МАТЕМАТИКА 2022. Т. 32. Вып. 3. С. 361–382.

УДК 517.98, 512.562

© *С. Бенараб, Е. А. Панасенко*

ОБ ОДНОМ ВКЛЮЧЕНИИ С ОТОБРАЖЕНИЕМ, ДЕЙСТВУЮЩИМ ИЗ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННОГО ПРОСТРАНСТВА В МНОЖЕСТВО С РЕФЛЕКСИВНЫМ БИНАРНЫМ ОТНОШЕНИЕМ

Рассматриваются многозначные отображения, действующие из частично упорядоченного пространства $(X,\leqslant)$ в множество Y, на котором задано рефлексивное бинарное отношение ϑ (это отношение не предполагается ни антисимметричным, ни транзитивным, т. е. ϑ не является порядком в Y). Для таких отображений введены аналоги понятий накрывания и монотонности. С использованием этих понятий исследуется включение $F(x)\ni\tilde{y}$, где $F\colon X\rightrightarrows Y$, $\tilde{y}\in Y$. Предполагается, что для некоторого заданного $x_0\in X$ существует $y_0\in F(x_0)$ такой, что $(\tilde{y},y_0)\in\vartheta$. Получены условия существования решения $x\in X$ изучаемого включения, удовлетворяющего неравенству $x\leqslant x_0$, и условия существования минимального и наименьшего решений. Также определяется и исследуется свойство устойчивости решений рассматриваемого включения к изменениям многозначного отображения F и элемента $\widetilde{y}$. А именно, рассматривается последовательность «возмущенных» включений $F_i(x)\ni\tilde{y}_i$, $i\in\mathbb{N}$, получены условия, при которых эти включения имеют решения $x_i\in X$ и для любой возрастающей последовательности $\{i_n\}$ натуральных чисел выполнено $\sup_{n\in\mathbb{N}}\{x_{i_n}\}=x$, где $x\in X$ — решение исходного включения.

Ключевые слова: многозначное отображение, частично упорядоченное пространство, операторное включение, существование решений.

DOI: 10.35634/vm220302

Введение

В анализе, ряде других разделов математики широко применяются утверждения о неподвижных точках однозначных и многозначных отображений, действующих в нормированных, метрических, частично упорядоченных и других пространствах. В частности, к неподвижным точкам отображений (в основном, многозначных) сводятся некоторые задачи теории дифференциальных включений, теории управления, теории игр, теории оптимизации (см., например, [1–5]).

Отметим, что имеется тесная связь между утверждениями о неподвижных точках отображений метрических и частично упорядоченных пространств. А именно, из теорем о неподвижных точках отображений частично упорядоченных пространств выводятся соответствующие теоремы для отображений метрических пространств (для этого в метрическом пространстве определяется порядок Бишопа–Фелпса [6, теорема 7.5.1], или порядок Брондстеда [7], или аналогичные отношения порядка). Фундаментальные результаты о неподвижных точках изотонных операторов в частично упорядоченных пространствах получены в работах Г. Биркгофа, А. Тарского, Б. Кнастера, Л. В. Канторовича, Р. Е. Смитсона (см. [8, с. 25, 26], [9, с. 265], [10, с. 88]). В работах А. В. Арутюнова, Е. С. Жуковского, С. Е. Жуковского [11–14] получены распространения этих утверждений — теоремы о точках совпадения двух отображений: накрывающего и изотонного (как однозначных, так и многозначных), действующих из частично упорядоченного пространства $(X,\leqslant)$ в частично упорядоченное пространство $(Y,\leqslant)$. Определенное в этих работах свойство «упорядоченного» накрывания отображения $\Psi\colon X\to Y$ означает, что для любых $x\in X$ и $y'\in Y$, если

$y' \leqslant \Psi(x)$, то существует $x' \in X$, удовлетворяющий соотношениям $x' \leqslant x$, $\Psi(x') = y'$. Для многозначного отображения $\Psi\colon X \rightrightarrows Y$ свойство накрывания определено аналогично:

$$\forall x \in X \ \ \forall y \in \Psi(x) \ \ \forall y' \in Y \ \ y' \leqslant y \ \Rightarrow \ \exists x' \in X \ \ x' \leqslant x, \ \ y' \in \Psi(x').$$

Для многозначных отображений $\Psi, \Phi\colon X \rightrightarrows Y$ точка совпадения $x \in X$ определяется соотношением $\Psi(x) \cap \Phi(x) \neq \varnothing$, которое в случае «обычных однозначных» отображений принимает вид уравнения

$$\Psi(x) = \Phi(x). \tag{0.1}$$

Очевидно, неподвижная точка отображения Φ частично упорядоченного пространства $(X, \leqslant)$ — это частный случай точки совпадения в ситуации, когда $(Y, \leqslant) = (X, \leqslant)$, а отображение Ψ тождественное. Так как тождественное отображение является упорядоченно накрывающим, из результатов [11–14] выводятся классические теоремы о неподвижной точке изотонного отображения Φ. Для однозначных отображений, как показано в [15, с. 56], уравнение (0.1) для точки совпадения накрывающего и изотонного отображений является частным случаем операторного уравнения

$$G(x, x) = \tilde{y}, \tag{0.2}$$

где отображение $G\colon X \times X \to Y$ является накрывающим по первому и антитонным по второму аргументам, и $\tilde{y} \in Y$ (определение G и $\widetilde{y}$ по Φ и Ψ достаточно громоздкое, поэтому здесь не приводится). Уравнение (0.2) было исследовано в работах [16, 17], и на основании полученных результатов были даны условия существования и оценки решений задачи Коши и краевых задач для систем неявных (неразрешенных относительно производной) обыкновенных дифференциальных уравнений, представляющие собой теоремы сравнения типа теоремы Чаплыгина о дифференциальном неравенстве. В [15, 18, 19] уравнения (0.1), (0.2) рассмотрены в более общем случае, когда $(X, \leqslant)$ — частично упорядоченное пространство, а бинарное отношение на множестве Y не является порядком и обладает лишь свойством рефлексивности или, более того, когда на Y не задано какое-либо бинарное отношение. Эти результаты также были использованы в исследовании систем неявных обыкновенных дифференциальных уравнений [20, 21].

В данной работе рассматривается операторное включение, являющееся многозначным аналогом уравнения (0.2), в ситуации, когда на X задан частичный порядок, а на Y — рефлексивное отношение. Получены условия разрешимости. Эти результаты являются новыми и в случае, когда отношение на Y является частичным порядком. Представляемые результаты имеют перспективы в исследованиях неявных дифференциальных включений, а также систем управления, динамика которых описывается неявными дифференциальными уравнениями. С этой целью могут быть использованы подходы, аналогичные применявшимся в [20, 21] при исследовании обыкновенных дифференциальных уравнений на основании результатов об операторном уравнении (0.2). Ниже в § 2 приводятся примеры, демонстрирующие некоторые возможности применения предлагаемых в данной работе утверждений к исследованию уравнений и включений.

§ 1. Основные понятия

Везде ниже знаком $\subset$ обозначено нестрогое включение, допускающее равенство множеств (то есть $U \subset X$ означает только, что для любого $u \in U$ выполнено $u \in X$).

Пусть $(X, \leqslant)$ — частично упорядоченное пространство (то есть непустое множество X, на котором задано отношение нестрогого порядка $\leqslant$). Используем стандартные обозначения: $x \geqslant u$ в случае, если $u \leqslant x$, и $x < u$ (или $u > x$), если $x \leqslant u$, $x \neq u$. Для произвольных

$u, v \in X$ и $U \subset X$ определим множества

$$\mathcal{O}_X(u) \doteq \{x \in X : x \leqslant u\}, \quad \mathcal{O}_X(U) \doteq \bigcup_{u \in U} \mathcal{O}_X(u),$$
$$\mathcal{D}_X(u) \doteq \{x \in X : x \geqslant u\}, \quad [v, u]_X \doteq \{x \in X : v \leqslant x \leqslant u\}.$$

Отметим, что справедливы соотношения

$$u \in \mathcal{O}_X(u), \quad u \in \mathcal{D}_X(u),$$
$$\mathcal{O}_X\big(\mathcal{O}_X(u)\big) = \mathcal{O}_X(u), \quad \mathcal{D}_X\big(\mathcal{D}_X(u)\big) = \mathcal{D}_X(u)$$

(являющиеся следствием, соответственно, рефлексивности и транзитивности порядка).

Напомним определения еще некоторых используемых в работе понятий теории частично упорядоченных пространств (см., например, [22, глава I, § 4]). Элементы $x, u \in X$ называют *сравнимыми*, если выполнено $x \leqslant u$ либо $u \leqslant x$. Подмножество $S \subset X$, в котором любые два различных элемента сравнимы, называют *цепью* или *линейно упорядоченным*. Пусть $U \subset X$. Если для некоторого элемента $v \in X$ выполнено $v \leqslant x$ при любом $x \in U$, то множество U называют *ограниченным снизу*, а элемент v его *нижней границей*. Нижнюю границу $\bar{v}$ множества U называют *точной* или *инфимумом* и обозначают через $\inf U$, если $v \leqslant \bar{v}$ для любой другой его нижней границы v. Элемент $m \in U$ называют *минимальным* в множестве U, если не существует элемента $u \in U$, удовлетворяющего соотношению $u < m$. Элемент $m \in U$ называют *наименьшим* в этом множестве, если $m \leqslant u$ для всех $u \in U$. Очевидно, наименьший элемент является минимальным, но не наоборот.

Пусть (Y, ϑ) — непустое множество с определенным на нем рефлексивным бинарным отношением ϑ (то есть для любого $y \in Y$ выполнено $(y, y) \in \vartheta$). Для любых $w \in Y$, $W \subset Y$ определим множества

$$\mathcal{O}_Y(w) \doteq \{y \in Y : (y, w) \in \vartheta\}, \quad \mathcal{O}_Y(W) \doteq \bigcup_{w \in W} \mathcal{O}_Y(w).$$

Очевидно, имеем включение $w \in \mathcal{O}_Y(w)$, но множества $\mathcal{O}_Y(w)$ и $\mathcal{O}_Y\big(\mathcal{O}_Y(w)\big)$ уже не обязаны быть равными, так как отношение ϑ не предполагается транзитивным.

Отметим, что бинарные отношения, не обязательно являющееся транзитивными, имеют приложения в информатике, в теории коллективных решений (см, например, [23, § 3.4]), в частности доминирование, толерантность, а также отношение несравнимости элементов частично упорядоченного пространства. Приведем примеры иных задач, в которых естественным образом определяется обобщенный порядок, не удовлетворяющий условию транзитивности, а также обобщенный порядок, не являющийся антисимметричным.

Пример 1. Вначале рассмотрим метрическое пространство (M, ρ). Напомним, что порядок Бишопа–Фелпса [6, теорема 7.5.1] определяется на произведении $X = M \times \mathbb{R}_+$ следующим образом: для любых $x = (m, r) \in X$, $u = (\mu, R) \in X$ полагают $x \leqslant u$ тогда и только тогда, когда

$$\rho(m, \mu) \leqslant R - r. \tag{1.1}$$

Заметим, что при выполнении неравенства (1.1) замкнутый шар $B_M(m, r)$ с центром в точке $m \in M$ радиуса $r \geqslant 0$ вложен в шар $B_M(\mu, R)$ (но не обратно: вложение $B_M(m, r) \subset B_M(\mu, R)$ не гарантирует, что неравенство (1.1) справедливо). Несложно показать, что вследствие неравенства треугольника для метрики ρ порядок Бишопа–Фелпса транзитивен.

