset \mathrm{Conv}\big(\mathrm{Argmax}_D(f/v+g)\big)$*;*

(3) *максимумы* $\max_{\widetilde{D}}(\hat{f}_D/v+g)$ *и* $\max_D(f/v+g)$ *либо оба существуют и равны, либо оба не существуют;*

(4) *если, кроме того, функция* $(g-M)\cdot v$ *строго выпукла, то множества точек глобального максимума функций* $f/v+g$ *на* D *и* $\hat{f}_D/v+g$ *на* $\widetilde{D}$ *совпадают, то есть верно равенство* $\mathrm{Argmax}_D(f/v+g) = \mathrm{Argmax}_{\widetilde{D}}(\hat{f}_D/v+g)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равенство $\sup_D(f/v+g) = \sup_{\widetilde{D}}(\hat{f}_D/v+g) = M$ равносильно равенству $\sup_D(f+(g-M)v) = \sup_{\widetilde{D}}(\hat{f}_D+(g-M)v) = 0$. Кроме того, если эти равенства верны, то будут выполняться также равенства $\mathrm{Argmax}_D(f/v+g) = \mathrm{Argmax}_D(f+(g-M)v)$ и $\mathrm{Argmax}_{\widetilde{D}}(\hat{f}_D/v+g) = \mathrm{Argmax}_{\widetilde{D}}(\hat{f}_D+(g-M)v)$. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $v \equiv 1$ (при этом функция g будет играть роль функции $(g-M)v$).

(1) С одной стороны, $\sup_{\widetilde{D}}(\hat{f}+g) \geqslant \sup_D(f+g)$, поскольку $\widetilde{D} \supset D$ и $\hat{f} \geqslant f$ на D в силу замечания 4. Остается доказать, что и наоборот, $\sup_{\widetilde{D}}(\hat{f}+g) \leqslant \sup_D(f+g)$.

Возьмем произвольный элемент $\widehat{x} \in \widetilde{D}$. Тогда точка $\big(\widehat{x}, \hat{f}(\widehat{x})\big)$ будет принадлежать множеству $\mathrm{Sub}\,\hat{f} = \mathrm{Conv}(\mathrm{Sub}\,f)$. Поэтому найдутся положительные числа $c_1,\ldots,c_n$ с суммой $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i = 1$ и набор различных точек $(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)$ из $\mathrm{Sub}\,f$, такие что имеет место представление $\big(\widehat{x}, \hat{f}(\widehat{x})\big) = c_1(x_1,y_1)+\ldots+c_n(x_n,y_n)$. Следовательно,

$$\hat{f}(\widehat{x}) = c_1y_1+\ldots+c_ny_n \leqslant c_1f(x_1)+\ldots+c_nf(x_n) \tag{2.1}$$

и $\widehat{x} = c_1x_1+\ldots+c_nx_n$. Отсюда, поскольку g выпукла, получаем неравенство

$$g(\widehat{x}) \leqslant c_1g(x_1)+\ldots+c_ng(x_n). \tag{2.2}$$

Складывая его с (2.1), приходим к оценке:

$$(\hat{f}+g)(\widehat{x}) \leqslant c_1(f+g)(x_1)+\ldots+c_n(f+g)(x_n) \leqslant \sup_D(f+g). \tag{2.3}$$

Беря супремум по $\widehat{x} \in \widetilde{D}$, получаем нужное неравенство $\sup_{\widetilde{D}}(\hat{f}+g) \leqslant \sup_D(f+g)$.

(2) Пусть $x_* \in \mathrm{Argmax}_D(f+g)$. Тогда выполнены соотношения $\sup_D(f+g) = (f+g)(x_*) \leqslant (\hat{f}+g)(x_*) \leqslant \sup_{\widetilde{D}}(\hat{f}+g)$. Отсюда, в силу доказанного в пункте (1) равенства $\sup_D(f+g) = \sup_{\widetilde{D}}(\hat{f}+g)$, вытекает, что $(\hat{f}+g)(x_*) = \sup_{\widetilde{D}}(\hat{f}+g)$. Следовательно, $x_* \in \mathrm{Argmax}_{\widetilde{D}}(\hat{f}+g)$.

Пусть теперь $\widehat{x} \in \mathrm{Argmax}_{\widetilde{D}}(\hat{f}+g)$. Тогда, как и в пункте (1), при некоторых положительных $c_1,\ldots,c_n$ с суммой $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i = 1$ и различных $(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n) \in \mathrm{Sub}\,f$ верны соотношения (2.1) и (2.3). В соотношении (2.3), по пункту (1), первый и последний члены равны. Следовательно, все неравенства, входящие в (2.3), являются равенствами. Поэтому

$$\hat{f}(\widehat{x})+g(\widehat{x}) = c_1(f+g)(x_1)+\ldots+c_n(f+g)(x_n) = \sup_D(f+g) = \sup_{\widetilde{D}}(\hat{f}+g). \tag{2.4}$$

Отсюда, с учетом (2.1) и (2.2), вытекает формула

$$g(\widehat{x}) = g(c_1x_1+\ldots+c_nx_n) = c_1g(x_1)+\ldots+c_ng(x_n). \tag{2.5}$$

Из (2.4) следует также, что $x_1,\ldots,x_n$ являются точками глобального максимума для $f+g$. Поэтому точка $\widehat{x} = c_1x_1+\ldots+c_nx_n$ лежит в $\mathrm{Conv}\big(\mathrm{Argmax}(f+g)\big)$.

(3) Утверждение пункта (3) следует из утверждений пунктов (1) и (2).

(4) Точки $x_1,\ldots,x_n$ можно считать различными. Поэтому, если функция g строго выпукла, то равенство (2.5) возможно лишь при $n=1$. Тогда $\widehat{x} = x_1$, а значит $\widehat{x}$ — точка глобального максимума для $f+g$. □

Замечание 7. Функции $\hat{f}$ и $\check{f}$ не зависят от g и v. Поэтому, найдя их один раз, дальше можно использовать полученную информацию для поиска экстремумов функций $f/v+g$ при разных функциях g и v, удовлетворяющих условиям теоремы 3 или двойственной к ней.

В случае $g \equiv 0$ и $v \equiv 1$ результаты пунктов (1)–(3) теоремы 3 можно уточнить.

Теорема 4. *Пусть X — ВЛП, $D \subset X$ и вогнутая оболочка $\hat{f}_D$ функции $f\colon D \to \mathbb{R}$ естественна. Тогда верны равенства $\sup_D(f) = \sup_{\widetilde{D}}(\hat{f}_D)$ и $\operatorname{Argmax}_{\widetilde{D}}(\hat{f}_D) = \operatorname{Conv}(\operatorname{Argmax}_D f)$. При этом максимумы $\max_{\widetilde{D}}(\hat{f}_D)$ и $\max_D(f)$ либо оба существуют и равны, либо оба не существуют.*

Доказательство. В силу пунктов (1)–(3) теоремы 3, нам достаточно доказать лишь включение $\operatorname{Argmax}_{\widetilde{D}}(\hat{f}) \supset \operatorname{Conv}(\operatorname{Argmax}_D f)$. Если $x_1, \ldots, x_n \in \operatorname{Argmax}_D f$, числа $c_1, \ldots, c_n$ положительны и $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i = 1$, то, ввиду вогнутости $\hat{f}_D$, выполнены следующие соотношения: $\hat{f}\big(\sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i\big) \geqslant \sum\limits_{i=1}^{n} c_i \hat{f}(x_i) \geqslant \sum\limits_{i=1}^{n} c_i f(x_i) = \sup_D(f)$. Отсюда вытекает, в силу пункта (1) теоремы 3, что $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i$ — точка глобального максимума функции $\hat{f}$ на $\widetilde{D}$. Поэтому имеет место включение $\operatorname{Argmax}_{\widetilde{D}}(\hat{f}) \supset \operatorname{Conv}(\operatorname{Argmax}_D f)$. Теорема доказана. □

Следующая лемма необходима для доказательства теоремы 5.

