ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА 2022. Т. 32. Вып. 3. С. 447–462.

УДК 517.977.58

© *В. Н. Ушаков, А. А. Ершов*

О ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАВИСИМОСТИ ОБЪЕМА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ВОРОНОК И ИХ АППРОКСИМАЦИЙ

Рассматривается нелинейная управляемая система в конечномерном евклидовом пространстве и на конечном промежутке времени, зависящая от параметра. Изучаются множества достижимости и интегральные воронки дифференциального включения, соответствующего управляемой системе, содержащей параметр. При исследовании многочисленных задач теории управления и дифференциальных игр, конструировании их решений и оценивании погрешностей применяются различные теоретические подходы и ассоциированные с ними вычислительные методы. К упомянутым задачам принадлежат, например, различного рода задачи о сближении, разрешающие конструкции которых могут быть описаны достаточно просто в терминах множеств достижимости и интегральных воронок.

В настоящей работе изучается зависимость множеств достижимости и интегральных воронок от параметра: оценивается степень этой зависимости от параметра при определенных условиях на управляемую систему. Степень зависимости интегральных воронок исследована на предмет изменения их объема при варьировании параметра. Для оценки этой зависимости вводятся системы множеств в фазовом пространстве, аппроксимирующие множества достижимости и интегральные воронки на заданном промежутке времени, отвечающие конечному разбиению этого промежутка. При этом сначала оценивается степень зависимости аппроксимирующей системы множеств от параметра, и затем эта оценка используется при оценке зависимости объема интегральной воронки дифференциального включения от параметра. Такой подход естественен и особенно полезен при изучении конкретных прикладных задач управления, при решении которых в конечном итоге приходится иметь дело не с идеальными множествами достижимости и интегральными воронками, а с их аппроксимациями, отвечающими дискретному представлению временного промежутка.

Ключевые слова: управляемые нелинейные системы, дифференциальные включения, множества достижимости, зависимость от параметра, объем интегральной воронки, дискретная аппроксимация.

DOI: 10.35634/vm220307

Введение

В данной работе рассмотриваются управляемые системы в двумерном евклидовом пространстве, заданные на конечном промежутке времени и зависящие от параметра. Изучается зависимость объема их интегральных воронок от постоянного параметра, который задается перед началом движения системы. Исследуется оценка погрешности при вычислении объема интегральной воронки управляемой системы с помощью «ступенчатой» аппроксимации. Кроме того, получена оценка степени зависимости объема интегральной воронки от параметра, присутствующего в управляемой системе. Следует отметить, что интегральные воронки наряду с множествами достижимости играют важную роль при построении разрешающих конструкций для различных задач теории управления и теории дифференциальных игр [1–11]. При исследовании интегральных воронок и множеств достижимости, их конструировании и оценивании применяются различные теоретические подходы и ассоциированные с ними вычислительные методы [12–20].

Ранее в работах [21–23] были изучены задачи наведения интегральных воронок на целевое множество дифференциальных включений, зависящих от параметра, с помощью выбора этого самого параметра и начальной точки. Однако, если целевое множество заранее не определено, а параметр необходимо выбрать до начала некоторой дифференциальной игры, то имеет смысл осуществить выбор с целью максимизации объема интегральной воронки. Кроме того, подходы, используемые в настоящей работе, могут оказаться полезными при исследовании робастности интегральной воронки по отношению к параметру в метрике объема геометрической разности между двумя интегральными воронками.

§ 1. Постановка задачи

Пусть на промежутке времени $[t_0, \vartheta]$, $t_0 < \vartheta < \infty$, задана управляемая система Σ

$$\frac{dx}{dt} = f_\alpha(t, x, u), \tag{1.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор системы Σ, u — управляющее воздействие из компакта $P \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^p)$, α — параметр из компакта $\mathscr{L} \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^l)$; $\mathrm{comp}(\mathbb{R}^k)$ — пространство компактов в $\mathbb{R}^k$ с хаусдорфовой метрикой $d(X^{(1)}, X^{(2)}) = \max(h(X^{(1)}, X^{(2)}), h(X^{(2)}, X^{(1)}))$, $h(X^{(1)}, X^{(2)}) = \max\limits_{x^{(1)} \in X^{(1)}} \rho(x^{(1)}, X^{(2)})$ — хаусдорфово отклонение $X^{(1)}$ от $X^{(2)}$, где

$$\rho(x^{(1)}, X^{(2)}) = \min_{x^{(2)} \in X^{(2)}} ||x^{(1)} - x^{(2)}||.$$

Предполагается, что система Σ удовлетворяет следующим условиям.

Условие A. Функция $f_\alpha(t, x, u)$ определена и непрерывна на $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times P \times \mathscr{L}$, и для любой ограниченной и замкнутой области $D \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ найдутся функция $\omega^*(r)$, $r \in (0, \infty)$ ($\omega^*(r) \downarrow 0$, $r \downarrow 0$), и непрерывная функция $L(t) \in (0, \infty)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{gathered} ||f_\alpha(t, x, u) - f_\beta(\tau, x, u)|| \leqslant \omega^*(|t - \tau| + ||\alpha - \beta||), \quad (t, x), (\tau, x) \in D, \quad u \in P, \quad \alpha, \beta \in \mathscr{L}; \\ ||f_\alpha(t, x, u) - f_\alpha(t, y, u)|| \leqslant L(t)||x - y||, \quad (t, x), (t, y) \in D, \quad u \in P, \quad \alpha \in \mathscr{L}. \end{gathered}$$

Условие B. Найдется такое $\gamma \in (0, \infty)$, что

$$||f_\alpha(t, x, u)|| \leqslant \gamma(1 + ||x||), \quad (t, x, u) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times P, \quad \alpha \in \mathscr{L}.$$

Кроме условий **A** и **B**, далее мы сформулируем дополнительное условие **C**, налагаемое не только на систему, но и на разрешающие конструкции.

Целью настоящей работы является оценка степени зависимости объема интегральной воронки системы Σ от параметра α, а также формулирование способа численного вычисления объема интегральной воронки и обоснование его сходимости при уменьшении диаметра используемых разбиений.

§ 2. Основные обозначения и конструкции

Введем многозначное отображение

$$(t, x) \mapsto F_\alpha(t, x) = \mathrm{co}\, \mathcal{F}_\alpha(t, x),$$

где $\mathcal{F}_\alpha(t, x) = \{f_\alpha(t, x, u) \colon u \in P\} \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$, $(t, x) \in [t_0.\vartheta] \times \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathscr{L}$.

Отображение $(t, x) \mapsto F_\alpha(t, x) \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет следующим условиям, вытекающим из условий A и B.

Условие A*. Для любой ограниченной и замкнутой области $D \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ найдутся функция $\omega^*(r)$, $r \in (0, \infty)$ $(\omega^*(r) \downarrow 0,\ r \downarrow 0)$, и непрерывная функция $L(t) \in (0, \infty)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, удовлетворяющие соотношениям

$$d(F_\alpha(t, x), F_\beta(\tau, y)) \leqslant \omega^*(|t-\tau| + ||\alpha - \beta||), \quad (t, x), (\tau, y) \in D, \quad \alpha, \beta \in \mathscr{L};$$
$$d(F_\alpha(t, x), F_\alpha(t, y)) \leqslant L(t)||x - y||, \quad (t, x), (t, y) \in D, \quad \alpha \in \mathscr{L}.$$

Условие B*. Найдется такое $\gamma \in (0, \infty)$, что

$$h(F_\alpha(t, x), \{\mathbf{0}\}) \leqslant \gamma \cdot (1 + ||x||), \quad (t, x, \alpha) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times \mathscr{L};$$

здесь $\mathbf{0}$ — нуль-вектор в $\mathbb{R}^n$.

Введем на $[t_0, \vartheta]$ дифференциальное включение (д. в.)

$$\frac{dx}{dt} \in F_\alpha(t, x), \quad \alpha \in \mathscr{L}, \tag{2.1}$$

отвечающее системе Σ.

Пусть t_* и t^* $(t_* < t^*)$ из $[t_0, \vartheta]$, $x_* \in \mathbb{R}^n$, $X_* \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha \in \mathscr{L}$.

