ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА 2019. Т. 29. Вып. 4. С. 459–482.

УДК 519.63

© *М. Х. Бештоков, В. А. Водахова*

НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ–ДИФФУЗИИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

В прямоугольной области исследуются нелокальные краевые задачи для одномерного нестационарного уравнения конвекции–диффузии дробного порядка с переменными коэффициентами, описывающие диффузионный перенос той или иной субстанции, а также перенос, обусловленный движением среды. Методом энергетических неравенств выводятся априорные оценки решений нелокальных краевых задач в дифференциальной форме. Построены разностные схемы, и для них доказываются аналоги априорных оценок в разностной форме, приводятся оценки погрешности в предположении достаточной гладкости решений уравнений. Из полученных априорных оценок следуют единственность и устойчивость решения по начальным данным и правой части, а также сходимость решения разностной задачи к решению соответствующей дифференциальной задачи со скоростью $O(h^2+\tau^2)$.

Ключевые слова: нелокальные краевые задачи, априорная оценка, нестационарное уравнение конвекции–диффузии, дифференциальное уравнение дробного порядка, дробная производная Капуто.

DOI: 10.20537/vm190401

Методы математического моделирования и вычислительной математики широко используются при исследовании прикладных задач механики сплошной среды, тепло- и массопереноса. При исследовании многих процессов в движущихся средах в качестве основных можно выделить диффузионный перенос той или иной субстанции и перенос, обусловленный движением среды, т. е. конвективный перенос. В газо- и гидродинамике одним из базовых моделей многих процессов выступают краевые задачи для нестационарных уравнений конвекции–диффузии (т. е. параболическое уравнение второго порядка с младшими членами) [1].

В настоящее время стало очевидным, что при решении многих задач в механике, физике, биологии часто встречаются среды и системы, которые хорошо интерпретируются как фракталы [2–7]. Моделирование процессов и явлений фрактальной природы и, в первую очередь, процессы тепломассообмена в средах с фрактальной структурой и памятью приводят к рассмотрению краевых задач для нестационарного уравнения конвекции–диффузии дробного порядка, которые в свою очередь требуют необходимости разработки эффективных вычислительных алгоритмов.

Особенно эффективным методом решения дифференциальных уравнений дробного порядка считается численный метод, наиболее распространенным из которых является метод конечных разностей. Разностным методам решения краевых задач для различных уравнений дробного порядка посвящены работы [8–20].

В работе [8] рассмотрены метод Фурье, явная и частично неявная разностные схемы первого порядка аппроксимации. Приведены простейшие методы идентификации параметров дробной диффузии.

В [9] исследованы вычислительные алгоритмы для решения прямой задачи дробной диффузии в одномерном случае. Рассмотренная модель представляет собой линейное интегро-дифференциальное уравнение с двумя параметрами — дробным порядком производной $\alpha \in [1,2]$ и коэффициентом «скошенности» $\beta \in [-1,1]$. Дробная диффузия существенно отличается от классической поведением концентрации переносимой субстанции на больших расстояниях от носителя начальных данных. Дан обзор основных определений дробных производных, на основе которых построены разностные методы первого и второго порядков аппроксимации по пространству. Приведены как явные, так и частично неявные безусловно устойчивые схемы, а также метод, основанный на преобразовании Фурье.

В [10] рассматриваются разностные схемы для дифференциальных уравнений обыкновенных и с частными производными второго порядка с дробной производной по времени. Отдельно изучены стационарные и нестационарные задачи для уравнения диффузии в одномерной и многомерной областях. Доказаны устойчивость и сходимость разностных схем для рассматриваемых уравнений.

В [11] методом энергетических неравенств получены априорные оценки решения краевых задач для диффузионно-волнового уравнения с дробной производной Капуто.

В [12] построен новый разностный аналог (называемая формулой L2-1), обеспечивающий порядок аппроксимации дробной производной Капуто $O(\tau^{3-\alpha})$. Доказаны устойчивость предлагаемых схем, а также их сходимость в L_2-норме со скоростью, равной порядку погрешности аппроксимации.

В [13] рассматриваются локальные и нелокальные краевые задачи для вырождающихся и невырождающихся псевдопараболических уравнений с дробной производной в смысле Римана–Лиувилля. Доказаны единственность, устойчивость, а также сходимость решений разностных задач к дифференциальным задачам.

Разностные схемы повышенного порядка аппроксимации, например компактная разностная схема [14–17] и спектральный метод [18–20] применялись для повышения пространственной точности уравнения диффузии дробного порядка.

При математическом моделировании тех или иных процессов может возникнуть ситуация, когда граница области протекания реального процесса недоступна для измерений, но можно получить некоторую дополнительную информацию об изучаемом явлении во внутренних точках области. Часто такая информация поступает в виде некоторых средних значений искомого решения или же в виде интегралов от решения. С точки зрения математики такая ситуация приводит к новым нелокальным задачам с интегральными условиями. К первым работам с неклассическими граничными условиями относятся, по-видимому, работы [21, 22]. Работа [23] повлекла за собой систематические исследования нелокальных начально-краевых задач для эллиптических уравнений. Нелокальным краевым задачам для различных уравнений посвящены работы [24–30].

В данной работе изучаются краевые задачи с нелокальными условиями. Каждая из рассматриваемых задач в данной работе ставится как задача решения дифференциального уравнения конвекции–диффузии дробного порядка при определенных интегральных условиях. Доказаны единственность и устойчивость решения по правой части и начальным данным, а также сходимость решения разностной задачи к решению соответствующей дифференциальной задачи.

§ 1. Постановка нелокальной краевой задачи A и априорная оценка в дифференциальной форме

В цилиндре $\overline{Q}_T = \{(x,t) : 0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T\}$ рассмотрим следующую нелокальную краевую задачу:

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + r(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} - q(x,t)u + f(x,t), \qquad 0 < x < l,\ 0 < t \le T, \tag{1.1}$$

$$u(0,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{1.2}$$

$$-k(l,t)u_x(l,t) = \beta(t)\int_0^l u(x,t)\,dx - \mu(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{1.3}$$

$$u(x,0)=u_0(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{1.4}$$

где

$$0<c_0 \le k(x,t) \le c_1, \quad |q(x,t)|,\ |r(x,t)|,\ |r_x(x,t)|,\ |k_x(x,t)|,\ |\beta(t)| \le c_2, \tag{1.5}$$

$\partial_{0t}^{\alpha} u = \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \displaystyle\int_0^t \frac{u_\tau(x,\tau)}{(t-\tau)^\alpha}\,d\tau$ — дробная производная в смысле Капуто порядка α, $0<\alpha<1$, c_i, $i=0,1,2$ — положительные постоянные числа.

В дальнейшем будем предполагать, что задача (1.1)–(1.3) имеет единственное решение, обладающее нужными по ходу изложения производными. Будем также считать, что коэффициенты уравнения и граничных условий удовлетворяют необходимым по ходу изложения условиям гладкости, обеспечивающей нужный порядок аппроксимации разностной схемы.

По ходу изложения будем также использовать положительные постоянные числа M_i, $i=1,2,\ldots$, зависящие только от входных данных рассматриваемой задачи.

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 1 (см. [11]). *Для любой абсолютно непрерывной на $[0,T]$ функции $\upsilon(t)$ справедливо неравенство*

$$\upsilon(t)\partial_{0t}^{\alpha}\upsilon(t) \ge \frac{1}{2}\partial_{0t}^{\alpha}\upsilon^2(t), \quad 0<\alpha<1.$$

Лемма 2 (см. [11]). *Пусть неотрицательная абсолютно непрерывная функция $y(t)$ удовлетворяет для почти всех t из $[0,T]$ неравенству*

$$\partial_{0t}^{\alpha} y(t) \le c_1 y(t) + c_2(t), \quad 0 \le \alpha \le 1,$$

где $c_1>0$, $c_2(t)$ — суммируемая на $[0,T]$ неотрицательная функция. Тогда

$$y(t) \le y(0)E_\alpha(c_1 t^\alpha) + \Gamma(\alpha)E_{\alpha,\alpha}(c_1 t^\alpha)D_{0t}^{-\alpha}c_2(t),$$

где $E_\alpha(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+1)}$, $E_{\alpha,\mu}(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\mu)}$ — функции Миттаг-Леффлера.

Теорема 1. *Если $k(x,t)\in C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, $r(x,t),q(x,t),f(x,t)\in C(\overline{Q}_T)$, $u(x,t)\in C^{2,0}(Q_T)\cap C^{1,0}\left(\overline{Q}_T\right)$, $\partial_{0t}^{\alpha}u(x,t)\in C(\overline{Q}_T)$, и выполнены условия (1.5), тогда для решения задачи (1.1)–(1.4) справедлива следующая априорная оценка:*

$$\|u\|_0^2 + D_{0t}^{-\alpha}\|u_x\|_0^2 \le M\left(D_{0t}^{-\alpha}\left(\|f\|_0^2+\mu^2(t)\right)+\|u_0(x)\|_0^2\right), \tag{1.6}$$

где M — положительная постоянная, зависящая от входных данных задачи (1.1)–(1.4), $D_{0t}^{-\alpha}u = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_0^t \frac{u\,d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}$ — дробный интеграл Римана–Лиувилля порядка α, $0<\alpha<1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Априорную оценку решения задачи (1.1)–(1.4) найдем методом энергетических неравенств. Для этого умножим уравнение (1.1) скалярно на u:

$$\left(\partial_{0t}^{\alpha}u,u\right) = \left(\left(ku_x\right)_x,u\right) + \left(ru_x,u\right) - \left(qu,u\right) + \left(f,u\right), \tag{1.7}$$

где $(a,b)=\displaystyle\int_0^l ab\,dx$, $(a,a)=\|a\|_0^2$, где a,b — заданные на $[0,l]$ функции.

Преобразуем интегралы, входящие в тождество (1.7), пользуясь неравенством Коши с ε [31, с. 100], леммой 1

$$\left(\partial_{0t}^{\alpha} u, u\right) \geq \frac{1}{2}\left(1, \partial_{0t}^{\alpha} u^2\right) = \frac{1}{2}\partial_{0t}^{\alpha}\|u\|_0^2, \tag{1.8}$$

$$\left((ku_x)_x, u\right) = \int_0^l u\,(ku_x)_x\,dx = uku_x\big|_0^l - \int_0^l ku_x^2\,dx, \tag{1.9}$$

$$(ru_x, u) = \int_0^l ruu_x\,dx \leq \frac{c_2^2}{4\varepsilon}\int_0^l u^2\,dx + \varepsilon\int_0^l u_x^2\,dx \leq \varepsilon\|u_x\|_0^2 + \frac{c_2^2}{4\varepsilon}\|u\|_0^2, \tag{1.10}$$

$$-(qu, u) = -\int_0^l qu^2\,dx \leq c_2\|u\|_0^2, \tag{1.11}$$

$$(f, u) = \int_0^l fudx \leq \frac{1}{2}\|u\|_0^2 + \frac{1}{2}\|f\|_0^2. \tag{1.12}$$

Учитывая преобразования (1.8)–(1.12), из (1.7) находим

$$\frac{1}{2}\partial_{0t}^{\alpha}\|u\|_0^2 + c_0\|u_x\|_0^2 \leq uku_x\big|_0^l + \varepsilon\|u_x\|_0^2 + M_1^{\varepsilon}\|u\|_0^2 + M_2\|f\|_0^2. \tag{1.13}$$

Оценим первое слагаемое в правой части (1.13) с учетом (1.2), (1.3):

$$\begin{aligned} uku_x\big|_0^l &= k(l,t)u_x(l,t)u(l,t) - k(0,t)u_x(0,t)u(0,t) = u(l,t)\left(\mu(t) - \beta(t)\int_0^l u(x,t)\,dx\right) = \\ &= \mu(t)u(l,t) - \beta(t)u(l,t)\int_0^l u(x,t)\,dx \leq M_3u^2(l,t) + \frac{1}{2}\mu^2(t) + \frac{1}{2}\left(\int_0^l u(x,t)\,dx\right)^2 \leq \\ &\leq \varepsilon\|u_x\|_0^2 + M_4^{\varepsilon}\|u\|_0^2 + \frac{1}{2}\mu^2(t). \end{aligned} \tag{1.14}$$