Пусть теперь (M, d) — обобщенное метрическое пространство, в котором расстояние $d\colon M^2 \to \mathbb{R}_+$ не удовлетворяет «привычному» неравенству треугольника. Тогда определенное в (1.1) отношение на произведении $X = M \times \mathbb{R}_+$ уже не будет транзитивным. Например, в b-метрических пространствах (свойства b-метрических пространств подробно описаны, например, в [24]) выполняется обобщенное неравенство треугольника

$$\forall x, u, v \in M \quad d(x, v) \leqslant q\big(d(x, u) + d(u, v)\big), \tag{1.2}$$

где $q > 1$. Поэтому для $x = (m, r) \in X$, $u = (\mu, R) \in X$, $v = (\nu, \varrho) \in X$ таких, что $\rho(m, \mu) \leqslant R - r$, $\rho(\mu, \nu) \leqslant \varrho - R$, получаем $\rho(m, \nu) \leqslant q(\varrho - r)$, то есть отношение Бишопа–Фелпса в b-метрических пространствах не транзитивно. Отметим, что b-метрическим является пространство $L_p \doteq L_p([0,1], \mathbb{R})$ при $p \in (0, 1)$ (со стандартным расстоянием $d_{L_p}(m, \mu) = \big(\int_0^1 |m(t) - \mu(t)|^p dt\big)^{1/p}$, $m, \mu \in L_p$). В этом пространстве справедливо неравенство (1.2) с константой $q = 2^{-1} 2^{1/p}$.

В анализе и геометрии также естественным образом возникают квазиметрические пространства, в которых расстояние не является симметричным (см., например, [25, 26]). В таком случае определяемое неравенством (1.1) отношение Бишопа–Фелпса, очевидно, может не быть антисимметричным.

Пример 2 (В. Ф. Молчанов). На множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел определим отношение ϑ, полагая для $x, u \in \mathbb{R}$ выполненным $(x, u) \in \vartheta$ в том случае, если $x \leqslant u$ или если одно из этих двух чисел рациональное, а другое иррациональное. Отношение ϑ, очевидно, рефлексивно и не является ни симметричным, ни антисимметричным, ни транзитивным.

Пример 3. На $\mathbb{R}^2$ определим отношение ϑ соотношением

$$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \; \forall u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \quad (x, u) \in \vartheta \;\Leftrightarrow\; \det(x, u) \doteq x_1 u_2 - x_2 u_1 \leqslant 0.$$

Определенное таким образом отношение ϑ, очевидно, рефлексивно и не является ни симметричным, ни антисимметричным, ни транзитивным. В частности, включения $\big((1,1),(2,2)\big) \in \vartheta$, $\big((2,2),(1,1)\big) \in \vartheta$ означают, что это отношение не антисимметрично, включения $\big((1,2),(1,1)\big) \in \vartheta$, $\big((1,1),(1,2)\big) \notin \vartheta$ — что оно не симметрично, а включения $\big((1,0),(1,-1)\big) \in \vartheta$, $\big((1,-1),(-1,1/2\big) \in \vartheta$, $\big((1,0),(-1,1/2)\big) \notin \vartheta$ — что не транзитивно.

Распространим на многозначные отображения, действующие из $(X, \leqslant)$ в (Y, ϑ), некоторые определения, известные для отображений, действующих в частично упорядоченных пространствах. Под многозначным отображением $F\colon X \rightrightarrows Y$ понимаем отображение, сопоставляющее каждому $x \in X$ непустое множество $F(x) \subset Y$.

Определение 1. Многозначное отображение $F\colon X \rightrightarrows Y$ будем называть *изотонным на множестве* $V \subset X$, если

$$\forall x, x' \in V \quad x' \leqslant x \quad \forall y \in F(x) \quad \exists y' \in F(x') \quad (y', y) \in \vartheta,$$

и *антитонным на этом множестве*, если

$$\forall x, x' \in V \quad x' \leqslant x \quad \forall y \in F(x) \quad \exists y' \in F(x') \quad (y, y') \in \vartheta.$$

В случае $V = X$ изотонное (антитонное) на всем пространстве X отображение будем называть *изотонным* (*антитонным*), не упоминая множество X.

Следующее определение аналогично определению, введенному в [13, 14] для однозначных и многозначных отображений частично упорядоченных пространств.

Определение 2. Говорим, что многозначное отображение $F\colon X \rightrightarrows Y$ *обобщенно упорядоченно накрывает* (является *обобщенно упорядоченно накрывающим*) множество $W \subset Y$, если

$$\forall x \in X \quad \mathcal{O}_Y(F(x)) \cap W \subset F(\mathcal{O}_X(x)).$$

Слова «обобщенно упорядоченно» далее будем опускать, то есть будем говорить, что отображение F *накрывает множество* W.

В случае, когда множество W состоит ровно из одного элемента $\tilde{y}$, определение 2 означает, что для любого $x \in X$ такого, что $\tilde{y} \in \mathcal{O}_Y(F(x))$, существует $x' \in \mathcal{O}_X(x)$, удовлетворяющий включению $\tilde{y} \in F(x')$. Если же во множестве W содержится более одного элемента, то накрывание отображением F этого множества равносильно накрыванию всех его одноточечных подмножеств. Отображение, накрывающее все пространство Y, называем *накрывающим*.

Определения 1 и 2 будем применять также и к «обычным не многозначным» отображениям $X \to Y$, отождествляя такие отображения с многозначными, имеющими образами одноточечные множества.

Приведем примеры монотонных и упорядоченных отображений, действующих из X в Y в случае, когда X — это множество $\mathbb{R}$ действительных чисел с обычным (линейным) порядком $\leqslant$, а Y — то же множество $\mathbb{R}$, но с отношением ϑ, определенным выше в примере 2.

Пример 4. Итак, пусть $X = (\mathbb{R}, \leqslant)$, $Y = (\mathbb{R}, \vartheta)$. Обозначим через $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{J}$ множества целых, рациональных и иррациональных чисел, соответственно. Рассмотрим некоторые изотонные и антитонные отображения $X \to Y$.

Прежде всего заметим, что любая (нестрого) возрастающая вещественная функция f, рассматриваемая действующей из X в Y, является изотонным отображением (в частности, «обычное» тождественное отображение, заданное для любого действительного числа формулой $I(x) = x$, как действующее из X в Y, очевидно, изотонное). Аналогично, любая (нестрого) убывающая вещественная функция, рассматриваемая действующей из X в Y, является антитонным отображением.

Несложно получить общий вид монотонного отображения $f\colon X \to Y$. Для этого определим множества $X_{\mathbb{Q}} = \big\{x \in X\colon f(x) \in \mathbb{Q}\big\}$, $X_{\mathbb{J}} = \big\{x \in X\colon f(x) \in \mathbb{J}\big\}$ и зададим сужения $f|_{X_{\mathbb{Q}}}$ и $f|_{X_{\mathbb{J}}}$ на $X_{\mathbb{Q}}$ и $X_{\mathbb{J}}$ отображения f. Для изотонности (антитонности) $f\colon X \to Y$ необходимо и достаточно, чтобы определенные таким образом «обычные» вещественные функции $f|_{X_{\mathbb{Q}}}\colon X_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}$ и $f|_{X_{\mathbb{J}}}\colon X_{\mathbb{J}} \to \mathbb{J}$ были возрастающими (убывающими). Рассмотрим, например, отображения, заданные формулами

$$f(x) = \begin{cases} k_1 x + b_1, & \text{если } x \in \mathbb{Q}, \\ k_2 x + b_2, & \text{если } x \in \mathbb{J}, \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} k_1\sqrt{2}\,x + b_1\sqrt{3}, & \text{если } x \in \mathbb{Q}, \\ k_2\lfloor x\rfloor_m + b_2, & \text{если } x \in \mathbb{J}, \end{cases}$$

где $k_i, b_i \in \mathbb{Q}$, $i = 1, 2$, и через $\lfloor x\rfloor_m$ обозначено округление числа $x \in \mathbb{J}$ до ближайшего меньшего рационального числа с заданным количеством m знаков после запятой (то есть $10^m x \in \mathbb{Z}$ и $0 \leqslant x - \lfloor x\rfloor_m < 10^{-m}$). Для первого из этих отображений имеем $X_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}$, $X_{\mathbb{J}} = \mathbb{J}$, а для второго — $X_{\mathbb{Q}} = \mathbb{J}$, $X_{\mathbb{J}} = \mathbb{Q}$. Если числа k_1, k_2 положительные, то оба рассматриваемых отображения изотонные, а если эти числа отрицательные, то отображения антитонные.

Рассмотрим теперь многозначное отображение $F\colon X \rightrightarrows Y$. Определим множества $X_{\mathbb{Q}} = \big\{x \in X\colon F(x) \cap \mathbb{J} = \varnothing\big\}$, $X_{\mathbb{J}} = \big\{x \in X\colon F(x) \cap \mathbb{Q} = \varnothing\big\}$. Пусть при любом $x \in X_{\mathbb{Q}} \cup X_{\mathbb{J}}$ во множестве $F(x)$ существует наибольшее (наименьшее) число. Определим функции $\overline{f}|_{X_{\mathbb{Q}}}(x) = \max_{x \in X_{\mathbb{Q}}} F(x)$, $\overline{f}|_{X_{\mathbb{J}}}(x) = \max_{x \in X_{\mathbb{J}}} F(x)$ (соответственно, функции

$\underline{f}|_{X_{\mathbb{Q}}}(x) = \min_{x \in X_{\mathbb{Q}}} F(x)$, $\underline{f}|_{X_{\mathbb{J}}}(x) = \min_{x \in X_{\mathbb{J}}} F(x)$). Для изотонности (антитонности) отображения F необходимо и достаточно, чтобы функции $\overline{f}|_{X_{\mathbb{Q}}}\colon X_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}$ и $\overline{f}|_{X_{\mathbb{J}}}\colon X_{\mathbb{J}} \to \mathbb{J}$ были возрастающими (соответственно, функции $\underline{f}|_{X_{\mathbb{Q}}}\colon X_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}$ и $\underline{f}|_{X_{\mathbb{J}}}\colon X_{\mathbb{J}} \to \mathbb{J}$ были убывающими). Поэтому, если для многозначного отображения F оба множества $X_{\mathbb{Q}}$ и $X_{\mathbb{J}}$ пустые (то есть в образе $F(x)$ любого действительного аргумента x есть рациональные и иррациональные числа), то F будет и изотонным, и антитонным одновременно.

Пример 5. Снова полагаем, что $X = (\mathbb{R}, \leqslant)$, $Y = (\mathbb{R}, \vartheta)$, где ϑ определено в примере 2. Рассмотрим вопрос о накрывании некоторых конкретных отображений $X \to Y$. Прежде всего отметим, что рассмотренное в примере 4 отображение $I\colon X \to Y$ не накрывает никакое одноточечное множество. Например, пусть $\tilde{y} \in \mathbb{J}$. Выберем $x \in \mathbb{Q}$, $x > \tilde{y}$. Тогда $(I(x), \tilde{y}) \in \vartheta$, но не существует $x' \leqslant x$ такого, что $I(x') = \tilde{y}$.

Далее, отметим, что если многозначное отображение $F\colon X \rightrightarrows Y$ накрывает некоторое множество W, то F как действующее в «обычном» пространстве $(\mathbb{R}, \leqslant)$ оно также будет накрывать множество W. В случае, если $F(X) \subset \mathbb{Q}$ или $F(X) \subset \mathbb{J}$, верно и обратное утверждение: из накрывания множества W многозначной функцией $F\colon \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ следует, что как действующее из X в Y это отображение также накрывает множество W.

И заключим пример 5 рассмотрением функции $f(x) = \sin x$, очевидно имеющей как рациональные, так и иррациональные значения. Соответствующее отображение $f\colon X \to Y$ является накрывающим множество $[-1, 1]$. Более того, если многозначное отображение $F\colon X \rightrightarrows Y$ имеет сечением такую функцию (то есть $\sin x \in F(x)$ при всех $x \in X$), то F также является накрывающим множество $[-1, 1]$. Это прямо следует из того, что для любого $\tilde{y} \in [-1, 1]$ и любого $x \in \mathbb{R}$ существует $x' \leqslant x$ такой, что $\sin x' = \tilde{y}$.