Лемма 2. *Пусть функция $f\colon D \to \mathbb{R}$ ограничена сверху и задано число $M \geqslant \sup_D f$. Тогда*

(1) *выполнено равенство $\operatorname{Conv}(\operatorname{Epi} f) = \operatorname{Conv}(\operatorname{Epi}_M f) \cup \big(\widetilde{D} \times [M, +\infty)\big)$;*

(2) *если, кроме того, D — компактное подмножество в $\mathbb{R}^n$, а функция f на D полунепрерывна снизу, то f на D ограничена и достигает своего инфимума, множество $\operatorname{Epi}_M f$ компактно, а множество $\operatorname{Conv}(\operatorname{Epi} f)$ замкнуто.*

Доказательство. (1) Так как $\operatorname{Epi} f = \operatorname{Epi}_M f \cup \big(D \times [M, +\infty)\big)$, то из пункта (1) замечания 6 следует, что $\operatorname{Conv}(\operatorname{Epi} f) \supset \operatorname{Conv}(\operatorname{Epi}_M f) \cup \operatorname{Conv}\big(D \times [M, +\infty)\big)$. Отсюда, так как $\operatorname{Conv}\big(D \times [M, +\infty)\big) = \widetilde{D} \times [M, +\infty)$ по пункту (3) замечания 6, получаем включение $\operatorname{Conv}(\operatorname{Epi} f) \supset \operatorname{Conv}(\operatorname{Epi}_M f) \cup \big(\widetilde{D} \times [M, +\infty)\big)$. С другой стороны, поскольку множество $\operatorname{Conv}(\operatorname{Epi}_M f) \cup \big(\widetilde{D} \times [M, +\infty)\big)$ выпукло и содержит $\operatorname{Epi} f$, то оно содержит и $\operatorname{Conv}(\operatorname{Epi} f)$.

(2) Поскольку множество D компактно и f полунепрерывна снизу, то функция f достигает на D своего инфимума (см. [15, глава 2, § 6, теорема 8, б], [16, гл. 2, § 8, теорема 30_2]), а значит ограничена снизу. Следовательно, f ограничена. Далее, так как функция f полунепрерывна снизу, то ее надграфик $\operatorname{Epi} f$ замкнут (см. [8, пункт 3.2.1], [9, теорема 1.5.1]). Поскольку $\operatorname{Epi}_M f = \operatorname{Epi} f \cap (D \times (-\infty, M])$, D компактно и f ограничена снизу, то множество $\operatorname{Epi}_M f$ замкнуто и ограничено в $\mathbb{R}^n$. Следовательно, оно компактно. Поэтому множество $\operatorname{Conv}(\operatorname{Epi}_M f)$ тоже компактно в силу следствия из теоремы Каратеодори (см. [8, пункт 3.5.1, следствие 2], [7, теорема 17.2]), а значит замкнуто. Тогда множество $\operatorname{Conv}(\operatorname{Epi} f)$, в силу пункта (1), есть объединение двух замкнутых множеств, поэтому и само замкнуто. □

Приведем достаточные условия естественности выпуклой оболочки функции.

Теорема 5 (ср. [7, Следствие 17.2.1]). *Если множество $D \subset \mathbb{R}^n$ компактно, а функция $f\colon D \to \mathbb{R}$ полунепрерывна снизу и ограничена сверху, то ее выпуклая оболочка $\check{f}_D$ является естественной, полунепрерывной снизу и ограниченной сверху на $\widetilde{D}$. При этом существуют и равны минимумы $\min_D f$ и $\min_{\widetilde{D}} \check{f}_D$. Если, кроме того, множество $\widetilde{D}$ локально симплициально, то $\check{f}_D$ непрерывна на $\widetilde{D}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно определению 3, нужно доказать, что выполняется равенство $\operatorname{Epi}\check{f}_D = \operatorname{Conv}(\operatorname{Epi} f)$. Для этого достаточно показать, что при любом $x \in \widetilde{D}$ множество $L_x = \{y \in \mathbb{R} \mid (x,y) \in \operatorname{Conv}(\operatorname{Epi} f)\}$ является лучом вида $[z_x, +\infty)$, где $z_x \in \mathbb{R}$ (при этом будет $\check{f}_D(x) = z_x$). Множество L_x, очевидно, выпукло и неограничено справа. Кроме того, по пункту (2) леммы 2, множество L_x ограничено слева и замкнуто. Отсюда следует, что L_x является замкнутым лучом $[z_x, +\infty)$ при некотором $z_x \in \mathbb{R}$. Итак, выпуклая оболочка $\check{f}_D$ естественна.

Полунепрерывность $\check{f}_D$ снизу следует из [9, теорема 1.14.3]. Существование минимумов $\min_D f$ и $\min_{\widetilde{D}} \check{f}_D$ следует из пункта (2) леммы 2, а их равенство — из двойственной к теореме 4.

Если множество $\widetilde{D}$ локально симплициально, непрерывность на нем функции $\check{f}_D$ следует из ее полунепрерывности снизу и выпуклости (см. [7, теорема 10.2], [9, теорема 1.7.2]). □

В качестве примера найдем вогнутую и выпуклую оболочки, а также множества крайних подабсцисс и надабсцисс функции, полунепрерывной снизу на отрезке.

Пример 1. Зададим на отрезке $[0;6]$ функцию F формулой

$$F(x) = \begin{cases} 1 + 2(x-1)^2 & \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 3; \\ 9 - (x-3)^2 & \text{при} \quad 3 \leqslant x < 5; \\ 4 - 3(x-6)^2 & \text{при} \quad 5 \leqslant x \leqslant 6. \end{cases}$$

Тогда, очевидно, $\operatorname{ExtrSA}(F, [0;6]) = \{0;6\} \cup [3;4]$ и $\operatorname{ExtrEA}(F, [0;6]) = [0;1] \cup \{5;6\}$. Вогнутая и выпуклая оболочки F, очевидно, являются естественными и их можно задать равенствами

$$\hat{F}_{[0;6]}(x) = \begin{cases} 3 + 2x\,, & 0 \leqslant x \leqslant 3; \\ 9 - (x-3)^2\,, & 3 \leqslant x \leqslant 4; \\ 16 - 2x\,, & 4 \leqslant x \leqslant 6; \end{cases} \qquad \check{F}_{[0;6]}(x) = \begin{cases} 1 + 2(x-1)^2\,, & 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ 1\,, & 1 \leqslant x \leqslant 5; \\ 3x - 14\,, & 5 \leqslant x \leqslant 6. \end{cases}$$

Легко заметить, что функции $\hat{F}_{[0;6]}$ и $\hat{F}_{[0;5)}$ различаются на интервале $(4;5)$. Аналогично, функции $\check{F}_{[0;6]}$ и $\check{F}_{[0;3]}$ различаются на полуинтервале $(1;3]$ (см. далее замечание 9).

На рисунке 1 приведены графики функции F (линия A), ее вогнутой оболочки $\hat{F}_{[0;6]}$ (линия B) и ее выпуклой оболочки $\check{F}_{[0;6]}$ (линия C), а также показаны множества ее крайних подабсцисс $\operatorname{ExtrSA}(F, [0;6])$ (знаками $\triangle$) и крайних надабсцисс $\operatorname{ExtrEA}(F, [0;6])$ (знаками $\triangledown$). □

В следующем примере вогнутая и выпуклая оболочки функции не являются естественными.