Из (1.13) с учетом (1.14) находим

$$\frac{1}{2}\partial_{0t}^{\alpha}\|u\|_0^2 + c_0\|u_x\|_0^2 \leq 2\varepsilon\|u_x\|_0^2 + M_5^{\varepsilon}\|u\|_0^2 + M_6\left(\|f\|_0^2 + \mu^2(t)\right). \tag{1.15}$$

Из (1.15) при $\varepsilon = \dfrac{c_0}{4}$ находим

$$\partial_{0t}^{\alpha}\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2 \leq M_7\|u\|_0^2 + M_8\left(\|f\|_0^2 + \mu^2(t)\right). \tag{1.16}$$

Применяя к обеим частям (1.16) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha}$, находим

$$\|u\|_0^2 + D_{0t}^{-\alpha}\|u_x\|_0^2 \leq M_7 D_{0t}^{-\alpha}\|u\|_0^2 + M_9\left(D_{0t}^{-\alpha}\left(\|f\|_0^2 + \mu^2(t)\right) + \|u_0(x)\|_0^2\right), \tag{1.17}$$

где M — положительное число, зависящее только от входных данных задачи (1.1)–(1.4). На основании леммы 2 из (1.17) находим априорную оценку (1.6). Из априорной оценки (1.6) следуют единственность и непрерывная зависимость решения задачи (1.1)–(1.4) от входных данных в смысле нормы $\|u\|_1^2 = \|u\|_0^2 + D_{0t}^{-\alpha}\|u\|_0^2$. □

§ 2. Устойчивость и сходимость разностной схемы

Для решения задачи (1.1)–(1.4) применим метод конечных разностей. На равномерной сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (1.1)–(1.4) поставим в соответствие разностную схему порядка аппроксимации $O(h^2 + \tau^2)$:

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y = \varkappa_i^j\left(a_i^j y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\right)_{x,i} + b_i^{-j}a_i^j y_{\bar{x},i} + b_i^{+j}a_{i+1}^j y_{x,i}^{(\sigma)} - d_i^j y_i^{(\sigma)} + \varphi_i^j, \quad (x,t) \in \omega_{h,\tau}, \tag{2.1}$$

$$y_0^{(\sigma)} = 0, \tag{2.2}$$

$$-\varkappa_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} = \beta \sum_{i=0}^{N} y_i^{(\sigma)} \hbar + 0.5 h d_N y_N^{(\sigma)} + 0.5 h \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_N - \tilde{\mu}, \quad x = l, \tag{2.3}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \tag{2.4}$$

где $\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y = \dfrac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum\limits_{s=0}^{j} c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)} y_t^s$ — дискретный аналог дробной производной Капуто порядка α, $0 < \alpha < 1$ [12];

$$a_0^{(\alpha,\sigma)} = \sigma^{1-\alpha}, \quad a_l^{(\alpha,\sigma)} = (l+\sigma)^{1-\alpha} - (l-1+\sigma)^{1-\alpha}, \quad l \geq 1,$$

$$b_l^{(\alpha,\sigma)} = \frac{1}{2-\alpha}\left[(l+\sigma)^{2-\alpha} - (l-1+\sigma)^{2-\alpha}\right] - \frac{1}{2}\left[(l+\sigma)^{1-\alpha} + (l-1+\sigma)^{1-\alpha}\right], \quad l \geq 1,$$

$$\text{при } j = 0, \quad c_0^{(\alpha,\sigma)} = a_0^{(\alpha,\sigma)};$$

$$\text{при } j > 0, \quad c_s^{(\alpha,\sigma)} = \begin{cases} a_0^{(\alpha,\sigma)} + b_1^{(\alpha,\sigma)}, \ s = 0, \\ a_s^{(\alpha,\sigma)} + b_{s+1}^{(\alpha,\sigma)} - b_s^{(\alpha,\sigma)}, \ 1 \leq s \leq j-1, \\ a_j^{(\alpha,\sigma)} - b_j^{(\alpha,\sigma)}, \ s = j, \end{cases}$$

$$\varkappa = \frac{1}{1+R}, \quad R = \frac{0.5h|r|}{k} \text{ — разностное число Рейнольдса,}$$

$$r_0 = r(0,t) = r_0^{(j+\sigma)} \leq 0, \quad r_N = r(l,t) = r_N^{(j+\sigma)} \geq 0,$$

$$a_i^j = k\left(x_{i-0.5}, t^{j+\sigma}\right), \quad b_i^j = \frac{r(x, t^{j+\sigma})}{k(x_i, t^{j+\sigma})}, \quad \varphi_i^j = f(x_i, t^{j+\sigma}), \quad \sigma = 1 - \frac{\alpha}{2},$$

$$c_s^{(\alpha,\sigma)} > \frac{1-\alpha}{2}(s+\sigma)^{-\alpha} > 0, \quad y^{(\sigma)} = \sigma y^{j+1} + (1-\sigma) y^j,$$

$$d_i^j = d(x_i, t^{j+\sigma}), \quad \tilde{\mu}(t_{j+\sigma}) = \mu(t_{j+\sigma}) + 0.5 h \varphi_N.$$

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 3 (см. [12]). *Для любой функции $y(t)$, определенной на сетке $\bar{\omega}_\tau$, справедливо неравенство*

$$y^{(\sigma)} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y \geq \frac{1}{2} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} (y^2).$$

Лемма 4 (см. [32]). *Предположим, что неотрицательные последовательности y^j, φ^j, $j = 0, 1, 2, \ldots$, удовлетворяют неравенству*

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y^j \leq \lambda_1 y^{j+1} + \lambda_2 y^j + \varphi^j, \quad j \geq 1,$$

где $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$ — константы. Тогда существует такое τ_0, что если $\tau \leq \tau_0$, то

$$y^{j+1} \leq 2\left(y^0 + \frac{t_j^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \max_{0 \leq j' \leq j} \varphi^{j'}\right) E_\alpha(2\lambda t_j^\alpha), \quad 1 \leq j \leq j_0,$$

где $E_\alpha(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{z^k}{\Gamma(1+k\alpha)}$ — функция Миттаг-Леффлера, $\lambda = \lambda_1 + \dfrac{\lambda_2}{2+2^{1-\alpha}}$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (1.5)*. Тогда существует такое* τ_0*, что если* $\tau \le \tau_0$*, то для решения разностной задачи* (2.1)–(2.4) *справедлива априорная оценка*

$$\|y^{j+1}]|_0^2 \le M\left(\|y^0]|_0^2 + \max_{0\le j'\le j}\left(\|\varphi^{j'}]|_0^2 + \mu^2\right)\right), \tag{2.5}$$

где M *— положительная постоянная, не зависящая от* h *и* τ*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Априорную оценку найдем методом энергетических неравенств, для этого введем скалярные произведения и норму:

$$(u,v) = \sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i h, \quad (u,v] = \sum_{i=1}^{N} u_i v_i h, \quad (u,u) = \left(1,u^2\right) = \|u\|_0^2, \quad \left(1,u^2\right] = \|u]|_0^2.$$

Умножим теперь (2.1) скалярно на $y^{(\sigma)}$:

$$\begin{gathered}\left(\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}} y, y^{(\sigma)}\right) = \left(\varkappa\left(a y^{(\sigma)}_{\bar x}\right)_x, y^{(\sigma)}\right) + \left(b^- a y^{(\sigma)}_{\bar x}, y^{(\sigma)}\right) + \\ + \left(b^+ a^{(+1)} y^{(\sigma)}_x, y^{(\sigma)}\right) - \left(d y^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}\right) + \left(\varphi, y^{(\sigma)}\right).\end{gathered} \tag{2.6}$$

Преобразуем суммы, входящие в тождество (2.6), с учетом (2.2), (2.3) и леммы 3

$$\left(\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}} y, y^{(\sigma)}\right) \ge \frac{1}{2}\left(1, \Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}\left(y^2\right)\right); \tag{2.7}$$

$$\begin{gathered}\left(\varkappa(a y^{(\sigma)}_{\bar x})_x, y^{(\sigma)}\right) = \varkappa a y^{(\sigma)}_{\bar x} y^{(\sigma)}\Big|_0^N - \left(a y^{(\sigma)}_{\bar x}, (\varkappa y^{(\sigma)})_{\bar x}\right] = \\ = \varkappa_N a_N y^{(\sigma)}_{\bar x,N} y^{(\sigma)}_N - \left(a\varkappa_{\bar x}, y^{(\sigma)}_{\bar x} y^{(\sigma)}\right] - \left(a\varkappa^{(-1)}, (y^{(\sigma)}_{\bar x})^2\right] \le \\ \le \varkappa_N a_N y^{(\sigma)}_{\bar x,N} y^{(\sigma)}_N - \left(a\varkappa_{\bar x}, y^{(\sigma)}_{\bar x} y^{(\sigma)}\right] - \frac{1}{(1+hM_1)}\left(a\varkappa, (y^{(\sigma)}_{\bar x})^2\right].\end{gathered} \tag{2.8}$$

Принимая во внимание преобразования (2.7), (2.8), из (2.6) находим

$$\begin{gathered}\left(\frac{1}{2}, \Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}(y^2)\right) + \frac{1}{(1+hM_1)}\left(a\varkappa, (y^{(\sigma)}_{\bar x})^2\right] \le \varkappa_N a_N y^{(\sigma)}_{\bar x,N} y^{(\sigma)}_N - \\ - \left(a\varkappa_{\bar x}, y^{(\sigma)}_{\bar x} y^{(\sigma)}\right] + \left(b^- a y^{(\sigma)}_{\bar x}, y^{(\sigma)}\right) + \left(b^+ a^{(+1)} y^{(\sigma)}_x, y^{(\sigma)}\right) - \left(d y^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}\right) + \left(\varphi, y^{(\sigma)}\right) \le \\ \le y^{(\sigma)}_N\left(\tilde\mu - \beta\sum_{i=0}^{N} y^{(\sigma)}_i \hbar - 0.5hd_N y^{(\sigma)}_N - 0.5h\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}} y_N\right) - \left(a\varkappa_{\bar x}, y^{(\sigma)}_{\bar x} y^{(\sigma)}\right] + \\ + \left(b^- a y^{(\sigma)}_{\bar x}, y^{(\sigma)}\right) + \left(b^+ a^{(+1)} y^{(\sigma)}_x, y^{(\sigma)}\right) - \left(d y^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}\right) + \left(\varphi, y^{(\sigma)}\right).\end{gathered} \tag{2.9}$$

Преобразуем второе, третье и четвертое слагаемые в правой части (2.9). Тогда получим

$$-\left(a\varkappa_{\bar x}, y^{(\sigma)}_{\bar x} y^{(\sigma)}\right] + \left(b^- a, y^{(\sigma)}_{\bar x} y^{(\sigma)}\right) + \left(b^+ a^{(+1)} y^{(\sigma)}_x, y^{(\sigma)}\right) \le \varepsilon\|y^{(\sigma)}_{\bar x}]|_0^2 + M_2^\varepsilon\|y^{(\sigma)}]|_0^2. \tag{2.10}$$

Учитывая (2.10), из (2.9) получаем

$$\begin{gathered}\left(\frac{1}{2}, \Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}(y^2)\right] + \frac{1}{(1+hM_1)}\left(a\varkappa, (y^{(\sigma)}_{\bar x})^2\right] \le \\ \le \varepsilon\|y^{(\sigma)}_{\bar x}]|_0^2 + M_2^\varepsilon\|y^{(\sigma)}]|_0^2 + y^{(\sigma)}_N\left(\mu - \beta\sum_{i=0}^{N} y^{(\sigma)}_i\hbar\right) - \left(d y^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}\right] + \left(\varphi, y^{(\sigma)}\right].\end{gathered} \tag{2.11}$$