Теперь обсудим условия, при которых отображения функциональных пространств удовлетворяют определениям 1 и 2.

Пример 6. Пусть $X = (\mathbb{R}, \leqslant)$, $Y = (\mathbb{R}, \vartheta)$, где ϑ определено в примере 2. Обозначим через $\mathbb{M}(X)$ алгебраическую систему измеримых по Лебегу функций (точнее, классов эквивалентных функций) $[0, 1] \to \mathbb{R}$ со «стандартным» порядком: $x \leqslant u$, $x, u \in \mathbb{M}(X)$, если $x(t) \leqslant u(t)$ п. в. на $[0, 1]$, а через $\mathbb{M}(Y)$ множество измеримых функций $[0, 1] \to \mathbb{R}$ с отношением $(x, u) \in \vartheta$, $x, u \in \mathbb{M}(Y)$, если $\big(x(t), u(t)\big) \in \vartheta$ п. в. на $[0, 1]$.

Пусть задана суперпозиционно измеримая функция $h\colon [0, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Определим оператор Немыцкого $N_h\colon \mathbb{M}(X) \to \mathbb{M}(Y)$, сопоставляющий произвольной измеримой функции x измеримую функцию $N_h x(t) = h(t, x(t))$, $t \in [0, 1]$. Очевидно, что если при п. в. $t \in [0, 1]$ функция $h(t, \cdot)$ как действующая из X в Y является изотонной (или антитонной), то отображение $N_h\colon \mathbb{M}(X) \to \mathbb{M}(Y)$ также изотонно (антитонно).

Пусть теперь $h\colon [0, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям Каратеодори (следовательно, является суперпозиционно измеримой) и задана измеримая функция $\tilde{y}\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$. Покажем, что если при п. в. $t \in [0, 1]$ функция $h(t, \cdot)$ как действующая их X в Y является накрывающей множество $\{\tilde{y}(t)\} \in Y$, то отображение $N_h\colon \mathbb{M}(X) \to \mathbb{M}(Y)$ накрывает множество $\{\tilde{y}\} \in \mathbb{M}(Y)$. Пусть для некоторого $x \in \mathbb{M}(X)$ выполнено $(\tilde{y}, N_h x) \in \vartheta$, то есть $\big(\tilde{y}(t), N_h x(t)\big) \in \vartheta$, $t \in [0, 1]$. Тогда при п. в. $t \in [0, 1]$ вследствие накрывания функцией $h(t, \cdot)$ множества $\{\tilde{y}(t)\}$, получаем $\tilde{y}(t) \in h\big(t, (-\infty, x(t)]\big)$. Из этого включения согласно лемме Филиппова о неявной функции (см., например, [3, теорема 1.5.15]) следует существование измеримой функции $u \in \mathbb{M}(Y)$ такой, что $u \leqslant x$, $N_h x = \tilde{y}$.

В случае, если задана многозначная функция $h\colon [0, 1] \times \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$, имеющая замкнутые значения, несложно показать, что из ее изотонности (антитонности, накрывания) по второму аргументу следует изотонность (и соответственно, антитонность, накрывание) многозначного оператора Немыцкого $N_h\colon \mathbb{M}(X) \rightrightarrows \mathbb{M}(Y)$, определяемого при любом $x \in \mathbb{M}(X)$ формулой $N_h x = \big\{y \in \mathbb{M}(Y)\colon y(t) \in h(t, x(t)),\ t \in [0, 1]\big\}$.

§ 2. Условия разрешимости операторного включения

Пусть заданы элемент $\tilde{y} \in Y$ и многозначное отображение $G\colon X^2 \rightrightarrows Y$, которое по первому аргументу является накрывающим одноточечное множество $W \doteq \{\tilde{y}\}$, а по второму — антитонным. Определим отображение $F\colon X \rightrightarrows Y$ при всех $x \in X$ формулой $F(x) \doteq G(x,x)$ и рассмотрим включение

$$F(x) \ni \tilde{y}. \tag{2.1}$$

Сформулируем условия разрешимости этого включения.

Пусть $U \subset X$. Определим множество $\mathcal{S}_U(G,\tilde{y})$ всех цепей $S \subset U \subset X$ таких, что

$$\begin{aligned} &\forall x \in S \ \ \tilde{y} \notin G(x,x), \ \ \exists y \in G(x,x) \ \ (\tilde{y},y) \in \vartheta, \\ &\forall x,u \in S \ \ x < u \ \Rightarrow \ \exists \zeta \in [x,u]_X \ \ \exists y \in G(\zeta,\zeta) \ \ (\tilde{y},y) \in \vartheta \ \text{ и } \ \tilde{y} \in G(x,\zeta). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

- *существуют $x_0 \in X$ и $y_0 \in F(x_0)$ такие, что $(\tilde{y},y_0) \in \vartheta$;*
- *при любом $x \in \mathcal{O}_X(x_0)$ отображение $G(\cdot,x)\colon X \rightrightarrows Y$ накрывает множество $\{\tilde{y}\} \subset Y$, а отображение $G(x,\cdot)\colon X \rightrightarrows Y$ является антитонным на $[x,x_0]_X$;*
- *любая цепь $S \in \mathcal{S}_{\mathcal{O}_X(x_0)}(G,\tilde{y})$ ограничена снизу и имеет нижнюю границу $v \in X$, для которой существует $y \in G(v,v)$, удовлетворяющий соотношению $(\tilde{y},y) \in \vartheta$.*

Тогда во множестве $\mathcal{O}_X(x_0)$ существует решение включения (2.1).

Доказательство. Определим множество

$$U = \{x \in \mathcal{O}_X(x_0)\colon \exists y \in G(x,x) \ \ (\tilde{y},y) \in \vartheta\} \subset X.$$

Это множество не пусто, поскольку $x_0 \in U$. На множестве U определим бинарное отношение $\preceq$ следующим образом: для произвольных $x,u \in U$ полагаем $x \preceq u$ тогда и только тогда, когда

$$x \leqslant u \ \text{ и } \ \bigl(x < u \ \Rightarrow \ \exists \zeta \in [x,u]_U \ \ \tilde{y} \in G(x,\zeta)\bigr).$$

Очевидно, что для бинарного отношения $\preceq$ выполняются условия рефлексивности и антисимметричности, поэтому проверим только транзитивность. Действительно, пусть $x \prec u$, $u \prec z$ (случай $x = u$ или $u = z$ не рассматриваем вследствие очевидности соотношения $x \preceq z$). Тогда $x < u < z$ и существуют такой элемент $\zeta_1 \in [x,u]_U \subset [x,z]_U$, что выполнено включение $\tilde{y} \in G(x,\zeta_1)$. Таким образом, $x \preceq z$. Приведенные рассуждения доказывают, что бинарное отношение $\preceq$ обладает более «сильным» свойством чем транзитивность, а именно,

$$x \prec u, \ \ u \leqslant z \ \Rightarrow \ x \prec z. \tag{2.3}$$

Согласно принципу максимума Хаусдорфа (см. [22, с. 40]), в пространстве $(U,\preceq)$ существует максимальная цепь S, содержащая точку x_0. Если некоторый элемент $v \in S$ является решением включения (2.1), то доказываемое утверждение справедливо. Поэтому далее предполагаем, что $\tilde{y} \notin G(x,x)$ при любом $x \in S$. Из определения пространства $(U,\preceq)$ следует, что в нем любая цепь, в том числе S, является также цепью относительно исходного порядка $\leqslant$ и, более того, удовлетворяет соотношениям (2.2). Таким образом, $S \in \mathcal{S}_{\mathcal{O}_X(x_0)}(G,\tilde{y})$. В силу предположений теоремы цепь S относительно первоначального порядка $\leqslant$ имеет нижнюю границу $v \in \mathcal{O}_X(x_0)$, для которой существует $y \in G(v,v)$ такой, что $(\tilde{y},y) \in \vartheta$, то есть $v \in U$.

Покажем, что полученный элемент $\upsilon \in U$ является решением включения (2.1). Предположим противное: $G(\upsilon,\upsilon) \not\ni \tilde{y}$. Тогда так как для $y \in G(\upsilon,\upsilon)$ выполнено $(\tilde{y},y) \in \vartheta$, а отображение $G(\cdot,\upsilon)$ накрывает множество $\{\tilde{y}\}$, существует $\upsilon' \in \mathcal{O}_X(\upsilon)$ такой, что

$$\tilde{y} \in G(\upsilon',\upsilon). \tag{2.4}$$

Заметим, что $\upsilon' \neq \upsilon$ (так как $G(\upsilon,\upsilon) \not\ni \tilde{y}$), поэтому $\upsilon' < \upsilon$. Из (2.4) в силу антитонности на множестве $[\upsilon',\upsilon]_X \subset [\upsilon',x_0]_X$ отображения $G(\upsilon',\cdot)$ существует $y' \in G(\upsilon',\upsilon')$ такой, что $(\tilde{y},y') \in \vartheta$. Таким образом, доказано, что $\upsilon' \in U$ и $\upsilon' \prec \upsilon$. Поэтому согласно свойству (2.3) для любого $x \in S$ имеет место неравенство $\upsilon' \prec x$. Так как цепь S является максимальной в U относительно порядка $\preceq$, элемент υ' должен принадлежать этой цепи. Но тогда неравенство $\upsilon' \prec \upsilon$ противоречит тому, что υ — нижняя граница этой цепи. Итак, предположение $G(\upsilon,\upsilon) \not\ni \tilde{y}$ неверно, то есть элемент $x \doteq \upsilon' = \upsilon$ является решением включения (2.1). □

Замечание 1. Пусть выполнены условия теоремы 1. Выберем произвольный элемент x, $x \in \mathcal{O}_X(x_0)$, такой, что найдется $y \in F(x)$, удовлетворяющий соотношению $(\tilde{y},y) \in \vartheta$. Легко видеть, что условия теоремы 1 остаются выполненными, если в них заменить x_0 на x. Поэтому согласно этой теореме во множестве $\mathcal{O}_X(x)$ существует решение включения (2.1). Это означает, что сужение отображения F на множество $\mathcal{O}_X(x_0)$ является накрывающим множество $\{\tilde{y}\} \subset Y$. Таким образом, если рассмотреть отображение G на множестве $\mathcal{O}_X(x_0) \times \mathcal{O}_X(x_0)$, то свойство накрывания G по первому аргументу наследуется отображением $F\colon \mathcal{O}_X(x_0) \rightrightarrows Y$, в случае, если по второму аргументу G является антитонным. А значит, теорема 1 может трактоваться как утверждение об устойчивости свойства накрывания при антитонных возмущениях.

Из теоремы 1 вытекает утверждение [15] о разрешимости операторного уравнения (0.2) (порожденного однозначным отображением $G\colon X^2 \to Y$, накрывающим по первому аргументу и антитонным по второму).

Отметим, что представленные в теореме 1 условия разрешимости включения (2.1) являются новыми и в ситуации, когда отношение ϑ задает на Y частичный порядок. Таким образом, это утверждение может применяться к исследованию уравнений и включений в «классических» частично упорядоченных пространствах. Но мы приведем примеры, иллюстрирующие возможность приложения теоремы 1 к уравнениям и включениям в случае, когда отношение на Y не является антисимметричным и транзитивным.