Пример 2. Зададим функцию G, изменив значения функции F из примера 1 в трех точках: $G(1) = G(3) = G(5) = 3$ и $G(x) = F(x)$ при $x \in [0;6] \setminus \{1;3;5\}$. Тогда на отрезке $[0;6]$ функция G не имеет глобальных экстремумов, и ее вогнутая и выпуклая оболочки не являются естественными, хотя верны равенства $\hat{G}_{[0;6]} = \hat{F}_{[0;6]}$ и $\check{G}_{[0;6]} = \check{F}_{[0;6]}$. □

Еще один пример содержит предложение 4, где найдены вогнутая и выпуклая оболочки и множества крайних под- и надабсцисс функции Кобаяши–Грея–Такаги (см. [3, 5]).

В следующей теореме приведены необходимые и достаточные условия того, что некоторая функция h является естественной выпуклой оболочкой функции f.

Теорема 6. *Пусть X — ВЛП, $D \subset X$, задана функция $f\colon D \to \mathbb{R}$ и выпуклая функция $h\colon \widetilde{D} \to \mathbb{R}$. Тогда*

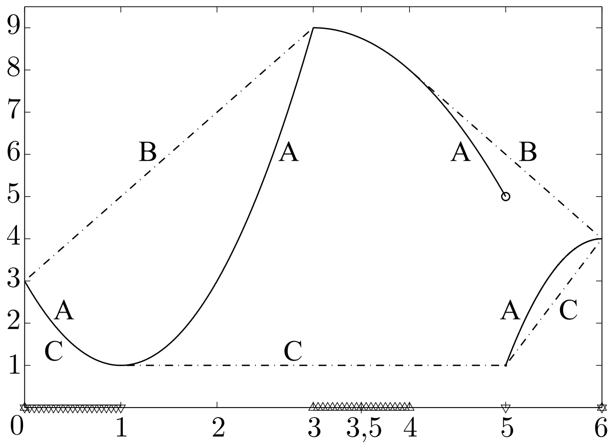

Рис. 1.

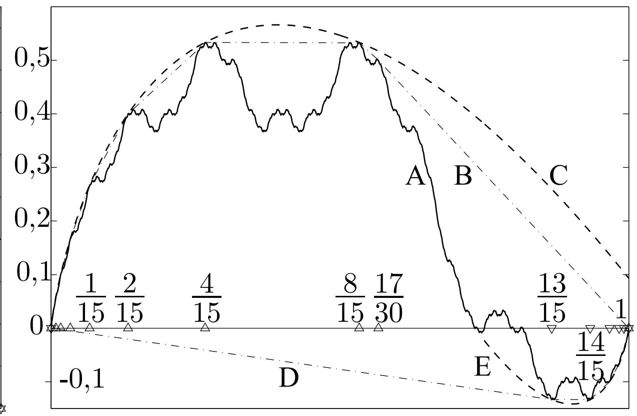

Рис. 2.

(1) *если функция h является естественной выпуклой оболочкой функции f на D, то $h \leqslant f$ на D и все крайние точки надграфика функции h лежат на графике функции f;*

(2) *если $X = \mathbb{R}^n$, D компактно, $h \leqslant f$ на D, все крайние точки надграфика функции h лежат на графике функции f, f ограничена сверху на D, функция h полунепрерывна снизу и ограничена сверху на $\widetilde{D}$, то h является естественной выпуклой оболочкой функции f на D.*

Доказательство. (1) Пусть h — естественная выпуклая оболочка функции f на D. Тогда, в силу замечания 4, $h \leqslant f$ на D. Покажем, что любая точка P из $\operatorname{Extr}(\operatorname{Epi} h)$ принадлежит графику $\operatorname{Gr} f$. Так как $\operatorname{Extr}(\operatorname{Epi} h) = \operatorname{Extr}\bigl(\operatorname{Conv}(\operatorname{Epi} f)\bigr)$, то $P \in \operatorname{Epi} f$ в силу предложения 1. Поэтому P имеет вид (x, y), где $x \in D$, $y \geqslant f(x)$. В случае $y > f(x)$ точка P, очевидно, не будет крайней для $\operatorname{Epi} h$. Значит, $y = f(x)$, то есть P лежит на графике $\operatorname{Gr} f$.

(2) Для доказательства в обратную сторону нужно, в силу определения 2, убедиться, что $\operatorname{Epi} h = \operatorname{Conv}(\operatorname{Epi} f)$. Имеем: $\operatorname{Epi} h = \operatorname{Conv}(\operatorname{Epi} h) \supset \operatorname{Conv}(\operatorname{Epi} f)$, так как h выпукла и $h \leqslant f$. Остается установить, что $\operatorname{Epi} h \subset \operatorname{Conv}(\operatorname{Epi} f)$. Положим $M = \max(\sup_D f, \sup_{\widetilde{D}} h)$. Тогда $M < +\infty$ и верны равенства

$$\operatorname{Epi} f = \operatorname{Epi}_M f \cup \bigl(D \times [M, +\infty)\bigr); \quad \operatorname{Epi} h = \operatorname{Epi}_M h \cup \bigl(\widetilde{D} \times [M, +\infty)\bigr). \tag{2.6}$$

Поэтому

$$\operatorname{Extr}(\operatorname{Epi}_M h) = \operatorname{Extr}(\operatorname{Epi} h) \cup (\operatorname{Extr}(\widetilde{D}) \times \{M\}). \tag{2.7}$$

Так как $\operatorname{Extr}(\widetilde{D}) \subset D$, то $\operatorname{Extr}(\widetilde{D}) \times \{M\} \subset \operatorname{Epi}_M f$. Кроме того, по условию теоремы $\operatorname{Extr}(\operatorname{Epi} h) \subset \operatorname{Gr} f \subset \operatorname{Epi}_M f$. Отсюда, с учетом формулы (2.7), вытекает, что $\operatorname{Extr}(\operatorname{Epi}_M h) \subset \operatorname{Epi}_M f$. Так как множество $\operatorname{Epi}_M h \subset \mathbb{R}^{n+1}$ компактно (по пункту (2) леммы 2) и выпукло, то по теореме Минковского [9, теорема 1.18.3] выполнено равенство $\operatorname{Conv}\bigl(\operatorname{Extr}(\operatorname{Epi}_M h)\bigr) = \operatorname{Epi}_M h$. Следовательно, верно включение $\operatorname{Epi}_M h \subset \operatorname{Conv}(\operatorname{Epi}_M f)$. Отсюда, в силу замечания 6 и равенств (2.6), вытекают следующие соотношения, завершающие доказательство теоремы:

$$\operatorname{Epi} h = \operatorname{Epi}_M h \cup \bigl(\widetilde{D} \times [M, +\infty)\bigr) \subset \operatorname{Conv}(\operatorname{Epi}_M f) \cup \operatorname{Conv}\bigl(D \times [M, +\infty)\bigr) \subset$$
$$\subset \operatorname{Conv}\bigl(\operatorname{Epi}_M f \cup \bigl(D \times [M, +\infty)\bigr)\bigr) = \operatorname{Conv}(\operatorname{Epi} f). \qquad \square$$

Замечание 8. Из теоремы 6 и двойственной к ней следует, что если выпуклая и вогнутая оболочки функции f естественны, то на множестве $\mathrm{ExtrEA}(f, D)$ совпадают значения функций $\check{f}_D$ и f, а на множестве $\mathrm{ExtrSA}(f, D)$ — значения функций $\hat{f}_D$ и f. Таким образом, $\check{f}_D$ и $\hat{f}_D$ являются, соответственно, нижней и верхней интерполянтами для f в смысле замечания 3. Из указанного совпадения вытекает также, что f выпукла на любом выпуклом подмножестве из $\mathrm{ExtrEA}(f, D)$ и f вогнута на любом выпуклом подмножестве из $\mathrm{ExtrSA}(f, D)$.