Преобразуя второе, третье и четвертое слагаемые в правой части (2.11), находим

$$y_N^{(\sigma)}\left(\mu-\beta\sum_{i=0}^{N}y_i^{(\sigma)}\hbar\right)-\left(dy^{(\sigma)},y^{(\sigma)}\right]+\left(\varphi,y^{(\sigma)}\right]\le M_3\left(y_N^{(\sigma)}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{N}y_i^{(\sigma)}\hbar\right)^2+$$

$$+\frac{1}{2}\mu^2+M_4\|y^{(\sigma)}]|_0^2+\frac{1}{2}\|\varphi]|_0^2\le\varepsilon\|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2+M_5^{\varepsilon}\|y^{(\sigma)}]|_0^2+\frac{1}{2}\left(\|\varphi]|_0^2+\mu^2\right). \tag{2.12}$$

Учитывая (2.12), из (2.11) получаем

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}\|y]|_0^2+\|y_{\bar{x}}^{\sigma}]|_0^2\le\varepsilon M_6\|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2+M_7\|y^{\sigma}]|_0^2+M_8\left(\|\varphi]|_0^2+\mu^2\right). \tag{2.13}$$

Выбирая $\varepsilon=\dfrac{1}{2M_6}$, из (2.13) получаем

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}\|y]|_0^2+\|y_{\bar{x}}^{\sigma}]|_0^2\le M_9\|y^{\sigma}]|_0^2+M_{10}\left(\|\varphi]|_0^2+\mu^2\right). \tag{2.14}$$

Перепишем (2.14) в другой форме

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}\|y]|_0^2\le M_{11}^{\sigma}\|y^{j+1}]|_0^2+M_{12}^{\sigma}\|y^{j}]|_0^2+M_{10}\left(\|\varphi]|_0^2+\mu^2\right). \tag{2.15}$$

На основании леммы 4 из (2.15) получаем априорную оценку (2.5). □

Из априорной оценки (2.5) следуют единственность и устойчивость решения разностной схемы (2.1)–(2.4) по начальным данным и правой части.

Пусть $u(x,t)$ — решение задачи (1.1)–(1.4), $y(x_i,t_j)=y_i^j$ — решение разностной задачи (2.1)–(2.4). Для оценки точности разностной схемы (2.1)–(2.4) рассмотрим разность $z_i^j=y_i^j-u_i^j$, где $u_i^j=u(x_i,t_j)$. Тогда, подставляя $y=z+u$ в соотношения (2.1)–(2.4), получаем задачу для функции z

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}z=\varkappa_i^j\left(a_i^j z_{\bar{x}}^{(\sigma)}\right)_{x,i}+b_i^{-j}a_i^j z_{\bar{x},i}+b_i^{+j}a_{i+1}^j z_{x,i}^{(\sigma)}-d_i^j z_i^{(\sigma)}+\Psi_i^j,\quad (x,t)\in\omega_{h,\tau}, \tag{2.16}$$

$$z_0^{(\sigma)}=0, \tag{2.17}$$

$$-\varkappa_N a_N z_{\bar{x},N}^{(\sigma)}=\beta\sum_{i=0}^{N}z_i^{(\sigma)}\hbar+0.5hd_N z_N^{(\sigma)}+0.5h\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}z_N-\tilde{\nu},\quad x=l, \tag{2.18}$$

$$z(x,0)=0, \tag{2.19}$$

где $\Psi=O\left(h^2+\tau^2\right)$, $\tilde{\nu}=O\left(h^2+\tau^2\right)$ — погрешности аппроксимации дифференциальной задачи (1.1)–(1.4) разностной схемой (2.1)–(2.4) в классе решений $u=u(x,t)$ задачи (1.1)–(1.4).

Применяя априорную оценку (2.5) к решению задачи (2.16)–(2.19), получаем неравенство

$$\|z^{j+1}]|_0^2\le M\max_{0\le j'\le j}\left(\|\Psi^{j'}]|_0^2+\nu^2\right), \tag{2.20}$$

где M — положительная постоянная, не зависящая от h и τ.

Из априорной оценки (2.20) следует сходимость решения разностной задачи (2.1)–(2.4) к решению дифференциальной задачи (1.1)–(1.4) в смысле нормы $\|z^{j+1}]|_0^2$ на каждом слое так, что существует такое τ_0, что при $\tau\le\tau_0$ справедлива оценка

$$\|y^{j+1}-u^{j+1}]|_0\le M\left(h^2+\tau^2\right).$$

§ 3. Постановка нелокальной краевой задачи Б и априорная оценка в дифференциальной форме

Рассмотрим теперь следующую нелокальную краевую задачу для уравнения (1.1):

$$\begin{cases} k(0,t)u_x(0,t) = \beta_1(t)u(0,t) - \mu_1(t), \\ -k(l,t)u_x(l,t) = \beta_2(t)\displaystyle\int_0^l u(x,t)\,dx - \mu_2(t), \end{cases} \tag{3.1}$$

где

$$0 < c_0 \le k \le c_1, \ |\beta_1, \beta_2, r, q, r_x, k_x| \le c_2. \tag{3.2}$$

Теорема 3. *Если $k(x,t) \in C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, $r(x,t), q(x,t), f(x,t) \in C(\overline{Q}_T)$, $u(x,t) \in C^{2,0}(Q_T) \cap C^{1,0}\left(\overline{Q}_T\right)$, $\partial_{0t}^{\alpha}u(x,t) \in C(\overline{Q}_T)$ и выполнены условия* (1.5), (3.2)*, тогда для решения задачи* (1.1), (3.1), (1.4) *справедлива априорная оценка*

$$\|u\|_0^2 + D_{0t}^{-\alpha}\|u_x\|_0^2 \le M\left(D_{0t}^{-\alpha}\left(\|f\|_0^2 + \mu_1^2(t) + \mu_2^2(t)\right) + \|u_0(x)\|_0^2\right), \tag{3.3}$$

где M — положительная постоянная, зависящая от входных данных задачи (1.1), (3.1), (1.4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Умножим уравнение (1.1) скалярно на u:

$$(\partial_{0t}^{\alpha}u, u) = ((ku_x)_x, u) + (ru_x, u) - (qu, u) + (f, u). \tag{3.4}$$

Учитывая преобразования (1.8)–(1.12), из (3.4) находим

$$\frac{1}{2}\partial_{0t}^{\alpha}\|u\|_0^2 + c_0\|u_x\|_0^2 \le uku_x\big|_0^l + \varepsilon\|u_x\|_0^2 + M_1^{\varepsilon}\|u\|_0^2 + M_2\|f\|_0^2. \tag{3.5}$$

Оценим первое слагаемое в правой части (3.5)

$$\begin{gathered} uku_x\big|_0^l = k(l,t)u_x(l,t)u(l,t) - k(0,t)u_x(0,t)u(0,t) = u(l,t)\left(\mu_2(t) - \beta_2(t)\int_0^l u(x,t)dx\right) + \\ + u(0,t)\left(\mu_1(t) - \beta_1(t)u(0,t)\right) = \mu_2(t)u(l,t) - \beta_2(t)u(l,t)\int_0^l u(x,t)dx - \beta_1(t)u^2(0,t) + \\ + \mu_1(t)u(0,t) \le M_3\left(u^2(0,t) + u^2(l,t)\right) + \frac{1}{2}\left(\mu_1^2(t) + \mu_2^2(t)\right) + \frac{1}{2}\left(\int_0^l u(x,t)dx\right)^2 \le \\ \le \varepsilon\|u_x\|_0^2 + M_4^{\varepsilon}\|u\|_0^2 + \frac{1}{2}\left(\mu_1^2(t) + \mu_2^2(t)\right). \end{gathered} \tag{3.6}$$

Учитывая (3.6), из (3.5) получим

$$\partial_{0t}^{\alpha}\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2 \le \varepsilon M_5\|u_x\|_0^2 + M_6^{\varepsilon}\|u\|_0^2 + M_7\left(\|f\|_0^2 + \mu_1^2(t) + \mu_2^2(t)\right). \tag{3.7}$$

Выбирая $\varepsilon = \dfrac{1}{2M_5}$ и применяя к обеим частям неравенства (3.7) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha}$, на основании леммы 2 из (3.7) находим априорную оценку (3.3). □

Из априорной оценки (3.3) следуют единственность и устойчивость решения по начальным данным и правой части в смысле нормы $\|u\|_1^2 = \|u\|_0^2 + D_{0t}^{-\alpha}\|u_x\|_0^2$.

§ 4. Устойчивость и сходимость разностной схемы

На равномерной сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (1.1), (3.1), (1.4) поставим в соответствие разностную схему порядка аппроксимации $O(h^2+\tau^2)$

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y = \varkappa_i^j\left(a_i^j y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\right)_{x,i} + b_i^{-j}a_i^j y_{\bar{x},i}^{(\sigma)} + b_i^{+j}a_{i+1}^j y_{x,i}^{(\sigma)} - d_i^j y_i^{(\sigma)} + \varphi_i^j, \quad (x,t)\in\omega_{h,\tau}, \tag{4.1}$$

$$\varkappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)} = \tilde{\beta}_1 y_0^{(\sigma)} + 0.5h\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_0 - \tilde{\mu}_1, \quad t\in\overline{\omega}_\tau, \quad x=0, \tag{4.2}$$

$$-\varkappa_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} = \beta_2\sum_{i=0}^{N} y_i^{(\sigma)}\hbar + 0.5hd_N y_N^{(\sigma)} + 0.5h\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_N - \tilde{\mu}_2, \quad x=l, \tag{4.3}$$

$$y(x,0)=u_0(x), \quad x\in\overline{\omega}_h, \tag{4.4}$$

где

$$\tilde{\beta}_1(t_{j+\sigma}) = \beta_1(t_{j+\sigma}) + 0.5hd_0^j, \quad \tilde{\mu}_1(t_{j+\sigma}) = \mu_1(t_{j+\sigma}) + 0.5h\varphi_0, \quad \tilde{\mu}_2(t_{j+\sigma}) = \mu_2(t_{j+\sigma}) + 0.5h\varphi_N.$$

Перепишем (4.1)–(4.4) в операторной форме

$$\begin{cases} \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y = \overline{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)} + \overline{\Phi}, \\ y(x,0)=u_0(x), \quad x\in\overline{\omega}_h, \end{cases} \tag{4.5}$$

где

$$\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)} = \begin{cases} \tilde{\Lambda}y_i^{(\sigma)} = \varkappa\left(ay_{\bar{x}}^{(\sigma)}\right)_x + b^-ay_{\bar{x}}^{(\sigma)} + b^+a^{(+1)}y_x^{(\sigma)} - dy^{(\sigma)}, \quad i=\overline{1,N-1}, \\ \Lambda^-y_0^{(\sigma)} = \dfrac{\varkappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)} - \tilde{\beta}_1 y_0^{(\sigma)}}{0.5h}, \quad i=0, \\ \Lambda^+y_N^{(\sigma)} = \dfrac{-\varkappa_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} - \beta_2\sum\limits_{i=0}^{N} y_i^{(\sigma)}\hbar - 0.5hd_N y_N^{(\sigma)}}{0.5h}, \quad i=N, \end{cases}$$

$$\overline{\Phi} = \begin{cases} \varphi=\varphi_i, \quad i=\overline{1,N-1}, \\ \varphi^- = \dfrac{2}{h}\tilde{\mu}_1, \quad i=0, \\ \varphi^+ = \dfrac{2}{h}\tilde{\mu}_2, \quad i=N, \end{cases} \qquad \varkappa^* = \begin{cases} \varkappa = \dfrac{1}{1+\frac{0.5h|r|}{k}}, \\ \varkappa_0 = \dfrac{1}{1+\frac{0.5h|r_0|}{k_{0.5}}}, \quad r_0\le 0, \\ \varkappa_N = \dfrac{1}{1+\frac{0.5h|r_N|}{k_{N-0.5}}}, \quad r_N\ge 0, \end{cases} \qquad t^* = t^{j+1/2}.$$