Пример 7 (Е. С. Жуковский). Пусть заданы числа $0 = \overline{\upsilon}_0 < \overline{\upsilon}_1 < \overline{\upsilon}_2 < \overline{\upsilon}_3 < \overline{\upsilon}_4 < \overline{\upsilon}_5 = 1$ и векторы

$$\mathcal{Y}_1 = (1/2, -1/3),\ \ \mathcal{Y}_2 = (1,1),\ \ \mathcal{Y}_3 = (1/2,1),\ \ \mathcal{Y}_4 = (1/2,3/2),\ \ \mathcal{Y}_5 = (0,1).$$

Обозначим $V_i = [\overline{\upsilon}_{i-1},\overline{\upsilon}_i)$, $i = \overline{1,4}$, $V_5 = [\overline{\upsilon}_4, 1]$. Определим функцию $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ соотношениями: $\varphi(x) = \mathcal{Y}_i$ при $x \in V_i$, $i = \overline{1,5}$. Компоненты этой функции обозначим через φ_1,φ_2. Далее, пусть на $[0,1]$ задана непрерывная и возрастающая скалярная функция ψ_1 такая, что $\psi_1(0) = 0$, $\psi_1(1) = 1$. Положим $\psi_2(x) = 1 - \psi_1(x)$, $\psi(x) = \big(\psi_1(x),\psi_2(x)\big)$. Будем также полагать заданными положительные числа $\tilde{y}_1,\tilde{y}_2$. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} k\big(\psi_1(x) + \varphi_1(x)\big) = \tilde{y}_1, \\ k\big(\psi_2(x) + \varphi_2(x)\big) = \tilde{y}_2, \end{cases} \tag{2.5}$$

относительно неизвестных $x \in [0,1]$, $k > 0$. Используя теорему 1, докажем что при выполнении неравенств

$$\tilde{y}_2 \geqslant \tilde{y}_1 \geqslant \frac{3}{4}\tilde{y}_2 > 0 \tag{2.6}$$

система уравнений (2.5) разрешима.

Пусть алгебраическая система X — это полоса $[0,1]\times(0,+\infty)$, на которой задан следующий порядок:

$$(x',k')\leqslant(x,k)\ \Leftrightarrow\ \big(x'<x\ \text{ или }\ (x',k')=(x,k)\big),$$

где $(x,k)\in X$ и $(x',k')\in X$; и пусть Y — это плоскость $\mathbb{R}^2$ с отношением ϑ, определенным в примере 3, то есть для $y=(y_1,y_2)\in Y$ и $y'=(y_1',y_2')\in Y$ выполнено $(y',y)\in\vartheta$ тогда и только тогда, когда $\det(y',y)\doteq y_1'y_2-y_2'y_1\leqslant 0$. Как отмечено в примере 3, отношение ϑ рефлексивно, но ни симметрично, ни антисимметрично, ни транзитивно.

Зададим вектор $\tilde y=(\tilde y_1,\tilde y_2)$ и отображение

$$G\colon X^2\to Y,\quad G(\mathrm{u},\mathrm{x})=k\big(\psi(u)+\varphi(x)\big),\quad \mathrm{u}=(u,k),\ \ \mathrm{x}=(x,\kappa). \tag{2.7}$$

Систему (2.5) запишем в виде уравнения

$$G(\mathrm{x},\mathrm{x})=\tilde y. \tag{2.8}$$

Покажем, что уравнение (2.8) отвечает условиям теоремы 1.

Положим $\mathrm{x}_0=(x_0,k_0)$, где $x_0=1$, а k_0 — любое положительное. Тогда

$$y_0\doteq G(\mathrm{x}_0,\mathrm{x}_0)=k_0\big(\psi(1)+\mathcal{Y}_5\big)=k_0\big((1,0)+(0,1)\big)=k_0(1,1),$$

и для этого вектора в силу (2.6) имеем

$$\det(\tilde y,y_0)=k_0\begin{vmatrix}\tilde y_1 & 1\\ \tilde y_2 & 1\end{vmatrix}=k_0(\tilde y_1-\tilde y_2)\leqslant 0.$$

Таким образом, $(\tilde y,y_0)\in\vartheta$, то есть выполнено первое предположение теоремы 1.

Проверим второе предположение теоремы 1. Рассмотрим свойства отображения G по каждому аргументу.

При любом $\mathrm{u}=(u,k)\in X$ отображение $G(\mathrm{u},\cdot)\colon X\to Y$ определяется соотношением:

$$\mathrm{x}=(x,\kappa)\mapsto G(\mathrm{u},\mathrm{x})=k\big(\mathcal{Y}_i+y\big),\ \text{ если }\ x\in V_i,\quad i=\overline{1,5}.$$

Здесь $y=\psi(u)$, и этот вектор, как любой вектор из $\psi\big([0,1]\big)$, имеет представление $y=(\lambda,1-\lambda)$, $\lambda\in[0,1]$. Отображение $G(\mathrm{u},\cdot)$ является антитонным, так как для любых натуральных $1\leqslant i'<i\leqslant 5$ выполнено $\big(k(\mathcal{Y}_i+y),k(\mathcal{Y}_{i'}+y)\big)\in\vartheta$. Последнее соотношение следует из того, что соответствующие определители $\Delta_{ii'}\doteq\det\big(\mathcal{Y}_i+y,\mathcal{Y}_{i'}+y\big)$ удовлетворяют неравенствам $\Delta_{ii'}\leqslant 0$. Действительно,

$$\Delta_{21}=\begin{vmatrix}1+\lambda & \frac12+\lambda\\ 1+(1-\lambda) & -\frac13+(1-\lambda)\end{vmatrix}=-\frac{11\lambda+2}{6}\leqslant 0,$$

$$\Delta_{32}=\begin{vmatrix}\frac12+\lambda & 1+\lambda\\ 1+(1-\lambda) & 1+(1-\lambda)\end{vmatrix}=\frac{\lambda-2}{2}\leqslant 0,$$

Аналогично получаем

$$\Delta_{43}=-\frac{1+2\lambda}{4}\leqslant 0,\quad \Delta_{54}=\lambda-1\leqslant 0,\quad \Delta_{31}=-\frac{4\lambda+2}{2}\leqslant 0,\quad \Delta_{42}=-\frac{3}{2}\leqslant 0,$$

$$\Delta_{53}=\frac{\lambda-2}{2}\leqslant 0,\quad \Delta_{41}=-\frac{22\lambda+11}{12}\leqslant 0,\quad \Delta_{52}=\lambda-2\leqslant 0,\quad \Delta_{51}=-\frac{7\lambda+6}{6}\leqslant 0.$$

При любом $\mathrm{u} = (u, \kappa) \in X$, если $u \in V_i$, $i = \overline{1,5}$, то отображение $G(\cdot, \mathrm{u})\colon X \to Y$ определяется формулой

$$\mathrm{x} = (x, k) \mapsto G(\mathrm{x}, \mathrm{u}) = k\big(\psi(x) + \mathcal{Y}_i\big).$$

Докажем, что это отображение накрывает множество $\{\tilde{y}\}$. Сначала рассмотрим случай $u \in V_1$. Для $\mathrm{u}_0 = (0, k_0)$ имеем

$$\det\big(\tilde{y}, G(\mathrm{u}_0, \mathrm{u})\big) = k_0 \begin{vmatrix} \tilde{y}_1 & \frac{1}{2} \\ \tilde{y}_2 & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = k_0\Big(\frac{2}{3}\tilde{y}_1 - \frac{1}{2}\tilde{y}_2\Big) = \frac{2k_0}{3}\Big(\tilde{y}_1 - \frac{3}{4}\tilde{y}_2\Big). \tag{2.9}$$

Отсюда в силу (2.6) следует, что $\det\big(\tilde{y}, G(\mathrm{u}_0, \mathrm{u})\big) \geqslant 0$. Пусть для некоторого $\mathrm{x} = (x, k)$, $x \in (0, 1]$ выполнено $\big(\tilde{y}, G(\mathrm{x}, \mathrm{u})\big) \in \vartheta$, то есть

$$\begin{vmatrix} \tilde{y}_1 & \psi_1(x) + \frac{1}{2} \\ \tilde{y}_2 & \psi_2(x) - \frac{1}{3} \end{vmatrix} \leqslant 0.$$

Тогда вследствие непрерывности функций $\psi_1(\cdot), \psi_2(\cdot)$ существует такой $x' \leqslant x$, что

$$\begin{vmatrix} \tilde{y}_1 & \psi_1(x') + \frac{1}{2} \\ \tilde{y}_2 & \psi_2(x') - \frac{1}{3} \end{vmatrix} = 0.$$

Это означает, что при $\mathrm{x}' = (x', 1)$ векторы $\tilde{y}$ и $G(\mathrm{x}', \mathrm{u})$ коллинеарны. Первые компоненты этих векторов положительны, следовательно, эти векторы сонаправлены. Поэтому, положив коэффициент $\tilde{k} > 0$ равным отношению длин этих векторов, для $\tilde{\mathrm{x}} = (x', \tilde{k})$ получим равенство $\tilde{y} = G(\tilde{\mathrm{x}}, \mathrm{u})$. Таким образом доказано, что в случае $u \in V_1$ отображение $G(\cdot, \mathrm{u})\colon X \to Y$ накрывает множество $\{\tilde{y}\}$.

Аналогично доказывается, что в остальных случаях, когда $u \in V_i$, $i = \overline{2,5}$, отображение $G(\cdot, \mathrm{u})$ также накрывает множество $\{\tilde{y}\}$. При этом в каждой ситуации $u \in V_i$, $i = \overline{2,5}$, для $\mathrm{u}_0 = (0, k_0)$ имеет место неравенство $\det\big(\tilde{y}, G(\mathrm{u}_0, \mathrm{u})\big) > 0$. Действительно,

$$\text{для } u \in V_2 \quad \det\big(\tilde{y}, G(\mathrm{u}_0, \mathrm{u})\big) = k_0 \begin{vmatrix} \tilde{y}_1 & 1 \\ \tilde{y}_2 & 2 \end{vmatrix} = 2k_0\Big(\tilde{y}_1 - \frac{1}{2}\tilde{y}_2\Big) > 2k_0\Big(\tilde{y}_1 - \frac{3}{4}\tilde{y}_2\Big) \geqslant 0, \tag{2.10}$$

$$\text{для } u \in V_3 \quad \det\big(\tilde{y}, G(\mathrm{u}_0, \mathrm{u})\big) = k_0 \begin{vmatrix} \tilde{y}_1 & \frac{1}{2} \\ \tilde{y}_2 & 2 \end{vmatrix} = 2k_0\Big(\tilde{y}_1 - \frac{1}{4}\tilde{y}_2\Big) > 2k_0\Big(\tilde{y}_1 - \frac{3}{4}\tilde{y}_2\Big) \geqslant 0, \tag{2.11}$$

$$\text{для } u \in V_4 \quad \det\big(\tilde{y}, G(\mathrm{u}_0, \mathrm{u})\big) = k_0 \begin{vmatrix} \tilde{y}_1 & \frac{1}{2} \\ \tilde{y}_2 & \frac{5}{2} \end{vmatrix} = \frac{5}{2}k_0\Big(\tilde{y}_1 - \frac{1}{5}\tilde{y}_2\Big) > \frac{5}{2}k_0\Big(\tilde{y}_1 - \frac{3}{4}\tilde{y}_2\Big) \geqslant 0, \tag{2.12}$$

$$\text{для } u \in V_5 \quad \det\big(\tilde{y}, G(\mathrm{u}_0, \mathrm{u})\big) = k_0 \begin{vmatrix} \tilde{y}_1 & 0 \\ \tilde{y}_2 & 2 \end{vmatrix} = 2k_0\tilde{y}_1 > 0. \tag{2.13}$$

Таким образом, второе предположение теоремы 1 выполнено.