Замечание 9. Если даны функция $f\colon D \to \mathbb{R}$ и подмножество $D_0 \subset D$, то ограничения функций $\check{f}_D$ и $\hat{f}_D$ на D_0 могут не совпадать, соответственно, с функциями $\check{f}_{D_0}$ и $\hat{f}_{D_0}$. Это видно из примера 1. Достаточное условие такого совпадения описано в теореме 7.

Теорема 7. *Пусть D — это выпуклое подмножество в ВЛП X, и гиперплоскость $\Gamma \subset X$ отсекает от D часть D_0, содержащую $D \cap \Gamma$ (при этом вторая отсекаемая от D часть не пересекается с $D \cap \Gamma$). Пусть, кроме того, у функции $f\colon X \to \mathbb{R}$ выпуклая оболочка $\check{f}_D$ естественна и на $D \cap \Gamma$ совпадает с f. Тогда ограничение функции $\check{f}_D$ на множество D_0 является естественной выпуклой оболочкой функции f на D_0, причем выполняется равенство*

$$\mathrm{ExtrEA}(f, D_0) = (\mathrm{ExtrEA}(f, D) \cap D_0) \cup \mathrm{ExtrEA}(f, D \cap \Gamma). \tag{2.8}$$

Доказательство. (1) Известно (см., например, [15, гл. III, § 1, п. 6]), что по гиперплоскости Γ можно подобрать ненулевой линейный функционал $\gamma\colon X \to \mathbb{R}$ и число $c \in \mathbb{R}$ такие, что $\Gamma = \{x \in X \mid \gamma(x) = c\}$. Без ограничения общности можно считать, что D_0 лежит в полупространстве $X^+ = \{x \in X \mid \gamma(x) \geqslant c\}$. При этом выполняется равенство $D_0 = D \cap X^+$, поэтому множество D_0 выпукло как пересечение выпуклых множеств.

Для доказательства того, что $\check{f}_D|_{D_0}$ является естественной выпуклой оболочкой для f на D_0, достаточно показать, в силу определения 3, что $\operatorname{Epi} \hat{f}_D \cap (D_0 \times \mathbb{R}) = \operatorname{Conv}\bigl(\operatorname{Epi} f \cap (D_0 \times \mathbb{R})\bigr)$, то есть $\operatorname{Conv}(\operatorname{Epi} f) \cap (D_0 \times \mathbb{R}) = \operatorname{Conv}\bigl(\operatorname{Epi} f \cap (D_0 \times \mathbb{R})\bigr)$. Правая часть лежит в левой в силу пунктов (2) и (3) замечания 6. Докажем обратное включение, то есть что любая точка $x \in \operatorname{Conv}(\operatorname{Epi} f) \cap (D_0 \times \mathbb{R})$ лежит в $\operatorname{Conv}\bigl(\operatorname{Epi} f \cap (D_0 \times \mathbb{R})\bigr)$. Так как $x \in \operatorname{Conv}(\operatorname{Epi} f)$, то x принадлежит некоторому симплексу S с вершинами из множества $\operatorname{Epi} f$. Поскольку, кроме того, $x \in D_0 \times \mathbb{R}$, то x лежит в выпуклом многограннике $S \cap (D_0 \times \mathbb{R})$ с вершинами из $\operatorname{Epi} f \cap (D_0 \times \mathbb{R})$. Поэтому $x \in \operatorname{Conv}\bigl(\operatorname{Epi} f \cap (D_0 \times \mathbb{R})\bigr)$.

(2) Равенство (2.8) следует из доказанного совпадения $\check{f}_D$ и $\check{f}_{D_0}$ на D_0. □

§ 3. Крайние подабсциссы и надабсциссы функции Кобаяши–Грея–Такаги и глобальные экстремумы функций, выражающихся через нее

Немного изменив определение, данное Кобаяши в [3, с. 170], мы будем называть *функцией Кобаяши–Грея–Такаги* функцию $K(x)$, определяемую функциональным рядом (см. также [5]):

$$K(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} K_0(2^n x), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

где $K_0(x) = 2\rho(x/2 + 1/4, \mathbb{Z}) - 1/2$, величина $\rho(y, \mathbb{Z}) = |\{y + 1/2\} - 1/2|$ — это расстояние между точкой $y \in \mathbb{R}$ и ближайшей к ней целой точкой, $\{y\}$ — дробная часть числа y. При $0 \leqslant x \leqslant 2$ функцию $K_0(x)$ можно задать также формулами:

$$K_0(x) = \begin{cases} x & \text{при} \quad x \in [0; 1/2]; \\ 1 - x & \text{при} \quad x \in [1/2; 3/2]; \\ x - 2 & \text{при} \quad x \in [3/2; 2]. \end{cases} \tag{3.2}$$

Очевидно, функция $K(x)$ имеет период 2, нечетна и подчиняется равенству

$$K(x) = K_0(x) + \frac{1}{2}K(2x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.3}$$

В обзоре [17, с. 36] она названа *Gray Takagi function of Kobayashi*. Кроме того, в [17, с. 43] указано, что $K(x)$ всюду непрерывна, но нигде не дифференцируема на $\mathbb{R}$. График функции $K(x)$ приведен на странице 492 (линия A на *рисунке* 2). Функция Кобаяши–Грея–Такаги была применена в [3] для вычисления двоичных цифровых сумм в кодировке Грея.

Как показано в [5, теорема 1], на $[0;1]$ глобальный максимум функции $K(x)$ равен $8/15$, причем множество $\operatorname{Argmax}_{[0;1]} K$ состоит из всех чисел, 16-ричная запись которых имеет лишь цифры 4 или 8. Поэтому наименьшая точка глобального максимума — это $0{,}444\ldots = 4/15$, а наибольшая — это $0{,}888\ldots = 8/15$. Отсюда, в силу формул (3.3), (3.2) и периодичности $K(x)$, имеем: $K(17/15) = K_0(17/15) + K(34/15)/2 = -2/15 + K(4/15)/2 = -2/15 + (8/15)/2 = 2/15$,

$$K\Big(\frac{17}{30}\Big) = K_0\Big(\frac{17}{30}\Big) + \frac{1}{2}K\Big(\frac{17}{15}\Big) = \frac{13}{30} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{15} = \frac{1}{2}. \tag{3.4}$$

Из [5, теорема 1, следствие 2] видим, что глобальный минимум $K(x)$ на $[0;1]$ равен $-2/15$, причем наименьшая точка минимума — это $13/15$, а наибольшая — это $14/15$.

В [5, теорема 2] найден глобальный максимум функции $w(x) = \log_2 x + K(x)/x$ на $(0;1]$. Он равен величине $M = \log_2(16/15)$ и достигается только в точках вида $s_n = 8/(15\cdot 2^n)$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$. Следовательно, $K(s_n) = s_n(M - \log_2 s_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Положим $g(x) = \log_2 x$, $v(x) = x$. Легко убедиться, что функция $(g - M)v$ строго выпукла на $(0;1]$. Значит, в силу теоремы 2, точки s_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, являются крайними подабсциссами функции $K(x)$ на $(0;1]$.

