ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МЕХАНИКА 2021. Т. 31. Вып. 3. С. 505–516.

УДК 532.5.032

© *Е. Ю. Просвиряков*

ВОССТАНОВЛЕНИЕ РАДИАЛЬНО-ОСЕВОЙ СКОРОСТИ В ЗАКРУЧЕННЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЧЕНИЯХ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ ЛАГРАНЖЕВОМ РАССМОТРЕНИИ ЭВОЛЮЦИИ ЗАВИХРЕННОСТИ

Рассмотрены закрученные ламинарные осесимметричные течения вязких несжимаемых жидкостей в потенциальном поле массовых сил. Исследования течений осуществляются в цилиндрической системе координат. В течениях отдельно рассматриваются области, в которых осевая производная окружной скорости не может принимать нулевое значение в какой-нибудь открытой окрестности (существенно закрученные течения), и области, в которых эта производная равна нулю (область со слоистой закруткой). Показано, что для областей со слоистой закруткой можно применять известный метод (метод вязких вихревых доменов), разработанный для незакрученных течений. Для существенно закрученных течений получена формула для вычисления радиально-осевой скорости воображаемой жидкости через окружную компоненту завихренности, окружную циркуляцию реальной жидкости и частные производные этих функций. Частицы этой воображаемой жидкости «переносят» вихревые трубки радиально-осевой составляющей завихренности с сохранением интенсивности этих трубок, а также «переносят» величину окружной циркуляции и произведение окружной составляющей завихренности на некоторую функцию расстояния до оси симметрии. Предложен неинтегральный способ восстановления поля скорости по полю завихренности. Он сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений с двумя переменными. Полученный результат предлагается использовать для распространения метода вязких вихревых доменов на закрученные осесимметричные течения.

Ключевые слова: уравнения Навье–Стокса, течение с закруткой, метод дискретных вихрей, теоремы Гельмгольца о вихрях, метод вязких вихревых доменов.

DOI: 10.35634/vm210311

В основе вихревых методов лежит возможность представления поля скорости по полю завихренности и возможность рассматривать эволюцию завихренности с точки зрения Лагранжа. Наиболее известным вихревым методом является бессеточный метод расчета нестационарных течений идеальной несжимаемой жидкости, получивший название метода дискретных вихрей. Изначально идея метода была изложена для двухмерных задач в работе [1]. Дальнейшее развитие метода и современные модели для двухмерных и трехмерных течений отражены в работах [2–4]. Все варианты этого метода используют интегральное представление поля скорости по полю завихренности (формула Био–Савара) и точку зрения Лагранжа, основанную на теоремах Гельмгольца [5]. Согласно этим теоремам, течение невязкой баротропной жидкости в потенциальном поле массовых сил таково, что

(1) частицы жидкости, составляющие вихревую линию в некоторый момент времени, во все время движения составляют вихревую линию;

(2) интенсивность любой вихревой трубки во все время движения жидкости остается постоянной.

Для вязких течений в общем случае неверно считать, что вихревые трубки переносятся вместе с частицами жидкости. В конце 80-х годов прошлого века в работах [6, 7] для плоскопараллельных и незакрученных осесимметричных течений вязкой несжимаемой жидкости были получены выражения скорости $\mathbf{U}$ некоторой (воображаемой) среды, частицы которой переносят вихревые трубки рассматриваемого (реального) течения (с сохранением интенсивности вихревых трубок). Оба выражения можно представить одной общей формулой $\mathbf{U} = \mathbf{V} - \nu\dfrac{\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\Omega}}{\boldsymbol{\Omega}^2}$, где ν — кинематический коэффициент вязкости, $\mathbf{V}$ — скорость (реального) течения, $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{rot}\,\mathbf{V}$. Это открывает возможности формулировки теорем, аналогичных теоремам Гельмгольца, но для вязких течений указанных классов. Сразу после этого появилась модификация метода дискретных вихрей для расчета плоскопараллельных течений вязкой несжимаемой жидкости [8]. Позже появилась модификация для расчета плоскопараллельных и незакрученных осесимметричных течений вязкой несжимаемой жидкости [9], получившая название «метод вязких вихревых доменов». В этих модификациях используются выражения для $\mathbf{U}$, полученные в [6,7]. То есть используется лагранжева точка зрения, рассматривающая движение вихревых трубок (с сохранением их интенсивности). А поле скорости восстанавливается по полю завихренности с помощью интегральной формулы Био–Савара.

В статье [10] теоремы Гельмгольца были распространены на все типы течений (от идеальной жидкости до вязкого газа). А в работах [11–18] аналоги теорем Гельмгольца использовались для исследования эволюции не только вихревых линий, но и векторных линий других векторных полей, связанных с полем течения жидкости. В данной статье также будут применены теоремы Гельмгольца для исследования различных векторных полей (не только поля завихренности). При этом исследоваться будут закрученные осесимметричные течения вязкой несжимаемой жидкости. Взаимосвязь радиально-осевого и окружного движений в закрученных течениях чрезвычайно сложна. Однако в силу осевой симметрии удается получить некоторые связи, вообще говоря, отсутствующие в общем пространственном случае. Основываясь на этих связях с использованием аналогов теорем Гельмгольца, в данной статье предпринята попытка получить неинтегральный способ восстановления поля скорости по полю завихренности (при использовании лагранжевой точки зрения на движение вихревых трубок). Кроме теоретического интереса такой способ мог бы стать основой для создания нового вихревого метода расчета закрученных осесимметричных течений вязкой несжимаемой жидкости.

Следует отметить, что полное представление о результатах работы дают части текста, выделенные курсивом. Остальное относится к обоснованию предложенных утверждений.