Для проверки заключительного третьего предположения теоремы 1 выберем произвольную цепь $S \subset X$, каждый элемент $\mathrm{x} = (x, k)$ которой удовлетворяет отношению $\big(\tilde{y}, G(\mathrm{x}, \mathrm{x})\big) \in \vartheta$, то есть $\det\big(\tilde{y}, G(\mathrm{x}, \mathrm{x})\big) \leqslant 0$. Первые компоненты элементов этой цепи сами образуют цепь в $[0, 1]$, обозначим ее через S_1. Таким образом,

$$\forall \mathrm{x} = (x, k) \in S \;\; x \in S_1, \quad \forall x \in S_1 \; \exists k > 0 \;\; \mathrm{x} = (x, k) \in S.$$

Определим $\tilde{x} \doteq \inf S_1$. Так как при любом $x \in S_1$ выполнено $\det\big(\tilde{y}, \psi(x) + \varphi(x)\big) \leqslant 0$, а функция $\psi + \varphi$ непрерывна справа, получаем $\det\big(\tilde{y}, \psi(\tilde{x}) + \varphi(\tilde{x})\big) \leqslant 0$. Следовательно, для $\tilde{\mathrm{x}} = (\tilde{x}, 1)$ будет выполнено соотношение $\big(\tilde{y}, G(\tilde{\mathrm{x}}, \tilde{\mathrm{x}})\big) \in \vartheta$, а кроме того, $\tilde{\mathrm{x}}$ — нижняя граница цепи S.

Итак, если правая часть системы (2.5) удовлетворяет неравенствам (2.6), то выполнены все предположения теоремы 1. Согласно этой теореме система (2.5) разрешима.

Теперь приведем аналогичный предыдущему пример, но не уравнения, а включения, к которому применима теорема 1.

Пример 8. Рассмотрим те же, что и в предыдущем примере 7 множества V_i и векторы $\mathcal{Y}_i$, $i = \overline{1,5}$. Определим многозначное функцию $\Phi\colon [0,1] \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ соотношениями: $\Phi(x) = \{\mathcal{Y}_i\}$ при $x \in V_i$, $i = \overline{1,3}$, $\Phi(x) = \{\mathcal{Y}_5, \mathcal{Y}_3\}$ при $x \in V_4$ и $\Phi(x) = \{\mathcal{Y}_4, \mathcal{Y}_3\}$ при $x \in V_5$. Рассмотрим включение вида

$$k\big(\psi(x) + \Phi(x)\big) \ni \tilde{y},$$

относительно неизвестных $x \in [0,1]$, $k > 0$, где функция $\psi\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ определена в предыдущем примере 7. Докажем существование решения этого включения в случае, если его правая часть удовлетворяет следующим неравенствам

$$\frac{3}{2}\tilde{y}_2 \geqslant \tilde{y}_1 \geqslant \frac{3}{4}\tilde{y}_2 > 0 \tag{2.14}$$

(несколько менее ограничительным, чем неравенства (2.6)).

Рассмотрим введенные в примере 7 алгебраические системы $(X, \leqslant)$, (Y, ϑ) и определим многозначное отображение

$$G\colon X^2 \rightrightarrows Y, \quad G(\mathrm{u}, \mathrm{x}) = k\big(\psi(u) + \Phi(x)\big), \quad \mathrm{u} = (u, k), \quad \mathrm{x} = (x, \kappa).$$

Положим $\mathrm{x}_0 = (1, k_0)$, $k_0 > 0$ и найдем

$$G(\mathrm{x}_0, \mathrm{x}_0) = \big\{k_0\big(\psi(1) + \mathcal{Y}_4\big), k_0\big(\psi(1) + \mathcal{Y}_3\big)\big\} = \big\{k_0(3/2, 3/2), k_0(3/2, 1)\big\}.$$

Выберем $y_0 \doteq k_0(3/2, 1)$ и для этого вектора в силу (2.14) имеем

$$\det(\tilde{y}, y_0) = k_0 \begin{vmatrix} \tilde{y}_1 & \frac{3}{2} \\ \tilde{y}_2 & 1 \end{vmatrix} = k_0(\tilde{y}_1 - \frac{3}{2}\tilde{y}_2) \leqslant 0.$$

Таким образом, $(\tilde{y}, y_0) \in \vartheta$, то есть выполнено первое предположение теоремы 1.

Повторяя рассуждения из примера 7, можно показать что при любом $\mathrm{u} = (u, k) \in X$ отображение первого аргумента $G(\cdot, \mathrm{u})$ накрывает множество $\{\tilde{y}\}$ (в этом доказательстве используются неравенства $\tilde{y}_1 \geqslant \frac{3}{4}\tilde{y}_2 > 0$ из (2.14)), а отображение второго аргумента $G(\mathrm{u}, \cdot)$ является антитонным. Таким образом, выполнено второе предположение теоремы 1.

Проверка заключительного третьего предположения теоремы 1 проводится точно также, как в примере 7.

В примерах 7, 8 рассмотрены числовые уравнения и включения, разрешимость которых можно установить непосредственно без привлечения результатов об операторных уравнениях и включениях (но утверждения о накрывающих отображениях частично упорядоченных пространств не применимы, так как отношение ϑ в Y не является порядком). Ниже приведены примеры функциональных уравнений и включений, исследование разрешимости которых уже не столь простая задача.

Пример 9. Обозначим меру Лебега на $[a,b]$ символом mes. Пусть задана измеримая функция $\tau\colon [a,b]\to[a,b]$, такая, что для любого измеримого по Лебегу (далее, просто «измеримого») множества $E\subset[a,b]$ множество $\tau^{-1}(E)$ измеримо и, кроме того, если $\mathrm{mes}(E)=0$, то $\mathrm{mes}\,(\tau^{-1}(E))=0$. Это условие обеспечивает измеримость суперпозиции $x(\tau(\cdot))$ для любой измеримой функции $x\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ (см. [27, лемма 6, с. 706]). Пусть также задана измеримая функция $\tilde{y}\colon[a,b]\to\mathbb{R}^2$. Рассмотрим функциональное уравнение

$$k(t)\big(\psi\big(x(t)\big)+\varphi\big(x(\tau(t))\big)\big)=\tilde{y}(t),\quad t\in[a,b], \tag{2.15}$$

(где $\psi(\cdot)$ и $\varphi(\cdot)$ определены в примере 7) относительно неизвестных измеримых функций $x\colon[a,b]\to[0,1]$ и $k\colon[a,b]\to(0,+\infty)$. Используя теорему 1, докажем, что уравнение (2.15) разрешимо для любой измеримой функции $\tilde{y}=(\tilde{y}_1,\tilde{y}_2)$ такой, что при п.в. $t\in[a,b]$ выполнено

$$\tilde{y}_2(t)\geqslant\tilde{y}_1(t)\geqslant\frac{3}{4}\tilde{y}_2(t)>0. \tag{2.16}$$

Пусть $(X,\leqslant)$, (Y,ϑ) — введенные в примере 7 алгебраические системы. Обозначим через $\mathbb{M}(X)$ множество пар $\mathrm{x}=(x,k)$, компоненты которых — измеримые функции $x\colon[a,b]\to[0,1]$ и $k\colon[a,b]\to(0,+\infty)$, а порядок задан следующим образом: для $\mathrm{x}=(x,k)\in\in\mathbb{M}(X)$ и $\mathrm{x}'=(x',k')\in\mathbb{M}(X)$ имеет место $\mathrm{x}'\leqslant\mathrm{x}$, если при п. в. $t\in[a,b]$ в $(X,\leqslant)$ выполнено $\big(x'(t),k'(t)\big)\leqslant\big(x(t),k(t)\big)$. Далее обозначим через $\mathbb{M}(Y)$ множество измеримых функций $[0,1]\to\mathbb{R}^2$ с отношением $(y',y)\in\vartheta$, $y',y\in\mathbb{M}(Y)$, означающим, что при п. в. $t\in[0,1]$ в Y выполнено отношение $\big(y'(t),y(t)\big)\in\vartheta$. Определим отображение $G\colon X^2\to Y$ формулой (2.7) и зададим отображение $N_{G\tau}$, сопоставляющее любой паре $(\mathrm{u},\mathrm{x})\in\mathbb{M}(X)$ функцию

$$N_{G\tau}(\mathrm{u},\mathrm{x})(t)=G\big(\mathrm{u}(t),\mathrm{x}(\tau(t))\big),\quad t\in[a,b].$$

Так как функция ψ непрерывна, а функция φ непрерывна справа (см. пример 7), согласно [28, 29] функция $G\big(\mathrm{u}(\cdot),\mathrm{x}(\tau(\cdot))\big)\doteq k(t)\big(\psi\big(u(\cdot)\big)+\varphi\big(x(\tau(\cdot))\big)\big)$ будет измеримой для любых измеримых функций $\mathrm{u}=(u,k)$ $\mathrm{x}=(x,\kappa)$. Поэтому отображение $N_{G\tau}$ можем рассматривать действующим из $\mathbb{M}(X)\times\mathbb{M}(X)$ в $\mathbb{M}(Y)$.

Уравнение (2.15) будем рассматривать как операторное уравнение

$$N_{G\tau}(\mathrm{x},\mathrm{x})=\tilde{y}.$$

Зафиксируем произвольную функцию $\tilde{y}\in\mathbb{M}(Y)$, удовлетворяющую неравенствам (2.16). Положим $\mathrm{x}_0=(x_0,k_0)\in\mathbb{M}(X)$, где $x_0(t)\equiv1$, а k_0 — любая положительная измеримая функция. Тогда

$$y_0(t)\doteq G\big(\mathrm{x}_0(t),\mathrm{x}_0(\tau(t))\big)=k_0(t)\big(\psi(1)+\varphi(1)\big)=k_0(t)(1,1),$$

и для этой функции имеем

$$\Delta(t)\doteq\det(\tilde{y}(t),y_0(t))=k_0(t)\begin{vmatrix}\tilde{y}_1(t) & 1\\ \tilde{y}_2(t) & 1\end{vmatrix}=k_0(t)\big(\tilde{y}_1(t)-\tilde{y}_2(t)\big).$$

В силу (2.16) $\Delta(t)\leqslant0$ при п. в. $t\in[a,b]$. Таким образом, $(\tilde{y},y_0)\in\vartheta$, то есть выполнено первое предположение теоремы 1.

Покажем, что при любом $\mathrm{u}=(u,k)\in\mathbb{M}(X)$ отображение $N_{G\tau}(\cdot,\mathrm{u})\colon\mathbb{M}(X)\to\mathbb{M}(Y)$ накрывает множество $\{\tilde{y}\}\subset\mathbb{M}(Y)$. Обозначим $y(t)\doteq\varphi(u(\tau(t))$, $y(t)=(y_1(t),y_2(t))$. Заметим, что для $\mathrm{u}_0=(u_0,k_0)\in\mathbb{M}(X)$, где $u_0(t)\equiv0$, а k_0 — любая положительная измеримая функция, при п. в. $t \in [a,b]$ выполнено $\det(\tilde{y}(t), G(\mathrm{u}_0(t), \mathrm{u}(\tau(t)))) \geqslant 0$ (это прямо следует из соотношений (2.9)–(2.13), установленных в примере 7), то есть

$$\det\big(\tilde{y}(t), \psi(0) + y(t)\big) = \tilde{y}_1(t)\big(\psi_2(0) + y_2(t)\big) - \tilde{y}_2(t)\big(\psi_1(0) + y_1(t)\big) \geqslant 0. \tag{2.17}$$

Теперь выберем произвольно $\mathrm{x} = (x,k) \in \mathbb{M}(X)$, для которого $\big(\tilde{y}, N_{G\tau}(\mathrm{x},\mathrm{u})\big) \in \vartheta$. Таким образом, при п. в. $t \in [a,b]$ выполнено $\big(\tilde{y}(t), G(\mathrm{x}(t), \mathrm{u}(\tau(t)))\big) \in \vartheta$, то есть

$$\det\big(\tilde{y}(t), \psi(x(t)) + y(t)\big) = \tilde{y}_1(t)\big(\psi_2(x(t)) + y_2(t)\big) - \tilde{y}_2(t)\big(\psi_1(x(t)) + y_1(t)\big) \leqslant 0. \tag{2.18}$$

Вследствие непрерывности функций ψ_1, ψ_2 из (2.17), (2.18) получаем

$$0 \in \det\big(\tilde{y}(t), \psi\big([0,x(t)]\big) + y(t)\big), \quad t \in [a,b].$$

Из этого включения согласно лемме Филиппова о неявной функции (см., например, [3, теорема 1.5.15]) следует существование измеримой функции $x' \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ такой, что $x'(t) \in [0, x(t)]$ и $\det\big(\tilde{y}(t), \psi(x'(t)) + y(t)\big) = 0$, $t \in [a,b]$. Последнее равенство означает, что при $\mathrm{x}' = (x', k')$, $k'(t) \equiv 1$, векторы $G(\mathrm{x}'(t), \mathrm{u}(\tau(t)))$ и $\tilde{y}(t)$ коллинеарны при п. в. $t \in [a,b]$. Первые компоненты этих векторов положительны, следовательно, векторы сонаправлены. Положим функцию $\tilde{k} \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ равной при каждом t отношению длин этих векторов, тогда очевидно, функция $\tilde{k}$ измерима и положительна. Для $\tilde{\mathrm{x}} = (x', \tilde{k})$ получим равенство $\tilde{y}(t) = G(\tilde{\mathrm{x}}(t), \mathrm{u}(\tau(t)))$. Таким образом доказано, что отображение $N_{G\tau}(\cdot, \mathrm{u}) \colon \mathbb{M}(X) \to \mathbb{M}(Y)$ накрывает множество $\{\tilde{y}\} \subset \mathbb{M}(Y)$.