Зададим функцию $\psi_\vartriangle(x) = x(\log_2(16/15) - \log_2 x)$ на полуинтервале $(0;1]$, а также множество $E_\vartriangle = \{0; 17/30; 1\} \cup \{s_n\}_{n=0}^{\infty}$. Кроме того, зададим ломаную $h_\vartriangle$ с бесконечным числом звеньев, интерполирующую функцию $K(x)$ в точках множества $E_\vartriangle$. Тогда получим: $h_\vartriangle(s_n) = s_n(M - \log_2 s_n) = 8(n+1)/(15\cdot 2^n)$ при $n = 0, 1, 2, \ldots$, а также $h_\vartriangle(0) = h_\vartriangle(1) = 0$ и $h_\vartriangle(17/30) = 1/2$ (в силу (3.4)). Так как при этом $h_\vartriangle$ линейна на отрезках $[s_0; 17/30]$, $[17/30; 1]$ и $[s_{n+1}; s_n]$ при всех $n = 0, 1, 2, \ldots$, то верны следующие формулы:

$$\begin{aligned} &h_\vartriangle(x) = nx + s_n \text{ при } x \in [s_{n+1}; s_n],\ n = 0, 1, 2, \ldots; \\ &h_\vartriangle(x) = \frac{16}{15} - x \text{ при } x \in \Big[\frac{8}{15}; \frac{17}{30}\Big]; \quad h_\vartriangle(x) = \frac{15(1-x)}{13} \text{ при } x \in \Big[\frac{17}{30}; 1\Big]. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Далее, зададим функцию $\psi_\triangledown(x) = (1-x)\big(\log_2(1-x) - \log_2(4/15)\big)$ на $[0;1)$, а также множество $E_\triangledown = \{0; 1\} \cup \{1 - s_n\}_{n=2}^{\infty}$. Кроме того, зададим ломаную $h_\triangledown$ с бесконечным числом звеньев так: $h_\triangledown(x) = -2/13\cdot x$ при $x \in [0; 13/15]$ и $h_\triangledown(x) = 1 - x - 1/2\cdot h_\vartriangle(2 - 2x)$ при $x \in [13/15; 1]$. Таким образом, $h_\triangledown(x) = (k-2)(x-1) - s_k$ при $x \in [1 - s_k; 1 - s_{k+1}]$, $k = 2, 3, \ldots$ (в силу (3.5)), и $h_\triangledown(1) = 0$. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3. *Выполняются неравенства:*

(1) $K(x) \leqslant 16/15 - x$ *при* $x \in [8/15; 17/30]$*;*

(2) $K(x) \geqslant -2/13\cdot x$ *при* $x \in [0; 13/15]$*;*

(3) $K(x) \leqslant 15/13\cdot(1-x)$ *при* $x \in [17/30; 1]$*;*

(4) *Для любого* $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$K(x) \leqslant nx + s_n \text{ при } x \in [s_{n+1}; s_n]. \tag{3.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1) Согласно [5, следствие 2], глобальный минимум $K(x)$ на $[1/2;1]$ равен $-2/15$. Поэтому, с учетом периодичности и нечетности $K(x)$, при любом $t \in [1;3/2]$ верны соотношения $K(t) = K(t-2) = -K(2-t) \leqslant 2/15$. Отсюда, в силу формул (3.3) и (3.2), для всех $x \in [1/2;3/4]$ получим доказываемое: $K(x) = K_0(x) + 1/2 \cdot K(2x) \leqslant 1 - x + 1/2 \cdot 2/15 = 16/15 - x$.

(2) Из утверждения [5, пункт 3 теоремы 2] и его доказательства вытекают неравенства $K(x) \geqslant \varphi(x) = x(\log_2(11/15) - \log_2 x)$ при $x \in (0;1/2]$ и $K(x) \geqslant \psi_\triangledown(x)$ при $x \in (1/2;13/15]$. Поскольку $\varphi(x) \geqslant -2/13 \cdot x$ при $x \in (0;1/2]$ и $\psi_\triangledown(x) \geqslant -2/13 \cdot x$ при $x \in (1/2;13/15]$, то отсюда следует, что $K(x) \geqslant -2/13 \cdot x$ при $x \in [0;13/15]$.

(3) Из неравенства пункта (2), в силу периодичности и нечетности $K(x)$, при всех $t \in [17/15;2]$ вытекают соотношения $K(t) = K(t-2) = -K(2-t) \leqslant 2/13 \cdot (2-t)$. Отсюда, а также из формул (3.3) и (3.2), для любой точки $x \in [17/30;1]$ следует, что верны также соотношения $K(x) = K_0(x) + 1/2 \cdot K(2x) \leqslant 1 - x + 1/2 \cdot 2/13(2-2x) = 15/13 \cdot (1-x)$.

(4) Применим индукцию по n. При $n = 0$ неравенство (3.6) имеет вид $K(x) \leqslant 8/15$ и вытекает из [5, теорема 1]. Выведем теперь из (3.6) его аналог для $n+1$. Пусть $x \in [s_{n+2}; s_{n+1}]$. Тогда $2x \in [s_{n+1}; s_n]$ и $K(2x) \leqslant 2nx + s_n$ согласно (3.6). Отсюда, в силу формул (3.3) и (3.2), получаем нужное неравенство: $K(x) = x + 1/2 \cdot K(2x) \leqslant x + 1/2 \cdot (2nx + s_n) = (n+1)x + s_{n+1}$.$\square$

Предложение 4. (1) *На отрезке* $[0;1]$ *естественной вогнутой оболочкой функции* $K(x)$ *является функция* $h_\triangle$, *а естественной выпуклой оболочкой — функция* $h_\triangledown$.

(2) *Множество крайних подаргументов* $\operatorname{ExtrSA}(K,[0;1])$ *совпадает с* $E_\triangle$*:*

$$\operatorname{ExtrSA}(K,[0;1]) = E_\triangle = \Big\{0; \frac{17}{30}; 1\Big\} \cup \Big\{\frac{8}{15 \cdot 2^n}\Big\}_{n=0}^{\infty} = \Big\{0, \ldots, \frac{1}{15}, \frac{2}{15}, \frac{4}{15}, \frac{8}{15}, \frac{17}{30}, 1\Big\},$$

а множество крайних надаргументов $\operatorname{ExtrEA}(K,[0;1])$ *— с множеством* $E_\triangledown$*:*

$$\operatorname{ExtrEA}(K,[0;1]) = E_\triangledown = \Big\{0; 1\Big\} \cup \Big\{1 - \frac{2}{15 \cdot 2^k}\Big\}_{k=0}^{\infty} = \Big\{0, \frac{13}{15}, \frac{14}{15}, \frac{29}{30}, \frac{59}{60}, \frac{119}{120}, \ldots, 1\Big\}.$$

(3) *Функции* $\psi_\triangle$ *и* $\psi_\triangledown$ *бесконечно дифференцируемы на интервале* $(0;1)$. *При этом* $\psi_\triangle$ *строго вогнута и интерполирует* $K(x)$ *на множестве* $\operatorname{ExtrSA}(K,[0;1]) \setminus \{0;17/30;1\}$, *а* $\psi_\triangledown$ *строго выпукла и интерполирует* $K(x)$ *на множестве* $\operatorname{ExtrEA}(K,[0;1]) \setminus \{0;1\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1) Воспользуемся пунктом (2) теоремы, двойственной к теореме 6. Функция $h_\triangle$ вогнута, так как она непрерывна и, в силу формул (3.5), ее производная не возрастает на области дифференцируемости. Отсюда вытекает, что все крайние точки подграфика $\operatorname{Sub} h_\triangle$ имеют вид $\big(x, h_\triangle(x)\big) = \big(x, K(x)\big)$, где $x \in E_\triangle$. Значит, верно включение $\operatorname{Extr}(\operatorname{Sub} h_\triangle) \subset \operatorname{Gr} f$. Кроме того, из леммы 3 вытекает, что $h_\triangle \geqslant K$ на $[0;1]$. Следовательно, $\hat{K}_{[0;1]} = h_\triangle$ в силу теоремы, двойственной к теореме 6.

