

УДК 517.977

© А. А. Успенский, П. Д. Лебедев

О СТРУКТУРЕ СИНГУЛЯРНОГО МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЯ В ОДНОМ КЛАССЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ

Рассмотрен класс задач управления по быстродействию в трехмерном пространстве с шаровой вектограммой скоростей. В качестве целевого множества выбрана гладкая регулярная кривая Γ . Выделены псевдовершины — характеристические точки на Γ , отвечающие за возникновение сингулярности у функции оптимального результата. Выявлены характерные особенности структуры сингулярного множества, относящегося к семейству биссектрис. Найдено аналитическое представление для крайних точек биссектрисы, соответствующих фиксированной псевдовершине. В качестве иллюстрации эффективности развиваемых методов решения негладких динамических задач приведен пример численно-аналитического построения разрешающих конструкций задачи управления по быстродействию.

Ключевые слова: задача быстродействия, рассеивающая поверхность, биссектриса, псевдовершина, крайняя точка, кривизна, сингулярное множество, репер Френе.

DOI: [10.35634/vm210309](https://doi.org/10.35634/vm210309)**§ 1. Постановка задачи**

Работа посвящена изучению задачи быстродействия для системы в трехмерном пространстве, состоящей из одной точки, на скорость которой наложено ограничение

$$\dot{\mathbf{x}} \in U(\mathbf{0}, 1) \subset \mathbb{R}^3, \quad (1.1)$$

где $U(\mathbf{c}, r)$ представляет собой шар в \mathbb{R}^3 с центром в точке \mathbf{c} радиуса $r > 0$; $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\tau) \triangleq (x(\tau), y(\tau), z(\tau))$; $\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{d\tau}$; τ — скаляр, интерпретируемый как время. Для произвольной точки \mathbf{x} оптимальной траекторией служит отрезок, соединяющий ее с ближайшей в евклидовой метрике точкой целевого замкнутого множества $M \subset \mathbb{R}^3$. Функция оптимального результата $u(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}, M) \triangleq \min_{\mathbf{m} \in M} \|\mathbf{x} - \mathbf{m}\|$ [1].

С рассматриваемой задачей быстродействия связаны дифференциальные уравнения Гамильтона–Якоби

$$\min_{(v_1, v_2, v_3) \in U(\mathbf{0}, 1)} \left(v_1 \frac{\partial u}{\partial x} + v_2 \frac{\partial u}{\partial y} + v_3 \frac{\partial u}{\partial z} \right) + 1 = 0 \quad (1.2)$$

и эйконала

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 = 1 \quad (1.3)$$

с краевым условием

$$u|_{\partial M} = 0, \quad (1.4)$$

 ∂M — граница M .

Сужение функции оптимального результата $u = u(x, y, z)$ на замыкании $\text{cl}(\mathbb{R}^3 \setminus M)$ множества $\mathbb{R}^3 \setminus M$ совпадает с обобщенным (минимаксным) решением задачи Дирихле [2] для уравнения (1.2) с краевым условием (1.4). Подробнее доказательство этого результата для

произвольного конечномерного евклидова пространства приведено в [3]. Фундаментальное (обобщенное) решение $u_k(\mathbf{x})$ задачи Дирихле для уравнения (1.3) с краевым условием (1.4) (введенное С. Н. Кружковым [4]) равно на $\mathbb{R}^3 \setminus M$ функции $u(x, y, z)$ по модулю, но имеет противоположный знак: $u_k(x, y) = -\rho((x, y, z), M)$. Заметим, что уравнение (1.3) описывает распространение света в однородной среде при условии, что скорость нормирована и приведена к 1. Фронт распространения волны, соответствующий моменту времени $\tau > 0$, совпадают с поверхностью уровня $\Phi(\tau) \triangleq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3: u(\mathbf{x}) = \tau\}$ функции оптимального результата $u(\mathbf{x})$. На всем пространстве \mathbb{R}^3 функция $u(\mathbf{x})$ удовлетворяет условию Липшица с константой $L = 1$.

§ 2. Основные обозначения и определения

Пусть $M \subset \mathbb{R}^3$ — замкнутое множество в \mathbb{R}^3 . Обозначим $\Omega_M(\mathbf{x})$ — множество ближайших точек к \mathbf{x} на множестве M .

Определение 1 (см. [5]). Множество

$$L(M) \triangleq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3: \text{card } \Omega_M(\mathbf{x}) > 1\} \quad (2.1)$$

называется *биссектрисой замкнутого непустого множества M* .

Здесь $\text{card } \Omega_M(\mathbf{x})$ — мощность множества $\Omega_M(\mathbf{x})$.

Биссектриса является частным случаем множества симметрии, на котором волновые фронты [6] теряют гладкость. Подобные многообразия в англоязычной литературе называются «conflict set» [7], «symmetry set» и «medial axe» [8]. Их геометрические свойства именно в трехмерном пространстве изучены, например, в [9]. Топологические свойства множеств негладкости волновых фронтов в евклидовых пространствах небольшой размерности (от 2 до 6) исследованы В. Д. Седых в работах [10, 11].

С позиций теории управления $L(M)$ классифицируется как рассеивающая поверхность [12, пример 6.10.1] в задаче быстрого действия с динамикой (1.1). Из каждой ее точки выходит как минимум две оптимальные траектории, направленные в разные стороны от поверхности, — отрезки $[\mathbf{x}, \mathbf{y}_i]$, $i = \overline{1, k}$, где $\mathbf{y}_i \in \Omega_M(\mathbf{x})$, $k = \text{card } \Omega_M(\mathbf{x})$. Этим обуславливается, что функция оптимального результата $u(\mathbf{x})$ является недифференцируемой на множестве $L(M)$. Заметим, что для $u(\mathbf{x})$ как функции евклидова расстояния в точках $\mathbf{x} \in L(M)$ определен супердифференциал $D^+u(\mathbf{x})$, подробнее см. [13, гл. II, § 8]. Значение $D^+u(\mathbf{x})$ используется для доказательства того, что сужение функции на множестве $\mathbb{R}^3 \setminus M$ является обобщенным решением уравнения Гамильтона–Якоби (1.2) в [3].

Определение 2 (см. [14]). Несовпадающие точки $\hat{\mathbf{y}}_i \in M$ и $\bar{\mathbf{y}}_i \in M$ называются *квази-симметричными*, если

$$\exists \mathbf{x} \in L(M): \{\hat{\mathbf{y}}_i, \bar{\mathbf{y}}_i\} \subseteq \Omega_M(\mathbf{x}).$$

Точка \mathbf{x} в этом случае называется *порожденной парой $\hat{\mathbf{y}}_i, \bar{\mathbf{y}}_i$* .

Определение 3 (см. [5]). Точка \mathbf{y}_0 называется *псевдовершиной* множества M , если существует последовательность пар несовпадающих точек $\{(\hat{\mathbf{y}}_i, \bar{\mathbf{y}}_i)\}_{i=1}^\infty \subset M$ и последовательность точек $\mathbf{x}_i \in L(M)$, для которых выполнены условия

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad \{\hat{\mathbf{y}}_i, \bar{\mathbf{y}}_i\} \subseteq \Omega_M(\mathbf{x}_i) \quad (2.2)$$

и

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (\widehat{\mathbf{y}}_i, \overline{\mathbf{y}}_i) = (\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_0). \quad (2.3)$$

Если еще существует предел

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_0, \quad (2.4)$$

то \mathbf{x}_0 называется *крайней точкой биссектрисы, соответствующей псевдовершине* \mathbf{y}_0 .