Для любого $\mathrm{u} \in \mathbb{M}(X)$ отображение $N_{G\tau}(\mathrm{u}, \cdot) \colon \mathbb{M}(X) \to \mathbb{M}(Y)$ является антитонным, поскольку отображение $G(\mathrm{u}, \cdot) \colon X \to Y$ антитонное при любом $\mathrm{u} \in X$. Таким образом выполнено второе предположение теоремы 1.

Для проверки заключительного третьего предположения теоремы 1 выберем произвольную цепь $S \subset \mathbb{M}(X)$, каждый элемент $\mathrm{x} = (x,k)$ которой удовлетворяет отношению $\big(\tilde{y}, N_{G\tau}(\mathrm{x},\mathrm{x})\big) \in \vartheta$, то есть $\det\big(\tilde{y}(t), N_{G\tau}(\mathrm{x},\mathrm{x})(t)\big) \leqslant 0$, $t \in [a,b]$. Первые компоненты элементов этой цепи сами образуют цепь в множестве измеримых функций $[a,b] \to [0,1]$, которую обозначим через S_1. Таким образом, для любого $\mathrm{x} = (x,k) \in S$ имеем $x \in S_1$, и обратно, для любого $x \in S_1$ существует положительная измеримая функция k такая, что $\mathrm{x} = (x,k) \in S$. Определим функцию $\tilde{x} \colon [a,b] \to [0,1]$ формулой $\tilde{x}(t) = \inf\big\{x(t),\ x \in S_1\big\}$, $t \in [a,b]$. Эта функция измерима. При любом $x \in S_1$ выполнено $\det\big(\tilde{y}(t), \psi(x(t)) + \varphi(x(\tau(t)))\big) \leqslant 0$, $t \in [a,b]$. Поэтому вследствие непрерывности функции ψ и непрерывности справа функции φ получаем $\det\big(\tilde{y}(t), \psi(\tilde{x}(t)) + \varphi(\tilde{x}(\tau(t)))\big) \leqslant 0$, $t \in [a,b]$. Таким образом, для $\tilde{\mathrm{x}} = (\tilde{x}, \tilde{k}) \in \mathbb{M}(X)$, $\tilde{k}(t) \equiv 1$, будет выполнено соотношение $\big(\tilde{y}, N_{G\tau}(\tilde{\mathrm{x}}, \tilde{\mathrm{x}})\big) \in \vartheta$, причем $\tilde{\mathrm{x}}$ — нижняя граница цепи S.

Итак, выполнены все предположения теоремы 1.

Пример 10. Пусть задана измеримая функция $\tau \colon [a,b] \to [a,b]$, такая, что для любого измеримого множества $E \subset [a,b]$ множество $\tau^{-1}(E)$ измеримо и если $\operatorname{mes}(E) = 0$, то $\operatorname{mes}(\tau^{-1}(E)) = 0$. Пусть также задана измеримая функция $\tilde{y} \colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$. Рассмотрим функциональное включение

$$k(t)\Big(\psi\big(x(t)\big) + \Phi\big(x(\tau(t))\big)\Big) \ni \tilde{y}(t), \quad t \in [a,b] \tag{2.19}$$

(где $\psi(\cdot)$ и $\Phi(\cdot)$ определены в примере 8), относительно неизвестных измеримых функций $x \colon [a,b] \to [0,1]$ и $k \colon [a,b] \to (0,+\infty)$. Повторяя рассуждения из примера 9 и используя результаты примера 8, на основании теоремы 1 доказывается, что включение (2.19) разрешимо для любой измеримой функции $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$ такой, что

$$\frac{3}{2}\tilde{y}_2(t) \geqslant \tilde{y}_1(t) \geqslant \frac{3}{4}\tilde{y}_2(t) > 0, \quad t \in [a,b].$$

Пусть $U \subset X$. Обозначим через $\mathrm{Sol}_U[G, \tilde{y}]$ множество решений включения (2.1), принадлежащих множеству U. Теорема 1 дает достаточные условия непустоты множества $\mathrm{Sol}_{\mathcal{O}_X(x_0)}[G, \tilde{y}]$. Следующее утверждение позволяет устанавливать существование минимального элемента в этом множестве. Легко видеть, что минимальный в $\mathrm{Sol}_{\mathcal{O}_X(x_0)}[G, \tilde{y}]$ элемент является минимальным во всем множестве решений $\mathrm{Sol}_X[G, \tilde{y}]$ включения (2.1).

Предложение 1. *Если выполнены условия теоремы 1, то в $\mathrm{Sol}_{\mathcal{O}_X(x_0)}[G, \tilde{y}]$ существует минимальный элемент.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. При доказательстве теоремы 1 определено частично упорядоченное пространство $(U, \preceq)$, и показано, что решением включения (2.1) является нижняя граница $v \in U$, $v \preceq x_0$, максимальной в этом пространстве цепи S. Покажем что это решение является минимальным (относительно исходного порядка $\leqslant$). Предположим, что это не так, и существует другое решение z включения (2.1) такое, что $z < v$. Тогда в силу определения частично упорядоченного множества $(U, \preceq)$ выполнено $z \in U$ и $z \prec v$. Но это неравенство противоречит максимальности цепи S. □

Замечание 2. Согласно рассмотренному предложению 1, в предположениях теоремы 1 во множестве $\mathrm{Sol}_X[G, \tilde{y}]$ всех решений включения (2.1) существует минимальный элемент. При этом наименьшего элемента в $\mathrm{Sol}_X[G, \tilde{y}]$ может не существовать, даже если отношение ϑ является порядком в Y, а отображение G однозначно. Например, пусть $X = Y = \{x = (x_1, x_2) \colon x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\}$ — круг единичного радиуса на плоскости $\mathbb{R}^2$ с «обычным покоординатным» порядком: неравенство для векторов $x \leqslant u$ равносильно системе неравенств для их координат $x_1 \leqslant u_1$, $x_2 \leqslant u_2$; отображение $G \colon X^2 \to Y$ задано формулой $G(x, u) = x - u$ для любых $x, u \in X$; $\tilde{y} = 0 \in Y \subset \mathbb{R}^2$. Тогда выполнены предположения теоремы 1, и очевидно множество $\mathrm{Sol}_X[G, \tilde{y}]$ решений включения (2.1), которое здесь принимает вид тривиального уравнения $0 = 0$, совпадает со всем пространством X. Это пространство имеет минимальные элементы (все точки на единичной окружности с неположительными координатами), но не имеет наименьшего элемента.

Аналогичное замечание для точек совпадения отображений было сделано в [13]. В приведенном примере, как и в соответствующем примере из [13], отсутствие наименьшего решения объясняется тем, что для множества из двух минимальных решений $z, v \in \mathrm{Sol}_X[G, \tilde{y}]$, не состоящих в отношении порядка, не существует нижней границы. Отметим, что в утверждениях о существовании наименьших решений как правило используется, что в рассматриваемых пространствах любые двухэлементные множества имеют точную нижнюю границу (напомним, что такие частично упорядоченные пространства называют *полурешетками*, подробнее см., например, [30, с. 38, 39]). Следующий пример показывает, что при выполнении предположений теоремы 1 во множестве $\mathrm{Sol}_X[G, \tilde{y}]$ решений включения (2.1) может не быть наименьшего элемента, даже если $(X, \leqslant)$ — полурешетка.

Пример 11. Определим на плоскости $\mathbb{R}^2$ стандартный порядок: для векторов $x = (x_1, x_2)$, $u = (u_1, u_2)$ пишем $x \leqslant u$ тогда и только тогда, когда $x_1 \leqslant u_1$, $x_2 \leqslant u_2$. Пусть $X = \{x = (x_1, x_2) \colon -1 \leqslant x_1 \leqslant 1,\ -1 \leqslant x_2 \leqslant 1\}$ — квадрат в $\mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}^2$, $\tilde{y} = 0 \in Y$. Определим отображение $G \colon X^2 \to Y$ для любых $x, u \in X$ формулой

$$G(x, u) \doteq x - \varphi(u), \quad \varphi(u) \doteq \begin{cases} 2u, & \text{если } u \leqslant 0,\ \|u\| \doteq \sqrt{u_1^2 + u_2^2} > 1, \\ u, & \text{при остальных } u \in X. \end{cases}$$

В таком случае отображение $F \colon X \to Y$ определяется формулой

$$F(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \leqslant 0,\ \|x\| > 1, \\ 0, & \text{при остальных } x \in X, \end{cases}$$

а включение (2.1) принимает вид уравнения $F(x) = 0$. Предположения теоремы 1 выполнены, кроме того, пространство X является полурешеткой, а тем не менее, множество решений рассматриваемого уравнения $\mathrm{Sol}_X[G,\tilde{y}] = X \setminus \big\{x \in X \colon x \leqslant 0,\ \|x\| > 1\big\}$ не имеет наименьшего элемента.

Сформулируем условия существования наименьшего элемента в множестве решений включения (2.1). Будем использовать следующее «усиление» определения 2, предложенное Е. С. Жуковским.

Определение 3. Будем говорить, что отображение $F\colon X \rightrightarrows Y$ *усиленно накрывает* множество $W \subset Y$, если

$$\begin{gathered}\forall x, u \in X \ \ \forall y \in F(x) \ \ \forall z \in F(u) \ \ \forall y' \in W \\ \big((y', y) \in \vartheta,\ \ (y', z) \in \vartheta\big) \ \Rightarrow \ \big(\exists x' \in X \ \ x' \leqslant x,\ \ x' \leqslant u,\ \ y' \in F(x')\big).\end{gathered}$$

Очевидно, усиленно накрывающее отображение F является накрывающим (это прямо следует из приведенного определения, если выбрать $u = x$, $z = y$).