Введем обозначения:

$X_\alpha(t^*, t_*, x_*)$ — множество достижимости д. в. (2.1) в момент t^* с начальной точкой $x(t_*) = x_*$;

$X_\alpha(t^*, t_*, X_*)$ — множество достижимости д. в. (2.1) в момент t^* с начальным множеством X_*:

$$X_\alpha(t^*, t_*, X_*) = \bigcup_{x_* \in X_*} X_\alpha(t^*, t_*, x_*).$$

Известно, что $X_\alpha(t^*, t_*, X_*) \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$, отображение $(t^*, t_*, X_*) \mapsto X_\alpha(t^*, t_*, X_*)$ непрерывно по t^* на $[t_*, \vartheta]$ при фиксированных $(t_*, X_*) \in [t_0, \vartheta] \times \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ в хаусдорфовой метрике, а также $X_\alpha(t^*, t_*, X_*)$ непрерывно зависит от X_* при фиксированных t_*, t^*, α.

Отображение $\alpha \mapsto X_\alpha(t^*, t_*, X_*)$ непрерывно также на $\mathscr{L}$ при фиксированных (t^*, t_*, X_*), $t_0 \leqslant t_* < t^* \leqslant \vartheta$, $X_* \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$.

Введем также разбиение $\Gamma = \{t_0, t_1, \ldots, t_i, \ldots, t_N = \vartheta\}$ промежутка $[t_0, \vartheta]$ с диаметром $\Delta = \Delta(\Gamma) = t_{i+1} - t_i = N^{-1}(\vartheta - t_0)$.

Определим $\widetilde{X}_\alpha^{\mathscr{P}}(t^*) \subset \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathscr{L}$, — множества, отвечающие разбиениям $\mathscr{P} = \{\tau_0 = t_*, \tau_1, \ldots, \tau_i, \ldots, \tau_N = t^*\}$ промежутка $[t_*, t^*]$ и задающиеся при помощи соотношений

$$\widetilde{X}_\alpha^{\mathscr{P}}(\tau_0) = X_*, \quad \widetilde{X}_\alpha^{\mathscr{P}}(\tau_{i+1}) = \widetilde{X}_\alpha(\tau_{i+1}, \tau_i, \widetilde{X}_\alpha^{\mathscr{P}}(\tau_i)), \quad i = \overline{0, N-1}, \tag{2.2}$$

где обозначено $\widetilde{X}_\alpha(\tau^*, \tau_*, W_*) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon x^* = w_* + (\tau^* - \tau_*) f_*,\ w_* \in W_*,\ f_* \in F_\alpha(t_*, w_*)\}$, $t_* \leqslant \tau_* < \tau^* \leqslant t^*$, $W_* \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$.

Известно, что при условиях $\mathbf{A}^*$, $\mathbf{B}^*$ множество достижимости $X_\alpha(t^*, t_*, X_*)$ удовлетворяет предельному равенству

$$X_\alpha(\widetilde{t^*}, \widetilde{t}_*, X_*) = \lim_{\Delta = \Delta(\Gamma) \downarrow 0} \widetilde{X}_\alpha^{\Gamma}(t^*),$$

где моменты времени $\widetilde{t}_*$ и $\widetilde{t^*}$ — это точки из Γ, ближайшие к t_* и t^*.

Наряду с множеством достижимости $X_\alpha(t)$, $\alpha \in \mathscr{L}$, $t \in [t_0, \vartheta]$, рассмотрим интегральные воронки

$$X_\alpha(t_0, X^{(0)}) = \bigcup_{t \in [t_0, \vartheta]} (t, X_\alpha(t)), \quad \alpha \in \mathscr{L},$$

дифференциального включения (2.1).

Полагаем $X_\alpha^\Gamma(t_0, X^{(0)}) = \bigcup\limits_{t_i \in \Gamma} (t_i, X_\alpha(t_i))$, $\widetilde{X}_\alpha^\Gamma(t_0, X^{(0)}) = \bigcup\limits_{t_i \in \Gamma} (t_i, \widetilde{X}_\alpha^\Gamma(t_i))$ — множества в D, где $\widetilde{X}_\alpha(t_i)$ определены рекуррентными соотношениями (2.2), в которых $\tau_0 = t_0$, $\mathscr{P} = \Gamma$, $\widetilde{X}_\alpha^\Gamma(t_0) = X^{(0)}$.

Множества $X_\alpha^\Gamma(t_0, X^{(0)})$ и $\widetilde{X}_\alpha^\Gamma(t_0, X^{(0)})$ есть некоторые аппроксимации интегральной воронки $X_\alpha(t_0, X^{(0)})$, $\alpha \in \mathscr{L}$, дискретные по переменной $t \in [t_0, \vartheta]$.

Принимая во внимание условие $\mathbf{B}^*$ и размеры компакта X_*, можем указать ограниченную и замкнутую область $D \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$, содержащую все возможные в последующих рассуждениях и оценках множества в пространстве $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$. Считаем, что ниже в оценках применены функции $\omega^*(r)$, $r \in (0, \infty)$, и $L(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, отвечающие этой области D.

Наряду с функцией $L(t)$ будем использовать более «традиционную» константу Липшица

$$L \geqslant \max_{t \in [t_0, \vartheta]} L(t)$$

и постоянную

$$K \geqslant \max_{(t,x,u,\alpha) \in D \times P \times \mathscr{L}} ||f_\alpha(t, x, u)|| \in (0, \infty).$$

§ 3. Численное вычисление объема интегральной воронки системы Σ

В этом параграфе рассмотрим систему (1.1) в $\mathbb{R}^2$. Сосредоточимся на изучении интегральных воронок $X_\alpha(t_0, X^{(0)})$, $\alpha \in \mathscr{L}$, соответствующего системе (1.1) дифференциального включения (2.1), и изучим вопросы приближенного вычисления объемов интегральных воронок $X_\alpha(t_0, X^{(0)})$, $\alpha \in \mathscr{L}$.

Сначала сосредоточим внимание на какой-либо интегральной воронке $X_\alpha(t_0, X^{(0)})$, $\alpha \in \mathscr{L}$, и соответствующей ей системе $\left\{\widetilde{X}_\alpha^\Gamma(t_i)\right\}$, $\widetilde{X}_\alpha^\Gamma(t_0) = X^{(0)}$, где

$$\Gamma = \{t_0, t_1, \ldots, t_i, \ldots, t_N = \vartheta\}.$$

В § 2 были введены две «дискретные по t» аппроксимации $X_\alpha^\Gamma(t_0, X^{(0)})$ и $\widetilde{X}_\alpha^\Gamma(t_0, X^{(0)})$ интегральной воронки $X_\alpha(t_0, X^{(0)})$ (т. е. множества в D, имеющие проекции на ось t, совпадающие с Γ).

Введем еще две аппроксимации интегральной воронки $X_\alpha(t_0, X^{(0)})$, отвечающие разбиению Γ и «сплошные по t» (т. е. имеющие проекции на ось t, совпадающие с $[t_0, \vartheta]$).

Эти две последние аппроксимации интегральной воронки $X_\alpha(t_0, X^{(0)})$ есть очевидные аналоги ломаных Эйлера из теории дифференцильных уравнений и кусочно-постоянных аппроксимаций непрерывных функций из математического анализа.

Итак, введем множества в $\mathbb{R}^2$:

$$\widetilde{X}_\alpha^\Gamma(t) = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon x = x(t_i) + (t - t_i) f(t_i),$$
$$x(t_i) \in \widetilde{X}_\alpha^\Gamma(t_i), \quad f(t_i) \in F_\alpha(t_i, x(t_i))\}, \qquad t \in [t_i, t_{i+1}], \quad i \in \overline{0, N-1}.$$

Таким образом, системе $\{\widetilde{X}_\alpha^\Gamma(t_i)\} \subset \mathbb{R}^2$, соответствующей разбиению Γ, сопоставляется своеобразная ломаная Эйлера $\widetilde{X}_\alpha^\Gamma(t)$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $i \in \overline{0, N-1}$.

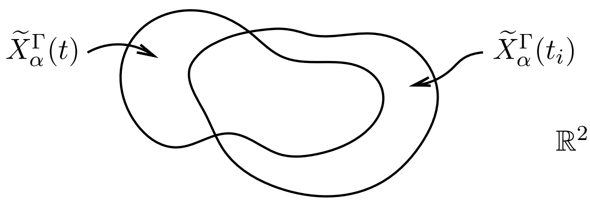

Рис. 1. Возможное расположение множеств $\widetilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(t)$ и $\widetilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(t_i)$

Сопоставим ей в множестве D следующее множество

$$\widetilde{Y}^{\Gamma}_{\alpha}(t_0, X^{(0)}) = \bigcup_{i\in\overline{0,N-1}} \bigcup_{t\in[t_i,t_{i+1}]} (t, \widetilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(t)).$$

Назовем множество $\widetilde{Y}^{\Gamma}_{\alpha}(t_0, X^{(0)})$ интегральной воронкой ломаной Эйлера $\widetilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(t)$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $i \in \overline{0, N-1}$.