§ 1. Основные обозначения и уравнения движения

Рассмотрим осесимметричное ламинарное течение ньютоновской вязкой несжимаемой жидкости в потенциальном поле массовых сил. Обозначим: $\mathbf{V}$ — скорость, $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{rot}\,\mathbf{V}$ — завихренность, p — давление, ρ — плотность, Π — потенциал массовых сил, ν — кинематический коэффициент вязкости. Движение жидкости описывается системой уравнений Навье–Стокса [5]. Векторное уравнение из этой системы может быть записано в форме Громеки–Ламба:

$$\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{V} = -\nu\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\Omega} - \nabla\left[\frac{p}{\rho} + \frac{\mathbf{V}^2}{2} + \Pi\right]. \qquad (1.1)$$

Введем цилиндрическую систему координат r, ϕ, z с началом в точке O так, чтобы течение оказалось осесимметричным относительно оси Oz. Обозначим $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$ — правую тройку единичных векторов в радиальном, окружном и осевом направлениях соответственно; $\mathbf{V}_r = V_r\mathbf{e}_r, \mathbf{V}_\varphi = V_\varphi\mathbf{e}_\varphi, \mathbf{V}_z = V_z\mathbf{e}_z$ — соответствующие компоненты скорости. В силу осесимметричности все компоненты скорости и давление не зависят от координаты φ. Из уравнения (1.1) в этом случае следует, что компоненты $\nabla\Pi$ также не зависят от координаты φ. Как показано в [11], осесимметричность параметров течения с необходимостью означает, что потенциал массовых сил имеет общую с течением ось симметрии. Таким образом, градиент, входящий в правую часть (1.1), имеет нулевую φ-компоненту.

Наряду с полем $\mathbf{\Omega}$ рассмотрим поля двух завихренностей $\mathbf{\Omega}_{rz} = \mathbf{rot}\,\mathbf{V}_{\varphi}$ и $\mathbf{\Omega}_{\varphi} = \mathbf{rot}\,(\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z)$.

Учитывая, что $\mathbf{\Omega}_{\varphi} \times \mathbf{V}_{\varphi} = \mathbf{0}$, преобразуем выражение

$$\begin{aligned}\mathbf{\Omega}\ \times \mathbf{V} &= (\mathbf{\Omega}_{rz} + \mathbf{\Omega}_{\varphi}) \times (\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_{\varphi} + \mathbf{V}_z) = \\ &= \mathbf{\Omega}_{rz} \times (\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z) + \mathbf{\Omega}_{\varphi} \times (\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z) + \mathbf{\Omega}_{rz} \times \mathbf{V}_{\varphi}.\end{aligned}$$

Первое слагаемое правой части направлено вдоль $\mathbf{e}_{\varphi}$, а последние два лежат в радиально-осевой плоскости. Поэтому уравнение (1.1) можно представить системой двух уравнений:

$$\frac{\partial\,(\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z)}{\partial t} + \mathbf{\Omega}_{\varphi} \times (\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z) + \mathbf{\Omega}_{rz} \times \mathbf{V}_{\varphi} = -\nabla \left[\frac{p}{\rho} + \frac{\mathbf{V}^2}{2} + \Pi\right] - \nu \mathbf{rot}\,\mathbf{\Omega}_{\varphi} \tag{1.2}$$

и

$$\frac{\partial \mathbf{V}_{\varphi}}{\partial t} + \mathbf{\Omega}_{rz} \times (\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z) = -\nu \mathbf{rot}\,\mathbf{\Omega}_{rz}. \tag{1.3}$$

Использование такого представления уравнений Навье–Стокса позволило в работе [11] получить выражение для скорости $\mathbf{U}_{\mathbf{\Omega}_{rz}}$, с которой переносятся (с сохранением интенсивности) векторные трубки поля $\mathbf{\Omega}_{rz}$:

$$\mathbf{U}_{\mathbf{\Omega}_{rz}} = \mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z - \nu \frac{\mathbf{\Omega}_{rz} \times \mathbf{rot}\,\mathbf{\Omega}_{rz}}{\Omega_{rz}^2}. \tag{1.4}$$

§ 2. Окружная циркуляция скорости

Введем в рассмотрение величину $\gamma = 2\pi r V_{\varphi}$, которая в работе [11] названа «окружной циркуляцией скорости». Используя γ, исключим $\mathbf{\Omega}_{rz}$ и $\mathbf{V}_{\varphi}$ из уравнения (1.2). Преобразуем последнее слагаемое левой части (1.2):

$$\mathbf{\Omega}_{rz} \times \mathbf{V}_{\varphi} = V_{\varphi} \left(-\frac{\partial}{\partial z} V_{\varphi} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\,(r V_{\varphi})}{\partial r} \mathbf{e}_z\right) \times \mathbf{e}_{\varphi} = -\frac{\nabla \gamma^2}{8\pi^2 r^2}.$$

Подставим это выражение в (1.2) и применим оператор $\mathbf{rot}$ к получившемуся уравнению:

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}_{\varphi}}{\partial t} + \mathbf{rot}\,(\mathbf{\Omega}_{\varphi} \times (\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z)) = -\frac{\mathbf{e}_r \times \nabla \gamma^2}{4\pi^2 r^3} - \nu \mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{\Omega}_{\varphi}.$$

Используя в этом уравнении выражение для ротора в цилиндрических координатах и учитывая, что $\operatorname{div}(\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z) = \dfrac{\partial}{\partial r} V_r + \dfrac{V_r}{r} + \dfrac{\partial}{\partial z} V_z = 0$, получим

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}_{\varphi}}{\partial t} + V_r \left(\frac{\partial \mathbf{\Omega}_{\varphi}}{\partial r} - \frac{\mathbf{\Omega}_{\varphi}}{r}\right) + V_z \frac{\partial \mathbf{\Omega}_{\varphi}}{\partial z} = -\frac{\mathbf{e}_r \times \nabla \gamma^2}{4\pi^2 r^3} - \nu \mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{\Omega}_{\varphi}.$$

Это векторное уравнение имеет только одну φ-компоненту и равносильно скалярному уравнению

$$\frac{\partial \Omega_{\varphi}}{\partial t} + V_r \left(\frac{\partial \Omega_{\varphi}}{\partial r} - \frac{\Omega_{\varphi}}{r}\right) + V_z \frac{\partial \Omega_{\varphi}}{\partial z} = \frac{1}{4\pi^2 r^3} \frac{\partial}{\partial z} \gamma^2 - \nu \left(\mathbf{e}_{\phi}, \mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{\Omega}_{\varphi}\right). \tag{2.1}$$