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (1.5), (3.2). *Тогда существует такое τ, что если $\tau\le\tau_0$ то для решения разностной задачи* (4.1)–(4.4) *справедлива следующая априорная оценка:*

$$||[y^{j+1}]|_0^2 \le M\left(||[y^0]|_0^2 + \max_{0\le j'\le j}\left(||[\varphi^{j'}]|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2\right)\right), \tag{4.6}$$

где M — положительная постоянная, не зависящая от h и τ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Умножим (4.5) теперь скалярно на $y^{(\sigma)}$:

$$\left[\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y, y^{(\sigma)}\right] = \left[\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}\right] + \left[\Phi, y^{(\sigma)}\right], \tag{4.7}$$

где $[u,v]=\sum\limits_{i=0}^{N}u_iv_i\hbar,\quad \hbar=\begin{cases}0.5h, & i=0,N,\\ h, & i\neq 0,N,\end{cases}\quad [u,u]=[1,u^2]=|[u]|_0^2,\quad (u,v)=\sum\limits_{i=1}^{N}u_iv_ih.$

Оценим суммы, входящие в (4.7):

$$\left[\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y,y^{(\sigma)}\right]\geq\frac{1}{2}\left[1,\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}(y^2)\right],\tag{4.8}$$

$$\left[\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)},y^{(\sigma)}\right]=\left(\tilde{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)},y^{(\sigma)}\right)+0.5hy_0^{(\sigma)}\Lambda^{-}y_0^{(\sigma)}+0.5hy_N^{(\sigma)}\Lambda^{+}y_N^{(\sigma)}=$$
$$=\left(\varkappa\left(ay_{\bar{x}}^{(\sigma)}\right)_x,y^{(\sigma)}\right)+\left(b^{-}ay_{\bar{x}}^{(\sigma)},y^{(\sigma)}\right)+\left(b^{+}a^{(+1)}y_x^{(\sigma)},y^{(\sigma)}\right)-\left(dy^{(\sigma)},y^{(\sigma)}\right)+\varkappa_0a_1y_{x,0}^{(\sigma)}y_0^{(\sigma)}-$$
$$-\tilde{\beta}_1\left(y_0^{(\sigma)}\right)^2-\varkappa_Na_Ny_{\bar{x},N}^{(\sigma)}y_N^{(\sigma)}-\beta_2y_N^{(\sigma)}\sum_{i=0}^{N}y_i^{(\sigma)}\hbar-0.5hd_N\left(y_N^{(\sigma)}\right)^2=$$
$$=-\left(ay_{\bar{x}}^{(\sigma)},(\varkappa y^{(\sigma)})_{\bar{x}}\right]+\left(b^{-}a,y_{\bar{x}}^{(\sigma)}y^{(\sigma)}\right)+\left(b^{+}a^{(+1)},y_x^{(\sigma)}y^{(\sigma)}\right)-$$
$$-\left(dy^{(\sigma)},y^{(\sigma)}\right)-\tilde{\beta}_1(y_0^{(\sigma)})^2-\beta_2y_N^{(\sigma)}\sum_{i=0}^{N}y_i^{(\sigma)}\hbar-0.5hd_N\left(y_N^{(\sigma)}\right)^2.\tag{4.9}$$

Преобразуем слагаемые в правой части (4.9):

$$-\left(ay_{\bar{x}}^{(\sigma)},\left(\varkappa y^{(\sigma)}\right)_{\bar{x}}\right]+\left(b^{-}a,y_{\bar{x}}^{(\sigma)}y^{(\sigma)}\right)+\left(b^{+}a^{(+1)},y_x^{(\sigma)}y^{(\sigma)}\right)=$$
$$=-\left(a\varkappa^{(-1)},(y_{\bar{x}}^{(\sigma)})^2\right]-\left(a\varkappa_{\bar{x}},y_{\bar{x}}^{(\sigma)}y^{(\sigma)}\right]+\left(b^{-}a,y_{\bar{x}}^{(\sigma)}y^{(\sigma)}\right)+\left(b^{+}a^{(+1)},y_x^{(\sigma)}y^{(\sigma)}\right)\leq$$
$$\leq-\left(\frac{\varkappa a}{1+hM_1},(y_{\bar{x}}^{\sigma})^2\right]+\varepsilon\|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2+M_1^{\varepsilon}|[y^{(\sigma)}]|_0^2,\tag{4.10}$$

$$-\left(dy^{(\sigma)},y^{(\sigma)}\right)-\widetilde{\beta}_1(y_0^{(\sigma)})^2-\beta_2y_N^{(\sigma)}\sum_{i=0}^{N}y_i^{(\sigma)}\hbar-0.5hd_N\left(y_N^{(\sigma)}\right)^2=$$
$$=-\left(dy^{(\sigma)},y^{(\sigma)}\right)-0.5hd_0(y_0^{(\sigma)})^2-0.5hd_N(y_N^{(\sigma)})^2-\beta_1(y_0^{(\sigma)})^2-\beta_2y_N^{(\sigma)}\sum_{i=0}^{N}y_i^{(\sigma)}\hbar\leq$$
$$\leq-\left[d,(y^{(\sigma)})^2\right]+M_2\left(\left(y_0^{(\sigma)}\right)^2+\left(y_N^{(\sigma)}\right)^2\right)+\frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{N}y_i^{(\sigma)}\hbar\right)^2\leq\varepsilon\|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2+M_3^{\varepsilon}|[y^{(\sigma)}]|_0^2.\tag{4.11}$$

Учитывая (4.10), (4.11), из (4.9) находим

$$\left[\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)},y^{(\sigma)}\right]\leq-M_4\|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2+\varepsilon\|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2+M_5^{\varepsilon}|[y^{(\sigma)}]|_0^2.\tag{4.12}$$

$$\left[\overline{\Phi},y^{(\sigma)}\right]=(\varphi,y^{(\sigma)})+0.5hy_0^{(\sigma)}\varphi^{-}+0.5hy_N^{(\sigma)}\varphi^{+}=[\varphi,y^{(\sigma)}]+\mu_1y_0^{(\sigma)}+\mu_2y_N^{(\sigma)}\leq$$
$$\leq\varepsilon\|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2+M_6^{\varepsilon}|[y^{(\sigma)}]|_0^2+M_7\left(|[\varphi]|_0^2+\mu_1^{j2}+\mu_2^{j2}\right).\tag{4.13}$$

Принимая во внимание преобразования (4.8)–(4.13), из (4.7) находим

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}|[y]|_0^2+\|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2\leq\varepsilon M_8\|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2+M_9^{\varepsilon}|[y^{(\sigma)}]|_0^2+M_{10}\left(|[\varphi]|_0^2+\mu_1^2+\mu_2^2\right).\tag{4.14}$$

Из (4.14) при $\varepsilon=\dfrac{1}{2M_8}$ получим

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}|[y]|_0^2+\|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2\leq M_{11}|[y^{(\sigma)}]|_0^2+M_{12}\left(|[\varphi]|_0^2+\mu_1^2+\mu_2^2\right).\tag{4.15}$$

На основании леммы 4 из (4.15) находим априорную оценку (4.6). □

Из априорной оценки (4.6) следуют единственность и устойчивость решения по начальным данным и правой части.

Пусть $u(x,t)$ — решение задачи (1.1), (3.1), (1.4), $y(x_i,t_j)=y_i^j$ — решение разностной задачи (4.1)–(4.4). Для оценки точности разностной схемы (4.1)–(4.4) рассмотрим разность $z_i^j=y_i^j-u_i^j$, где $u_i^j=u(x_i,t_j)$. Тогда, подставляя $y=z+u$ в соотношения (4.1)–(4.4), получаем задачу для функции z:

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}z=\varkappa_i^j\left(a_i^j z_{\bar{x}}^{(\sigma)}\right)_{x,i}+b_i^{-j}a_i^j z_{\bar{x},i}+b_i^{+j}a_{i+1}^j z_{x,i}^{(\sigma)}-d_i^j z_i^{(\sigma)}+\Psi_i^j,\quad (x,t)\in\omega_{h,\tau},\tag{4.16}$$

$$\varkappa_0 a_1 z_{x,0}^{(\sigma)}=\tilde{\beta}_1 z_0^{(\sigma)}+0.5h\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}z_0-\tilde{\nu}_1,\quad t\in\overline{\omega}_\tau,\quad x=0,\tag{4.17}$$

$$-\varkappa_N a_N z_{\bar{x},N}^{(\sigma)}=\beta_2\sum_{i=0}^{N}z_i^{(\sigma)}\hbar+0.5hd_N z_N^{(\sigma)}+0.5h\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}z_N-\tilde{\nu}_2,\quad x=l,\tag{4.18}$$

$$z(x,0)=0,\tag{4.19}$$

где $\Psi=O\left(h^2+\tau^2\right)$, $\tilde{\nu}_1=O\left(h^2+\tau^2\right)$, $\tilde{\nu}_2=O\left(h^2+\tau^2\right)$ — погрешности аппроксимации дифференциальной задачи (1.1), (3.1), (1.4) разностной схемой (4.1)–(4.4) в классе решений $u=u(x,t)$ задачи (1.1), (3.1), (1.4).

Применяя априорную оценку (4.6) к решению задачи (4.16)–(4.19), получаем неравенство

$$|[z^{j+1}]|_0^2\le M\max_{0\le j'\le j}\left(|[\Psi^{j'}]|_0^2+\nu_1^{j'2}+\nu_2^{j'2}\right),\tag{4.20}$$

где M — положительная постоянная, не зависящая от h и τ.

Из априорной оценки (4.20) следует сходимость решения разностной задачи (4.1)–(4.4) к решению дифференциальной задачи (1.1), (3.1), (1.4) в смысле нормы $|[z^{j+1}]|_0^2$ на каждом слое так, что существует такое τ_0, что при $\tau\le\tau_0$ справедлива оценка $|[y^{j+1}-u^{j+1}]|_0\le M\left(h^2+\tau^2\right)$.