Замечание 1. Объединение крайних точек биссектрисы образует край поверхности, совпадающей с замыканием $L(M)$. В общем случае рассеивающая поверхность — не замкнутое множество и крайние точки ей не принадлежат, но они определяют ее геометрию.

§ 3. Свойства сингулярного множества множества

Ограничимся рассмотрением случая, когда множество M есть кривая Γ , заданная параметрически

$$\Gamma = \{\mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^3 : t \in \Theta\}. \quad (3.1)$$

Условие 1. Считаем, что вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ трижды дифференцируема на промежутке $\Theta \subseteq \mathbb{R}$, выполняется условие бирегулярности

$$\forall t \in \Theta \quad \mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) \neq \mathbf{0}, \quad (3.2)$$

где \times означает векторное произведение векторов, при этом функция $\mathbf{r}(t)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $L^* > 0$.

Условие (3.2) гарантирует, что при любом $t \in \Theta$ определен репер Френе [15], состоящий из трех единичных векторов:

$$\mathbf{v}_t(t) = \mathbf{r}'(t) / \|\mathbf{r}'(t)\|, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{v}_n(t) = \frac{(\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)) \times \mathbf{r}'(t)}{\|(\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)) \times \mathbf{r}'(t)\|}, \quad (3.4)$$

$$\mathbf{v}_b(t) = \frac{\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)}{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}. \quad (3.5)$$

Согласно принятой в дифференциальной геометрии классификации $\mathbf{v}_t(t)$ называется вектором касательной, вектор $\mathbf{v}_n(t)$ — вектором нормали, а вектор $\mathbf{v}_b(t)$ — вектором би-нормали. Кривая Γ характеризуется двумя инвариантами в точке. Это кривизна

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3} \quad (3.6)$$

и кручение

$$\varkappa(t) = \frac{(\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t), \mathbf{r}'''(t))}{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|^2}. \quad (3.7)$$

Здесь (\cdot, \cdot, \cdot) означает смешанное произведение векторов.

Определение 4. Назовем прямую

$$\Lambda(t) = \{\mathbf{z} = \mathbf{r}(t) + k^{-1}(t)\mathbf{v}_n(t) + \lambda\mathbf{v}_b(t) : \lambda \in (-\infty, \infty)\} \quad (3.8)$$

сопряженной к кривой (3.1) в точке $\mathbf{r}(t)$.

Условие бирегулярности (3.2) гарантирует, что при любом t кривизна определена и отлична от нуля. Значит, определена и сопряженная прямая (3.8). Отметим, что нормальная плоскость в точке $\mathbf{r}(t)$ строится как

$$\Pi(t) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3 : \langle \mathbf{z} - \mathbf{r}(t), \mathbf{r}'(t) \rangle = 0\}, \quad (3.9)$$

при этом часть волнового фронта $\Phi(\tau)$, порожденная точкой $\mathbf{r}(t)$, вложена в окружность

$$\mathcal{O}(t, \tau) = \partial U(\mathbf{r}(t), \tau) \cap \Pi(t), \quad (3.10)$$

где $\tau > 0$.

Рассмотрим последовательность пар несовпадающих чисел $\{\widehat{t}_i, \bar{t}_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \Theta$, последовательность точек $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^{\infty} \subset L(\Gamma)$, число $t_0 \in \Theta$ и точку $\mathbf{x}_0 \in L(\Gamma)$. Считаем, что для них выполнены условия

$$\forall i \in \mathbb{N} \{\mathbf{r}(\widehat{t}_i), \mathbf{r}(\bar{t}_i)\} \subseteq \Omega_{\Gamma}(\mathbf{x}_i), \quad (3.11)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (\widehat{t}_i, \bar{t}_i) = (t_0, t_0), \quad (3.12)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_0. \quad (3.13)$$

Лемма 1. Пусть заданы последовательность пар несовпадающих чисел $\{\widehat{t}_i, \bar{t}_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \Theta$, последовательность точек $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^{\infty} \subset L(\Gamma)$, число $t_0 \in \Theta$ и точка $\mathbf{x}_0 \in L(\Gamma)$. Если для них выполняются условия (3.11)–(3.13), то верно равенство

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (\langle \mathbf{x}_i - \mathbf{r}(\widehat{t}_i), \mathbf{v}_n(\widehat{t}_i) \rangle - k^{-1}(\widehat{t}_i)) = 0. \quad (3.14)$$

Доказательство. Привлечем конструкцию трехгранника Френе. Заметим, если $\bar{\mathbf{r}}(s) = (\bar{x}(s), \bar{y}(s), \bar{z}(s))$ — трижды дифференцируемая на интервале $S \subset \mathbb{R}$ вектор-функция, параметризованная натуральным параметром (длиной дуги) $s \geq 0$, то в соответствии с формулой Тейлора при любых $s \in S$ и достаточно малых приращениях Δs справедливо разложение:

$$\bar{\mathbf{r}}(s + \Delta s) = \bar{\mathbf{r}}(s) + \bar{\mathbf{r}}'(s)\Delta s + \frac{1}{2}\bar{\mathbf{r}}''(s)\Delta s^2 + \frac{1}{6}\bar{\mathbf{r}}'''(s)\Delta s^3 + o(\Delta s^3). \quad (3.15)$$

Здесь $o(\delta)$ — такая вектор-функция, что $\|o(\delta)\| = o(\delta)$; $o(\delta)$ — бесконечно малая, имеющая более высокий порядок малости по отношению к $\delta \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим классический ортонормированный репер Френе $\{\bar{\mathbf{e}}_1(s), \bar{\mathbf{e}}_2(s), \bar{\mathbf{e}}_3(s)\}$ и, опираясь на (3.15), представим в этом базисе координаты вектора $\bar{\mathbf{r}}(s + \Delta s) = (\bar{x}(s + \Delta s), \bar{y}(s + \Delta s), \bar{z}(s + \Delta s))$ (подробнее см. [16, гл. 5]):

$$\begin{aligned} \bar{x}(s + \Delta s) &= \bar{x}(s) + \Delta s - \frac{1}{6}\bar{k}^2(s)\Delta s^3 + o(\Delta s^3), \\ \bar{y}(s + \Delta s) &= \bar{y}(s) + \frac{1}{2}\bar{k}(s)\Delta s^2 + \frac{1}{6}\bar{k}'(s)\Delta s^3 + o(\Delta s^3), \\ \bar{z}(s + \Delta s) &= \bar{z}(s) + \frac{1}{6}\bar{k}(s)\bar{z}(s)\Delta s^3 + o(\Delta s^3), \end{aligned}$$

где $\bar{k}(s)$ и $\bar{\varkappa}(s)$ — кривизна и кручение кривой в точке $\bar{\mathbf{r}}(s)$.