Системе $\{\widetilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(t_i)\}$ сопоставим еще одно семейство в D, которое трактуем как аппроксимацию интегральной воронки $X_{\alpha}(t_0, X^{(0)})$ д. в. (2.1) и интегральной воронки $\widetilde{Y}^{\Gamma}_{\alpha}(t_0, X^{(0)})$ ломаной Эйлера $\widetilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(t)$ на $[t_0, \vartheta]$. А именно, введем множество в D

$$\widetilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(t_0, X^{(0)}) = \bigcup_{i\in\overline{0,N-1}} \widetilde{Z}^{\Gamma}_{\alpha}([t_i, t_{i+1}]) \bigcup (t_N, \widetilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(t_N)),$$

где $\widetilde{Z}^{\Gamma}_{\alpha}([t_i, t_{i+1}]) = [t_i, t_{i+1}) \times \widetilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(t_i)$, $\alpha \in \mathscr{L}$, $i \in \overline{0, N-1}$. Множество $\widetilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(t_0, X^{(0)})$ есть ступенчатая аппроксимация интегральных воронок $X_{\alpha}(t_0, X^{(0)})$ и $\widetilde{Y}^{\Gamma}_{\alpha}(t_0, X^{(0)})$, соответствующая разбиению Γ. Каждая ее ступень $\widetilde{Z}^{\Gamma}_{\alpha}([t_i, t_{i+1}])$ есть цилиндр в $D \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^2$ с основанием $\widetilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(t_i)$, $i \in \overline{0, N-1}$.

Сравним объемы интегральной воронки $\widetilde{Y}^{\Gamma}_{\alpha}(t_0, X^{(0)})$ и множества $\widetilde{Z}^{\Gamma}_{\alpha}(t_0, X^{(0)})$, $\alpha \in \mathscr{L}$. Для этого обратимся к звену $\widetilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(t)$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $i \in \overline{0, N-1}$, ломаной Эйлера $\widetilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$.

Из определения множества $\widetilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(t)_{[t_i, t_{i+1}]}$ следует

$$d(\widetilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(t), \widetilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(t_i)) \leqslant K\Delta, \quad t \in [t_i, t_{i+1}].$$

Символом $\widetilde{s}^{\Gamma}_{\alpha}(t)$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$, обозначим площадь множества $\widetilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(t)$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$. Так как отображение $t \mapsto \widetilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(t)$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$, непрерывно (в хаусдорфовой метрике) на $[t_i, t_{i+1}]$, то функция $\widetilde{s}^{\Gamma}_{\alpha}(t)$ непрерывна по t на $[t_i, t_{i+1}]$.

Оценим сверху величину (рис. 1)

$$\left|\widetilde{s}^{\Gamma}_{\alpha}(t) - \widetilde{s}^{\Gamma}_{\alpha}(t_i)\right|, \quad t \in [t_i, t_{i+1}]. \tag{3.1}$$

При выводе оценки величины (3.1) и везде ниже при выводе оценок аналогичных величин предполагается, что выполнено следующее условие.

Условие C. Длины $l_{\alpha}(t)$ и $\widetilde{l}_{\alpha}(t)$ границ $\partial X_{\alpha}(t)$ и $\partial\widetilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(t)$ множеств $X_{\alpha}(t)$ и $\widetilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(t)$ в пространстве $\mathbb{R}^2$ ограничены сверху: существует такое $l^* \in (0, \infty)$, что

$$\max_{\alpha\in\mathscr{L},\Gamma,t\in[t_0,\vartheta]} (l^{\Gamma}_{\alpha}(t), \widetilde{l}^{\,\Gamma}_{\alpha}(t)) \leqslant l^*.$$

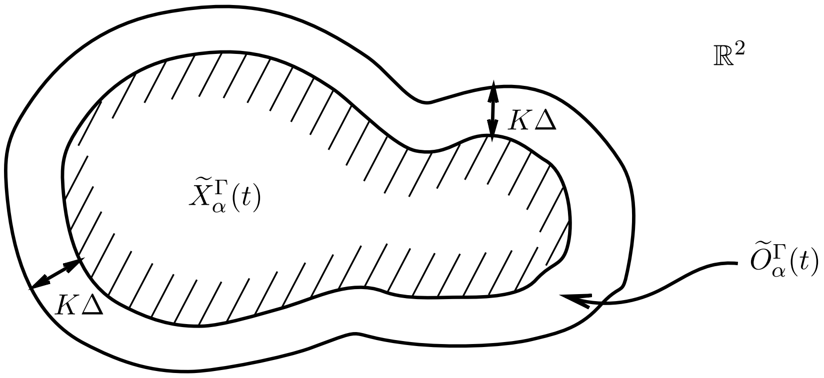

Рис. 2. $K\Delta$-слой $O^{\Gamma}_{\alpha}(t) = \mathrm{cl}(\widetilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(t)_{K\Delta} \backslash \widetilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(t))$

Условие **C** является вполне естественным, поскольку все множества $X_{\alpha}(t)$ и $\widetilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(t)$ конструируются, исходя из одного начального множества $X_{\alpha}(t_0) = \widetilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(t_0) = X^{(0)}$, и рассматриваются на конечном промежутке времени $[t_0, \vartheta]$.

Далее, символом $O^{\Gamma}_{\alpha}(t)$, $\alpha \in \mathscr{L}$, $t \in [t_0, \vartheta]$, обозначим $K\Delta$-слой $\mathrm{cl}(\widetilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(t)_{K\Delta} \backslash \widetilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(t))$, охватывающий множество $\widetilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(t)$; здесь $\mathrm{cl}\, X^*$ и X^*_{ε} — замыкание и ε-окрестность множества $X^* \subset \mathbb{R}^2$ (рис. 2).

Из приведенной выше оценки величины $d(\widetilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(t), \widetilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(t_i))$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$, следует

$$\widetilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(t) \subset \widetilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(t_i)_{K\Delta} = \widetilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(t_i) \cup O^{\Gamma}_{\alpha}(t_i),$$
$$\widetilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(t_i) \subset \widetilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(t)_{K\Delta} = \widetilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(t) \cup O^{\Gamma}_{\alpha}(t).$$

Из этих неравенств для площадей $\widetilde{s}^{\Gamma}_{\alpha}(t)$ и $\widetilde{s}^{\Gamma}_{\alpha}(t_i)$ множеств $\widetilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(t)$ и $\widetilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(t_i)$ при $\alpha \in \mathscr{L}$ и $t \in [t_i, t_{i+1}]$ следует оценка

$$\begin{aligned} \widetilde{s}^{\Gamma}_{\alpha}(t) &\leqslant \widetilde{s}^{\Gamma}_{\alpha}(t_i) + s(O^{\Gamma}_{\alpha}(t_i)), \\ \widetilde{s}^{\Gamma}_{\alpha}(t_i) &\leqslant \widetilde{s}^{\Gamma}_{\alpha}(t) + s(O^{\Gamma}_{\alpha}(t)); \end{aligned} \tag{3.2}$$

здесь $s(O^{\Gamma}_{\alpha}(t_i))$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$ — площади $K\Delta$-слоев $O^{\Gamma}_{\alpha}(t)$.