Предложение 2. *Пусть пространство $(X, \leqslant)$ является полурешеткой, выполнены условия теоремы 1 и, кроме того, при любом $x \in X$ отображение $G(\cdot, x)\colon X \rightrightarrows Y$ усиленно накрывает множество $\{\tilde{y}\} \subset Y$. Тогда во множестве $\mathrm{Sol}_X[G,\tilde{y}]$ решений включения (2.1) существует наименьший элемент, и он принадлежит $\mathcal{O}_X(x_0)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно предложению 1 во множестве $\mathrm{Sol}_X[G,\tilde{y}]$ существует минимальный элемент, обозначим его через v. Покажем что элемент v является наименьшим в этом множестве. В противном случае существует еще одно решение $u \in \mathrm{Sol}_X[G,\tilde{y}]$ включения (2.1) такое, что имеет место соотношение $v \not\leqslant u$. Определим $\tilde{v} \doteq \inf\{v, u\}$. Так как $\tilde{v} < v$ и $\tilde{v} < u$, в силу антитонности на множестве $[\tilde{v}, x_0]$ отображения $G(\tilde{v}, \cdot)$, выполнено:

$$\exists y \in G(v, \tilde{v}) \ \ (\tilde{y}, y) \in \vartheta, \ \ \exists z \in G(u, \tilde{v}) \ \ (\tilde{y}, z) \in \vartheta.$$

А поскольку отображение $G(\cdot, \tilde{v})\colon X \rightrightarrows Y$ усиленно накрывает множество $\{\tilde{y}\}$, получаем

$$\exists \tilde{u} \in X \ \ \tilde{u} \leqslant \tilde{v} \ \ \tilde{y} \in F(\tilde{u}, \tilde{v}).$$

Но тогда, согласно теореме 1, существует $\zeta \in \mathrm{Sol}_X[G,\tilde{y}]$ такое, что $\zeta \leqslant \tilde{u} \leqslant \tilde{v} < v$, а это противоречит тому, что решение v включения (2.1) минимально. □

§ 3. Устойчивость решений включения к малым изменениям отображения и правой части

Обозначим $P(\mathbb{N})$ — совокупность всех возрастающих последовательностей натуральных чисел.

Пусть, как и выше, заданы частично упорядоченное пространство $(X, \leqslant)$ и непустое множество Y с определенным на нем рефлексивным бинарным отношением ϑ, отображение $G\colon X^2 \rightrightarrows Y$ и элемент $\tilde{y} \in Y$. Предположим, что известно решение $w \in X$ включения (2.1). Определим понятие устойчивости в частично упорядоченном пространстве X этого решения, которое можно считать аналогом понятий устойчивости, известных для метрических пространств (см. [31, 32]).

Пусть для любого натурального i заданы элемент $\tilde{y}_i \in Y$ и многозначное отображение $G_i\colon X^2 \rightrightarrows Y$. Наряду с включением (2.1) рассмотрим следующую последовательность включений:

$$G_i(x, x) \ni \tilde{y}_i, \ \ i \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

Полагаем решение $w \in X$ включения (2.1) устойчивым, если при каждом i существует решение $w_i \in X$ включения (3.1) и имеет место следующая «сходимость» последовательности w_i к точке w:

$$\forall \{i_n\} \in P(\mathbb{N}) \ \sup_{n\in\mathbb{N}}\{w_{i_n}\} = w. \tag{3.2}$$

Зададим для любого i отображение $F_i\colon X \rightrightarrows Y$ формулой $F_i(x) \doteq G_i(x,x)$, $x \in X$. Определим для последовательности включений (3.1) следующее условие.

($\mathcal{A}$) *для любого* $x \in X$, $x < w$, *существует такое* $N \in \mathbb{N}$, *что при всех* $i > N$ *во множестве* $\mathcal{O}_X(w)$ *нет решений включения* (3.1).

Теорема 2. *Пусть пространство* $(X, \leqslant)$ *является полурешеткой и при каждом* $i \in \mathbb{N}$ *выполнены следующие условия:*

- *существует* $y_i \in F_i(w)$ *такое, что* $(\tilde{y}, y_i) \in \vartheta$;
- *при любом* $x \in \mathcal{O}_X(w)$ *отображение* $G_i(\cdot, x)\colon X \rightrightarrows Y$ *накрывает множество* $\{\tilde{y}_i\}$, *а отображение* $G_i(x, \cdot)\colon X \rightrightarrows Y$ *является антитонным на множестве* $[x, w]_X$;
- *любая цепь* $S \in \mathcal{S}_{\mathcal{O}_X(w)}(G_i, \tilde{y}_i)$ *ограничена снизу и имеет нижнюю границу* $v \in X$ *такую, что существует элемент* $y \in G_i(v, v)$, *удовлетворяющий соотношению* $(\tilde{y}_i, y) \in \vartheta$.

Тогда при любом $i \in \mathbb{N}$ *множество* $\mathrm{Sol}_{\mathcal{O}_X(w)}[G_i, \tilde{y}_i]$ *решений включения* (3.1), *принадлежащих множеству* $\mathcal{O}_X(w)$, *не пусто. А если, дополнительно, выполнено условие* ($\mathcal{A}$), *то при любом выборе* $w_i \in \mathrm{Sol}_{\mathcal{O}_X(w)}[G_i, \tilde{y}_i]$ *полученная последовательность* $\{w_i\} \subset X$ *удовлетворяет соотношению* (3.2).

Доказательство. При каждом $i \in \mathbb{N}$ для включений (3.1) справедливы предположения теоремы 1 (в которых $x_0 = w$). Следовательно, во множестве $\mathcal{O}_X(w)$ существует решение включения (3.1).

Выберем при каждом $i \in \mathbb{N}$ любой элемент $w_i \in \mathrm{Sol}_{\mathcal{O}_X(w)}[G_i, \tilde{y}_i]$. Пусть $\{i_n\} \in P(\mathbb{N})$. Очевидно, из включения $w_i \in \mathcal{O}_X(w)$ следует, что w является верхней границей множества $\{w_{i_n}\}$.

Пусть верхней границей множества $\{w_{i_n}\}$ также является некоторый элемент $v \in X$ такой, что $v \not\geqslant w$. Тогда верхней границей этого множества будет еще и элемент $x = \inf\{w, v\}$, и для этого элемента выполнено $x < w$. Полученное неравенство противоречит предположению, что $w_i \notin \mathcal{O}_X(x)$ при достаточно больших номерах i. □

Поясним аналогии между теоремой 2 и утверждениями об устойчивости в традиционных метрических пространствах. Связь между многозначными отображениями F_i, $i \in \mathbb{N}$, и многозначным отображением F в теореме 2 задана соотношением

$$(\tilde{y}, y_i) \in \vartheta, \quad i \in \mathbb{N}, \tag{3.3}$$

в котором $y_i \in F_i(w)$, w — решение исходного включения (2.1). Пусть $Y = M \times \mathbb{R}_+$, где (M, d) — обобщенно метрическое пространство, $\tilde{y} = (\tilde{\mu}, \tilde{r})$, $y_i = (\mu_i, r_i)$. Полагаем, что на Y определено отношение Бишопа–Фелпса (см. пример 1), обозначенное символом ϑ. Тогда при $i \to \infty$ в случае сходимости $r_i \to \tilde{r}$ из отношения (3.3) получаем $d(\tilde{\mu}, \mu_i) \leqslant r_i - \tilde{r} \to 0$. Таким образом, можно говорить, что условие (3.3) обеспечивает «малость» отклонения значений отображений F_i от значения отображения F на решении w исходного включения (2.1).

С учетом предложений 1, 2 из теоремы 2 получаем следующие два утверждения.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда при любом $i \in \mathbb{N}$ существует минимальный элемент w_i в непустом множестве $\mathrm{Sol}_{\mathcal{O}_X(w)}[G_i, \tilde{y}_i]$ решений включения (3.1), принадлежащих множеству $\mathcal{O}_X(w)$. А если, дополнительно, выполнено условие $(\mathcal{A})$, то последовательность $\{w_i\} \subset X$ удовлетворяет соотношению (3.2).*

Следствие 2. *Пусть выполнены условия теоремы 2 и, кроме того, при каждом $i \in \mathbb{N}$ для любого $x \in X$ отображение $G_i(\cdot, x)\colon X \rightrightarrows Y$ усиленно накрывает множество $\{\tilde{y}_i\} \subset Y$. Тогда при любом $i \in \mathbb{N}$ существует наименьший элемент w_i в непустом множестве $\mathrm{Sol}_X[G_i, \tilde{y}_i]$ решений включения (3.1). А если, дополнительно, выполнено условие $(\mathcal{A})$, то последовательность $\{w_i\} \subset X$ удовлетворяет соотношению (3.2).*

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075–15–2019–1619.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Обэн Ж.-П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. М.: Мир, 1988.
2. Арутюнов А. В. Лекции по выпуклому и многозначному анализу. М.: Физматлит, 2014.
3. Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. М.: Либроком, 2011.
4. Ченцов А. Г., Хачай Д. М. Оператор программного поглощения и релаксация дифференциальной игры сближения–уклонения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30. Вып. 1. С. 64–91. https://doi.org/10.35634/vm200106
5. Zhukovskiy E. S., Panasenko E. A. On fixed points of multi-valued maps in metric spaces and differential inclusions // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 2. С. 12–26. http://doi.org/10.20537/vm130202
6. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988.
7. Brøndsted A. On a lemma of Bishop and Phelps // Pacific Journal of Mathematics. 1974. Vol. 55. No. 2. P. 335–341. https://doi.org/10.2140/pjm.1974.55.335
8. Granas A., Dugundji J. Fixed point theory. New York: Springer, 2003. https://doi.org/10.1007/978-0-387-21593-8
9. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Краткий курс функционального анализа. М.: Высшая школа, 1982.
10. Биркгоф Г. Теория структур. М.: ИЛ, 1952.
11. Арутюнов А. В., Жуковский Е. С., Жуковский С. Е. Точки совпадения многозначных отображений в частично упорядоченных пространствах // Доклады Академии наук. 2013. Т. 453. № 6. С. 595–598. https://doi.org/10.7868/S0869565213360036
12. Арутюнов А. В., Жуковский Е. С., Жуковский С. Е. О точках совпадения отображений в частично упорядоченных пространствах // Доклады Академии наук. 2013. Т. 453. № 5. С. 475–478. https://doi.org/10.7868/S086956521335003X
13. Arutyunov A. V., Zhukovskiy E. S., Zhukovskiy S. E. Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces // Topology and its Applications. 2015. Vol. 179. P. 13–33. https://doi.org/10.1016/j.topol.2014.08.013
14. Arutyunov A. V., Zhukovskiy E. S., Zhukovskiy S. E. Coincidence points principle for set-valued mappings in partially ordered spaces // Topology and its Applications. 2016. Vol. 201. P. 330–343. https://doi.org/10.1016/j.topol.2015.12.044
15. Бенараб С., Жуковский Е. С., Мерчела В. Теоремы о возмущениях накрывающих отображений в пространствах с расстоянием и в пространствах с бинарным отношением // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 4. С. 52–63. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-4-52-63

16. Жуковский Е. С. Об упорядоченно накрывающих отображениях и неявных дифференциальных неравенствах // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 12. С. 1610–1627. https://doi.org/10.1134/S0374064116120025
17. Жуковский Е. С. Об упорядоченно накрывающих отображениях и интегральных неравенствах типа Чаплыгина // Алгебра и анализ. 2018. Т. 30. Вып. 1. С. 96–127. http://mi.mathnet.ru/aa1572
18. Бенараб С., Жуковский Е. С. О точках совпадения двух отображений, действующих из частично упорядоченного пространства в произвольное множество // Известия высших учебных заведений. Математика. 2020. № 5. С. 11–21. https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-5-11-21
19. Бенараб С., Жуковская З. Т., Жуковский Е. С., Жуковский С. Е. О функциональных и дифференциальных неравенствах и их приложениях к задачам управления // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1471–1482. https://doi.org/10.1134/S0374064120110059
20. Бенараб С. О теореме Чаплыгина для неявного дифференциального уравнения n-го порядка // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 135. С. 225–233. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2021-26-135-225-233
21. Бенараб С. Двусторонние оценки решений краевых задач для неявных дифференциальных уравнений // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 134. С. 216–220. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2021-26-134-216-220
22. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981.
23. Алескеров Ф. Т., Хабина Э. Л., Шварц Д. А. Бинарные отношения, графы и коллективные решения. М.: Изд. дом ГУ ВШЭ, 2006.
24. Heinonen J. Lectures on analysis on metric spaces. New York: Springer, 2001. https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0131-8
25. Арутюнов А. В., Грешнов А. В. (q_1, q_2)-квазиметрические пространства. Накрывающие отображения и точки совпадения // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2018. Т. 82. Вып. 2. С. 3–32. https://doi.org/10.4213/im8546
26. Жуковский Е. С. Неподвижные точки сжимающих отображений f-квазиметрических пространств // Сибирский математический журнал. 2018. Т. 59. № 6. С. 1338–1350. http://mi.mathnet.ru/smj3047
27. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Т. 1. Общая теория. М.: ИЛ, 1962.
28. Шрагин И. В. Суперпозиционная измеримость при обобщенных условиях Каратеодори // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. 2014. Т. 19. № 2. С. 476–478. https://elibrary.ru/item.asp?id=21422118
29. Серова И. Д. Суперпозиционная измеримость многозначной функции при обобщенных условиях Каратеодори // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 135. С. 305–314. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2021-26-135-305-314
30. Биркгоф Г. Теория решеток. М.: Наука, 1984.
31. Арутюнов А. В. Устойчивость точек совпадения и свойства накрывающих отображений // Математические заметки. 2009. Т. 86. Вып. 2. С. 163–169. https://doi.org/10.4213/mzm8471
32. Фоменко Т. Н. Устойчивость каскадного поиска // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2010. Т. 74. № 5. С. 171–190. https://doi.org/10.4213/im4109