§ 5. Постановка нелокальной краевой задачи B и априорная оценка в дифференциальной форме

Рассмотрим теперь следующую нелокальную краевую задачу для уравнения (1.1):

$$\begin{cases} k(0,t)u_x(0,t)=\beta_1(t)u(0,t)-\mu_1(t),\\ -k(l,t)u_x(l,t)=\beta_2(t)u(0,t)+\displaystyle\int_0^t\rho(t,\tau)u(0,\tau)\,d\tau-\mu_2(t),\end{cases}\tag{5.1}$$

где

$$0<c_0\le k\le c_1,\ |\beta_1,\beta_2,\rho,r,q,r_x,k_x|\le c_2.\tag{5.2}$$

Теорема 5. *Если $k(x,t)\in C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, $r(x,t),q(x,t),f(x,t)\in C(\overline{Q}_T)$, $u(x,t)\in C^{2,0}\left(Q_T\right)\cap C^{1,0}\left(\overline{Q}_T\right)$, $\partial^{\alpha}_{0t}u(x,t)\in C(\overline{Q}_T)$ и выполнены условия (1.5), (5.2), тогда для решения задачи (1.1), (5.1), (1.4) справедлива следующая априорная оценка:*

$$\|u\|_0^2+D_{0t}^{-\alpha}\|u_x\|_0^2\le M\left(D_{0t}^{-\alpha}\left(\|f\|_0^2+\mu_1^2(t)+\mu_2^2(t)\right)+\|u_0(x)\|_0^2\right),\tag{5.3}$$

где M — положительная постоянная, зависящая от входных данных задачи (1.1), (5.1), (1.4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Умножим уравнение (1.1) скалярно на u:

$$(\partial_{0t}^{\alpha}u,u)=\left((ku_x)_x\,,u\right)+(ru_x,u)-(qu,u)+(f,u). \tag{5.4}$$

Учитывая преобразования (1.8)–(1.13) из (5.4) находим

$$\frac{1}{2}\partial_{0t}^{\alpha}\|u\|_0^2+c_0\|u_x\|_0^2\le uku_x\big|_0^l+\varepsilon\|u_x\|_0^2+M_1^{\varepsilon}\|u\|_0^2+M_2\|f\|_0^2. \tag{5.5}$$

Оценим первое слагаемое в правой части (5.5):

$$\begin{gathered}uku_x\big|_0^l=k(l,t)u_x(l,t)u(l,t)-k(0,t)u_x(0,t)u(0,t)=\\
=u(l,t)\left(\mu_2(t)-\beta_2(t)u(0,t)-\int_0^t\rho(t,\tau)u(0,\tau)\,d\tau\right)+u(0,t)\left(\mu_1(t)-\beta_1(t)u(0,t)\right)=\\
=\mu_2(t)u(l,t)-\beta_2(t)u(l,t)u(0,t)-u(l,t)\int_0^t\rho(t,\tau)u(0,\tau)\,d\tau-\\
-\beta_1(t)u^2(0,t)+\mu_1(t)u(0,t)\le M_3\left(u^2(0,t)+u^2(l,t)\right)+\frac{1}{2}\left(\mu_1^2(t)+\mu_2^2(t)\right)+\\
+\frac{1}{2}\left(\int_0^t\rho(t,\tau)u(0,\tau)d\tau\right)^2\le\varepsilon\|u_x\|_0^2+M_4^{\varepsilon}\|u\|_0^2+M_5^{\varepsilon}\int_0^t\|u\|_0^2\,d\tau+\varepsilon\int_0^t\|u_x\|_0^2d\tau+\\
+\frac{1}{2}\left(\mu_1^2(t)+\mu_2^2(t)\right).\end{gathered} \tag{5.6}$$

Учитывая (5.6), из (5.5) получим

$$\begin{gathered}\partial_{0t}^{\alpha}\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2\le\varepsilon M_6\|u_x\|_0^2+M_7^{\varepsilon}\|u\|_0^2+\\
+M_8^{\varepsilon}\int_0^t\|u\|_0^2\,d\tau+\varepsilon M_9\int_0^t\|u_x\|_0^2\,d\tau+M_{10}\left(\|f\|_0^2+\mu_1^2(t)+\mu_2^2(t)\right).\end{gathered} \tag{5.7}$$

Применяя к обеим частям (5.7) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha}$, из (5.7) находим

$$\begin{gathered}\|u\|_0^2+D_{0t}^{-\alpha}\|u_x\|_0^2\le\varepsilon M_6D_{0t}^{-\alpha}\|u_x\|_0^2+M_7^{\varepsilon}D_{0t}^{-\alpha}\|u\|_0^2+M_8D_{0t}^{-\alpha}\int_0^t\|u\|_0^2\,d\tau+\\
+\varepsilon M_9D_{0t}^{-\alpha}\int_0^t\|u_x\|_0^2\,d\tau+M_{11}\left(D_{0t}^{-\alpha}\left(\|f\|_0^2+\mu_1^2(t)+\mu_2^2(t)\right)+\|u_0(x)\|_0^2\right).\end{gathered} \tag{5.8}$$

Преобразуем третье слагаемое в правой части (5.8) следующим образом

$$\begin{gathered}D_{0t}^{-\alpha}\int_0^t\|u\|_0^2\,d\tau=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\int_0^{\tau}\|u\|_0^2\,ds=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\|u\|_0^2\,ds\int_s^t\frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}=\\
=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\|u\|_0^2\left(-\frac{(t-\tau)^{\alpha}}{\alpha}\Big|_s^t\right)ds=\frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha}\|u\|_0^2\,ds=\\
=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int\limits_0^t(t-\tau)^{\alpha}\|u\|_0^2\,d\tau\le\frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^t\frac{(t-\tau)\|u\|_0^2\,d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\le\frac{T}{\alpha}D_{0t}^{-\alpha}\|u\|_0^2.\end{gathered}$$

Итак, получаем

$$D_{0t}^{-\alpha}\int_0^t\|u\|_0^2\,d\tau\le\frac{T}{\alpha}D_{0t}^{-\alpha}\|u\|_0^2. \tag{5.9}$$

С помощью (5.9) из (5.8) находим

$$\|u\|_0^2 + D_{0t}^{-\alpha}\|u_x\|_0^2 \leq \varepsilon M_{12} D_{0t}^{-\alpha}\|u_x\|_0^2 + M_{13}^{\varepsilon} D_{0t}^{-\alpha}\|u\|_0^2 + \\ + M_{11}\left(D_{0t}^{-\alpha}\left(\|f\|_0^2 + \mu_1^2(t) + \mu_2^2(t)\right) + \|u_0(x)\|_0^2\right). \tag{5.10}$$

Выбирая $\varepsilon = \dfrac{1}{2M_{12}}$ из (5.10) получаем

$$\|u\|_0^2 + D_{0t}^{-\alpha}\|u_x\|_0^2 \leq M_{14} D_{0t}^{-\alpha}\|u\|_0^2 + M_{15}\left(D_{0t}^{-\alpha}\left(\|f\|_0^2 + \mu_1^2(t) + \mu_2^2(t)\right) + \|u_0(x)\|_0^2\right). \tag{5.11}$$

На основании леммы 2 из (5.11) находим априорную оценку (5.3). □

Из априорной оценки (5.3) следуют единственность и устойчивость решения по начальным данным и правой части в смысле нормы $\|u\|_1^2 = \|u\|_0^2 + D_{0t}^{-\alpha}\|u_x\|_0^2$.

§ 6. Устойчивость и сходимость разностной схемы

На равномерной сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (1.1), (5.1), (1.4) поставим в соответствие разностную схему порядка аппроксимации $O(h^2+\tau^2)$

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y = \varkappa_i^j \left(a_i^j y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\right)_{x,i} + b_i^{-j} a_i^j y_{\bar{x},i}^{(\sigma)} + b_i^{+j} a_{i+1}^j y_{x,i}^{(\sigma)} - d_i^j y_i^{(\sigma)} + \varphi_i^j, \quad (x,t) \in \omega_{h,\tau}, \tag{6.1}$$

$$\varkappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)} = \tilde{\beta}_1 y_0^{(\sigma)} + 0.5h\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_0 - \tilde{\mu}_1, \quad t \in \overline{\omega}_\tau, \quad x = 0, \tag{6.2}$$

$$-\varkappa_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} = \beta_2 y_0^{(\sigma)} + \sum_{s=0}^{j} \rho_s^j y_0^s \overline{\tau} + 0.5h d_N y_N^{(\sigma)} + 0.5h\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_N - \tilde{\mu}_2, \quad x = l, \tag{6.3}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\omega}_h, \tag{6.4}$$

где

$$\tilde{\beta}_1(t_{j+\sigma}) = \beta_1(t_{j+\sigma}) + 0.5h d_0^j, \quad \overline{\tau} = \begin{cases} \dfrac{\tau}{2}, & j = 0, j_0, \\ \tau, & j \neq 0, j_0, \end{cases}$$

$$\tilde{\mu}_1(t_{j+\sigma}) = \mu_1(t_{j+\sigma}) + 0.5h\varphi_0, \quad \tilde{\mu}_2(t_{j+\sigma}) = \mu_2(t_{j+\sigma}) + 0.5h\varphi_N.$$

Перепишем (6.1)–(6.4) в операторной форме

$$\begin{cases} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y = \overline{\Lambda}(t_{j+\sigma}) y^{(\sigma)} + \overline{\Phi}, \\ y(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\omega}_h, \end{cases} \tag{6.5}$$

где

$$\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma}) y^{(\sigma)} = \begin{cases} \tilde{\Lambda} y_i^{(\sigma)} = \varkappa \left(a y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\right)_x + b^- a y_{\bar{x}}^{(\sigma)} + b^+ a^{(+1)} y_x^{(\sigma)} - d y^{(\sigma)}, & i = \overline{1, N-1}, \\ \Lambda^- y_0^{(\sigma)} = \dfrac{\varkappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)} - \tilde{\beta}_1 y_0^{(\sigma)}}{0.5h}, & i = 0, \\ \Lambda^+ y_N^{(\sigma)} = \dfrac{-\varkappa_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} - \beta_2 y_0^{(\sigma)} - \sum\limits_{s=0}^{j} \rho_s^j y_0^s \overline{\tau} - 0.5h d_N y_N^{(\sigma)}}{0.5h}, & i = N, \end{cases}$$

$$\overline{\Phi} = \begin{cases} \varphi = \varphi_i, & i = \overline{1, N-1}, \\ \varphi^- = \dfrac{2}{h}\tilde{\mu}_1, & i = 0, \\ \varphi^+ = \dfrac{2}{h}\tilde{\mu}_2, & i = N, \end{cases} \qquad \varkappa^* = \begin{cases} \varkappa = \dfrac{1}{1 + \frac{0.5h|r|}{k}}, \\ \varkappa_0 = \dfrac{1}{1 + \frac{0.5h|r_0|}{k_{0.5}}}, & r_0 \leq 0, \\ \varkappa_N = \dfrac{1}{1 + \frac{0.5h|r_N|}{k_{N-0.5}}}, & r_N \geq 0, \end{cases} \qquad t^* = t^{j+1/2}.$$

Теорема 6. *Пусть выполнены условия* (1.5), (5.2). *Тогда существует такое* τ, *что если* $\tau \le \tau_0$, *то для решения разностной задачи* (6.1)–(6.4) *справедлива следующая априорная оценка*

$$|[y^{j+1}]|_0^2 \le M\left(|[y^0]|_0^2 + \max_{0\le j'\le j}\sum_{s=0}^{j'}\left(|[\varphi^s]|_0^2+\mu_1^2+\mu_2^2\right)\bar{\tau}\right), \tag{6.6}$$

где M — *положительная постоянная, не зависящая от* h *и* τ.