Из неравенств (3.2) следует

$$\left|\widetilde{s}^{\Gamma}_{\alpha}(t) - \widetilde{s}^{\Gamma}_{\alpha}(t_i)\right| \leqslant \max(s(O^{\Gamma}_{\alpha}(t)), s(O^{\Gamma}_{\alpha}(t_i))), \quad \alpha \in \mathscr{L}, \quad t \in [t_i, t_{i+1}]. \tag{3.3}$$

Замечание 1. Известно (см., например, [24]), что если множество $X \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^2)$ выпукло, то площадь $s(O_{\varepsilon})$ ε-слоя $O_{\varepsilon} = \mathrm{cl}(X_{\varepsilon} \backslash X)$, опоясывающего множество X, и длина $l(\partial X)$ границы ∂X множества X связаны равенством

$$s(O_{\varepsilon}) = l(\partial X) \cdot \varepsilon + \pi\varepsilon^2.$$

Если же $X \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^2)$ невыпукло, то площадь $s(O_{\varepsilon})$ может не совпадать с величиной $l(\partial X) \cdot \varepsilon + \pi\varepsilon^2$, а как бы усохнуть. В этом случае выполняется неравенство

$$s(O_{\varepsilon}) \leqslant l(\partial X) \cdot \varepsilon + \pi\varepsilon^2. \tag{3.4}$$

Неравенство (3.4) применим к нашим оценкам, содержащим $s(O^{\Gamma}_{\alpha}(t_i))$ и $s(O^{\Gamma}_{\alpha}(t))$. А именно, из неравенства (3.3), учитывая замечание 1 и условие **C**, получаем

$$\left|\widetilde{s}^{\Gamma}_{\alpha}(t) - \widetilde{s}^{\Gamma}_{\alpha}(t_i)\right| \leqslant l^* \cdot K\Delta + \pi \cdot (K\Delta)^2, \qquad \alpha \in \mathscr{L}, \quad t \in [t_i, t_{i+1}], \quad i \in \overline{0, N-1}.$$

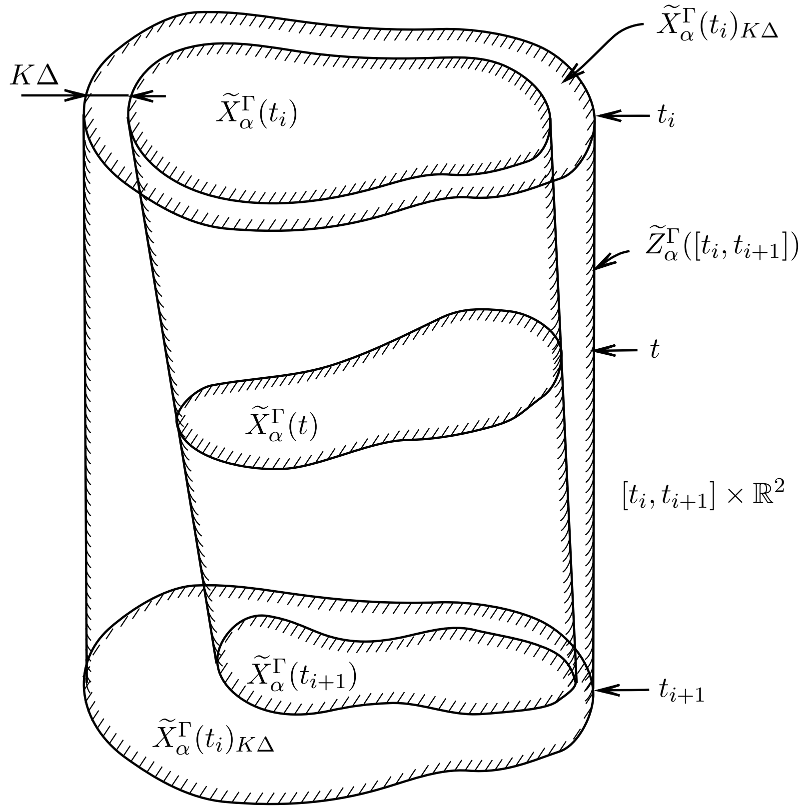

Рис. 3. Участок интегральной воронки $X_\alpha(t)$ при $t \in [t_i, t_{i+1}]$

Далее, нас интересует объем фрагмента $\widetilde{Y}_\alpha^\Gamma(t_0, X^{(0)})_{[t_i, t_{i+1}]} = \widetilde{Y}_\alpha^\Gamma(t_0, X^{(0)}) \cap \big([t_i, t_{i+1}] \times \mathbb{R}^2\big)$ интегральной воронки $\widetilde{Y}_\alpha^\Gamma(t_0, X^{(0)})$ ломаной Эйлера $\widetilde{X}_\alpha^\Gamma(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$. Точнее, — нас интересует его приближенное значение. Этот объем обозначим символом $\widetilde{v}_\alpha^\Gamma([t_i, t_{i+1}])$.

Объем $\widehat{v}_\alpha^\Gamma([t_i, t_{i+1}]) = v(\widetilde{Z}_\alpha^\Gamma([t_i, t_{i+1}]))$ цилиндра $\widetilde{Z}_\alpha^\Gamma([t_i, t_{i+1}])$ определяется равенством $\widehat{v}_\alpha^\Gamma([t_i, t_{i+1}]) = \widetilde{s}_\alpha^\Gamma(t_i)\Delta_i$.

Справедлива оценка

$$\begin{gathered} \big|\widetilde{v}_\alpha^\Gamma([t_i, t_{i+1}]) - \widehat{v}_\alpha^\Gamma([t_i, t_{i+1}])\big| = \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \widetilde{s}_\alpha^\Gamma(t)\, dt - \widetilde{s}_\alpha^\Gamma(t_i)\Delta_i \right| \leqslant \\ \leqslant \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\widetilde{s}_\alpha^\Gamma(t) - \widetilde{s}_\alpha^\Gamma(t_i)|\, dt \leqslant \big(l^* \cdot K\Delta + \pi \cdot (K\Delta)^2\big)\Delta_i, \quad i \in \overline{0, N-1}. \end{gathered} \tag{3.5}$$

Принимая во внимание (3.5), получаем, что рассогласование между объемом $\widetilde{v}_\alpha^\Gamma([t_0, \vartheta]) = v(\widetilde{Y}_\alpha^\Gamma(t_0, X^{(0)})$ интегральной воронки $\widetilde{Y}_\alpha^\Gamma(t_0, X^{(0)})$ и объемом $\widehat{v}_\alpha^\Gamma([t_0, \vartheta]) = v(\widetilde{Z}_\alpha^\Gamma(t_0, X^{(0)}))$ ее ступенчатой аппроксимации $\widetilde{Z}_\alpha^\Gamma(t_0, X^{(0)})$ удовлетворяет неравенству

$$\begin{gathered} |\widetilde{v}_\alpha^\Gamma([t_0, \vartheta]) - \widehat{v}_\alpha^\Gamma([t_0, \vartheta])| = \left| \sum_{i=0}^{N-1} \widetilde{v}_\alpha^\Gamma([t_i.t_{i+1}]) - \sum_{i=0}^{N-1} \widehat{v}_\alpha^\Gamma([t_i, t_{i+1}]) \right| \leqslant \\ \leqslant \sum_{i=0}^{N-1} |\widetilde{v}_\alpha^\Gamma([t_i, t_{i+1}]) - \widehat{v}_\alpha^\Gamma([t_i, t_{i+1}]))| \leqslant \sum_{i=0}^{N-1} (l^* K\Delta + \pi \cdot (K\Delta)^2)\Delta_i = \\ = \big(l^* K\Delta + \pi (K\Delta)^2\big)(\vartheta - t_0). \end{gathered}$$

Теперь, применяя аналогичную схему, сравним объемы $X_\alpha(t_0, X^{(0)})$ — интегральной воронки д. в. (2.1) — и ее ступенчатой аппроксимации $\widetilde{Z}^\Gamma_\alpha(t_0, X^{(0)})$, $\alpha \in \mathscr{L}$.

Для этого рассмотрим участок $X_\alpha(t)_{[t_i,t_{i+1}]} = X_\alpha(t)$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$, отвечающий промежутку $[t_i, t_{i+1}]$ (рис. 3).

Из определения множества достижимости $X_\alpha(t)$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$, следует

$$d(X_\alpha(t), X_\alpha(t_i)) \leqslant K\Delta, \quad t \in [t_i, t_{i+1}),$$

и, кроме того,

$$d(X_\alpha(t_i), \widetilde{X}^\Gamma_\alpha(t_i)) \leqslant e^{L\cdot(t_i - t_0)} \cdot (t_i - t_0)(\omega^*(\Delta) + LK\Delta), \quad \alpha \in \mathscr{L}, \quad i \in \overline{1, N},$$

где L и K определены в § 2.

Из этих двух неравенств следует

$$d(X_\alpha(t), \widetilde{X}^\Gamma_\alpha(t_i)) \leqslant e^{L\cdot(t_i - t_0)} \cdot (t_i - t_0)(\omega^*(\Delta) + KL\Delta) + K\Delta. \tag{3.6}$$

Символом $s_\alpha(t)$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$, обозначим площадь множества достижимости $X_\alpha(t)$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$. Так как отображение $t \mapsto X_\alpha(t)$ непрерывно в хаусдорфовой метрике на $[t_i, t_{i+1}]$, то функция $s_\alpha(t)$ непрерывна на $[t_i, t_{i+1}]$.