Умножим это уравнение на произвольную функцию $\alpha = \alpha\,(r)$, зависящую только от радиальной координаты:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\,(\alpha\Omega_\varphi)}{\partial t} + V_r\left(\frac{\partial\,(\alpha\Omega_\varphi)}{\partial r} - \alpha'\Omega_\varphi - \alpha\frac{\Omega_\varphi}{r}\right) + V_z\frac{\partial\,(\alpha\Omega_\varphi)}{\partial z} = \\ = \alpha\frac{1}{4\pi^2 r^3}\frac{\partial}{\partial z}\gamma^2 - \nu\alpha\,(\mathbf{e}_\varphi, \mathbf{rot\,rot}\,\boldsymbol{\Omega}_\varphi),\end{gathered} \tag{2.2}$$

где $\alpha' = \alpha'\,(r) = \dfrac{d}{dr}\alpha\,(r)\,.$

Теперь исключим $\boldsymbol{\Omega}_{rz}$ и $\mathbf{V}_\varphi$ из уравнения (1.3). Умножим это уравнение скалярно на вектор $2\pi r\mathbf{e}_\varphi$:

$$\frac{\partial\,(2\pi r V_\varphi)}{\partial t} + (2\pi r\mathbf{e}_\varphi, \boldsymbol{\Omega}_{rz}\times(\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z)) = -\nu\,(2\pi r\mathbf{e}_\varphi,\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\Omega}_{rz})\,. \tag{2.3}$$

Преобразуем второе слагаемое левой части (2.3), используя свойство цикличности смешанного произведения векторов и выражение для $\boldsymbol{\Omega}_{rz}$ в цилиндрической системе координат:

$$\begin{gathered}(2\pi r\mathbf{e}_\varphi, \boldsymbol{\Omega}_{rz}\times(\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z)) = (\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z, 2\pi r\mathbf{e}_\varphi\times\boldsymbol{\Omega}_{rz}) = \\ = \left(\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z, 2\pi r\mathbf{e}_\varphi\times\left(-\frac{\partial}{\partial z}V_\varphi\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\,(rV_\varphi)}{\partial r}\mathbf{e}_z\right)\right) = \\ = (\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z, \nabla)\,(2\pi r V_\varphi).\end{gathered}$$

Правую часть (2.3) запишем, используя выражение для $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\Omega}_{rz}$ в цилиндрической системе координат:

$$\begin{gathered}-2\pi r\nu\,(\mathbf{e}_\varphi, \mathbf{rot}\,\boldsymbol{\Omega}_{rz}) = -2\pi r\nu\left(-\frac{\partial^2}{\partial z^2}V_\varphi - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\,(rV_\varphi)\right)\right) = \\ = \nu\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}\,(2\pi r V_\varphi) + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\,(2\pi r V_\varphi) - \frac{1}{r}\frac{\partial\,(2\pi r V_\varphi)}{\partial r}\right).\end{gathered}$$

Поэтому уравнение (2.3) может быть записано в виде:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\,(2\pi r V_\varphi)}{\partial t} + (\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z, \nabla)\,(2\pi r V_\varphi) = \\ = \nu\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}\,(2\pi r V_\varphi) - \frac{1}{r}\frac{\partial\,(2\pi r V_\varphi)}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,(2\pi r V_\varphi)\right),\end{gathered}$$

или, если использовать обозначение $\gamma = 2\pi r V_\varphi$, в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\gamma + \left(V_r + \frac{\nu}{r}\right)\frac{\partial\gamma}{\partial r} + V_z\frac{\partial\gamma}{\partial z} = \nu\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}\gamma + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\gamma\right). \tag{2.4}$$

Последнее уравнение является следствием уравнений (1.2) и (1.3) и будет использовано ниже.

§ 3. Лагранжев подход к эволюции закрученных течений

Закрученные течения разобьем на два типа. *Первый тип — это течения со слоистой закруткой:* $\dfrac{\partial\gamma}{\partial z} \equiv 0$. *Второй тип — остальные течения, т. е. течения, в которых* $\dfrac{\partial\gamma}{\partial z}$ *может принимать нулевое значение в неизолированных точках, но не может принимать* *нулевое значение в какой-нибудь открытой окрестности. Течения второго типа будем называть существенно закрученными течениями.*

Заметим, что в существенно закрученном течении не может быть открытой окрестности, в которой $\mathbf{\Omega}_\varphi \equiv \mathbf{0}$. Действительно, в такой окрестности уравнение (2.1) вырождается в уравнение $0 = \mathbf{e}_r \times \nabla\gamma^2$, противоречащее определению существенно закрученного течения.

В работе [11] показано, что скорость $\mathbf{U}_{\mathbf{\Omega}_{rz}}$ является скоростью переноса величины γ, т. е.

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t} + \left(\mathbf{U}_{\mathbf{\Omega}_{rz}}, \nabla\right)\gamma = 0. \tag{3.1}$$

Это обстоятельство чрезвычайно удобно для вихревых методов, поскольку освобождает от необходимости использовать формулу Био–Савара для восстановления поля окружной скорости.

В цилиндрических координатах радиально-осевая составляющая завихренности выражается через окружную циркуляцию скорости формулой

$$\mathbf{\Omega}_{rz} = -\frac{1}{2\pi r}\mathbf{e}_\varphi \times \nabla\gamma. \tag{3.2}$$

В частности, это означает ортогональность векторов $\mathbf{\Omega}_{rz}$ и $\nabla\gamma$. Поэтому из уравнения (3.1) получим

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t} + \left(\mathbf{U}_{\mathbf{\Omega}_{rz}} + \lambda\mathbf{\Omega}_{rz}, \nabla\right)\gamma = 0,$$