В дальнейшем для достижения заявленного результата достаточно использовать только старшие члены приведенных выше разложений:

$$\bar{x}(s + \Delta s) = \bar{x}(s) + \Delta s + o(\Delta s), \quad (3.16)$$

$$\bar{y}(s + \Delta s) = \bar{y}(s) + \frac{1}{2}\bar{k}(s)\Delta s^2 + o(\Delta s^2), \quad (3.17)$$

$$\bar{z}(s + \Delta s) = \bar{z}(s) + \frac{1}{6}\bar{k}(s)\bar{\varkappa}(s)\Delta s^3 + o(\Delta s^3). \quad (3.18)$$

Обратимся к исходной кривой, описанной с помощью параметра $t \in \mathbb{R}$. Имеем $\mathbf{r}(t) = \bar{\mathbf{r}}(s(t))$, где $s'(t) = \|\mathbf{r}'(t)\|$. Координаты вектора $\mathbf{r}(t + \Delta t) = (x(t + \Delta t), y(t + \Delta t), z(t + \Delta t))$, где $\mathbf{r}(t + \Delta t) \triangleq \bar{\mathbf{r}}(s(t + \Delta t)) = (\bar{x}(s(t + \Delta t)), \bar{y}(s(t + \Delta t)), \bar{z}(s(t + \Delta t)))$, в ортонормированном базисе $\{\bar{\mathbf{e}}_1(s(t)), \bar{\mathbf{e}}_2(s(t)), \bar{\mathbf{e}}_3(s(t))\} = \{\mathbf{v}_t(t), \mathbf{v}_n(t), \mathbf{v}_b(t)\}$ примут вид:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \|\mathbf{r}'(t)\|\Delta t + o(\Delta t), \quad (3.19)$$

$$y(t + \Delta t) = y(t) + \frac{1}{2}k(t)\|\mathbf{r}'(t)\|^2\Delta t^2 + o(\Delta t^2), \quad (3.20)$$

$$z(t + \Delta t) = z(t) + \frac{1}{6}k(t)\varkappa(t)\|\mathbf{r}'(t)\|^3\Delta t^3 + o(\Delta t^3). \quad (3.21)$$

Здесь $k(t) = \bar{k}(s(t))$, $\varkappa(t) = \bar{\varkappa}(s(t))$. При выводе формул (3.19)–(3.21) учтено, что $\Delta s = s'(t)\Delta t + o(\Delta t)$, при этом $\Delta t \rightarrow 0$, когда $\Delta s \rightarrow 0$.

Привяжем подвижную систему координат к точке $t = \hat{t}_i$. Примем $\Delta t = \bar{t}_i - \hat{t}_i$. Тогда в силу (3.19)–(3.21) получим равенства:

$$x(\bar{t}_i) = x(\hat{t}_i) + \|\mathbf{r}'(\hat{t}_i)\|\Delta t + o(\Delta t), \quad (3.22)$$

$$y(\bar{t}_i) = y(\hat{t}_i) + \frac{1}{2}k(\hat{t}_i)\|\mathbf{r}'(\hat{t}_i)\|^2\Delta t^2 + o(\Delta t^2), \quad (3.23)$$

$$z(\bar{t}_i) = z(\hat{t}_i) + \frac{1}{6}k(\hat{t}_i)\varkappa(\hat{t}_i)\|\mathbf{r}'(\hat{t}_i)\|^3\Delta t^3 + o(\Delta t^3). \quad (3.24)$$

Вычислим производные координат в точке $t = \bar{t}_i$ с точностью до бесконечно малых:

$$x'(\bar{t}_i) = \|\mathbf{r}'(\hat{t}_i)\| + \varepsilon(\Delta t), \quad (3.25)$$

$$y'(\bar{t}_i) = k(\hat{t}_i)\|\mathbf{r}'(\hat{t}_i)\|^2\Delta t + o(\Delta t), \quad (3.26)$$

$$z'(\bar{t}_i) = o(\Delta t). \quad (3.27)$$

Здесь $\varepsilon(t)$ — бесконечно малая.

Обозначим координаты точки \mathbf{x}_i в предложенной системе координат как (x_i^*, y_i^*, z_i^*) . По условиям последовательности $\{(\hat{t}_i, \bar{t}_i)\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^{\infty}$ ограничены, а функция $\mathbf{r}(t)$ липшицева, значит и последовательность $\{(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\}_{i=1}^{\infty}$ ограниченная. Поэтому

$$\exists m > 0: \forall i \in \mathbb{N} \quad |x_i^*| + |y_i^*| + |z_i^*| \leq m. \quad (3.28)$$

Поскольку по построению $\mathbf{x}_i \in \Pi(\hat{t}_i)$, то

$$x_i^* = 0. \quad (3.29)$$

С другой стороны, раз $\mathbf{x}_i \in \Pi(\bar{t}_i)$, то

$$\langle \mathbf{x}_i - \mathbf{r}(\bar{t}_i), \mathbf{r}'(\bar{t}_i) \rangle = 0. \quad (3.30)$$

Из равенства $\bar{t}_i = \hat{t}_i + \Delta t$ и представлений (3.22)–(3.24) и (3.25)–(3.27) равенство (3.30) можно записать в виде

$$\begin{aligned} & (x_i^* - (\|\mathbf{r}'(\hat{t}_i)\|\Delta t + o(\Delta t)))(\|\mathbf{r}'(\hat{t}_i)\| + \varepsilon(\Delta t)) + \\ & + (y_i^* - o(\Delta t))(\|\mathbf{r}'(\hat{t}_i)\|^2 k(\hat{t}_i)\Delta t + o(\Delta t)) + (z_i^* - o(\Delta t))o(\Delta t) = 0. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Из оценки (3.28) следует, что $|z_i^*| \leq m$, а значит $z_i^* o(\Delta t) = o(\Delta t)$. Поэтому равенство (3.31) можно преобразовать, сгруппировав все бесконечно малые более высокого порядка, чем Δt , и подставив значение x_i^* из (3.29), к виду

$$-\|\mathbf{r}'(\hat{t}_i)\|^2 \Delta t + y_i^* \|\mathbf{r}'(\hat{t}_i)\|^2 k(\hat{t}_i)\Delta t + o(\Delta t) = 0. \quad (3.32)$$

Выразим $y_i^* k(\hat{t}_i)$ из (3.32). Переходя к пределу, получим

$$\lim_{i \rightarrow \infty} y_i^* k(\hat{t}_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\|\mathbf{r}'(\hat{t}_i)\|^2 \Delta t - o(\Delta t)}{\|\mathbf{r}'(\hat{t}_i)\|^2 \Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\|\mathbf{r}'(\hat{t}_i)\|^2 \Delta t - o(\Delta t)}{\|\mathbf{r}'(\hat{t}_i)\|^2 \Delta t} = 1. \quad (3.33)$$

Поскольку в принятой системе положительное направление оси ординат совпадает с вектором $\mathbf{v}_n(\hat{t}_i)$, имеющим единичную длину, то

$$y_i^* = \langle \mathbf{v}_n(\hat{t}_i), \mathbf{x}_i - \mathbf{r}(\hat{t}_i) \rangle. \quad (3.34)$$

Из (3.33) и (3.34) следует

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \langle \mathbf{v}_n(\hat{t}_i), \mathbf{x}_i - \mathbf{r}(\hat{t}_i) \rangle k(\hat{t}_i) = 1. \quad (3.35)$$

Перенесем единицу в левую часть равенства (3.35), внесем ее под знак предела и разделим выражение под знаком предела на $k(\hat{t}_i) \neq 0$. Получится (3.14). \square