Оценим сверху величину

$$|s_\alpha(t) - \widetilde{s}^\Gamma_\alpha(t_i)|, \quad t \in [t_i, t_{i+1}].$$

Введем функцию $\gamma(\delta) = e^{L(\vartheta - t_0)}(\vartheta - t_0)(\omega^*(\delta) + LK\delta) + K\delta$, $\delta \in (0, \infty)$.

Символом $Q_\alpha(t)$, $\alpha \in \mathscr{L}$, $t \in [t_0, \vartheta]$, обозначим $\gamma(\Delta)$-слой $\mathrm{cl}\big(X_\alpha(t)_{\gamma(\Delta)} \backslash X_\alpha(t)\big)$, опоясывающий множество $X_\alpha(t)$. Символом $Q^\Gamma_\alpha(t_i)$, $\alpha \in \mathscr{L}$, обозначим $\gamma(\Delta)$-слой, представляющий собой $\mathrm{cl}\big(\widetilde{X}^\Gamma_\alpha(t_i)_{\gamma(\Delta)} \backslash \widetilde{X}^\Gamma_\alpha(t_i)\big)$ и опоясывающий множество $Q^\Gamma_\alpha(t_i)$.

Из оценки (3.6) величины $d(X_\alpha(t), \widetilde{X}^\Gamma_\alpha(t_i))$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$, следует

$$X_\alpha(t) \subset \widetilde{X}^\Gamma_\alpha(t_i)_{\gamma(\Delta)} = \widetilde{X}^\Gamma_\alpha(t_i) \cup Q^\Gamma_\alpha(t_i), \qquad \widetilde{X}^\Gamma_\alpha(t_i) \subset X_\alpha(t)_{\gamma(\Delta)} = X_\alpha(t) \cup Q_\alpha(t).$$

Из этих включений следуют оценки для площадей $s_\alpha(t)$ и $\widetilde{s}^\Gamma_\alpha(t_i)$ множеств $X_\alpha(t)$ и $\widetilde{X}^\Gamma_\alpha(t_i)$

$$s_\alpha(t) \leqslant \widetilde{s}^\Gamma_\alpha(t_i) + s(Q^\Gamma_\alpha(t_i)), \qquad \widetilde{s}^\Gamma_\alpha(t_i) \leqslant s_\alpha(t) + s(Q_\alpha(t));$$

здесь $s(Q^\Gamma_\alpha(t_i))$ и $s(Q_\alpha(t))$ — площади множеств $Q^\Gamma_\alpha(t_i)$ и $Q_\alpha(t)$, $\alpha \in \mathscr{L}$, $t \in [t_i, t_{i+1})$.

Из последних оценок следует

$$|s_\alpha(t) - \widetilde{s}^\Gamma_\alpha(t_i)| \leqslant \max(s(Q_\alpha(t)), s(Q^\Gamma_\alpha(t_i)), \quad \alpha \in \mathscr{L}, \quad t \in [t_i, t_{i+1}).$$

Справедливы также оценки

$$\begin{gathered} s(Q_\alpha(t)) \leqslant l_\alpha(t) \cdot \gamma(\Delta) + \pi \cdot \gamma(\Delta)^2 \leqslant l^* \cdot \gamma(\Delta) + \pi \cdot \gamma(\Delta)^2, \\ s(Q^\Gamma_\alpha(t_i)) \leqslant l^\Gamma_\alpha(t_i) \cdot \gamma(\Delta) + \pi \cdot \gamma(\Delta)^2 \leqslant l^* \cdot \gamma(\Delta) + \pi \cdot \gamma(\Delta)^2, \\ \alpha \in \mathscr{L}, \quad t \in [t_i, t_{i+1}), \quad i \in \overline{0, N-1}. \end{gathered}$$

Учитывая приведенные выше неравенства, получаем

$$|s_\alpha(t) - \widetilde{s}^\Gamma_\alpha(t_i)| \leqslant l^* \cdot \gamma(\Delta) + \pi \cdot \gamma(\Delta)^2, \quad \alpha \in \mathscr{L}, \quad t \in [t_i, t_{i+1}), \quad i \in \overline{0, N-1}. \tag{3.7}$$

Для нас представляет интерес объем $v_\alpha([t_i, t_{i+1}]) = v(X_\alpha(t_0, X^{(0)})_{[t_i,t_{i+1}]})$ фрагмента $X_\alpha(t_0, X^{(0)})_{[t_i,t_{i+1}]} = X_\alpha(t_0, X^{(0)}) \cap \big([t_i, t_{i+1}] \times \mathbb{R}^2\big)$ интегральной воронки $X_\alpha(t_0, X^{(0)})$ д. в. (2.1), соответствующего промежутку $[t_i, t_{i+1}]$.

Сравним объемы $v_\alpha([t_i, t_{i+1}])$ и $\widehat{v}^\Gamma_\alpha([t_i, t_{i+1}])$.

С учетом (3.7) получаем, что справедлива оценка

$$\begin{gathered}\big|v_\alpha([t_i, t_{i+1}]) - \widehat{v}^\Gamma_\alpha([t_i, t_{i+1}])\big| = \\ = \left|\int_{t_i}^{t_{i+1}} (s_\alpha(t) - \widetilde{s}^\Gamma_\alpha(t_i))\, dt\right| \leqslant \int_{t_i}^{t_{i+1}} |s_\alpha(t) - \widetilde{s}^\Gamma_\alpha(t_i)|\, dt \leqslant \\ \leqslant \big(l^* \cdot \gamma(\Delta) + \pi \cdot \gamma(\Delta)^2\big)\Delta_i, \quad \alpha \in \mathscr{L}, \quad i \in \overline{0, N-1}.\end{gathered} \tag{3.8}$$

Из (3.8) получаем искомую оценку рассогласования между объемом $v_\alpha([t_0, \vartheta]) = v(X_\alpha(t_0, X^{(0)}))$ интегральной воронки $X_\alpha(t_0, X^{(0)})$ и объемом $\widehat{v}^\Gamma([t_0, \vartheta])$ ее ступенчатой аппроксимации $\widetilde{Z}^\Gamma_\alpha(t_0, X^{(0)})$.

Теорема 1 (о численном вычислении объема интегральных воронок). *Если управляемая система* Σ *удовлетворяет условиям* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *и* $\mathbf{C}$, *то выполняется следующая оценка:*

$$\begin{gathered}\big|v_\alpha([t_0, \vartheta]) - \widehat{v}^\Gamma_\alpha([t_0, \vartheta]) = \Big|\sum_{i=0}^{N-1} v_\alpha([t_i, t_{i+1}]) - \sum_{i=0}^{N-1} \widehat{v}^\Gamma_\alpha([t_i, t_{i+1}])\Big| \leqslant \\ \leqslant \sum_{i=0}^{N-1} \big|v_\alpha([t_i, t_{i+1}]) - \widehat{v}^\Gamma_\alpha([t_i, t_{i+1}])\big| \leqslant \sum_{i=0}^{N-1} \big(l^* \cdot \gamma(\Delta) + \pi \cdot \gamma(\Delta)^2\big)\Delta_i = \\ = \big(l^* \cdot \gamma(\Delta) + \pi \cdot \gamma(\Delta)^2\big) \cdot (\vartheta - t_0).\end{gathered} \tag{3.9}$$

§ 4. Оценка степени зависимости объема интегральной воронки управляемой системы Σ от параметра

В задачах, связанных с вычислением объемов интегральных воронок $X_\alpha(t_0, X^{(0)})$, $\alpha \in \mathscr{L}$, может возникать вопрос о сравнении объемов $v(X_\alpha(t_0, X^{(0)}))$ и $v(X_\beta(t_0.X^{(0)}))$, α и β из $\mathscr{L}$. Принимая во внимание возможность подмены множеств $X_\alpha(t_0, X^{(0)})$ их аппроксимациями $\widetilde{Z}^\Gamma_\alpha(t_0, X^{(0)})$, мы можем подменить вопрос о сравнении объемов интегральных воронок вопросом о сравнении объемов $v(\widetilde{Z}^\Gamma_\alpha(t_0, X^{(0)}))$ и $v(\widetilde{Z}^\Gamma_\beta(t_0.X^{(0)}))$, α и β из $\mathscr{L}$.