где $\lambda = \lambda\left(t, r, \varphi, z\right)$ — произвольная функция. Т. е. любая из скоростей вида $\mathbf{U}_{\mathbf{\Omega}_{rz}} + \lambda\mathbf{\Omega}_{rz}$ является скоростью переноса окружной циркуляции. Воспользуемся этим для получения скорости переноса величины $(\alpha\mathbf{\Omega}_\varphi)$. Выразим $(\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z)$ из (1.4) и подставим в (2.2):

$$\begin{gathered}\frac{\partial\left(\alpha\mathbf{\Omega}_\varphi\right)}{\partial t} + \left(\mathbf{U}_{\mathbf{\Omega}_{rz}} + \nu\frac{\mathbf{\Omega}_{rz} \times \mathbf{rot}\,\mathbf{\Omega}_{rz}}{\Omega_{rz}^2}, \nabla\right)\left(\alpha\mathbf{\Omega}_\varphi\right) - \\ - \left(\alpha'\mathbf{\Omega}_\varphi + \alpha\frac{\mathbf{\Omega}_\varphi}{r}\right)\left(\mathbf{e}_r, \mathbf{U}_{\mathbf{\Omega}_{rz}} + \nu\frac{\mathbf{\Omega}_{rz} \times \mathbf{rot}\,\mathbf{\Omega}_{rz}}{\Omega_{rz}^2}\right) = \\ = -\alpha\frac{\mathbf{e}_r \times \nabla\gamma^2}{4\pi^2 r^3} - \nu\alpha\,\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{\Omega}_\varphi.\end{gathered}$$

Прибавим к левой и правой частям вектор $\lambda\left(\mathbf{\Omega}_{rz}, \nabla\right)\left(\alpha\mathbf{\Omega}_\varphi\right)$ и представим уравнение следующим образом:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\left(\alpha\mathbf{\Omega}_\varphi\right)}{\partial t} + \left(\mathbf{U}_{\mathbf{\Omega}_{rz}} + \lambda\mathbf{\Omega}_{rz}, \nabla\right)\left(\alpha\mathbf{\Omega}_\varphi\right) = \lambda\left(\mathbf{\Omega}_{rz}, \nabla\right)\left(\alpha\mathbf{\Omega}_\varphi\right) + \\ + \left(\alpha'\mathbf{\Omega}_\varphi + \alpha\frac{\mathbf{\Omega}_\varphi}{r}\right)\left(\mathbf{e}_r, \mathbf{U}_{\mathbf{\Omega}_{rz}} + \nu\frac{\mathbf{\Omega}_{rz} \times \mathbf{rot}\,\mathbf{\Omega}_{rz}}{\Omega_{rz}^2}\right) - \\ - \left(\nu\frac{\mathbf{\Omega}_{rz} \times \mathbf{rot}\,\mathbf{\Omega}_{rz}}{\Omega_{rz}^2}, \nabla\right)\left(\alpha\mathbf{\Omega}_\varphi\right) - \alpha\frac{\mathbf{e}_r \times \nabla\gamma^2}{4\pi^2 r^3} - \nu\alpha\,\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{\Omega}_\varphi.\end{gathered} \tag{3.3}$$

Поскольку все слагаемые этого векторного уравнения имеют только одну φ-компоненту, в случае $\left(\mathbf{\Omega}_{rz}, \nabla\right)\left(\alpha\mathbf{\Omega}_\varphi\right) \neq 0$ можно так подобрать λ, что правая часть станет равна нулю и уравнение (3.3) превратится в уравнение переноса:

$$\frac{\partial\left(\alpha\mathbf{\Omega}_\varphi\right)}{\partial t} + \left(\mathbf{U}_{\mathbf{\Omega}_{rz}} + \lambda\mathbf{\Omega}_{rz}, \nabla\right)\left(\alpha\mathbf{\Omega}_\varphi\right) = 0. \tag{3.4}$$

В существенно закрученных течениях условия $(\mathbf{\Omega}_{rz},\nabla)\,\mathbf{\Omega}_\varphi \neq 0$ и $(\mathbf{\Omega}_{rz},\nabla)\,(r\mathbf{\Omega}_\varphi) \neq 0$ не могут нарушаться одновременно в открытой окрестности. Действительно, из одновременного выполнения в открытой окрестности равенств $(\mathbf{\Omega}_{rz},\nabla)\,\mathbf{\Omega}_\phi = 0$ и $(\mathbf{\Omega}_{rz},\nabla)\,(r\mathbf{\Omega}_\phi) = 0$ последовало бы, что $\mathbf{\Omega}_\phi\,(\mathbf{\Omega}_{rz},\nabla)\,r = 0$, или (с учетом тождества $\nabla r \equiv \mathbf{e}_r$) что $\mathbf{\Omega}_\phi\,(\mathbf{\Omega}_{rz},\mathbf{e}_r) = 0$. Но выполнение последнего равенства невозможно в открытой окрестности, поскольку из условия $\dfrac{\partial\gamma}{\partial z} \neq 0$ и из формулы (3.2) следует, что вектор $\mathbf{\Omega}_{rz}$ имеет ненулевую r-компоненту (то есть $(\mathbf{\Omega}_{rz},\mathbf{e}_r) \neq 0$), и как замечено в начале данного параграфа $\mathbf{\Omega}_\phi \neq 0$. Поэтому для существенно закрученных осесимметричных течений несжимаемой жидкости можно предложить следующий лагранжев подход к эволюции завихренности.

В случае $(\mathbf{\Omega}_{rz},\nabla)\,\mathbf{\Omega}_\varphi \neq \mathbf{0}$ значение λ находится из уравнения

$$\begin{gathered}\lambda\,(\mathbf{\Omega}_{rz},\nabla)\,\mathbf{\Omega}_\varphi + \frac{\mathbf{\Omega}_\varphi}{r}\left(\mathbf{e}_r, \mathbf{U}_{\mathbf{\Omega}_{rz}} + \nu\frac{\mathbf{\Omega}_{rz}\times\mathbf{rot}\,\mathbf{\Omega}_{rz}}{\Omega_{rz}^2}\right) - \\ - \left(\nu\frac{\mathbf{\Omega}_{rz}\times\mathbf{rot}\,\mathbf{\Omega}_{rz}}{\Omega_{rz}^2},\nabla\right)\mathbf{\Omega}_\varphi - \frac{\mathbf{e}_r\times\nabla\gamma^2}{4\pi^2 r^3} - \nu\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{\Omega}_\varphi = 0,\end{gathered} \tag{3.5}$$

и скорость

$$\mathbf{U}_{01} = \mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z - \nu\frac{\mathbf{\Omega}_{rz}\times\mathbf{rot}\,\mathbf{\Omega}_{rz}}{\Omega_{rz}^2} + \lambda\mathbf{\Omega}_{rz} \tag{3.6}$$