Теорема 1. Пусть на кривой (3.1) имеется псевдовершина $\mathbf{r}(t_0)$. Если крайняя точка биссектрисы \mathbf{x}_0 соответствует псевдовершине $\mathbf{r}(t_0)$, то имеет место включение

$$\mathbf{x}_0 \in \Lambda(t_0). \quad (3.36)$$

Доказательство. Если \mathbf{x}_0 — крайняя точка биссектрисы, соответствующая псевдовершине $\mathbf{r}(t_0)$ множества Γ , то из определения 3 следует, что существует последовательность пар несовпадающих чисел $\{\hat{t}_i, \bar{t}_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \Theta$ и последовательность точек $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \subset L(\Gamma)$, для которых выполняются условия (3.11)–(3.13). Поскольку из (3.11) вытекает, что при любом i точка \mathbf{x}_i лежит в нормальной плоскости (3.9) (построенной в точке $\mathbf{r}(\hat{t}_i)$), то

$$\forall i \in \mathbb{N} \langle \mathbf{x}_i - \mathbf{r}(\hat{t}_i), \mathbf{r}'(\hat{t}_i) \rangle = 0. \quad (3.37)$$

Векторное произведение — непрерывная функция двух векторных переменных, а $\mathbf{r}(t)$ — трижды дифференцируемая функция. Следовательно, можно вычислить значение предела

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \langle \mathbf{x}_i - \mathbf{r}(\hat{t}_i), \mathbf{r}'(\hat{t}_i) \rangle = \langle \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{x}_i - \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{r}(\hat{t}_i), \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{r}'(\hat{t}_i) \rangle = \langle \mathbf{x}_0 - \mathbf{r}(t_0), \mathbf{r}'(t_0) \rangle. \quad (3.38)$$

Из (3.37) и (3.38) следует равенство

$$\langle \mathbf{x}_0 - \mathbf{r}(t_0), \mathbf{r}'(t_0) \rangle = 0. \quad (3.39)$$

Условие бирегулярности гарантирует, что кривизна (3.6) в любой точке кривой непрерывна и больше нуля, а значит обратная к ней функция $k^{-1}(t)$ является непрерывной в некоторой окрестности t_0 . Рассмотрим функцию (3.4). Ее числитель предоставляет композицию векторных произведений непрерывных вектор-функций, а знаменатель равен норме числителя. При этом числитель отличен от 0 согласно условию (3.2). Следовательно,

$$\begin{aligned} & \lim_{i \rightarrow \infty} (\langle \mathbf{x}_i - \mathbf{r}(\hat{t}_i), \mathbf{v}_n(\hat{t}_i) \rangle - k^{-1}(\hat{t}_i)) = \\ & = \langle \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{x}_i - \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{r}(\hat{t}_i), \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{v}_n(\hat{t}_i) \rangle - \lim_{i \rightarrow \infty} k^{-1}(\hat{t}_i) = \langle \mathbf{x}_0 - \mathbf{r}(t_0), \mathbf{v}_n(t_0) \rangle - k^{-1}(t_0). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Из (3.14) и (3.40) вытекает равенство

$$\langle \mathbf{x}_0 - \mathbf{r}(t_0), \mathbf{v}_n(t_0) \rangle - k^{-1}(t_0) = 0. \quad (3.41)$$

Заметим, что (3.8) при $t = t_0$ может быть представлено как множество точек, для которых выполняются условия

$$\mathbf{z} \in \Pi(t_0) \quad (3.42)$$

и

$$\langle \mathbf{z} - \mathbf{r}(t_0), \mathbf{v}_n(t_0) \rangle = k^{-1}(t_0). \quad (3.43)$$

Равенство (3.39) эквивалентно условию (3.42), а равенство (3.41) эквивалентно условию (3.43). Значит, точка \mathbf{x}_0 лежит на сопряженной прямой к кривой Γ в точке $\mathbf{r}(t_0)$. \square

Замечание 2. Соотношения (3.8) и (3.36) для крайних точек сингулярного множества являются обобщениями на трехмерный случай формул для крайних точек сингулярного множества решения соответствующей плоской задачи управления по быстродействию (см. (4.1), (4.2) из [17]).

Замечание 3. Репер Френе, строго говоря, не является единственным. В зависимости от выбора параметризации векторы (3.3) и (3.5) могут быть направлены в разные стороны. Однако вектор (3.4) всегда направлен в ту сторону, в которую кривая (3.1) локально выпукла в окрестности точки $\mathbf{r}(t)$. Поэтому уравнение сопряженной прямой (3.8) является инвариантом и определяется исключительно свойствами кривой Γ .

§ 4. Пример решения задачи быстродействия (1.1)

Для построения сингулярных множеств в трехмерном пространстве модернизирован программный комплекс [18], использовавшийся ранее для решения плоских задач быстродействия. Его основу составляют алгоритмы вычисления параметров \hat{t}, \bar{t} , задающих пары квази-симметричных точек $\mathbf{r}(\hat{t}), \mathbf{r}(\bar{t})$ и порожденные ими точки $\mathbf{x} \in L(\Gamma)$. Ключевым элементом его работы служит отыскание псевдовершин целевого множества. Зная их, с использованием результатов § 3 можно построить множества крайних точек биссектрисы, отталкиваясь от которых можно численно конструировать само сингулярное множество. Поверхность уровня $\Phi(\tau)$ функции оптимального результата $u(\mathbf{x})$, соответствующая моменту времени $\tau > 0$, строится как объединения окружностей (3.10), из которых удалены части, отсекаемые биссектрисой $L(\Gamma)$. Для каждой окружности $\mathcal{O}(t, \tau), t \in \Theta$, требуется выделить, какая из дуг на ней входит в $\Phi(\tau)$, а какая нет.

Пример 1. Рассмотрим пример задачи быстродействия с целевым множеством — кривой (3.1), в которой функция

$$\mathbf{r}(t) = (2 \cos t, \sin t, \cos^2 t) \quad (4.1)$$

и задана на области определения $\Theta = [0, 2\pi]$.

Функция (4.1) удовлетворяет условию 1, а также условию Липшица с константой $L = 4$. Анализ ее производных первого порядка

$$\mathbf{r}'(t) = (-2 \sin t, \cos t, -\sin 2t) \quad (4.2)$$

и второго порядка

$$\mathbf{r}''(t) = (-2 \cos t, -\sin t, -2 \cos 2t) \quad (4.3)$$

позволяет доказать, что выполняется условие бирегулярности (3.2). Заметим, что кручение (3.7) не равно тождественно нулю, что означает, что кривая Γ не является плоской. Хотя в отдельных точках $t \in \Theta$ может быть $\varkappa(t) = 0$.