Доказательство. Умножим (6.5) теперь скалярно на $y^{(\sigma)}$:

$$\left[\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y, y^{(\sigma)}\right] = \left[\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}\right] + \left[\Phi, y^{(\sigma)}\right], \tag{6.7}$$

где $[u,v]=\sum\limits_{i=0}^{N}u_iv_i\hbar$, $\quad \hbar = \begin{cases} 0.5h, & i=0,N,\\ h, & i\ne 0,N,\end{cases}$ $\quad [u,u]=[1,u^2]=|[u]|_0^2$, $\quad (u,v)=\sum\limits_{i=1}^{N}u_iv_ih.$

Оценим первое слагаемое в правой части (6.7):

$$\begin{aligned}
&\left[\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}\right] = \left(\tilde{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}\right) + 0.5hy_0^{(\sigma)}\Lambda^- y_0^{(\sigma)} + 0.5hy_N^{(\sigma)}\Lambda^+ y_N^{(\sigma)} =\\
&= \left(\varkappa\left(ay_{\bar{x}}^{(\sigma)}\right)_x, y^{(\sigma)}\right) + \left(b^- a y_{\bar{x}}^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}\right) + \left(b^+a^{(+1)}y_x^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}\right) - \left(dy^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}\right) + \varkappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)}y_0^{(\sigma)} -\\
&-\tilde{\beta}_1\left(y_0^{(\sigma)}\right)^2 - \varkappa_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)}y_N^{(\sigma)} - \beta_2 y_N^{(\sigma)}y_0^{(\sigma)} - y_N^{(\sigma)}\sum_{s=0}^{j}\rho_s^j y_0^s\bar{\tau} - 0.5hd_N\left(y_N^{(\sigma)}\right)^2 =\\
&= -\left(ay_{\bar{x}}^{(\sigma)}, (\varkappa y^{(\sigma)})_{\bar{x}}\right] + \left(b^-a, y_{\bar{x}}^{(\sigma)}y^{(\sigma)}\right) + \left(b^+a^{(+1)}, y_x^{(\sigma)}y^{(\sigma)}\right) -\\
&-\left(dy^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}\right) - \tilde{\beta}_1(y_0^{(\sigma)})^2 - \beta_2 y_N^{(\sigma)}y_0^{(\sigma)} - y_N^{(\sigma)}\sum_{s=0}^{j}\rho_s^j y_0^s\bar{\tau} - 0.5hd_N\left(y_N^{(\sigma)}\right)^2.
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Преобразуем слагаемые в правой части (6.8):

$$\begin{aligned}
&-\left(dy^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}\right) - \widetilde{\beta}_1(y_0^{(\sigma)})^2 - \beta_2 y_N^{(\sigma)}y_0^{(\sigma)} - y_N^{(\sigma)}\sum_{s=0}^{j}\rho_s^j y_0^s\bar{\tau} - 0.5hd_N\left(y_N^{(\sigma)}\right)^2 =\\
&= -\left(dy^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}\right) - 0.5hd_0(y_0^{(\sigma)})^2 - 0.5hd_N(y_N^{(\sigma)})^2 - \beta_1(y_0^{(\sigma)})^2 - \beta_2 y_N^{(\sigma)}y_0^{(\sigma)} - y_N^{(\sigma)}\sum_{s=0}^{j}\rho_s^j y_0^s\bar{\tau} \le\\
&\le -\left[d, (y^{(\sigma)})^2\right] + M_1\left(\left(y_0^{(\sigma)}\right)^2 - \left(y_N^{(\sigma)}\right)^2\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{s=0}^{j}\rho_s^j y_0^s\bar{\tau}\right)^2 \le\\
&\le \varepsilon\|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2 + M_2^{\varepsilon}|[y^{(\sigma)}]|_0^2 + M_3\sum_{s=0}^{j}|[y]|_0^2\bar{\tau} + \sum_{s=0}^{j}\|y_{\bar{x}}]|_0^2\bar{\tau}.
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Учитывая (4.10), (6.9), из (6.8) находим

$$\begin{aligned}
&\left[\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}\right] \le -M_4\|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2 + \varepsilon\|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2 +\\
&+ M_5^{\varepsilon}|[y^{(\sigma)}]|_0^2 + M_6\sum_{s=0}^{j}|[y]|_0^2\bar{\tau} + M_7\sum_{s=0}^{j}\|y_{\bar{x}}]|_0^2\bar{\tau}.
\end{aligned} \tag{6.10}$$

Принимая во внимание преобразования (4.8), (4.13), (6.10) при $\varepsilon = \dfrac{M_4}{4}$, из (6.7) находим

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}|[y]|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2 \le M_8 \sum_{s=0}^{j} \|y_{\bar{x}}]|_0^2 \bar{\tau} +$$

$$+ M_9|[y^{(\sigma)}]|_0^2 + M_{10} \sum_{s=0}^{j} |[y]|_0^2 \bar{\tau} + M_{11}\left(|[\varphi]|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2\right). \quad (6.11)$$

Оценим первое слагаемое в правой части (6.11), для этого перепишем (6.11) в другом виде

$$\|y_{\bar{x}}^{j+1}]|_0^2 \le M_8 \sum_{s=0}^{j} \|y_{\bar{x}}^s]|_0^2 \bar{\tau} + F, \quad (6.12)$$

где $F = M_9|[y^{(\sigma)}]|_0^2 + M_{10} \sum\limits_{s=0}^{j} |[y]|_0^2 \bar{\tau} + M_{11} \left(|[\varphi]|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2\right)$.
На основании леммы Гронуолла [33, с.171] из (6.12) находим

$$\|y_{\bar{x}}^{j+1}]|_0^2 \le M_{12} F. \quad (6.13)$$

Учитывая (6.13), из (6.11) после несложных преобразований получаем

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}|[y]|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2 \le M_9|[y^{(\sigma)}]|_0^2 + M_{13} \sum_{s=0}^{j} |[y^s]|_0^2 \bar{\tau} + M_{14} \sum_{s=0}^{j} \left(|[\varphi^s]|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2\right) \bar{\tau}. \quad (6.14)$$

Обозначая через $F = M_{13} \sum\limits_{s=0}^{j} |[y]|_0^2 \bar{\tau} + M_{14} \sum\limits_{s=0}^{j} \left(|[\varphi]|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2\right) \bar{\tau}$, на основании леммы 4 из (6.14) получим

$$|[y^{j+1}]|_0^2 \le M_{15} \left(|[y^0]|_0^2 + \max_{0 \le j' \le j} \left(\sum_{s=0}^{j'} |[y^s]|_0^2 \bar{\tau} + \sum_{s=0}^{j'} \left(|[\varphi^s]|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2\right) \bar{\tau} \right) \right). \quad (6.15)$$

Учитывая, что

$$\max_{0 \le j' \le j} \sum_{s=0}^{j'} |[y^s]|_0^2 \bar{\tau} \le \sum_{j'=0}^{j} \max_{0 \le s \le j'} |[y^s]|_0^2 \bar{\tau} \le \sum_{j'=0}^{j} \max_{0 \le s \le j'} |[y^s]|_0^2 \tau$$

и введя обозначение $g^j = \max\limits_{0 \le j' \le j} |[y^{j'}]|_0^2$, из (6.15) получим

$$g^{j+1} \le M_{16} \sum_{s=0}^{j} g^s \tau + M_{17} F_1^j, \quad (6.16)$$

где

$$F_1^j = |[y^0]|_0^2 + \frac{t_j^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} \max_{0 \le j' \le j} \sum_{s=0}^{j'} \left(|[\varphi^s]|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2\right) \bar{\tau}.$$

На основании леммы Гронуолла [33, с.171] из (6.16) получаем априорную оценку (6.6). □

Из априорной оценки (6.6) следуют единственность и устойчивость решения по начальным данным и правой части.

Пусть $u(x,t)$ — решение задачи (1.1), (5.1), (1.4), $y(x_i,t_j)=y_i^j$ — решение разностной задачи (6.1)–(6.4). Для оценки точности разностной схемы (6.1)–(6.4) рассмотрим разность $z_i^j=y_i^j-u_i^j$, где $u_i^j=u(x_i,t_j)$. Тогда, подставляя $y=z+u$ в соотношения (6.1)–(6.4), получаем задачу для функции z:

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}z=\varkappa_i^j\left(a_i^j z_{\bar{x}}^{(\sigma)}\right)_{x,i}+b_i^{-j}a_i^j z_{\bar{x},i}+b_i^{+j}a_{i+1}^j z_{x,i}^{(\sigma)}-d_i^j z_i^{(\sigma)}+\Psi_i^j,\quad (x,t)\in\omega_{h,\tau},\tag{6.17}$$

$$\varkappa_0 a_1 z_{x,0}^{(\sigma)}=\tilde{\beta}_1 z_0^{(\sigma)}+0.5h\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}z_0-\tilde{\nu}_1,\quad t\in\overline{\omega}_\tau,\quad x=0,\tag{6.18}$$

$$-\varkappa_N a_N z_{\bar{x},N}^{(\sigma)}=\beta_2 z_0^{(\sigma)}+\sum_{s=0}^{j}\rho_s^j z_0^s\bar{\tau}+0.5hd_N z_N^{(\sigma)}+0.5h\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}z_N-\tilde{\nu}_2,\quad x=l,\tag{6.19}$$

$$z(x,0)=0,\tag{6.20}$$

где $\Psi=O\left(h^2+\tau^2\right)$, $\tilde{\nu}_1=O\left(h^2+\tau^2\right)$, $\tilde{\nu}_2=O\left(h^2+\tau^2\right)$ — погрешности аппроксимации дифференциальной задачи (1.1), (5.1), (1.4) разностной схемой (6.1)–(6.4) в классе решений $u=u(x,t)$ задачи (1.1), (5.1), (1.4).

Применяя априорную оценку (6.6) к решению задачи (6.17)–(6.20), получаем неравенство

$$|[z^{j+1}]|_0^2\le M\max_{0\le j'\le j}\sum_{s=0}^{j'}\left(|[\Psi^s]|_0^2+\nu_1^{j'2}+\nu_2^{j'2}\right)\bar{\tau},\tag{6.21}$$

где M — положительная постоянная, не зависящая от h и τ.

Из априорной оценки (6.21) следует сходимость решения разностной задачи (6.1)–(6.4) к решению дифференциальной задачи (1.1), (5.1), (1.4) в смысле нормы $|[z^{j+1}]|_0^2$ на каждом слое так, что существует такое τ_0, что при $\tau\le\tau_0$ справедлива оценка $|[y^{j+1}-u^{j+1}]|_0\le M\left(h^2+\tau^2\right)$.

Замечание 1. Полученные в данной работе результаты справедливы и в случае, когда условие (1.3) заменяется условием вида:

$$\partial^{\alpha}_{0t}\int_0^l u(x,t)\,dx=\mu(t),\quad 0\le t\le T.$$

§ 7. Алгоритмы численного решения рассматриваемых задач

Для численного решения разностных схем, полученных при аппроксимации рассматриваемых в данной работе нелокальных краевых задач приведем разностные схемы (2.1)–(2.4), (4.1)–(4.4) и (6.1)–(6.4) к расчетному виду.

Рассмотрим разностную схему (2.1)–(2.4). Тогда уравнение (2.1) приводится к следующему виду

$$A_i y_{i-1}^{j+1}-C_i y_i^{j+1}+B_i y_{i+1}^{j+1}=-F_i^j,\quad i=\overline{1,N-1},\tag{7.1}$$

где

$$A_i=\tau\sigma\varkappa_i^j a_i^j-\tau h\sigma b_i^{-j}a_i^j,\quad B_i=\tau\sigma\varkappa_i^j a_{i+1}^j+\tau h\sigma b_i^{+j}a_{i+1}^j,\quad C_i=A_i+B_i+h^2\frac{\tau^{1-\alpha}c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}+\sigma\tau h^2 d_i^j,$$

$$F_i^j=AA_i y_{i-1}^j-CC_i y_i^j+BB_i y_{i+1}^j+h^2\tau\varphi_i^j-h^2\frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=0}^{j-1}c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)}(y_i^{s+1}-y_i^s),$$

$$AA_i = \tau(1-\sigma)\varkappa_i^j a_i^j - \tau h(1-\sigma)b_i^{-j}a_i^j, \quad BB_i = \tau(1-\sigma)\varkappa_i^j a_{i+1}^j + \tau h(1-\sigma)b_i^{+j}a_{i+1}^j,$$

$$CC_i = AA_i + BB_i - h^2\frac{\tau^{1-\alpha}c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)} + (1-\sigma)\tau h^2 d_i^j.$$

Краевое условие (2.2) принимает вид

$$y_0 = 0. \tag{7.2}$$

Краевое условие (2.3) принимает вид

$$y_N = \varkappa_2 y_{N-1} + \widetilde{\mu}_2, \tag{7.3}$$

где

$$\varkappa_2 = \frac{\tau\sigma\varkappa_N a_N}{\tau\sigma\varkappa_N a_N^j + 0.5h^2\frac{\tau^{1-\alpha}c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)} + 0.5\sigma\tau h^2 d_N^j},$$

$$\widetilde{\mu}_2 = \Bigg[\mu_2 h\tau - \tau(1-\sigma)\varkappa_N a_N(y_N^j - y_{N-1}^j) -$$

$$- 0.5(1-\sigma)\tau h^2 d_N^j y_N^j - \tau h\beta\sum_{i=0}^{N} y_i^{(\sigma)}\hbar + 0.5h^2\frac{\tau^{1-\alpha}c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}y_N -$$

$$- 0.5h^2\frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)}(y_N^{s+1} - y_N^s)\Bigg] \Bigg/ \Bigg[\tau\sigma\varkappa_N a_N^j + \frac{h^2}{2}\frac{\tau^{1-\alpha}c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)} + 0.5\sigma\tau h^2 d_N^j\Bigg].$$

Таким образом, если находить значение интеграла с нижнего слоя, то с учетом (7.1)–(7.3), разностная схема (2.1)–(2.4) приводится к трехдиагональной системе линейных алгебраических уравнений, решение которой легко находится известным методом прогонки.