является одновременно

- *скоростью переноса векторных трубок поля $\mathbf{\Omega}_{rz}$, причем интенсивность трубок сохраняется при таком переносе;*
- *скоростью переноса величины окружной циркуляции $\gamma = 2\pi r V_\varphi$;*
- *скоростью переноса величины Ω_φ.*

В случае $(\mathbf{\Omega}_{rz},\nabla)\left(\dfrac{\mathbf{\Omega}_\varphi}{r}\right) \neq 0$ значение λ находится из уравнения

$$\begin{gathered}\lambda\,(\mathbf{\Omega}_{rz},\nabla)\left(\frac{\mathbf{\Omega}_\varphi}{r}\right) + \left(3\nu\frac{\mathbf{e}_r}{r} - \nu\frac{\mathbf{\Omega}_{rz}\times\mathbf{rot}\,\mathbf{\Omega}_{rz}}{\Omega_{rz}^2},\nabla\right)\mathbf{\Omega}_\varphi - \\ - \frac{\mathbf{e}_r\times\nabla\gamma^2}{4\pi^2 r^4} - \nu\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\left(\frac{\mathbf{\Omega}_\varphi}{r}\right) = 0,\end{gathered}$$

и скорость

$$\mathbf{U}_{02} = \mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z - \nu\frac{\mathbf{\Omega}_{rz}\times\mathbf{rot}\,\mathbf{\Omega}_{rz}}{\Omega_{rz}^2} + \lambda\mathbf{\Omega}_{rz} \tag{3.7}$$

является одновременно

- *скоростью переноса векторных трубок поля $\mathbf{\Omega}_{rz}$, причем интенсивность трубок сохраняется при таком переносе;*
- *скоростью переноса величины окружной циркуляции $\gamma = 2\pi r V_\varphi$;*
- *скоростью переноса величины $\dfrac{\Omega_\varphi}{r}$.*

Точки, в которых одновременно нарушены условия $(\mathbf{\Omega}_{rz}, \nabla)\, \mathbf{\Omega}_\varphi \neq \mathbf{0}$ *и* $(\mathbf{\Omega}_{rz}, \nabla) \left(\dfrac{\mathbf{\Omega}_\varphi}{r}\right) \neq$ $\neq 0$, *не являются изолированными, и поэтому хотя бы одна из скоростей* $\mathbf{U}_{01}$ *или* $\mathbf{U}_{02}$ *может быть вычислена непрерывным продолжением.*

Поэтому при рассмотрении эволюции завихренности существенно закрученных осесимметричных течений вязкой несжимаемой жидкости представляется удобным рассмотрение движения воображаемой среды, движущейся со скоростью $\mathbf{U}_{01}$ в области, где $(\mathbf{\Omega}_{rz}, \nabla)\, \mathbf{\Omega}_\varphi \neq 0$, или со скоростью $\mathbf{U}_{02}$ в области, где $(\mathbf{\Omega}_{rz}, \nabla) \left(\dfrac{\mathbf{\Omega}_\varphi}{r}\right) \neq 0$. Эти скорости имеют простой кинематический смысл: поскольку они переносят поверхности уровня окружной циркуляции, то они переносят также и поверхности вращения вихревых линий (полной) завихренности $\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega}_{rz} + \mathbf{\Omega}_\varphi$. Последнее следует из уравнения (3.2). Если в течении есть (открытая) область, где $\dfrac{\partial \gamma}{\partial z} \equiv 0$, то может оказаться, что в такой области $(\mathbf{\Omega}_{rz}, \nabla)\, \mathbf{\Omega}_\varphi = 0$ и $(\mathbf{\Omega}_{rz}, \nabla)\, (r\mathbf{\Omega}_\varphi) = 0$, и применение предложенного выше подхода окажется невозможным. В связи с этим ограничимся следующим замечанием. Для таких областей течения можно применять известный метод вязких вихревых доменов для осесимметричных течений без закрутки [7, 9]. Действительно, равенство $\dfrac{\partial \gamma}{\partial z} \equiv 0$ равносильно тому, что $\gamma = \gamma(r)$, тогда

$$\mathbf{\Omega}_{rz} \times \mathbf{V}_\varphi = V_\varphi \left(-\frac{\partial}{\partial z} V_\varphi \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\, (r V_\varphi)}{\partial r} \mathbf{e}_z \right) \times \mathbf{e}_\varphi = \\ = -\frac{1}{8\pi^2 r^2} \frac{\partial \gamma^2}{\partial r} \mathbf{e}_r = \nabla f(r),$$

где $f\,(r)$ — некоторая функция, зависящая только от r. Поэтому уравнение (1.2) можно представить в виде

$$\frac{\partial\, (\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z)}{\partial t} + \mathbf{\Omega}_\varphi \times (\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z) = -\nabla \left[\frac{p}{\rho} + \frac{\mathbf{V}^2}{2} + \tilde{\Pi} \right] - \nu \operatorname{rot} \mathbf{\Omega}_\varphi,$$

где $\tilde{\Pi} = \Pi + f$. Это уравнение эволюции завихренности в потенциальном поле массовых сил для незакрученных течений, для которых лагранжев взгляд на эволюцию завихренности известен: метод вязких вихревых доменов. Поэтому в (открытых) областях со слоистой закруткой ($\dfrac{\partial \gamma}{\partial z} \equiv 0$) можно использовать этот метод для нахождения полей Ω_φ и радиально-осевой скорости $\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z$. Что касается окружной циркуляции γ, то в областях со слоистой закруткой уравнение (2.4) принимает вид $\dfrac{\partial}{\partial t}\gamma + \left(V_r + \dfrac{\nu}{r}\right) \dfrac{\partial \gamma}{\partial r} = \nu \dfrac{\partial^2}{\partial r^2}\gamma$, и решается численно как одномерное уравнение теплопроводности. Более подробное описание подхода для областей со слоистой закруткой выходит за рамки настоящей работы.