Моделирование распространения волновых фронтов позволило установить, что у множества (3.1) есть четыре псевдовершины, соответствующие значениям параметра $t_1 = 0$, $t_2 = \pi/2$, $t_3 = \pi$, $t_4 = 3\pi/2$. Согласно теореме 1 крайние точки биссектрисы лежат на прямых, сопряженных к Γ в псевдовершинах. На рис. 1 показаны кривая Γ пурпурной линией, ее псевдовершины t_i , $i = \overline{1, 4}$, в виде кружков и рассеивающая поверхность $L(\Gamma)$ в виде полупрозрачной голубой поверхности. Множество крайних точек Ψ_i , соответствующих псевдовершинам $\mathbf{r}(t_i)$, $i = \overline{1, 4}$, найдены при помощи производных вектор-функции первого порядка (4.2) и второго порядка (4.3):

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \{(\lambda, 0, 2.5 - \lambda) \in \mathbb{R}^3 : \lambda \in [0, \infty)\}, & \Psi_2 &= \{(0, \lambda, 2\lambda) \in \mathbb{R}^3 : \lambda \in [0, \infty)\}, \\ \Psi_3 &= \{(-\lambda, 0, 2.5 - \lambda) \in \mathbb{R}^3 : \lambda \in [0, \infty)\}, & \Psi_4 &= \{(0, -\lambda, 2\lambda) \in \mathbb{R}^3 : \lambda \in [0, \infty)\}. \end{aligned}$$

Волновой фронт $\Phi(\tau)$, отвечающий моменту времени $\tau = 0.5$ (то есть множество точек, для которых функция оптимального результата равна τ), показан на рис. 2 в виде поверхности, цвет которой меняется от синего до красного с ростом аппликаты. Часть поверхности $\Phi(0.5)$, лежащая в полупространстве $\Pi_x = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \leq 0\}$, показана на рис. 3, а часть поверхности $\Phi(0.5)$, лежащая в полупространстве $\Pi_y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \leq 0\}$, — на рис. 4. Волновой фронт $\Phi(\tau)$, соответствующий моменту времени $\tau = 1.5$, представлен на рис. 5, а часть поверхности $\Phi(1.5)$, лежащая в полупространстве Π_x , — на рис. 6. Часть поверхности $\Phi(1.5)$, лежащая в полупространстве Π_y , изображена на рис. 7.

Особенностью рассеивающей поверхности можно считать то, что она состоит из двух листов:

$$\begin{aligned} L_1 &= \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : z < 2.5 - |x|, x \in (-\infty, \infty)\}, \\ L_2 &= \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 2|y|, y \in (-\infty, \infty)\}. \end{aligned}$$

Лист L_1 лежит в плоскости xOz и содержит точки, лежащие ниже лучей Ψ_1 и Ψ_3 . Лист L_2 лежит в плоскости xOz и содержит точки, лежащие выше лучей Ψ_2 и Ψ_4 . Листы имеют непустое пересечение

$$L^* = L_1 \cap L_2 = \{(0, 0, \lambda) \in \mathbb{R}^3 : \lambda \in (0, 2.5)\}.$$

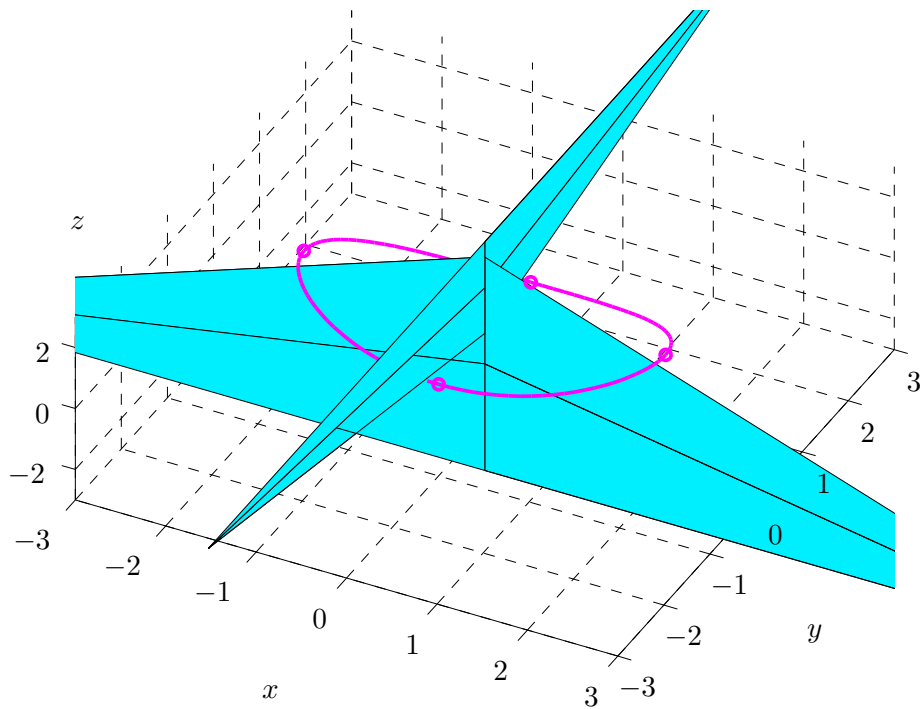


Рис. 1. Кривая Γ , псевдовершины $\mathbf{r}(t_i)$, $i = \overline{1, 4}$, и рассеивающая поверхность $L(\Gamma)$

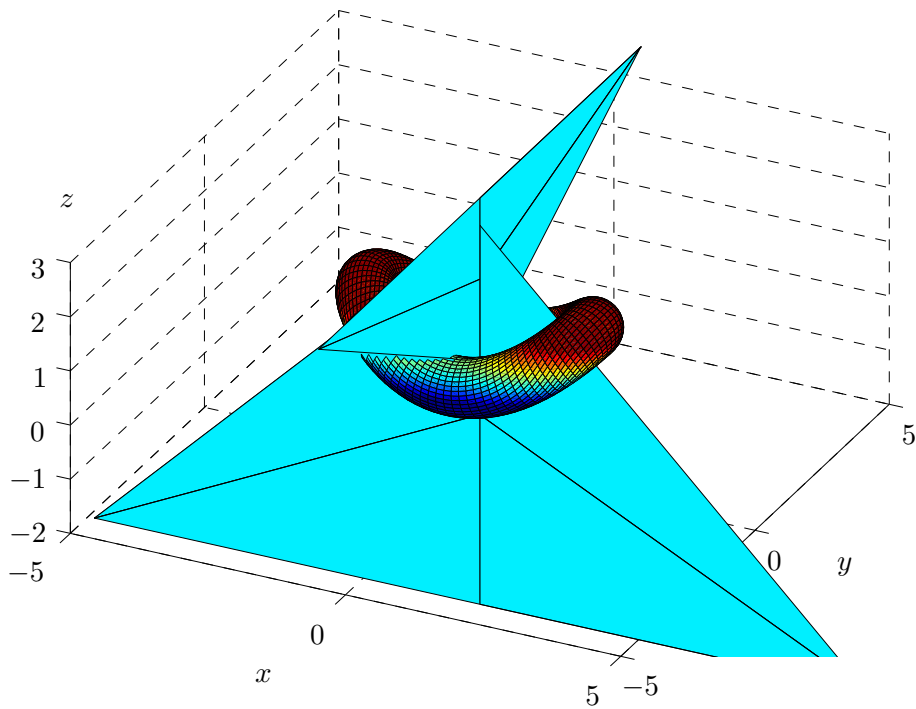


Рис. 2. Поверхность уровня $\Phi(0.5)$ функции оптимального результата и рассеивающая поверхность $L(\Gamma)$