К решению последнего вопроса можно подойти, введя в компакте $\mathscr{L}$ конечную ρ-сеть $\mathscr{L}^{(\rho)} = \{\alpha^{(k)} \colon k \in \overline{1, K_*}\}$. Будем считать, что такая ρ-сеть $\mathscr{L}^{(\rho)}$ введена; выбор числа $\rho \in (0, \infty)$ уточним ниже.

Нам предстоит получить оценку сверху величины

$$|\widehat{v}^\Gamma_\alpha([t_0, \vartheta]) - \widehat{v}^\Gamma_\beta([t_0, \vartheta])|, \quad \alpha, \beta \in \mathscr{L};$$

здесь $\widehat{v}^\Gamma_\alpha([t_0, \vartheta]) = v(\widetilde{Z}^\Gamma_\alpha(t_0, X^{(0)}))$ (см. с. 453).

Запишем для этого оценку [23, (2.28)] в виде

$$\begin{gathered}d(\widetilde{X}^\Gamma_\alpha(t_i), \widetilde{X}^\Gamma_\beta(t_i)) \leqslant e^{\sum\limits_{k=1}^{i-1} L(\tau_k)\Delta_k}(t_i - t_0)\omega^*(||\alpha - \beta||) \leqslant \\ \leqslant e^{\sum\limits_{k=0}^{N-1} L(\tau_k)\Delta_k} \cdot (\vartheta - t_0)\omega^*(||\alpha - \beta||).\end{gathered} \tag{4.1}$$

Для правой части оценки (4.1) введем обозначение

$$\varphi_\Gamma(||\alpha - \beta||) = e^{\sum\limits_{k=0}^{N-1} L(\tau_k)\Delta_k} \cdot (\vartheta - t_0)\omega^*(||\alpha - \beta||).$$

Объемы $\widehat{v}_{\alpha}^{\Gamma}([t_0,\vartheta])$ и $\widehat{v}_{\beta}^{\Gamma}([t_0,\vartheta])$ стеснены оценкой

$$|\widehat{v}_{\alpha}^{\Gamma}([t_0,\vartheta])-\widehat{v}_{\beta}^{\Gamma}([t_0,\vartheta])|\leqslant\big(l^*\cdot\varphi(\Gamma;||\alpha-\beta||)+\pi\cdot\varphi_{\Gamma}(||\alpha-\beta||)^2\big)\cdot(\vartheta-t_0). \tag{4.2}$$

Зададим некоторую функцию $\varkappa(\delta)\downarrow 0$, $\delta\downarrow 0$.

Принимая во внимание, что разбиение Γ задано и, стало быть, задан диаметр $\Delta = \Delta(\Gamma) = \Delta_i = t_{i+1}-t_i$, $i=\overline{0,N-1}$, разбиения, выберем ρ — параметр сети $\mathscr{L}^{(\rho)}$ из условия $\rho\in(0,\varkappa(\Delta))$.

Тогда для любого $\alpha\in\mathscr{L}$ найдется $\alpha^{(k)}\in\mathscr{L}^{(\rho)}$ такое, что

$$\begin{gathered}|\widehat{v}_{\alpha}^{\Gamma}([t_0,\vartheta])-\widehat{v}_{\alpha^{(k)}}^{\Gamma}([t_0,\vartheta])|\leqslant\\ \leqslant\big(l^*\cdot\varphi_{\Gamma}(||\alpha-\alpha^{(k)}||)+\pi\cdot\varphi_{\Gamma}(||\alpha-\alpha^{(k)}||)^2\big)\cdot(\vartheta-t_0).\end{gathered} \tag{4.3}$$

Задав $\varepsilon\in(0,\infty)$ и имея функцию $\varkappa(\delta)$ на $(0,\infty)$, можем выбрать настолько густое разбиение Γ, что значение $\varkappa(\Delta)=\varkappa(\Delta(\Gamma))$ будет удовлетворять неравенству

$$\big(l^*\cdot\varphi_{\Gamma}(\varkappa(\Delta))+\pi\cdot\varphi_{\Gamma}(\varkappa(\Delta))^2\big)\cdot(\vartheta-t_0)<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.4}$$

Далее, выбрав по этому $\Delta=\Delta(\Gamma)$ число $\rho\in(0,\varkappa(\Delta))$, получаем, что для любого $\alpha\in\mathscr{L}$ найдется $\alpha^{(k)}\in\mathscr{L}^{(\rho)}$, удовлетворяющее неравенству

$$\begin{gathered}|\widehat{v}_{\alpha}^{\Gamma}([t_0,\vartheta])-\widehat{v}_{\alpha^{(k)}}^{\Gamma}([t_0,\vartheta])|\leqslant\\ \leqslant\big(l^*\cdot\varphi_{\Gamma}(||\alpha-\alpha^{(k)}||)+\pi\cdot\varphi_{\Gamma}(||\alpha-\alpha^{(k)}||)^2\big)\cdot(\vartheta-t_0)\leqslant\\ \leqslant\big(l^*\cdot\varphi_{\Gamma}(\varkappa(\Delta))+\pi\cdot\varphi_{\Gamma}(\varkappa(\Delta))^2\big)\cdot(\vartheta-t_0)<\frac{\varepsilon}{2}.\end{gathered}$$

Таким образом, задав $\varepsilon\in[0,\infty)$, функцию $\varkappa(\delta)$ на $(0,\infty)$, разбиение Γ с диаметром $\Delta=\Delta(\Gamma)=N^{-1}\cdot(\vartheta-t_0)$, удовлетворяющим (4.4), и выбрав $\rho\in(0,\varkappa(\Delta))$, мы можем подменить с точностью до $\varepsilon/2$ вычисление объемов $\widehat{v}_{\alpha}^{\Gamma}([t_0,\vartheta])$, $\alpha\in\mathscr{L}$, вычислением объемов $\widehat{v}_{\alpha^{(k)}}^{\Gamma}([t_0,\vartheta])$, $\alpha^{(k)}\in\mathscr{L}^{(k)}$.

Например, в тех задачах оптимального управления, которые связаны с оптимизацией объемов интегральных воронок $X_{\alpha}(t_0,X^{(0)})$, $\alpha\in\mathscr{L}$, мы можем подменять вычисление объемов $v(X_{\alpha}(t_0,X^{(0)}))$, $\alpha\in\mathscr{L}$, вычислением объемов $v(\widetilde{Z}_{\alpha^{(k)}}^{\Gamma}(t_0,X^{(0)}))$, $\alpha^{(k)}\in\mathscr{L}^{(\rho)}$, с известной степенью точности, зависящей от $\Delta=\Delta(\Gamma)$.

При такой подмене мы легко можем получить оценку рассогласования между объемами $v_{\alpha}([t_0,\vartheta])=v(X_{\alpha}(t_0,X^{(0)})$ и $\widehat{v}_{\alpha^{(k)}}([t_0,\vartheta])=v(\widetilde{Z}_{\alpha^{(k)}}^{\Gamma}(t_0,X^{(0)}))$, используя ранее построенные оценки.

Действительно, имеем

$$\begin{gathered}|v_{\alpha}([t_0,\vartheta])-\widehat{v}_{\alpha^{(k)}}^{\Gamma}([t_0,\vartheta])|\leqslant\\ \leqslant|v_{\alpha}([t_0,\vartheta])-\widehat{v}_{\alpha}^{\Gamma}([t_0,\vartheta])|+|\widehat{v}_{\alpha}^{\Gamma}([t_0,\vartheta])-\widehat{v}_{\alpha^{(k)}}^{\Gamma}([t_0,\vartheta])|\leqslant\\ \leqslant\big(l^*\cdot\gamma(\Delta)+\pi\cdot\gamma(\Delta)^2\big)\cdot(\vartheta-t_0)+\\ +\big(l^*\cdot\varphi_{\Gamma}(||\alpha-\alpha^{(k)}||)+\pi\cdot\varphi_{\Gamma}(||\alpha-\alpha^{(k)}||)^2\big)\cdot(\vartheta-t_0)=\\ =\big(l^*(\gamma(\Delta)+\varphi_{\Gamma}(||\alpha-\alpha^{(k)}||)+\pi\cdot(\gamma(\Delta)^2+\varphi_{\Gamma}(||\alpha-\alpha^{(k)}||)^2)\big)\cdot(\vartheta-t_0),\end{gathered} \tag{4.5}$$

учитывая (3.9) и (4.3).