Поступила в редакцию 17.03.2022

Принята к публикации 26.08.2022

Бенараб Сарра, аспирант кафедры функционального анализа, Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина, 392000, Россия, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33;
научный сотрудник, Санкт-Петербургский международный математический институт имени Леонарда Эйлера, 197022, г. Санкт-Петербург, Песочная набережная, 10.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8849-8848
E-mail: benarab.sarraa@gmail.com

Панасенко Елена Александровна, к. ф.-м. н., доцент, заведующая кафедрой функционального анализа, Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина, 392000, Россия, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33;
научный сотрудник, Санкт-Петербургский международный математический институт имени Леонарда Эйлера, 197022, Россия, г. Санкт-Петербург, Песочная набережная, 10.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4737-9906
E-mail: panlena_t@mail.ru

Цитирование: С. Бенараб, Е. А. Панасенко. Об одном включении с отображением, действующим из частично упорядоченного пространства в множество с рефлексивным бинарным отношением // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32. Вып. 3. С. 361–382.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'UTERNYE NAUKI
MATHEMATICS 2022. Vol. 32. Issue 3. Pp. 361–382.

S. Benarab, E. A. Panasenko

On one inclusion with a mapping acting from a partially ordered set to a set with a reflexive binary relation

Keywords: set-valued mapping, ordered space, operator inclusion, existence of solutions.

MSC2020: 47H04, 06A06

DOI: 10.35634/vm220302

Set-valued mappings acting from a partially ordered space $X = (X, \leqslant)$ to a set Y on which a reflexive binary relation ϑ is given (this relation is not supposed to be antisymmetric or transitive, i. e., ϑ is not an order in Y), are considered. For such mappings, analogues of the concepts of covering and monotonicity are introduced. These concepts are used to study the inclusion $F(x) \ni \tilde{y}$, where $F\colon X \rightrightarrows Y$, $\tilde{y} \in Y$. It is assumed that for some given $x_0 \in X$, there exists $y_0 \in F(x_0)$ such that $(\tilde{y}, y_0) \in \vartheta$. Conditions for the existence of a solution $x \in X$ satisfying the inequality $x \leqslant x_0$ are obtained, as well as those for the existence of minimal and least solutions. The property of stability of solutions of the considered inclusion to changes of the set-valued mapping F and of the element $\widetilde{y}$ is also defined and investigated. Namely, the sequence of "perturbed" inclusions $F_i(x) \ni \tilde{y}_i$, $i \in \mathbb{N}$, is assumed, and the conditions of existence of solutions $x_i \in X$ such that for any increasing sequence of integers $\{i_n\}$ there holds $\sup_{n\in\mathbb{N}}\{x_{i_n}\} = x$, where $x \in X$ is a solution of the initial inclusion, are derived.

Funding. The work is supported by Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, agreement no. 075–15–2019–1619.

REFERENCES

1. Aubin J.-P., Ekeland I. *Applied nonlinear analysis*, New York: Wiley, 1984.
   Translated under the title *Prikladnoi nelineinyi analiz*, Moscow: Mir, 1988.
2. Arutyunov A. V. *Lektsii po vypuklomu i mnogoznachnomu analizu* (Lectures on convex and set-valued analysis), Moscow: Fizmatlit, 2014.
3. Borisovich Yu. G., Gel'man B. D., Myshkis A. D., Obukhovskii V. V. *Vvedenie v teoriyu mnogoznachnykh otobrazhenii i differentsial'nykh vklyuchenii* (Introduction to the theory of set-valued mappings and differential inclusions), Moscow: Librokom, 2011.
4. Chentsov A. G., Khachai D. M. Relaxation of pursuit–evasion differential game and program absorption operator, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2020, vol. 30, issue 1, pp. 64–91 (in Russian). https://doi.org/10.35634/vm200106
5. Zhukovskiy E. S., Panasenko E. A. On fixed points of multi-valued maps in metric spaces and differential inclusions, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2013, issue 2, pp. 12–26. http://doi.org/10.20537/vm130202
6. Clark F. H. *Optimization and nonsmooth analysis*, New York: Wiley, 1983.
   Translated under the title *Optimizatsiya i negladkii analiz*, Moscow: Nauka, 1988.
7. Brøndsted A. On a lemma of Bishop and Phelps, *Pacific Journal of Mathematics*, 1974, vol. 55, no. 2, pp. 335–341. https://doi.org/10.2140/pjm.1974.55.335
8. Granas A., Dugundji J. *Fixed point theory*, New York: Springer, 2003.
   https://doi.org/10.1007/978-0-387-21593-8
9. Lyusternik L. A., Sobolev V. I. *Kratkii kurs funktsional'nogo analiza* (Short course on functional analysis), Moscow: Vysshaya shkola, 1982.
10. Birkhoff G. *Lattice theory*, New York: American Mathematical Society, 1948.
    Translated under the title *Teoriya struktur*, Moscow: Inostrannaya Literatura, 1952.
11. Arutyunov A. V., Zhukovskiy E. S., Zhukovskiy S. E. Coincidence points of set-valued mappings in partially ordered spaces, *Doklady Mathematics*, 2013, vol. 88, no. 3, pp. 727–729.
    https://doi.org/10.1134/S106456241306029X

12. Arutyunov A. V., Zhukovskiy E. S., Zhukovskiy S. E. On coincidence points of mappings in partially ordered spaces, *Doklady Mathematics*, 2013, vol. 88, no. 3, pp. 710–713.
https://doi.org/10.1134/S1064562413060239
13. Arutyunov A. V., Zhukovskiy E. S., Zhukovskiy S. E. Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces, *Topology and its Applications*, 2015, vol. 179, pp. 13–33.
https://doi.org/10.1016/j.topol.2014.08.013
14. Arutyunov A. V., Zhukovskiy E. S., Zhukovskiy S. E. Coincidence points principle for set-valued mappings in partially ordered spaces, *Topology and its Applications*, 2016, vol. 201, pp. 330–343.
https://doi.org/10.1016/j.topol.2015.12.044
15. Benarab S., Zhukovskiy E. S., Merchela W. Theorems on perturbations of covering mappings in spaces with a distance and in spaces with a binary relation, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 52–63 (in Russian).
https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-4-52-63
16. Zhukovskiy E. S. On ordered-covering mappings and implicit differential inequalities, *Differential Equations*, 2016, vol. 52, no. 12, pp. 1539–1556. https://doi.org/10.1134/S0012266116120028
17. Zhukovskiy E. S. On order covering maps in ordered spaces and Chaplygin-type inequalities, *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2019, vol. 30, issue 1, pp. 73–94. https://doi.org/10.1090/spmj/1530
18. Benarab S., Zhukovskiy E. S. Coincidence points of two mappings acting from a partially ordered space to an arbitrary set, *Russian Mathematics*, 2020, vol. 64, no. 5, pp. 8–16.
https://doi.org/10.3103/S1066369X20050023
19. Benarab S., Zhukovskaya Z. T., Zhukovskiy E. S., Zhukovskiy S. E. Functional and differential inequalities and their applications to control problems, *Differential Equations*, 2020, vol. 56, no. 11, pp. 1440–1451. https://doi.org/10.1134/S00122661200110051
20. Benarab S. On Chaplygin's theorem for an implicit differential equation of order n, *Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no. 135, pp. 225–233 (in Russian).
https://doi.org/10.20310/2686-9667-2021-26-135-225-233
21. Benarab S. Two-sided estimates for solutions of boundary value problems for implicit differential equations, *Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no. 134, pp. 216–220 (in Russian). https://doi.org/10.20310/2686-9667-2021-26-134-216-220
22. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza* (Elements of the theory of functions and functional analysis), Moscow: Nauka, 1981.
23. Aleskerov F. T., Khabina E. L., Shvarts D. A. *Binary relations, graphs and collective solutions*, Moscow: State University Higher School of Economics, 2006.
24. Heinonen J. *Lectures on analysis on metric spaces*, New York: Springer, 2001.
https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0131-8
25. Arutyunov A. V., Greshnov A. V. (q_1, q_2)-quasimetric spaces. Covering mappings and coincidence points, *Izvestiya: Mathematics*, 2018, vol. 82, no. 2, pp. 245–272. https://doi.org/10.1070/IM8546
26. Zhukovskiy E. S. The fixed points of contractions of f-quasimetric spaces, *Siberian Mathematical Journal*, 2018, vol. 59, no. 6, pp. 1063–1072. https://doi.org/10.1134/S0037446618060095
27. Danford N., Schwartz J. T. *Linear operators. P. 1. General theory*, New York: Interscience, 1958.
28. Shragin I. V. Superpositional measurability under generalized Caratheodory conditions, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2014, vol. 19, no. 2, pp. 476–478 (in Russian). https://elibrary.ru/item.asp?id=21422118
29. Serova I. D. Superpositional measurability of a multivalued function under generalized Caratheodory conditions, *Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no. 135, pp. 305–314 (in Russian). https://doi.org/10.20310/2686-9667-2021-26-135-305-314
30. Birkhoff G. *Lattice theory*, Providence: American Mathematical Society, 1967.
Translated under the title *Teoriya reshetok*, M.: Nauka, 1984.
31. Arutyunov A. V. Stability of coincidence points and properties of covering mappings, *Mathematical Notes*, 2009, vol. 86, no. 2, pp. 153–158. https://doi.org/10.1134/S0001434609070177
32. Fomenko T. N. Stability of cascade search, *Izvestiya: Mathematics*, 2010, vol. 74, no. 5, pp. 1051–1068. https://doi.org/10.1070/IM2010v074n05ABEH002515

Received 17.03.2022

Accepted 26.08.2022

Sarra Benarab, Post-Graduate Student, Functional Analysis Department, Derzhavin Tambov State University, ul. Internatsional'naya, 33, Tambov, 392000, Russia;
Researcher, PDMI Department, Leonhard Euler International Mathematical Institute, Pesochnaya naberezhnaya, 10, St. Petersburg, 197022, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8849-8848
E-mail: benarab.sarraa@gmail.com

Elena Aleksandrovna Panasenko, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Head of the Functional Analysis Department, Derzhavin Tambov State University, ul. Internatsional'naya, 33, Tambov, 392000, Russia;
Researcher, PDMI Department, Leonhard Euler International Mathematical Institute, Pesochnaya naberezhnaya, 10, St. Petersburg, 197022, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4737-9906
E-mail: panlena_t@mail.ru

Citation: S. Benarab, E. A. Panasenko. On one inclusion with a mapping acting from a partially ordered set to a set with a reflexive binary relation, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2022, vol. 32, issue 3, pp. 361–382.