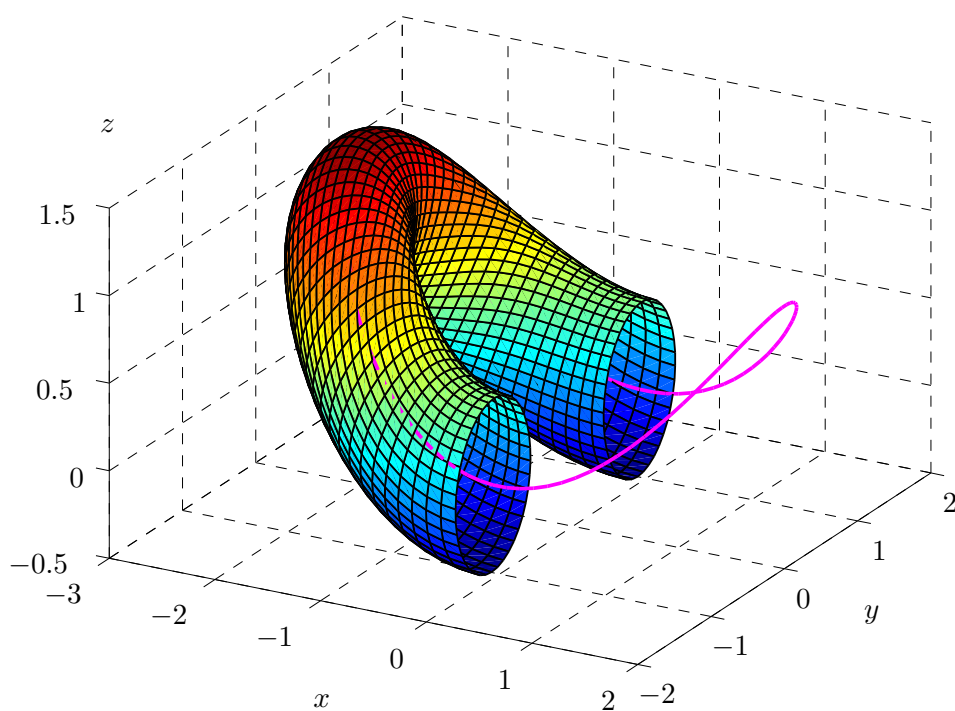


Рис. 3. Часть поверхности уровня $\Phi(0.5)$, лежащая в Π_x , и кривая Γ

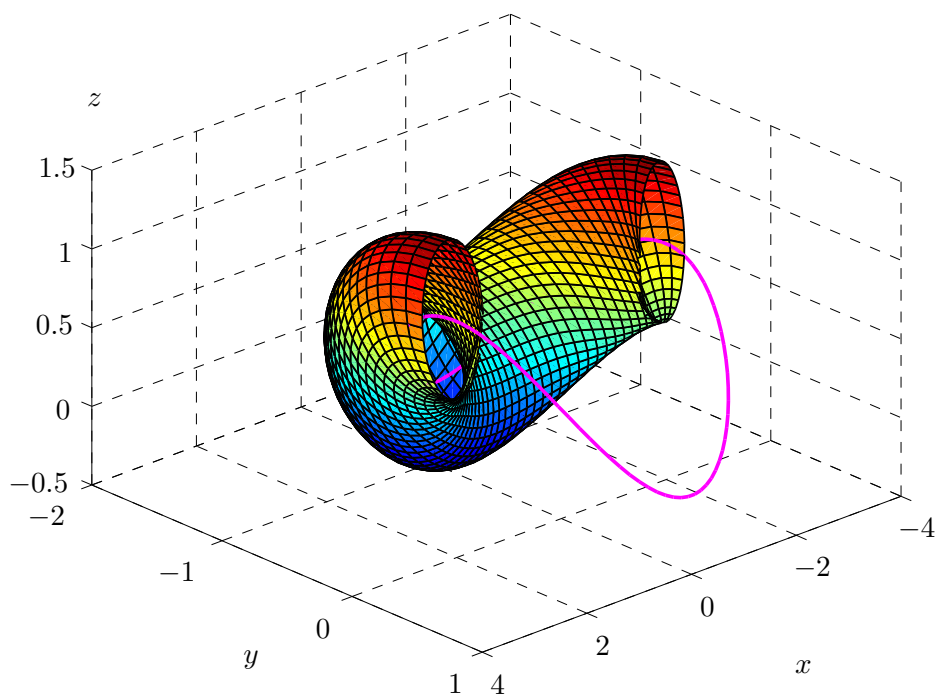


Рис. 4. Часть поверхности уровня $\Phi(0.5)$, лежащая в Π_y , и кривая Γ

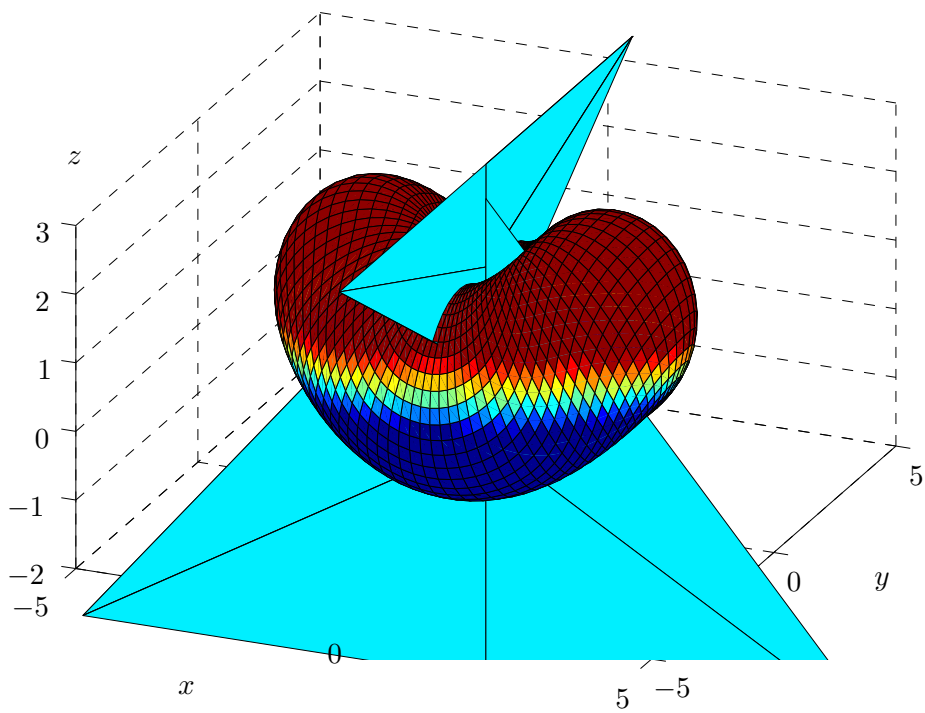


Рис. 5. Поверхность уровня $\Phi(1.5)$ функции оптимального результата и рассеивающая поверхность $L(\Gamma)$