Скорректируем выбор разбиения Γ промежутка $[t_0,\vartheta]$ так, чтобы в дополнении к неравенству (4.4) выполнялось неравенство

$$\big(l^*\cdot\gamma(\Delta)+\pi\cdot\gamma(\Delta)^2\big)\cdot(\vartheta-t_0)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Поскольку параметр ρ удовлетворяет неравенству $\rho < \varkappa(\Delta)$, то получаем из (4.5) для значений $\alpha \in \mathscr{L}$ и $\alpha^{(k)} \in \mathscr{L}^{(\rho)}$, $||\alpha - \alpha^{(k)}|| \leqslant \rho$ оценку

$$\begin{gathered}|v_\alpha([t_0,\vartheta]) - \widehat{v}^{\Gamma}_{\alpha^{(k)}}([t_0,\vartheta])| \leqslant \\ \leqslant \bigl(l^* \cdot (\gamma(\Delta) + \varphi_\Gamma(\varkappa(\Delta))) + \pi \cdot (\gamma(\Delta)^2 + \varphi_\Gamma(\varkappa(\Delta))^2)\bigr) \cdot (\vartheta - t_0).\end{gathered} \tag{4.6}$$

При выбранных разбиении Γ, значении $\rho < \varkappa(\Delta)$ и $\alpha \in \mathscr{L}$, $\alpha^{(k)} \in \mathscr{L}^{\rho}$, $||\alpha^{(k)} - \alpha|| \leqslant \rho$ получаем оценку

$$|v_\alpha([t_0,\vartheta]) - \widehat{v}^{\Gamma}_{\alpha^{(k)}}([t_0,\vartheta])| \leqslant \varepsilon. \tag{4.7}$$

В правую часть оценки (4.6) входят функции $\gamma(\delta)$ и $\varphi_\Gamma(\rho)$, где δ и ρ из $(0,\infty)$; функция $\varkappa(\delta)$, $\delta \in (0,\infty)$, выбрана нами.

Функции $\gamma(\delta)$ и $\varphi_\Gamma(\rho)$ описываются простыми формулами и легко могут быть вычислены их значения $\gamma(\Delta)$ и $\varphi_\Gamma(\varkappa(\Delta))$. Поскольку $\gamma(\delta) \downarrow 0$, $\delta \downarrow 0$ и $\varphi_\Gamma(\rho) \downarrow 0$, $\rho \downarrow 0$, то правая часть оценки (4.6) стремится к нулю при $\Delta = \Delta(\Gamma) \downarrow 0$, и, следовательно, выбирая разбиение Γ промежутка $[t_0,\vartheta]$ достаточно густым, мы удовлетворим неравенству (4.7).

Следовательно, за счет измельчения разбиения Γ промежутка $[t_0,\vartheta]$ и соответствующего ему измельчения ρ-сети $\mathscr{L}^{(\rho)}$, рассогласование ε в оценке (4.7) может быть сделано сколь угодно малым. Переходя к пределу при ε в неравенстве

$$\begin{gathered}|v_\alpha([t_0,\vartheta]) - v_\alpha([t_0,\vartheta])| \leqslant \\ \leqslant |v_\alpha([t_0,\vartheta]) - \widehat{v}^{\Gamma}_{\alpha^{(k)}}([t_0,\vartheta])| + |\widehat{v}^{\Gamma}_{\alpha^{(k)}}([t_0,\vartheta]) - \widehat{v}^{\Gamma}_{\beta^{(k)}}([t_0,\vartheta])| + |\widehat{v}^{\Gamma}_{\beta^{(k)}}([t_0,\vartheta]) - v_\alpha([t_0,\vartheta])| \leqslant \\ \leqslant 2\varepsilon + \bigl(l^* \cdot \varphi(\Gamma; ||\alpha - \beta||) + \pi \cdot \varphi_\Gamma(||\alpha-\beta||)^2\bigr) \cdot (\vartheta - t_0),\end{gathered}$$

вытекающем из (4.2), получаем искомое утверждение.

Теорема 2 (о зависимости объема интегральных воронок от параметра). *Если управляемая система Σ удовлетворяет условиям* **A**, **B** *и* **C**, *то для любых двух значений $\alpha, \beta \in \mathscr{L}$ ее параметров выполняется следующая оценка:*

$$|v_\alpha([t_0,\vartheta]) - v_\alpha([t_0,\vartheta])| \leqslant \bigl(l^* \cdot \varphi(\Gamma; ||\alpha - \beta||) + \pi \cdot \varphi_\Gamma(||\alpha-\beta||)^2\bigr) \cdot (\vartheta - t_0).$$

Финансирование. Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075–02–2022–874).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куржанский А. Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
2. Куржанский А. Б. Избранные труды. М.: Изд-во МГУ, 2009.
3. Красовский Н. Н. Управление динамической системой: задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985.
4. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Физматлит, 1974.
5. Черноусько Ф. Л., Меликян А. А. Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978.
6. Ананьевский И. М. Управление нелинейной колебательной системой четвертого порядка с неизвестными параметрами // Автоматика и телемеханика. 2001. № 3. С. 3–15. http://mi.mathnet.ru/at1743
7. Ананьевский И. М. Синтез управления линейными системами с помощью методов теории устойчивости движения // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39. № 1. С. 3–11. http://mi.mathnet.ru/de10757

8. Ершов А. А., Ушаков А. В., Ушаков В. Н. О двух игровых задачах о сближении // Математический сборник. 2021. Т. 212. № 9. С. 40–74. https://doi.org/10.4213/sm9496
9. Поляк Б. Т., Хлебников М. В., Щербаков П. С. Управление линейными системами при внешних возмущениях: техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.
10. Безнос А. В., Гришин А. А., Ленский А. В., Охоцимский Д. Е., Формальский А. М. Управление при помощи маховика маятником с неподвижной точкой подвеса // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2004. № 1. С. 27–38. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17538335
11. Ли Э. Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.
12. Kurzhanski A. B., Valyi I. Ellipsoidal calculus for estimation and control. Boston: Birkhäuser, 1997.
13. Черноусько Ф. Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23449501
14. Lempio F., Veliov V. M. Discrete approximations of differential inclusions // Bayreuther Mathematische Schriften. 1998. Vol. 54. P. 149–232. https://zbmath.org/0922.65059
15. Никольский М. С. Об аппроксимации множества достижимости дифференциального включения // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. 1987. № 4. С. 31–34. https://zbmath.org/?q=an:0639.65047
16. Никольский М. С. Об оценке изнутри множества достижимости нелинейного интегратора Р. Брокитта // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 96. № 11. С. 1501–1505. http://mi.mathnet.ru/de10264
17. Вдовин С. А., Тарасьев А. М., Ушаков В. Н. Построение множества достижимости интегратора Брокитта // Прикладная математика и механика. 2004. Т. 68. Вып. 5. С. 707–724. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17670066
18. Гусев М. И. Оценки множеств достижимости многомерных управляемых систем с нелинейными перекрестными связями // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15. № 4. С. 82–94. http://mi.mathnet.ru/timm428
19. Филиппова Т. Ф. Построение многозначных оценок множеств достижимости некоторых нелинейных динамических систем с импульсным управлением // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15. № 4. С. 262–269. http://mi.mathnet.ru/timm442
20. Ушаков В. Н., Матвийчук А. Р., Ушаков А. В. Аппроксимация множеств достижимости и интегральных воронок дифференциальных включений // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 4. С. 23–39. https://doi.org/10.20537/vm110403
21. Ушаков В. Н., Ершов А. А. Множества достижимости и интегральные воронки зависящих от параметра дифференциальных включений // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2021. Т. 499. С. 49–53. https://doi.org/10.31857/S2686954321040159
22. Ushakov V. N., Ershov A. A., Ushakov A. V., Kuvshinov O. A. Control system depending on a parameter // Ural Mathematical Journal. 2021. Vol. 7. No. 1. P. 120–159. https://doi.org/10.15826/umj.2021.1.011
23. Ушаков В. Н., Ершов А. А., Ушаков А. В. Управляемые системы, зависящие от параметра: множества достижимости и интегральные воронки // Прикладная математика и механика. 2022. Т. 86. № 2. С. 186–205. https://doi.org/10.31857/S0032823522010088
24. Лейхтвейс К. Выпуклые множества. М.: Наука, 1985.