Далее, из формул (3.3) и (3.2) при $x \in [13/15;1]$ следует, что $K(x) = 1 - x + 1/2 \cdot K(2x)$. Отсюда, в силу периодичности и нечетности $K(x)$, получаем: $K(x) = 1 - x - 1/2 \cdot K(2-2x)$. Так как $h_\triangledown(x) = 1 - x - 1/2 \cdot h_\triangle(2-2x)$ при $x \in [13/15;1]$ и $h_\triangle = \hat{K}_{[0;1]}$, то $h_\triangledown = \check{K}_{[0;1]}$ ввиду теоремы 6 и пункта (2) леммы 3.

(2) В пункте (1) доказано, что крайние точки подграфика $\operatorname{Sub} h_\triangle = \operatorname{Conv}(\operatorname{Sub} K)$ имеют вид $\big(x, h_\triangle(x)\big) = \big(x, K(x)\big)$, где $x \in E_\triangle$. Отсюда, в силу определения 3, следует равенство $\operatorname{ExtrSA}(K,[0;1]) = E_\triangle$. Аналогично доказывается, что $\operatorname{ExtrEA}(K,[0;1]) = E_\triangledown$.

(3) Имеем: $\psi''_\triangle(x) = -1/(x \ln 2) < 0$ при $x \in (0;1]$. Следовательно, $\psi_\triangle$ строго вогнута на полуинтервале $(0;1]$. Строгая выпуклость функции $\psi_\triangledown$ на $[0;1)$ доказывается аналогично.

Факт интерполирования функциями $\psi_\vartriangle$ и $\psi_\triangledown$ функции $K(x)$ на соответствующих множествах следует из пункта 2) и определения функций $\psi_\vartriangle$ и $\psi_\triangledown$. $\square$

На рисунке 2 (страница 492) приведены графики функции Кобаяши–Грея–Такаги (линия A), ее вогнутой оболочки (линия B), ее выпуклой оболочки (линия D), ее верхней интерполянты $\psi_\vartriangle$ (линия C) и ее нижней интерполянты $\psi_\triangledown$ (линия E), а также показаны множества ее крайних подабсцисс (знаками $\vartriangle$) и надабсцисс (знаками $\triangledown$) на $[0;1]$.

Теперь найдем глобальные экстремумы двух функций, выражающихся через $K(x)$.

Предложение 5. (1) *Глобальный максимум функции* $K(x) - x\sqrt{1-x}$ *на отрезке* $[0;1]$ *равен* $4(30-\sqrt{165})/225 \approx 0{,}3050$ *и достигается только в точке* $4/15$.

(2) *На* $[0;1]$ *у функции* $K(x)/\cos x$ *глобальный максимум равен* $8/\bigl(15\cos(8/15)\bigr) \approx 0{,}6194$ *и достигается только в точке* $8/15$, *а глобальный минимум равен* $-2/\bigl(15\cos(14/15)\bigr) \approx$ $\approx -0{,}2240$ *и достигается только в точке* $14/15$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1) Функция $g(x) = -x\sqrt{1-x}$ строго выпукла, поскольку имеем: $g''(x) = (3/4\cdot x - 1)/\sqrt{(1-x)^3} < 0$ при $x \in [0;1)$. Значит, по теореме 1, все точки глобального максимума функции $L(x) = K(x) - x\sqrt{1-x}$ на $[0;1]$ лежат в множестве $\operatorname{ExtrSA}(K,[0;1])$. Следовательно, в силу пунктов (2) и (3) предложения 4, нам достаточно сначала найти у функции $y(x) = x(\log_2(16/15) - \log_2 x) - x\sqrt{1-x}$ глобальный максимум на множестве $\{8/(15\cdot 2^n)\}_{n=0}^{\infty}$, входящем в $(0;8/15]$, а затем сравнить его со значениями $L(x)$ в точках $x \in \{0, 17/30, 1\}$.

Применим производную. Имеем: $y'(x) = (\ln(16/15) - 1 - \ln x)/\ln 2 + (3/2\cdot x - 1)/\sqrt{1-x}$, а также $y''(x) = y_2(x)/\bigl(4\ln 2\cdot x\sqrt{(1-x)^3}\bigr)$, где $y_2(x) = \ln 2\cdot\bigl(4/3 - 3(2/3-x)^2\bigr) - 4\sqrt{(1-x)^3}$. Так как $y_2(x)$ возрастает при $0 \leqslant x \leqslant 8/15$ и $y_2(8/15) < 0$, то $y''(x) < 0$ и $y'(x)$ убывает при $0 < x \leqslant 8/15$. Далее, поскольку $y'(2/15) > 0$ и $y'(4/15) < 0$, то $y'(x) > 0$ и $y(x)$ возрастает при $0 < x \leqslant 2/15$, а также $y'(x) < 0$ и $y(x)$ убывает при $4/15 \leqslant x \leqslant 8/15$. Следовательно, точки глобального максимума функции $L(x)$ на $\operatorname{ExtrSA}(K,[0;1])$ (а значит, и на $[0;1]$) находятся среди точек 0, 2/15, 4/15, 17/30 и 1. Сравнивая значения $L(x)$ в этих точках, видим, что глобальный максимум, равный $4(30-\sqrt{165})/225 \approx 0{,}3050$, достигается только при $x = 4/15$.

(2) Пусть $D = [0;1]$, $v(x) = \cos x$, $g(x) \equiv 0$, $M_2 = \sup_D(K/v + g)$, $m_2 = \inf_D(K/v + g)$. Тогда $M_2 > 0$, $m_2 < 0$, $v(x) > 0$ при $x \in D$, функция $(g(x) - M_2)\cdot v(x) = -M_2\cos x$ строго выпукла, а функция $(g(x) - m_2)\cdot v(x) = -m_2\cos x$ строго вогнута на $\widetilde{D}$. Поэтому, в силу теоремы 2 и двойственной к ней, у функции $K(x)/\cos x$ все точки глобального максимума лежат в множестве $\operatorname{ExtrSA}(K,[0;1])$, а точки глобального минимума — в множестве $\operatorname{ExtrEA}(K,[0;1])$. Отсюда видим, в силу пунктов (2) и (3) предложения 4, что достаточно найти глобальный максимум функции $z_\vartriangle(x) = x(\log_2(16/15) - \log_2 x)/\cos x$ на множестве $\{8/(15\cdot 2^n)\}_{n=0}^{\infty} \subset (0;8/15]$, а также глобальный минимум функции $z_\triangledown(x) =$ $= (1-x)\bigl(\log_2(1-x) - \log_2(4/15)\bigr)/\cos x$ на множестве $\{1 - 2/(15\cdot 2^k)\}_{k=0}^{\infty} \subset [13/15;1)$, и затем сравнить их со значениями $K(x)/\cos x$ в точках 0, 17/30 и 1. Мы сделаем это ниже в пунктах (а) и (б).