§ 4. Восстановление поля скорости

Векторные произведения правой и левой частей уравнения (1.3) на вектор $\nabla\gamma$ равны друг другу:

$$\left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial t}\right) \nabla\gamma \times \mathbf{e}_\varphi + \nabla\gamma \times \mathbf{\Omega}_{rz} \times (\mathbf{V}_r + \mathbf{V_z}) = -\nu \nabla\gamma \times \mathbf{rot}\, \mathbf{\Omega}_{rz}.$$

Первое слагаемое преобразуем с помощью формулы (3.2), а двойное векторное произведение раскроем, учитывая, что $(\mathbf{\Omega}_{rz}, \nabla\gamma) = 0$. Получим

$$\left(\frac{\partial \gamma}{\partial t}\right) \mathbf{\Omega}_{rz} + \mathbf{\Omega}_{rz}\, (\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z, \nabla\gamma) = -\nu \nabla\gamma \times \mathbf{rot}\, \mathbf{\Omega}_{rz},$$

или, после скалярного умножения на $\dfrac{\boldsymbol{\Omega}_{rz}}{\Omega_{rz}^2}$,

$$V_r \frac{\partial\gamma}{\partial r} + V_z \frac{\partial\gamma}{\partial z} = -\frac{\partial\gamma}{\partial t} - \nu \frac{(\boldsymbol{\Omega}_{rz}, \nabla\gamma \times \mathbf{rot}\,\boldsymbol{\Omega}_{rz})}{\Omega_{rz}^2}.$$

Упростим последнее слагаемое, используя формулу (3.2):

$$V_r \frac{\partial\gamma}{\partial r} + V_z \frac{\partial\gamma}{\partial z} = -\frac{\partial\gamma}{\partial t} - 2\pi r\nu\,(\mathbf{e}_\varphi, \mathbf{rot}\,\boldsymbol{\Omega}_{rz}). \tag{4.1}$$

Уравнение (2.1) представим в аналогичном виде:

$$V_r \left(\frac{\partial\Omega_\varphi}{\partial r} - \frac{\Omega_\varphi}{r}\right) + V_z \frac{\partial\Omega_\varphi}{\partial z} = \frac{1}{4\pi^2 r^3}\frac{\partial\gamma^2}{\partial z} - \frac{\partial\boldsymbol{\Omega}_\varphi}{\partial t} - \nu\,(\mathbf{e}_\varphi, \mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\Omega}_\varphi). \tag{4.2}$$

Система уравнений (4.1) и (4.2) в случае $\nabla\gamma \times \left(\nabla\Omega_\varphi - \dfrac{\Omega_\varphi}{r}\mathbf{e}_r\right) \neq 0$ позволяет вычислить радиально-осевую скорость через другие величины, входящие в эти уравнения. Выписывать соответствующие громоздкие выражения представляется излишним.

В связи с полученным результатом представляет интерес рассмотреть область существенно закрученного течения, в которой выполняется равенство

$$\nabla\gamma \times \left(\nabla\Omega_\varphi - \frac{\Omega_\varphi}{r}\mathbf{e}_r\right) = 0. \tag{4.3}$$

Это равносильно равенству $\nabla\gamma \times \nabla\left(\dfrac{\Omega_\varphi}{r}\right) = 0$, которое, в свою очередь, означает, что $\Omega_\varphi = rg\,(t,\gamma)$, где $g\,(t,\gamma)$ — некоторая функция, зависящая только от времени и от окружной циркуляции скорости γ. Как замечено выше, не существует области, где эта функция обращается тождественно в ноль.

Рассмотрим окрестность, в которой $g\,(t,\gamma) \neq 0$ и $\dfrac{\partial\gamma}{\partial z} \neq 0$. Умножим скалярно равенство (4.3) на вектор $\mathbf{e}_\varphi$ и, учитывая свойство цикличности смешанного произведения векторов, воспользуемся формулой (3.2):

$$0 = \left(\mathbf{e}_\varphi, \nabla\gamma \times \left(\nabla\Omega_\varphi - \frac{\Omega_\varphi}{r}\mathbf{e}_r\right)\right) = \left(\nabla\Omega_\varphi - \frac{\Omega_\varphi}{r}\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi \times \nabla\gamma\right) = \\ = (r\nabla\Omega_\varphi - \Omega_\varphi\mathbf{e}_r, \boldsymbol{\Omega}_{rz}),$$

или

$$(r\boldsymbol{\Omega}_{rz}, \nabla\Omega_\varphi) = \Omega_\varphi\,(\mathbf{e}_r, \boldsymbol{\Omega}_{rz}).$$

Правая часть не равна нулю, поскольку $\Omega_\varphi = rg\,(t,\gamma) \neq 0$ и $\dfrac{\partial\gamma}{\partial z} \neq 0$. Поэтому λ определяется из уравнения (3.5). А скорость $\mathbf{U}_0$, вычисленная по формуле (3.6), является скоростью переноса величины $\Omega_\varphi = rg\,(t,\gamma)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\,(rg\,(t,\gamma)) + (\mathbf{U}_0, \nabla)\,(rg\,(t,\gamma)) = 0,$$

или

$$rg'_\gamma\,(t,\gamma)\left(\frac{\partial}{\partial}\gamma + (\mathbf{U}_0, \nabla)\,\gamma\right) + g\,(t,\gamma)\left(\frac{\partial}{\partial t}r + (\mathbf{U}_0, \nabla)\,r\right) = 0.$$

Скорость $\mathbf{U}_0$ является скоростью переноса γ, поэтому первое слагаемое равно нулю. Следовательно, $\left(\dfrac{\partial}{\partial t} r + (\mathbf{U}_0, \nabla)\, r\right) = 0$, что равносильно равенству нулю радиальной компоненты $\mathbf{U}_0$. В силу уравнения (3.6) это значит, что

$$V_r = \nu \frac{(\mathbf{e}_r, \mathbf{\Omega}_{rz} \times \mathbf{rot}\, \mathbf{\Omega}_{rz})}{\Omega_{rz}^2} - \lambda\, (\mathbf{e}_r, \mathbf{\Omega}_{rz}). \tag{4.4}$$

Поскольку $\dfrac{\partial \gamma}{\partial z} \neq 0$, последнее уравнение (4.4) вместе с уравнением (4.1) позволяют вычислить радиально-осевую скорость через другие величины, входящие в эти уравнения.