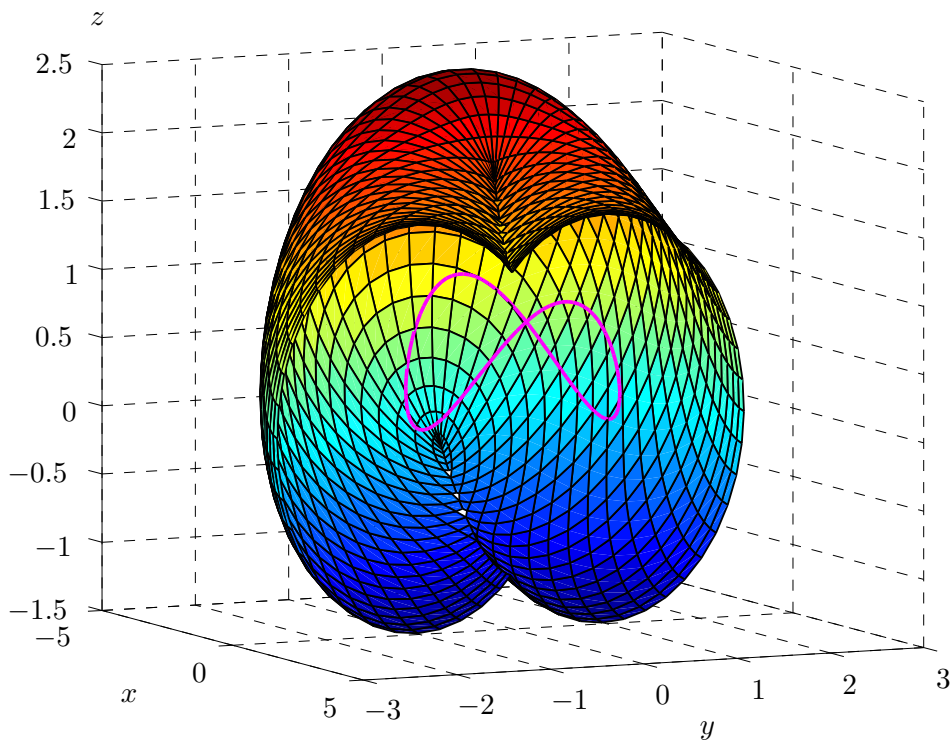


Рис. 6. Часть поверхности уровня $\Phi(1.5)$, лежащая в Π_x , и кривая Γ

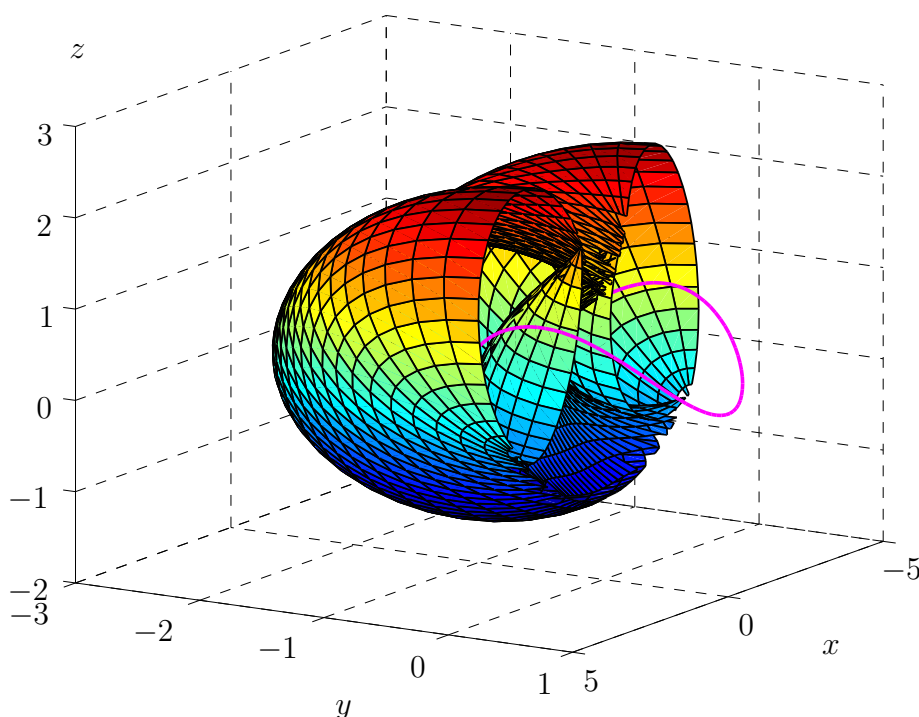


Рис. 7. Часть поверхности уровня $\Phi(1.5)$, лежащая в Π_y , и кривая Γ

Для всех точек $x \in L^*$ имеет место $\text{card}(\Omega_\Gamma(x)) = 4$, для всех точек $x \in L(\Gamma) \setminus L^*$ — $\text{card}(\Omega_\Gamma(x)) = 2$. Поверхности уровня $\Phi(\tau)$ и рассеивающая поверхность симметричны относительно плоскостей xOz и yOz . Все пары квази-симметричных точек $r(\hat{t})$ и $r(\bar{t})$ симметричны либо относительно плоскости xOz (и тогда порожденная ими точка биссектрисы x принадлежит L_1), либо плоскости yOz (и тогда порожденная ими точка биссектрисы x принадлежит L_2), либо относительно прямой Oz (и тогда порожденная ими точка биссектрисы x принадлежит L^*).

Замечание 4. Разрешающие конструкции в примере 1 можно рассматривать как решение задачи для уравнения эйконала с краевым условием, заданным на графике вектор-функции (4.1). Волновые фронты тогда имеют смысл поверхностей распространения света в однородной среде в случае, когда источник равномерно распределен вдоль кривой Γ . Биссектриса $L(\Gamma)$ — объединение точек негладкости волновых фронтов, обусловленной тем, что излучение в них приходит из разных точек на кривой Γ .

§ 5. Заключение

Исследован один класс задач быстрого действия в трехмерном пространстве с шаровой вектограммой скоростей для случая, когда целевое множество совпадает с параметрически заданной кривой Γ . Выделены характеристические точки — псевдовершины, отвечающие за зарождение сингулярного множества $L(\Gamma)$. На поверхности $L(\Gamma)$ функция оптимального результата $u(x)$ теряет гладкость. Получены аналитические выражения для координат крайних точек биссектрисы, соответствующих псевдовершине. Выражения записаны в терминах кривизны, главной нормали и бинормали кривой Γ . Проведено моделирование примера построения решения задачи, в котором в качестве целевого множества взята замкнутая кривая. На ней выделены четыре псевдовершины, найдены для них множества $\Psi_i, i = \overline{1, 4}$, крайних

точек, являющихся лучами на сопряженных к Γ прямым. На базе множеств $\Psi_i, i = \overline{1,4}$, проведено построение биссектрисы, являющейся объединением двух плоских множеств, лежащих в ортогональных плоскостях, и имеющих общий отрезок. Выполнено построение поверхностей уровня $\Phi(\tau)$ в различные моменты времени τ . Заметим, что для изученных ранее задач на плоскости одной псевдовершине может соответствовать только одна точка биссектрисы (или в очень специфическом случае, рассмотренном, например, в [14], две). В трехмерном пространстве может существовать неограниченное множество, состоящее из крайних точек, соответствующих одной псевдовершине. В дальнейшем разработанные алгоритмы планируется распространить на решение задач с более сложной геометрией.