Рассмотрим теперь разностную схему (4.1)–(4.4). Тогда краевое условие (4.3) принимает вид

$$y_0 = \varkappa_1 y_1 + \widetilde{\mu}_1, \tag{7.4}$$

где

$$\varkappa_1 = \frac{\tau\sigma\varkappa_0 a_1}{\tau\sigma\varkappa_0 a_1^j + \sigma h\tau\beta_1^j + 0.5h^2\frac{\tau^{1-\alpha}c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)} + 0.5\sigma\tau h^2 d_0^j},$$

$$\widetilde{\mu}_1 = \Bigg[\mu_1 h\tau - (1-\sigma)h\tau\beta_1 y_0^j + \tau(1-\sigma)\varkappa_0 a_1(y_1^j - y_0^j) + 0.5h^2\frac{\tau^{1-\alpha}c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}y_0 -$$

$$- 0.5h^2\frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)}(y_0^{s+1} - y_0^s) - 0.5(1-\sigma)\tau h^2 d_0^j y_0^j\Bigg] \Bigg/$$

$$\Bigg/ \Bigg[\tau\sigma\varkappa_0 a_1^j + \sigma h\tau\beta_1^j + 0.5h^2\frac{\tau^{1-\alpha}c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)} + 0.5\sigma\tau h^2 d_0^j\Bigg].$$

Учитывая (7.1), (7.3), (7.4), разностная схема (4.1)–(4.4) приводится к трехдиагональной системе линейных алгебраических уравнений.

Рассмотрим теперь разностную схему (6.1)–(6.4). Тогда краевое условие (6.3) принимает вид

$$y_N = \varkappa_2 y_{N-1} + \widetilde{\mu}_2, \tag{7.5}$$

где

$$\varkappa_2 = \frac{\tau\sigma\varkappa_N a_N}{\tau\sigma\varkappa_N a_N^j + 0.5h^2\frac{\tau^{1-\alpha}c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)} + 0.5\sigma\tau h^2 d_N^j},$$

$$\widetilde{\mu}_2 = \Bigg[\mu_2 h\tau - \tau(1-\sigma)\varkappa_N a_N(y_N^j - y_{N-1}^j) + 0.5(1-\sigma)\tau h^2 d_N^j y_N^j +$$

$$+ 0.5h^2\frac{\tau^{1-\alpha}c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}y_N - 0.5h^2\frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)}(y_N^{s+1} - y_N^s) -$$

$$-0.5(1-\sigma)\tau h^2 d_N^j y_N^j - \tau h\sum_{s=0}^{j}\rho_s^j y_0^s \bar{\tau}\Bigg] \Bigg/ \Bigg[\tau\sigma\varkappa_N a_N^j + \gamma_N\frac{\tau^{1-\alpha}c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)} + \frac{h^2}{2}\frac{\tau^{1-\alpha}c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)} + 0.5\sigma\tau h^2 d_N^j\Bigg].$$

Таким образом, с учетом (7.1), (7.3), (7.5), разностная схема (6.1)–(6.4) приводится к трехдиагональной системе линейных алгебраических уравнений.

§ 8. Тестовые задачи и численные результаты

Тестовая задача №1. В цилиндре $\overline{Q}_T = \{(x,t) : 0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T\}$ рассмотрим следующую нелокальную краевую задачу:

$$\partial_{0t}^\alpha u = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + r(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} - q(x,t)u + f(x,t), \quad 0 < x < l,\ 0 < t \le T,$$

$$k(0,t)u_x(0,t) = \beta_1(t)u(0,t) - \mu_1(t),$$

$$-k(l,t)u_x(l,t) = \beta_2(t)\int_0^l u(x,t)\,dx - \mu_2(t),$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \le x \le l.$$

Коэффициенты уравнения и граничных условий рассматриваемой задачи подбираются таким образом, чтобы точное решение задачи было равно $u(x,t) = t^3x^4$.

Ниже в таблице 1 при уменьшении размера сетки приведены максимальное значение погрешности ($z = y - u$) и порядок сходимости (ПС) в норме $||[z]||_{L_2(\bar{w}_{h\tau})}$. Погрешность уменьшается в соответствии с порядком аппроксимации $O\Big(h^2 + \tau^2\Big)$.

Тестовая задача №2. В цилиндре $\overline{Q}_T = \{(x,t) : 0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T\}$ рассмотрим следующую нелокальную краевую задачу:

$$\partial_{0t}^\alpha u = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + r(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} - q(x,t)u + f(x,t), \quad 0 < x < l,\ 0 < t \le T,$$

$$k(0,t)u_x(0,t) = \beta_1(t)u(0,t) - \mu_1(t),$$

$$-k(l,t)u_x(l,t) = \beta_2(t)u(0,t) + \int_0^t \rho(t,\tau)u(0,\tau)\,d\tau - \mu_2(t),$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \le x \le l.$$

Коэффициенты уравнения и граничных условий рассматриваемой задачи подбираются таким образом, чтобы точное решение задачи было равно $u(x,t) = t^3e^{x^2}$.

Ниже в таблице 2 при уменьшении размера сетки приведены максимальное значение погрешности ($z = y - u$) и порядок сходимости (ПС) в норме $||[z]||_{L_2(\bar{w}_{h\tau})}$. Погрешность уменьшается в соответствии с порядком аппроксимации $O\Big(h^2 + \tau^2\Big)$.

Таблица 1.
Изменение погрешности в норме $\|[z]\|_{L_2(\bar{w}_{h\tau})}$ при $\alpha = 0,01; 0,5; 0.99$ и уменьшении размера сетки на $t = 1$, когда $\tau = h$.

α	τ	$\|[z]\|_{L_2(\bar{w}_{h\tau})}$	ПС в $\|[z]\|_{L_2(\bar{w}_{h\tau})}$
0.01	1/10	0.339007240	
	1/20	0.082031298	2.0471
	1/40	0.020165133	2.0243
	1/80	0.004998315	2.0123
	1/160	0.001244200	2.0062
0.50	1/10	0.242706902	
	1/20	0.058880689	2.0433
	1/40	0.014487108	2.0230
	1/80	0.003592038	2.0119
	1/160	0.000894229	2.0061
0.99	1/10	0.193166357	
	1/20	0.047034366	2.0381
	1/40	0.011590173	2.0208
	1/80	0.002875810	2.0109
	1/160	0.000716186	2.0056

Таблица 2.
Изменение погрешности в норме $\|[z]\|_{L_2(\bar{w}_{h\tau})}$ при $\alpha = 0,01; 0,5; 0.99$ и уменьшении размера сетки на $t = 1$, когда $\tau = h$.

α	τ	$\|[z]\|_{L_2(\bar{w}_{h\tau})}$	ПС в $\|[z]\|_{L_2(\bar{w}_{h\tau})}$
0.01	1/10	0.398381750	
	1/20	0.096887932	2.0398
	1/40	0.023853631	2.0221
	1/80	0.005915604	2.0116
	1/160	0.001472819	2.0059
0.50	1/10	0.283188104	
	1/20	0.069149663	2.0340
	1/40	0.017049439	2.0200
	1/80	0.004230402	2.0109
	1/160	0.001053417	2.0057
0.99	1/10	0.209695900	
	1/20	0.051362726	2.0295
	1/40	0.012684870	2.0176
	1/80	0.003150288	2.0096
	1/160	0.000784846	2.0050

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения задач конвекции–диффузии. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 248 с.
2. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
3. Podlubny I. Fractional differential equations. San Diego: Academic Press, 1999. 339 p.
4. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.

5. Кочубей А.Н. Диффузия дробного порядка // Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26. № 4. С. 660–670. http://mi.mathnet.ru/de7144
6. Нигматуллин Р.Р. Дробный интеграл и его физическая интерпретация // Теоретическая и математическая физика. 1992. Т. 90. № 3. С. 354–368. http://mi.mathnet.ru/tmf5547
7. Diethelm K., Walz G. Numerical solution of fractional order differential equations by extrapolation // Numerical Algorithms. 1997. Vol. 16. Issue 3–4. P. 231–253. https://doi.org/10.1023/A:1019147432240
8. Головизнин В.М., Киселев В.П., Короткин И.А., Юрков Ю.И. Некоторые особенности вычислительных алгоритмов для уравнений дробной диффузии. Препринт № IBRAE-2002-01. М.: Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, 2002. 57 с. http://www.ibrae.ac.ru/pubtext/224
9. Головизнин В.М., Киселев В.П., Короткин И.А. Численные методы решения уравнения дробной диффузии с дробной производной по времени в одномерном случае. Препринт № IBRAE-2002-10. М.: Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, 2002. 35 с. http://www.ibrae.ac.ru/pubtext/223
10. Таукенова Ф.И., Шхануков-Лафишев М.Х. Разностные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2006. Т. 46. № 10. С. 1871–1881. http://mi.mathnet.ru/zvmmf404
11. Алиханов А.А. Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46. № 5. С. 658–664.
12. Alikhanov A.A. A new difference scheme for the time fractional diffusion equation // Journal of Computational Physics. 2015. Vol. 280. P. 424–438. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2014.09.031
13. Бештоков М.Х. Локальные и нелокальные краевые задачи для вырождающихся и невырождающихся псевдопараболических уравнений с дробной производной Римана–Лиувилля // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 6. С. 763–778. https://doi.org/10.1134/S0374064118060055
14. Chen C.-M., Liu F., Anh V., Turner I. Numerical schemes with high spatial accuracy for a variable-order anomalous subdiffusion equations // SIAM Journal on Scientific Computing. 2010. Vol. 32. Issue 4. P. 1740–1760. https://doi.org/10.1137/090771715
15. Du R., Cao W.R., Sun Z.Z. A compact difference scheme for the fractional diffusion-wave equation // Applied Mathematical Modelling. 2010. Vol. 34. Issue 10. P. 2998–3007. https://doi.org/10.1016/j.apm.2010.01.008
16. Gao G.H., Sun Z.Z. A compact finite difference scheme for the fractional sub-diffusion equations // Journal of Computational Physics. 2011. Vol. 230. Issue 3. P. 586–595. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2010.10.007
17. Zhang Y.N., Sun Z.Z., Wu H.W. Error estimates of Crank–Nicolson-type difference schemes for the subdiffusion equation // SIAM Journal on Numerical Analysis. 2011. Vol. 49. Issue 6. P. 2302–2322. https://doi.org/10.1137/100812707
18. Lin Y., Xu C. Finite difference/spectral approximations for the time-fractional diffusion equation // Journal of Computational Physics. 2007. Vol. 225. Issue 2. P. 1533–1552. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2007.02.001
19. Lin Y., Li X., Xu C. Finite difference/spectral approximations for the fractional cable equation // Mathematics of Computation. 2011. Vol. 80. Issue 3. P. 1369–1396. https://doi.org/10.1090/S0025-5718-2010-02438-X
20. Li X., Xu C. A space-time spectral method for the time fractional diffusion equation // SIAM Journal on Numerical Analysis. 2009. Vol. 47. Issue 3. P. 2108–2131. https://doi.org/10.1137/080718942
21. Cannon J.R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy // Quarterly of Applied Mathematics. 1963. Vol. 21. Issue 2. P. 155–160. https://doi.org/10.1090/qam/160437