§ 5. Заключение

Лагранжева точка зрения на эволюцию завихренности в плоскопараллельных и незакрученных осесимметричных течениях вязкой жидкости (вязкий аналог теоремы Гельмгольца о вихрях) позволила применить идею метода дискретных вихрей для расчета таких течений. Однако в таких расчетах приходится использовать интегральную формулу Био–Савара для восстановления поля скорости по полю завихренности. В данной статье показано, что для областей закрученных осесимметричных течений, в которых осевая производная окружной циркуляции $\dfrac{\partial \gamma}{\partial z}$ не может принимать нулевое значение в какой-нибудь открытой окрестности, можно предложить новую лагранжеву точку зрения на эволюцию завихренности и других параметров течения (скорости (3.6) и (3.7)). Использование этой новой точки зрения позволяет обойтись без использования интегральной формулы Био–Савара для восстановления поля скорости. В частности, для восстановления радиально-осевой скорости достаточно решить систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными (уравнения (4.1) и (4.2)). Полученный результат предлагается использовать для распространения метода вязких вихревых доменов на закрученные осесимметричные течения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rosenhead L. The formation of vortices from a surface of discontinuity // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character. 1931. Vol. 134. Issue 823. P. 170–192. https://doi.org/10.1098/rspa.1931.0189
2. Белоцерковский С. М., Ништ М. И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. М.: Наука, 1978.
3. Cottet G.-H., Koumoutsakos P. D. Vortex methods: theory and practice. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. https://doi.org/10.1017/CBO9780511526442
4. Гутников В. А., Лифанов И. К., Сетуха А. В. О моделировании аэродинамики зданий и сооружений методом замкнутых вихревых рамок // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2006. № 4. С. 78–92. https://elibrary.ru/item.asp?id=9282173
5. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Физматгиз, 1963.
6. Голубкин В. Н., Сизых Г. Б. О некоторых общих свойствах плоскопараллельных течений вязкой жидкости // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1987. № 3. С. 176–178. https://elibrary.ru/item.asp?id=23023464
7. Брутян М. А., Голубкин В. Н., Крапивский П. Л. Об уравнении Бернулли для осесимметричных течений вязкой жидкости // Ученые записки ЦАГИ. 1988. Т. 19. № 2. С. 98–100. https://elibrary.ru/item.asp?id=15513524
8. Ogami Y., Akamatsu T. Viscous flow simulation using the discrete vortex model — the diffusion velocity method // Computers and Fluids. 1991. Vol. 19. Issues 3–4. P. 433–441. https://doi.org/10.1016/0045-7930(91)90068-S

9. Дынникова Г. Я. Лагранжев подход к решению нестационарных уравнений Навье–Стокса // ДАН. 2004. Т. 399. № 1. С. 42–46. https://elibrary.ru/item.asp?id=17354344
10. Марков В. В., Сизых Г. Б. Эволюция завихренности в жидкости и газе // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2015. № 2. С. 8–15. https://elibrary.ru/item.asp?id=23236645
11. Сизых Г. Б. Эволюция завихренности в закрученных осесимметричных течениях вязкой несжимаемой жидкости // Ученые записки ЦАГИ. 2015. Т. 46. № 3. С. 14–20. https://elibrary.ru/item.asp?id=23463932
12. Голубкин В. Н., Марков В. В., Сизых Г. Б. Интегральный инвариант уравнений движения вязкого газа // Прикладная математика и механика. 2015. Т. 79. Вып. 6. С. 808–816. https://elibrary.ru/item.asp?id=25474703
13. Сизых Г. Б. Значение энтропии на поверхности несимметричной выпуклой головной части при сверхзвуковом обтекании // Прикладная математика и механика. 2019. Т. 83. № 3. С. 377–383. https://doi.org/10.1134/S0032823519030135
14. Golubkin V. N., Sizykh G. B. On the vorticity behind 3-D detached bow shock wave // Advances in Aerodynamics. 2019. Vol. 1. Issue 1. https://doi.org/10.1186/s42774-019-0016-5
15. Sizykh G. B. Closed vortex lines in fluid and gas // Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta. Ser. Fiziko-Matematicheskie Nauki. 2019. Vol. 23. No. 3. P. 407–416. https://doi.org/10.14498/vsgtu1723
16. Голубкин В. Н., Сизых Г. Б. Обобщение инварианта Крокко для 3D течений газа за отошедшим головным скачком // Известия высших учебных заведений. Математика. 2019. № 12. С. 52–56. https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-12-52-56
17. Миронюк И. Ю., Усов Л. А. Инвариант линии торможения при стационарном обтекании тела завихренным потоком идеальной несжимаемой жидкости // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 24. № 4. С. 780–789. https://doi.org/10.14498/vsgtu1815
18. Миронюк И. Ю., Усов Л. А. Точки торможения на вихревых линиях в течениях идеального газа // Труды МФТИ. 2020. Т. 12. № 4 (48). С. 171–176. https://elibrary.ru/item.asp?id=44950398

Поступила в редакцию 26.05.2021

Просвиряков Евгений Юрьевич, д. ф.-м. н., главный научный сотрудник, сектор нелинейной вихревой гидродинамики, Институт машиноведения УрО РАН, 620049, Россия, г. Екатеринбург, ул. Комсомольская, 34.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2349-7801
E-mail: evgen_pros@mail.ru

Цитирование: Е. Ю. Просвиряков. Восстановление радиально-осевой скорости в закрученных осесимметричных течениях вязкой несжимаемой жидкости при лагранжевом рассмотрении эволюции завихренности // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31. Вып. 3. С. 505–516.

MECHANICS 2021. Vol. 31. Issue 3. Pp. 505–516.

E. Yu. Prosviryakov

Recovery of radial-axial velocity in axisymmetric swirling flows of a viscous incompressible fluid in the Lagrangian consideration of vorticity evolution

Keywords: Navier–Stokes equations, swirling flow, the discrete vortex method, the Helmholtz vortex theorem, method of viscous vortex domains.