Поступила в редакцию 25.07.2022

Принята к публикации 20.08.2022

Ушаков Владимир Николаевич, д. ф.-м. н., профессор, чл.-корр. РАН, главный научный сотрудник, отдел динамических систем, Институт математики и механики УрО РАН, 620108, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0527-5375
E-mail: ushak@imm.uran.ru

Ершов Александр Анатольевич, к. ф.-м. н., научный сотрудник, отдел динамических систем, Институт математики и механики УрО РАН, 620108, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
доцент, кафедра математического анализа, ИЕНиМ, Уральский федеральный университет, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9685-9711
E-mail: ale10919@yandex.ru

Цитирование: В. Н. Ушаков, А. А. Ершов. О параметрической зависимости объема интегральных воронок и их аппроксимаций // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32. Вып. 3. С. 447–462.

MATHEMATICS 2022. Vol. 32. Issue 3. Pp. 447–462.

V. N. Ushakov, A. A. Ershov

On the parametric dependence of the volume of integral funnels and their approximations

Keywords: control nonlinear systems, differential inclusions, reachable sets, parametric depedence, volume of integral funnel, discrete approximation.

MSC2020: 49M25, 93C15

DOI: 10.35634/vm220307

We consider a nonlinear control system in a finite-dimensional Euclidean space and on a finite time interval, which depends on a parameter. Reachable sets and integral funnels of a differential inclusion corresponding to a control system containing a parameter are studied. When studying numerous problems of control theory and differential games, constructing their solutions and estimating errors, various theoretical approaches and associated computational methods are used. The problems mentioned above include, for example, various types of approach problems, the resolving constructions of which can be described quite simply in terms of reachable sets and integral funnels.

In this paper, we study the dependence of reachable sets and integral funnels on a parameter: the degree of this dependence on a parameter is estimated under certain conditions on the control system. The degree of dependence of the integral funnels is investigated for the change in their volume with a change in the parameter. To estimate this dependence, systems of sets in the phase space are introduced that approximate the reachable sets and integral funnels on a given time interval corresponding to a finite partition of this interval. In this case, the degree of dependence of the approximating system of sets on the parameter is first estimated, and then this estimate is used in estimating the dependence of the volume of the integral funnel of the differential inclusion on the parameter. This approach is natural and especially useful in the study of specific applied control problems, in solving which, in the end, one has to deal not with ideal reachable sets and integral funnels, but with their approximations corresponding to a discrete representation of the time interval.

Funding. The work was performed as part of research conducted in the Ural Mathematical Center with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement number 075–02–2022–874).

REFERENCES

1. Kurzhanskii A. B. *Upravlenie i nablyudenie v usloviyakh neopredelennosti* (Control and observation under uncertainty conditions), Moscow: Nauka, 1977.
2. Kurzhanskii A. B. *Izbrannye trudy* (Selected works), Moscow: Moscow State University, 2009.
3. Krasovskii N. N. *Upravlenie dinamicheskoi sistemoi: zadacha o minimume garantirovannogo rezul'tata* (Control of a dynamical system: problem on the minimum of guaranteed result), Moscow: Nauka, 1985.
4. Krasovskii N. N., Subbotin A. I. *Game-theoretical control problems*, New York: Springer, 1988. https://link.springer.com/book/9781461283188
5. Chernous'ko F. L., Melikyan A. A. *Igrovye zadachi upravleniya i poiska* (Game control and search problems), Moscow: Nauka, 1978.
6. Anan'evskii I. M. Control of a nonlinear vibratory system of the fourth order with unknown parameters, *Automation and Remote Control*, 2001, vol. 62, issue 3, pp. 343–355. https://doi.org/10.1023/A:1002832924913
7. Anan'evskii I. M. Control synthesis for linear systems by methods of stability theory of motion, *Differential Equations*, 2003, vol. 39, no. 1, pp. 1–10. https://doi.org/10.1023/A:1025170521270
8. Ershov A. A., Ushakov A. V., Ushakov V. N. Two game-theoretic problems of approach, *Sbornik: Mathematics*, 2021, vol. 212, no. 9, pp. 1228–1260. https://doi.org/10.1070/SM9496

9. Polyak B. T., Khlebnikov M. V., Shcherbakov P. S. *Upravlenie lineinymi sistemami pri vneshnikh vozmushcheniyakh: Tekhnika lineinykh matrichnykh neravenstv* (Control of linear systems under external disturbances: Technique of linear matrix inequalities), Moscow: Lenand, 2014.
10. Beznos A. V., Grishin A. A., Lensky A. V., Okhotsimsky D. E., Formal'sky A. M. A flywheel use-based control for a pendulum with a fixed suspension point, *Journal of Computer and System Sciences International*, 2004, vol. 43, no. 1, pp. 22–33. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=13466539
11. Lee E. B., Markus L. *Foundation of optimal control theory*, New York–London–Sydney: John Wiley and Sons, 1967.
    Translated under the title *Osnovy teorii optimal'nogo upravleniya*, Moscow: Nauka, 1972.
12. Kurzhanski A. B., Valyi I. Ellipsoidal calculus for estimation and control. Boston: Birkhäuser, 1997.
13. Chernous'ko F. L. *Otsenivanie fazovogo sostoyaniya dinamicheskikh sistem. Metod ellipsoidov* (Estimation of the phase state of dynamical systems. The ellipsoid method), Moscow: Nauka, 1988.
14. Lempio F., Veliov V. M. Discrete approximations of differential inclusions, *Bayreuther Mathematische Schriften*, 1998, vol. 54, pp. 149–232. https://zbmath.org/0922.65059
15. Nikol'skii M. S. Approximation of the feasibility set for a differential inclusion, *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Ser. XV. Vychislitel'naya Matematika i Kibernetika*, 1987, no. 4, pp. 31–34 (in Russian). https://zbmath.org/?q=an:0639.65047
16. Nikol'skii M. S. An inner estimate of the attainability set of Brockett's nonlinear integrator, *Differential Equations*, 2000, vol. 36, no. 11, pp. 1647–1651. https://doi.org/10.1007/BF02757366
17. Vdovin S. A., Taras'yev A. M., Ushakov V. N. Construction of the attainability set of a Brockett integrator, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2004, vol. 68, no. 5, pp. 631–646. https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2004.09.001
18. Gusev M. I. Estimates of reachable sets of multidimensional control systems with nonlinear interconnections, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2010, vol. 269, suppl. 1, pp. 134–146. https://doi.org/10.1134/S008154381006012X
19. Filippova T. F. Construction of set-valued estimates of reachable sets for some nonlinear dynamical systems with impulsive control, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2010, vol. 269, suppl. 1, pp. 95–102. https://doi.org/10.1134/S008154381006009X
20. Ushakov V. N., Matviychuk A. R., Ushakov A. V. Approximations of attainability sets and of integral funnels of differential inclusions, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2011, issue 4, pp. 23–39 (in Russian). http://doi.org/10.20537/vm110403
21. Ushakov V. N., Ershov A. A. Reachable sets and integral funnels of differential inclusions depending on a parameter, *Doklady Mathematics*, 2021, vol. 104, no. 1, pp. 200–204. https://doi.org/10.1134/S1064562421040153
22. Ushakov V. N., Ershov A. A., Ushakov A. V., Kuvshinov O. A. Control system depending on a parameter, *Ural Mathematical Journal*, 2021, vol. 7, no. 1, pp. 120–159. https://doi.org/10.15826/umj.2021.1.011
23. Ushakov V. N., Ershov A. A., Ushakov A. V. Control system depending on a parameter: reachable sets and integral funnels, *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*, 2022, vol. 86, no. 2, pp. 186–205 (in Russian). https://doi.org/10.31857/S0032823522010088
24. Leichtweiß K. *Konvexe Mengen*, Berlin: Springer, 1980.
    Translated under the title *Vypuklye mnozhestva*, Moscow: Nauka, 1985.

Received 25.07.2022

Accepted 20.08.2022

Vladimir Nikolaevich Ushakov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Chief Researcher, Department of Dynamical Systems, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620108, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0527-5375
E-mail: ushak@imm.uran.ru

Aleksandr Anatol'evich Ershov, Candidate of Physics and Mathematics, Researcher, Department of Dynamical Systems, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620108, Russia;
Associate Professor, Department of Mathematical Analysis, Institute of Natural Sciences and Mathematics, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9685-9711
E-mail: ale10919@yandex.ru

Citation: V. N. Ushakov, A. A. Ershov. On the parametric dependence of the volume of integral funnels and their approximations, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2022, vol. 32, issue 3, pp. 447–462.