22. Камынин Л.И. Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1964. Т. 4. № 6. С. 1006–1024. http://mi.mathnet.ru/zvmmf7694
23. Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Доклады АН СССР. 1969. Т. 185. № 4. С. 739–740. http://mi.mathnet.ru/dan34529
24. Кожанов А.И. Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнений теплопроводности и Аллера // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40. № 6. С. 763–774. http://mi.mathnet.ru/de11086
25. Бештоков М.Х. Разностный метод решения нелокальной краевой задачи для вырождающегося псевдопараболического уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2016. Т. 56. № 10. С. 1780–1794. https://doi.org/10.7868/S0044466916100045
26. Beshtokov M.H. On a nonlocal boundary value problem for the third order pseudo-parabolic equation // Computational Mathematics and Modeling. 2016. Vol. 27. Issue 1. P. 60–79. https://doi.org/10.1007/s10598-015-9304-z
27. Бештоков М.Х. Краевые задачи для вырождающихся и невырождающихся уравнений соболевского типа с нелокальным источником в дифференциальной и разностной трактовках // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 2. С. 249–266. https://doi.org/10.1134/S0374064118020115
28. Водахова В.А. Об одной нелокальной задаче типа задачи Бицадзе–Самарского для нагруженного уравнения с кратными характеристиками // Вестник КБГУ. Серия Математические науки. 2008. Вып. 5. С. 26–31.
29. Водахова В.А., Тлупова Р.Г., Шерметова М.Х. Внутреннекраевая задача для нагруженного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Успехи современного естествознания. 2015. № 1. С. 71–75.
30. Водахова В.А., Тлупова Р.Г., Эржибова Ф.А., Болова Д.А. Нелокальная краевая задача для смешанного уравнения третьего порядка // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2016. № 4-5. С. 876–879.
31. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. 616 с.
32. Бештоков М.Х. К краевым задачам для вырождающихся псевдопараболических уравнений с дробной производной Герасимова–Капуто // Известия вузов. Математика. 2018. № 10. С. 3–16. http://mi.mathnet.ru/ivm9400
33. Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973. 416 с.

Поступила в редакцию 31.03.2019

Бештоков Мурат Хамидбиевич, к. ф.-м. н., доцент, старший научный сотрудник, отдел вычислительных методов, Институт прикладной математики и автоматизации, Кабардино-Балкарский научный центр РАН, 360000, Россия, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А.
E-mail: beshtokov-murat@yandex.ru

Водахова Валентина Аркадьевна, к. ф.-м. н., доцент, кафедра алгебры и дифференциальных уравнений, Кабардино-Балкарский государственный университет, 360000, Россия, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173.
E-mail: vodahova@rambler.ru

Цитирование: М. Х. Бештоков, В. А. Водахова. Нелокальные краевые задачи для уравнения конвекции–диффузии дробного порядка // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2019. Т. 29. Вып. 4. С. 459–482.

MATHEMATICS 2019. Vol. 29. Issue 4. Pp. 459–482.

M. Kh. Beshtokov, V. A. Vodakhova

Nonlocal boundary value problems for a fractional-order convection–diffusion equation

Keywords: nonlocal boundary value problems, a priori estimate, nonstationary convection–diffusion equation, fractional order differential equation, fractional Caputo derivative.

MSC2010: 35K10

DOI: 10.20537/vm190401

In the rectangular region, we study nonlocal boundary value problems for the one-dimensional unsteady convection–diffusion equation of fractional order with variable coefficients, describing the diffusion transfer of a substance, as well as the transfer due to the motion of the medium. A priori estimates of solutions of nonlocal boundary value problems in differential form are derived by the method of energy inequalities. Difference schemes are constructed and analogs of a priori estimates in the difference form are proved for them, error estimates are given under the assumption of sufficient smoothness of solutions of equations. From the obtained a priori estimates, the uniqueness and stability of the solution from the initial data and the right part, as well as the convergence of the solution of the difference problem to the solution of the corresponding differential problem at the rate of $O(h^2 + \tau^2)$.

REFERENCES

1. Samarskii A.A., Vabishchevich P.N. *Chislennye metody resheniya zadach konvektsii–diffuzii* (Numerical methods for solving convection–diffusion problems), Moscow: Editorial URSS, 1999.
2. Nakhushev A.M. *Drobnoe ischislenie i ego primenenie* (Fractional calculus and its application), Moscow: Fizmatlit, 2003.
3. Podlubny I. *Fractional differential equations*, San Diego: Academic Press, 1999.
4. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya* (Fractional integrals and derivatives and some of their applications), Minsk: Nauka i Tekhnika, 1987.
5. Kochubei A.N. Diffusion of fractional order, *Differential Equations*, 1990, vol. 26, issue 4, pp. 485–492.
6. Nigmatullin R.R. Fractional integral and its physical interpretation, *Theoretical and Mathematical Physics*, 1992, vol. 90, issue 3, pp. 242–251. https://doi.org/10.1007/BF01036529
7. Diethelm K., Walz G. Numerical solution of fractional order differential equations by extrapolation, *Numerical Algorithms*, 1997, vol. 16, issue 3–4, pp. 231–253. https://doi.org/10.1023/A:1019147432240
8. Goloviznin V., Kiselev V., Korotkin I., Yurkov Y. *Some features of computing algorithms for the equations fractional diffusion*, Preprint No. IBRAE-2002-01, Moscow: Nuclear Safety Institute RAS, 2002 (in Russian). http://en.ibrae.ac.ru/pubtext/224
9. Goloviznin V.M., Kiselev V.P., Korotkin I.A. *Computational methods for one-dimensional fractional diffusion equations*, Preprint IBRAE-2002-10, Moscow: Nuclear Safety Institute RAS, 2002 (in Russian). http://en.ibrae.ac.ru/pubtext/223
10. Taukenova F.I., Shkhanukov-Lafishev M.Kh. Difference methods for solving boundary value problems for fractional differential equations, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2006, vol. 46, issue 10, pp. 1785–1795. https://doi.org/10.1134/S0965542506100149
11. Alikhanov A.A. A priori estimates for solutions of boundary value problems for fractional-order equations, *Differential Equations*, 2010, vol. 46, issue 5, pp. 660–666. https://doi.org/10.1134/S0012266110050058
12. Alikhanov A.A. A new difference scheme for the time fractional diffusion equation, *Journal of Computational Physics*, 2015, vol. 280, pp. 424–438. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2014.09.031

13. Beshtokov M.Kh. Local and nonlocal boundary value problems for degenerating and nondegenerating pseudoparabolic equations with a Riemann–Liouville fractional derivative, *Differential Equations*, 2018, vol. 54, issue 6, pp. 758–774. https://doi.org/10.1134/S0012266118060058
14. Chen C.-M., Liu F., Anh V., Turner I. Numerical schemes with high spatial accuracy for a variable-order anomalous subdiffusion equations, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2010, vol. 32, issue 4, pp. 1740–1760. https://doi.org/10.1137/090771715
15. Du R., Cao W.R., Sun Z.Z. A compact difference scheme for the fractional diffusion-wave equation, *Applied Mathematical Modelling*, 2010, vol. 34, issue 10, pp. 2998–3007. https://doi.org/10.1016/j.apm.2010.01.008
16. Gao G.H., Sun Z.Z. A compact finite difference scheme for the fractional sub-diffusion equations, *Journal of Computational Physics*, 2011, vol. 230, issue 3, pp. 586–595. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2010.10.007
17. Zhang Y.N., Sun Z.Z., Wu H.W. Error estimates of Crank–Nicolson-type difference schemes for the subdiffusion equation, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2011, vol. 49, issue 6, pp. 2302–2322. https://doi.org/10.1137/100812707
18. Lin Y., Xu C. Finite difference/spectral approximations for the time-fractional diffusion equation, *Journal of Computational Physics*, 2007, vol. 225, issue 2, pp. 1533–1552. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2007.02.001
19. Lin Y., Li X., Xu C. Finite difference/spectral approximations for the fractional cable equation, *Mathematics of Computation*, 2011, vol. 80, issue 3, pp. 1369–1396. https://doi.org/10.1090/S0025-5718-2010-02438-X
20. Li X., Xu C. A space-time spectral method for the time fractional diffusion equation, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2009, vol. 47, issue 3, pp. 2108–2131. https://doi.org/10.1137/080718942
21. Cannon J.R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy, *Quarterly of Applied Mathematics*, 1963, vol. 21, issue 2, pp. 155–160. https://doi.org/10.1090/qam/160437
22. Kamynin L.I. A boundary value problem in the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1964, vol. 4, issue 6, pp. 33–59. https://doi.org/10.1016/0041-5553(64)90080-1
23. Bitsadze A.V., Samarskii A.A. On some simple generalizations of linear elliptic boundary problems, *Soviet Mathematics. Doklady*, 1969, vol. 10, pp. 398–400. https://zbmath.org/?q=an:0187.35501
24. Kozhanov A.I. On a nonlocal boundary value problem with variable coefficients for the heat equation and the Aller equation, *Differential Equations*, 2004, vol. 40, issue 6, pp. 815–826. https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000046860.84156.f0
25. Beshtokov M.Kh. Difference method for solving a nonlocal boundary value problem for a degenerating third-order pseudo-parabolic equation with variable coefficients, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2016, vol. 56, issue 10, pp. 1763–1777. https://doi.org/10.1134/S0965542516100043
26. Beshtokov M.Kh. On a nonlocal boundary value problem for the third order pseudo-parabolic equation, *Computational Mathematics and Modeling*, 2016, vol. 27, issue 1, pp. 60–79. https://doi.org/10.1007/s10598-015-9304-z
27. Beshtokov M.Kh. Boundary value problems for degenerating and nondegenerating Sobolev-type equations with a nonlocal source in differential and difference forms, *Differential Equations*, 2018, vol. 54, issue 2, pp. 250–267. https://doi.org/10.1134/S0012266118020118
28. Vodakhova V.A. A nonlocal problem like Bitsadze–Samarsky problem for a loaded equation with multiple characteristics, *Vestnik Kabardino-Balkarskogo Universiteta. Seriya Matematicheskie Nauki*, 2008, issue 5, pp. 26–31 (in Russian).
29. Vodakhova V.A., Tlupova R.G., Shermetova M.Kh. Inside boundary value problem for loaded equation of the third order with multiple characteristics, *Uspekhi Sovremennogo Estestvoznaniya*, 2015, no. 1, pp. 71–75 (in Russian). https://elibrary.ru/item.asp?id=22968448

30. Vodahova V.A., Tlupova R.G., Erzhibova F.A., Bolova D.A. A nonlocal boundary value problem for a mixed third-order equation, *Mezhdunarodnyi Zhurnal Prikladnykh i Fundamental'nykh Issledovanii*, 2016, no. 4-5, pp. 876–879 (in Russian).
https://elibrary.ru/item.asp?id=25790447
31. Samarskii A.A. *The theory of difference schemes*, New York: Marcel Dekker, 2001.
32. Beshtokov M.Kh. To boundary-value problems for degenerating pseudoparabolic equations with Gerasimov–Caputo fractional derivative, *Russian Mathematics*, 2018, vol. 62, issue 10, pp. 1–14.
https://doi.org/10.3103/s1066369x18100018
33. Samarskii A.A., Gulin A.V. *Ustoichivost' raznostnykh skhem* (Stability of difference schemes), Moscow: Nauka, 1973.

Received 31.03.2019

Beshtokov Murat Khamidbievich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Senior Researcher, Department of Computational Methods, Institute of Applied Mathematics and Automation, Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS, ul. Shortanova, 89 A, Nalchik, 360000, Russia.
E-mail: beshtokov-murat@yandex.ru

Vodakhova Valentina Arkad'evna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Kabardino-Balkarian State University, ul. Chernyshevskogo, 173, Nalchik, 360000, Russia.
E-mail: vodahova@yandex.ru

Citation: M. Kh. Beshtokov, V. A. Vodakhova. Nonlocal boundary value problems for a fractional-order convection–diffusion equation, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, issue 4, pp. 459–482.