MSC2020: 35N10, 76D05, 76D17, 76U05

DOI: 10.35634/vm210311

Swirling laminar axisymmetric flows of viscous incompressible fluids in a potential field of body forces are considered. The study of flows is carried out in a cylindrical coordinate system. In the flows, the regions in which the axial derivative of the circumferential velocity cannot take on zero value in some open neighborhood (essentially swirling flows) and the regions in which this derivative is equal to zero (the region with layered swirl) are considered separately. It is shown that a well-known method (the method of viscous vortex domains) developed for non-swirling flows can be used for regions with layered swirling. For substantially swirling flows, a formula is obtained for calculating the radial-axial velocity of an imaginary fluid through the circumferential vorticity component, the circumferential circulation of a real fluid, and the partial derivatives of these functions. The particles of this imaginary fluid "transfer" vortex tubes of the radial-axial vorticity component while maintaining the intensity of these tubes, and also "transfer" the circumferential circulation and the product of the circular vorticity component by some function of the distance to the axis of symmetry. A non-integral method for reconstructing the velocity field from the vorticity field is proposed. It is reduced to solving a system of linear algebraic equations in two variables. The obtained result is proposed to be used to extend the method of viscous vortex domains to swirling axisymmetric flows.

REFERENCES

1. Rosenhead L. The formation of vortices from a surface of discontinuity, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 1931, vol. 134, issue 823, pp. 170–192. https://doi.org/10.1098/rspa.1931.0189
2. Belotserkovskii S. M., Nisht M. I. *Otryvnoe i bezotryvnoe obtekanie tonkikh kryl'ev ideal'noi zhidkost'yu* (Separated and unseparated ideal liquid flow around thin wings), Moscow: Nauka, 1978.
3. Cottet G.-H., Koumoutsakos P. D. *Vortex methods: theory and practice*, Cambridge: Cambridge University Press, 2000. https://doi.org/10.1017/CBO9780511526442
4. Gutnikov V. A., Lifanov I. K., Setukha A. V. On modelling the aerodynamics of buildings and structures using the closed vortex method, *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Mekhanika Zhikosti i Gaza*, 2006, no. 4, pp 78–92. https://elibrary.ru/item.asp?id=9282173
5. Kochin N. E., Kibel' I. A., Roze N. V. *Teoreticheskaya gidromehanika. Chast' 1* (Theoretical fluid mechanics. Part 1), Moscow: Fizmatgiz, 1963.
6. Golubkin V. N., Sizykh G. B. On some general properties of plane-parallel viscous fluid flows, *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Mekhanika Zhikosti i Gaza*, 1987, no. 3, pp. 176–178. https://elibrary.ru/item.asp?id=23023464
7. Brutyan M. A., Golubkin V. N., Krapivskii P. L. On the Bernoulli equation for axisymmetric viscous fluid flows, *Uchenie zapiski Tsentral'nogo Aerogidrodinamicheskogo Instituta*, 1988, vol. 19, no. 2, pp. 98–100. https://elibrary.ru/item.asp?id=15513524
8. Ogami Y., Akamatsu T. Viscous flow simulation using the discrete vortex model — the diffusion velocity method, *Computers and Fluids*, 1991, vol. 19, issues 3–4, pp. 433–441. https://doi.org/10.1016/0045-7930(91)90068-S
9. Dynnikova G. Ya. Lagrange method for Navier–Stokes equations solving, *Doklady Akademii Nauk*, 2004, vol. 399, no. 1, pp. 42–46. https://elibrary.ru/item.asp?id=17354344

10. Markov V. V., Sizykh G. B. Vorticity evolution in liquids and gases, *Fluid Dynamics*, 2015, vol. 50, no. 2, pp. 186–192. https://doi.org/10.1134/S0015462815020027
11. Sizykh G. B. Evolution of vorticity in swirling axisymmetric flows of a viscous incompressible fluid, *TsAGI Science Journal*, 2015, vol. 46, no. 3, pp. 209–217. https://doi.org/10.1615/tsagiscij.2015014086
12. Golubkin V. N., Markov V. V., Sizykh G. B. The integral invariant of the equations of motion of a viscous gas, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, vol. 79, no. 6, pp. 566–571. https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2016.04.002
13. Sizykh G. B. Entropy value on the surface of a non-symmetric convex bow part of a body in the supersonic flow, *Fluid Dynamics*, 2019, vol. 54, issue 7, pp. 907–911. https://doi.org/10.1134/S0015462819070139
14. Golubkin V. N., Sizykh G. B. On the vorticity behind 3-D detached bow shock wave, *Advances in Aerodynamics*, 2019, vol. 1, issue 1. https://doi.org/10.1186/s42774-019-0016-5
15. Sizykh G. B. Closed vortex lines in fluid and gas, *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta. Ser. Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2019, vol. 23, no. 3, pp. 407–416. https://doi.org/10.14498/vsgtu1723
16. Golubkin V. N., Sizykh G. B. Generalization of the Crocco invariant for 3D gas flows behind detached bow shock wave, *Russian Mathematics*, 2019, vol. 63, issue 12, pp. 45–48. https://doi.org/10.3103/S1066369X19120053
17. Mironyuk I. Yu., Usov L. A. The invariant of stagnation streamline for a stationary vortex flow of an ideal incompressible fluid around a body, *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta. Ser. Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2020, vol. 24, no. 4, pp. 780–789 (in Russian). https://doi.org/10.14498/vsgtu1815
18. Mironyuk I. Yu., Usov L. A. Stagnation points on vortex lines in flows of an ideal gas, *Trydy Moskovskogo Fiziko-Tekhnicheskogo Instituta*, 2020, vol. 12, no. 4 (48), pp. 171–176 (in Russian). https://elibrary.ru/item.asp?id=44950398

Received 26.05.2021

Evgenii Yur'evich Prosviryakov, Doctor of Physics and Mathematics, Principal Researcher, Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. Komsomol'skaya, 34, Yekaterinburg, 620049, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2349-7801
E-mail: evgen_pros@mail.ru

Citation: E. Yu. Prosviryakov. Recovery of radial-axial velocity in axisymmetric swirling flows of a viscous incompressible fluid in the Lagrangian consideration of vorticity evolution, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2021, vol. 31, issue 3, pp. 505–516.