(а) Дифференцируя функцию $z_\vartriangle(x)$, получим равенство: $z'_\vartriangle(x) = z_{\vartriangle 1}(x)/(\ln 2\cdot\cos^2 x)$, где $z_{\vartriangle 1}(x) = (\cos x + x\sin x)(\ln(16/15) - \ln x) - \cos x$. Еще раз применив производную, находим: $z'_{\vartriangle 1}(x) = (x\ln(16/15) - x\ln x - 1/x)\cos x$. Если $x \in (0;8/15]$, то $-x\ln x \leqslant 1/e$ и $-1/x \leqslant -15/8$, поэтому $z'_{\vartriangle 1}(x) \leqslant (8/15\cdot\ln(16/15) + 1/e - 15/8)\cos x < 0$. Таким образом, $z_{\vartriangle 1}(x)$ убывает. Так как $z_{\vartriangle 1}(4/15) > 0$ и $z_{\vartriangle 1}(8/15) < 0$, то глобальный максимум $z_\vartriangle(x)$ на множестве $\{8/(15\cdot 2^n)\}_{n=0}^{\infty}$ достигается при $x = 4/15$ или при $x = 8/15$. Сравнивая значения функции $K(x)/\cos x$ в точках 0, 4/15, 8/15, 17/30 и 1, находим, что ее глобальный максимум достигается только в точке $8/15$ и равен $8/\bigl(15\cos(8/15)\bigr) \approx 0{,}6194$.

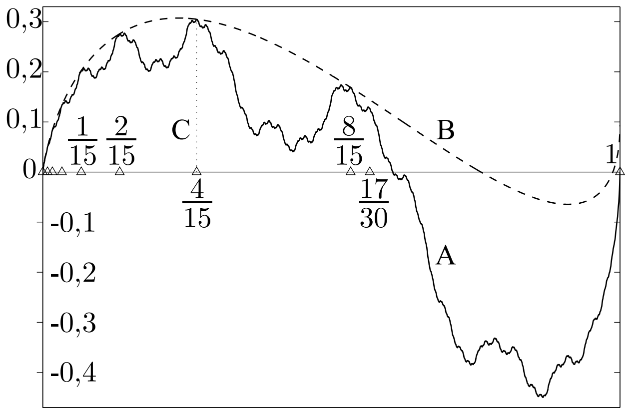

Рис. 3.

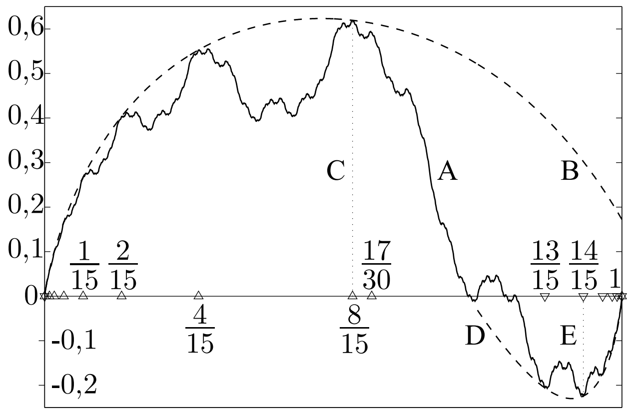

Рис. 4.

(б) Теперь продифференцируем функцию $z_\triangledown(x)$: $z'_{\triangledown 1}(x) = z_{\triangledown 1}(x)/(\ln 2 \cdot \cos^2 x)$, где обозначено $z_{\triangledown 1}(x) = \big((1-x)\sin x - \cos x\big)\big(\ln(1-x) + \ln(15/4)\big) - \cos x$. Дифференцируя снова, получим: $z'_{\triangledown 1}(x) = \big((1-x)\ln(1-x) + (1-x)\ln(15/4) + 1/(1-x)\big)\cos x$. Если $x \in [13/15; 1)$, то $1 - x \in (0; 2/15]$, $(1-x)\ln(1-x) \geqslant -1/e$ и $1/(1-x) \geqslant 15/2$. Отсюда вытекает, что $z'_{\triangledown 1}(x) \geqslant (-1/e + 15/2)/\cos x > 0$. Следовательно, $z_{\triangledown 1}(x)$ возрастает. Так как $z_{\triangledown 1}(13/15) < 0$ и $z_{\triangledown 1}(14/15) > 0$, то глобальный минимум $z_\triangledown(x)$ на множестве $\{1 - 2/(15 \cdot 2^k)\}_{k=0}^{\infty}$ достигается при $x = 13/15$ или $x = 14/15$. Сравнив значения функции $K(x)/\cos x$ в точках 0, $13/15$, $14/15$ и 1, находим, что ее глобальный минимум достигается только в точке $14/15$ и равен $-2/\big(15\cos(14/15)\big) \approx -0{,}2240$. $\square$

На рисунке 3 приведены графики функции $K(x) - x\sqrt{1-x}$ (линия A), а также функции $\psi_\triangle(x) - x\sqrt{1-x}$ (линия B). На нем, кроме того, изображены множество крайних подабсцисс для $K(x)$ (знаками $\triangle$) и глобальный максимум функции $K(x) - x\sqrt{1-x}$ на $[0; 1]$ (линия C).

На рисунке 4 приведены графики функций $K(x)/\cos x$ (линия A), $\psi_\triangle(x)/\cos x$ (линия B) и $\psi_\triangledown(x)/\cos x$ (линия D), а также изображены множество крайних подабсцисс $\mathrm{ExtrSA}(K, [0; 1])$ (знаками $\triangle$), множество крайних надабсцисс $\mathrm{ExtrEA}(K, [0; 1])$ (знаками $\triangledown$) и глобальные экстремумы функции $K(x)/\cos x$ на $[0; 1]$ (линии C и E соответственно).

Финансирование. Параграфы § 1 и § 2 работы выполнены при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ, соглашение № 075-15-2019-1931; параграф § 3 работы выполнен при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, грант № 19–07–00782.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н. Введение в минимакс. М.: Наука, 1972.
2. Sukhorukova N., Ugon J. Chebyshev approximation by linear combinations of fixed knot polynomial splines with weighting functions // Journal of Optimization Theory and Applications. 2016. Vol. 171. No. 2. P. 536–549. https://doi.org/10.1007/s10957-016-0887-0
3. Kobayashi Z. Digital sum problems for the Gray code representation of natural numbers // Interdisciplinary Information Sciences. 2002. Vol. 8. No. 2. P. 167–175. https://doi.org/10.4036/iis.2002.167
4. Chen L. H. Y., Hwang H.-K., Zacharovas V. Distribution of the sum-of-digits function of random integers: A survey // Probability Surveys. 2014. Vol. 11. P. 177–236. https://doi.org/10.1214/12-PS213

5. Галкин О. Е., Галкина С. Ю. Глобальные экстремумы функции Кобаяши–Грея–Такаги и двоичные цифровые суммы // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27. Вып. 1. С. 17–25. https://doi.org/10.20537/vm170102
6. Демьянов В. Ф., Васильев Л. В. Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981.
7. Рокафеллар Р. Т. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
8. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
9. Половинкин Е. С., Балашов М. В. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М.: Физматлит, 2007.
10. Elhedhli S., Goffin J.-L., Vial J.-P. Nondifferentiable optimization // Encyclopedia of optimization. Boston, MA: Springer, 2009. P. 2584–2590. https://doi.org/10.1007/978-0-387-74759-0_445
11. Bagirov A., Karmitsa N., Mäkelä M. M. Introduction to nonsmooth optimization. Theory, practice and software. Springer, 2014. https://doi.org/10.1007/978-3-319-08114-4
12. Ovcharova N., Gwinner J. A study of regularization techniques of nondifferentiable optimization in view of application to hemivariational inequalities // Journal of Optimization Theory and Applications. 2014. Vol. 162. No. 3. P. 754–778. https://doi.org/10.1007/s10957-014-0521-y
13. Kolosnitsyn A. V. Computational efficiency of the simplex embedding method in convex nondifferentiable optimization // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2018. Vol. 58. No. 2. P. 215–222. https://doi.org/10.1134/S0965542518020070
14. Mishura Y., Schied A. On (signed) Takagi–Landsberg functions: pth variation, maximum, and modulus of continuity // Journal of Optimization Theory and Applications. 2019. Vol. 473. No. 1. P. 258–272. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2018.12.047
15. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.
16. Шварц Л. Анализ. Т. 1. М.: Мир, 1972.
17. Allaart P. C., Kawamura K. The Takagi function: a survey // Real Analysis Exchange. 2011. Vol. 37. No. 1. P. 1–54. https://projecteuclid.org/euclid.rae/1335806762
18. Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия. Введение. М.: Мир, 1989.

Поступила в редакцию 16.09.2019

Галкин Олег Евгеньевич, с. н. с., лаборатория динамических систем и приложений, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», 603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12.
E-mail: olegegalkin@ya.ru

Галкина Светлана Юрьевна, доцент, кафедра фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», 603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12.
E-mail: svetlana.u.galkina@mail.ru

Цитирование: О. Е. Галкин, С. Ю. Галкина. Применение крайних под- и надаргументов, выпуклых и вогнутых оболочек для поиска глобальных экстремумов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2019. Т. 29. Вып. 4. С. 483–500.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'UTERNYE NAUKI
MATHEMATICS 2019. Vol. 29. Issue 4. Pp. 483–500.

O. E. Galkin, S. Yu. Galkina

Application of extreme sub- and epiarguments, convex and concave envelopes to search for global extrema

Keywords: nondifferentiable optimization, extreme subarguments (subabscissae) and epiarguments (epiabscissae) of function, natural convex and concave envelopes of function, Gray Takagi function of Kobayashi.

MSC2010: 26A27, 26A30, 26B25, 49M30, 90C26

DOI: 10.20537/vm190402

For real-valued functions f, defined on subsets of real linear spaces, the notions of extreme subarguments, extreme epiarguments, natural convex $\check{f}$ and natural concave $\hat{f}$ envelopes are introduced. It is shown that for any strictly convex function g, any point of the global maximum of the function $f+g$ is an extreme subargument for the function f. A similar result is obtained for functions of the form $f/v+g$. Based on these results, a method is proposed, that facilitates the search for global extrema of functions in some cases. It is proved that under certain conditions the functions $f/v+g$ and $\hat{f}/v+g$ have the same global maximum and the same points of the global maximum. Necessary and sufficient conditions for the naturalness of the convex envelope of function are given. A sufficient condition for the invariance of values of the concave envelope $\hat{f}$ during narrowing the domain of f is established. Extreme sub- and epiarguments for continuous nowhere differentiable Gray–Takagi function $K(x)$ of Kobayashi on the segment $[0;1]$ are found. Moreover, the global extrema of the function $K(x)/\cos x$ and the global maximum of the function $K(x)-\sqrt{x(1-x)}$ on $[0;1]$ are calculated. The article is provided with examples and graphic illustrations.

Funding. Sections § 1 and § 2 of the study were partially supported by Laboratory of Dynamical Systems and Applications NRU HSE, of the Ministry of Science and Higher Education of the RF, grant agreement No. 075-15-2019-1931; section § 3 of the study was funded by RFBR, project number 19–07–00782.

REFERENCES

1. Dem'yanov V. F., Malozemov V. N. *Introduction to minimax*, New York: Dover, 1990.
   Original Russian text published in Dem'yanov V. F., Malozemov V. N. *Vvedenie v minimaks*, Moscow: Nauka, 1972.
2. Sukhorukova N., Ugon J. Chebyshev approximation by linear combinations of fixed knot polynomial splines with weighting functions, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2016, vol. 171, no. 2, pp. 536–549. https://doi.org/10.1007/s10957-016-0887-0
3. Kobayashi Z. Digital sum problems for the Gray code representation of natural numbers, *Interdisciplinary Information Sciences*, 2002, vol. 8, no. 2, pp. 167–175.
   https://doi.org/10.4036/iis.2002.167
4. Chen L. H. Y., Hwang H.-K., Zacharovas V. Distribution of the sum-of-digits function of random integers: A survey, *Probability Surveys*, 2014, vol. 11, pp. 177–236.
   https://doi.org/10.1214/12-PS213
5. Galkin O. E., Galkina S. Yu. Global extrema of the Gray Takagi function of Kobayashi and binary digital sums, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 1, pp. 17–25 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm170102
6. Dem'yanov V. F., Vasil'ev L. V. *Nondifferentiable optimization*, New York: Springer, 1985.
   Original Russian text published in Dem'yanov V. F., Vasil'ev L.V. *Nedifferentsiruemaya optimizatsiya*, Moscow: Nauka, 1981.
7. Rockafellar R. T. *Convex analysis*, Princeton: Princeton Univ. Press, 1970.
   Translated under the title *Vypuklyi analiz*, Moscow: Mir, 1973.

8. Ioffe A. D., Tihomirov V. M. *Theory of extremal problems*, Amsterdam: Elsevier Science, 1979. Original Russian text published in Ioffe A. D., Tikhomirov V. M. *Teoriya ekstremal'nykh zadach*, Moscow: Nauka, 1974.
9. Polovinkin E. S., Balashov M. V. *Elementy vypuklogo i sil'no vypuklogo analiza* (Elements of convex and strongly convex analysis), Moscow: Fizmatlit, 2007.
10. Elhedhli S., Goffin J.-L., Vial J.-P. Nondifferentiable optimization, *Encyclopedia of optimization*, Boston, MA: Springer, 2009, pp. 2584–2590. https://doi.org/10.1007/978-0-387-74759-0_445
11. Bagirov A., Karmitsa N., Mäkelä M. M. *Introduction to nonsmooth optimization. Theory, practice and software*, Springer, 2014. https://doi.org/10.1007/978-3-319-08114-4
12. Ovcharova N., Gwinner J. A study of regularization techniques of nondifferentiable optimization in view of application to hemivariational inequalities, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2014, vol. 162, no. 3, pp. 754–778. https://doi.org/10.1007/s10957-014-0521-y
13. Kolosnitsyn A. V. Computational efficiency of the simplex embedding method in convex nondifferentiable optimization, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2018, vol. 58, no. 2, pp. 215–222. https://doi.org/10.1134/S0965542518020070
14. Mishura Y., Schied A. On (signed) Takagi–Landsberg functions: pth variation, maximum, and modulus of continuity, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2019, vol. 473, no. 1, pp. 258–272. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2018.12.047
15. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza* (Elements of the theory of functions and functional analysis), Moscow: Nauka, 1976.
16. Schwartz L. *Analyse mathématique. I*, Hermann, 1967. Translated under the title *Analiz. Tom 1*, Moscow: Mir, 1972.
17. Allaart P. C., Kawamura K. The Takagi function: a survey, *Real Analysis Exchange*, 2011, vol. 37, no. 1, pp. 1–54. https://projecteuclid.org/euclid.rae/1335806762
18. Preparata F., Shamos M. *Computational geometry. An introduction*, New York: Springer, 1985. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1098-6 Translated under the title *Vychislitel'naya geometriya. Vvedenie*, Moscow: Mir, 1989.

Received 16.09.2019

Galkin Oleg Evgen'evich, Senior Researcher, Laboratory of Dynamical Systems and Applications, National Research University Higher School of Economics, ul. Bolshaya Pecherskaya, 25/12, Nizhni Novgorod, 603155, Russia.
E-mail: olegegalkin@ya.ru

Galkina Svetlana Yur'evna, Associate Professor, Department of Fundamental Mathematics, National Research University Higher School of Economics, ul. Bolshaya Pecherskaya, 25/12, Nizhni Novgorod, 603155, Russia.
E-mail: svetlana.u.galkina@mail.ru

Citation: O. E. Galkin, S. Yu. Galkina. Application of extreme sub- and epiarguments, convex and concave envelopes to search for global extrema, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, issue 4, pp. 483–500.