Финансирование. Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075–02–2021–1383).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лебедев П. Д., Успенский А. А., Ушаков В. Н. Построение минимаксного решения уравнения типа эйконала // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14. № 2. С. 182–191. <http://mi.mathnet.ru/timm34>
2. Субботин А. И. Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. М.–Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2019.
3. Лебедев П. Д., Успенский А. А. Аналитическое и численное конструирование функции оптимального результата для одного класса задач быстрогодействия // Прикладная математика и информатика. 2007. Вып. 27. С. 65–79. <https://cs.msu.ru/sites/cmc/files/docs/lebedev.pdf>
4. Кружков С. Н. Обобщенные решения уравнений Гамильтона–Якоби типа эйконала. I. Постановка задач, теоремы существования, единственности и устойчивости, некоторые свойства решений // Математический сборник. 1975. Т. 98 (140). № 3 (11). С. 450–493. <http://mi.mathnet.ru/msb3720>
5. Успенский А. А., Лебедев П. Д. Выявление сингулярности у обобщенного решения задачи Дирихле для уравнения типа эйконала в условиях минимальной гладкости границы краевого множества // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28. Вып. 1. С. 59–73. <https://doi.org/10.20537/vm180106>
6. Арнольд В. И. Особенности каустик и волновых фронтов. М.: ФАЗИС, 1996.
7. Siersma D. Properties of conflict sets in the plan // Banach Center Publications. 1999. Vol. 50. Issue 1. P. 267–276. <https://doi.org/10.4064/-50-1-267-276>
8. Giblin P. Symmetry sets and medial axes in two and three dimensions // The Mathematics of Surfaces IX. London: Springer, 2000. P. 306–321. https://doi.org/10.1007/978-1-4471-0495-7_18
9. Sotomayor J., Siersma D., Garcia R. Curvatures of conflict surfaces in Euclidean 3-space // Banach Center Publications. 1999. Vol. 50. Issue 1. P. 277–285. <https://doi.org/10.4064/-50-1-277-285>
10. Седых В. Д. Об эйлеровых характеристиках многообразий особенностей волновых фронтов // Функциональный анализ и его приложения. 2012. Т. 46. Вып. 1. С. 92–96. <https://doi.org/10.4213/faa3035>
11. Седых В. Д. Топология особенностей роста устойчивой вещественной каустики типа E_6 // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2018. Т. 82. Вып. 3. С. 154–169. <https://doi.org/10.4213/im8643>
12. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
13. Демьянов В. Ф., Васильев Л. В. Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981.
14. Лебедев П. Д., Успенский А. А. Построение рассеивающих кривых в одном классе задач быстрогодействия при скачках кривизны границы целевого множества // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2020. Т. 55. С. 93–112. <https://doi.org/10.35634/2226-3594-2020-55-07>

15. Позняк Э. Г., Шикин Е. В. Дифференциальная геометрия: первое знакомство. М.: Изд-во МГУ, 1990.
16. Щербаков Р. Н., Пичурин Л. Ф. Дифференциалы помогают геометрии. М.: Просвещение, 1982.
17. Успенский А. А. Формулы исчисления негладких особенностей функции оптимального результата в задаче быстрогодействия // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20. № 3. С. 276–290. <http://mi.mathnet.ru/timm1100>
18. Лебедев П. Д., Успенский А. А. Программа построения волновых фронтов и функции евклидова расстояния до компактного невыпуклого множества. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2017662074 от 27.10.2017.

Поступила в редакцию 19.07.2021

Успенский Александр Александрович, д. ф.-м. н., ведущий научный сотрудник, отдел динамических систем, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0725-4233>

E-mail: uspen@imm.uran.ru

Лебедев Павел Дмитриевич, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, отдел динамических систем, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1693-3476>

E-mail: pleb@yandex.ru

Цитирование: А. А. Успенский, П. Д. Лебедев. О структуре сингулярного множества решения в одном классе пространственных задач управления по быстроддействию // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31. Вып. 3. С. 471–486.

A. A. Uspenskii, P. D. Lebedev

On the structure of the singular set of solutions in one class of 3D time-optimal control problems

Keywords: time-optimal problem, dispersing surface, bisector, pseudo-vertex, extreme point, curvature, singular set, Frene's trihedron.

MSC2020: 35A18, 14H20, 14J17

DOI: [10.35634/vm210309](https://doi.org/10.35634/vm210309)

A class of time-optimal control problems in terms of speed in three-dimensional space with a spherical velocity vector is considered. A smooth regular curve Γ was chosen as the target set. Pseudo-vertices — characteristic points on Γ , responsible for the appearance of a singularity in the optimal result function, are selected. The characteristic features of the structure of a singular set belonging to the family of bisectors are revealed. An analytical representation is found for the extreme points of the bisector corresponding to a fixed pseudo-vertex. As an illustration of the effectiveness of the developed methods for solving nonsmooth dynamic problems, an example of the numerical-analytical construction of resolving structures of a control problem in terms of speed is given.

Funding. The work was performed as part of research conducted in the Ural Mathematical Center with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement number 075–02–2021–1383).

REFERENCES

1. Lebedev P. D., Uspenskii A. A., Ushakov V. N. Construction of a minimax solution for an eikonal-type equation, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2008, vol. 263, suppl. 2, pp. 191–201. <https://doi.org/10.1134/S0081543808060175>
2. Subbotin A. I. *Generalized solutions of first order PDEs. The dynamical optimization perspective*, Boston: Birkhäuser, 1995. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0847-1>
3. Lebedev P. D., Uspenskii A. A. Analytical and numerical construction of the optimal outcome function for a class of time-optimal problems, *Computational Mathematics and Modeling*, 2008, vol. 19, issue 4, pp. 375–386. <https://doi.org/10.1007/s10598-008-9007-9>
4. Kružkov S. N. Generalized solutions of the Hamilton–Jacobi equations of eikonal type. I. Formulation of the problems; existence, uniqueness and stability theorems; some properties of the solutions, *Mathematics of the USSR — Sbornik*, 1975, vol. 27, no. 3, pp. 406–446. <https://doi.org/10.1070/SM1975v027n03ABEH002522>
5. Uspenskii A. A., Lebedev P. D. Identification of the singularity of the generalized solution of the Dirichlet problem for an eikonal type equation under the conditions of minimal smoothness of a boundary set, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 1, pp. 59–73 (in Russian). <https://doi.org/10.20537/vm180106>
6. Arnold V. I. *Singularities of caustics and wave fronts*, Dordrecht: Springer, 1990. <https://doi.org/10.1007/978-94-011-3330-2>
7. Siersma D. Properties of conflict sets in the plan, *Banach Center Publications*, 1999, vol. 50, issue 1, pp. 267–276. <https://doi.org/10.4064/-50-1-267-276>
8. Giblin P. Symmetry sets and medial axes in two and three dimensions, *The Mathematics of Surfaces IX*, London: Springer, 2000, pp. 306–321. https://doi.org/10.1007/978-1-4471-0495-7_18
9. Sotomayor J., Siersma D., Garcia R. Curvatures of conflict surfaces in Euclidean 3-space, *Banach Center Publications*, 1999, vol. 50, issue 1, pp. 277–285. <https://doi.org/10.4064/-50-1-277-285>
10. Sedykh V. D. On Euler characteristics of manifolds of singularities of wave fronts, *Functional Analysis and Its Applications*, 2012, vol. 46, no. 1, pp. 77–80. <https://doi.org/10.1007/s10688-012-0012-6>
11. Sedykh V. D. Topology of singularities of a stable real caustic germ of type E_6 , *Izvestiya: Mathematics*, 2018, vol. 82, no. 3, pp. 596–611. <https://doi.org/10.1070/IM8643>
12. Isaacs R. *Differential games*, New York: John Wiley and Sons, 1965.

13. Dem'yanov V. F., Vasil'ev L. V. *Nondifferentiable optimization*, New York: Springer, 1985.
<https://www.springer.com/gp/book/9780387909516>
14. Lebedev P. D., Uspenskii A. A. Construction of scattering curves in one class of time-optimal control problems with leaps of a target set boundary curvature, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2020, vol. 55, pp. 93–112 (in Russian).
<https://doi.org/10.35634/2226-3594-2020-55-07>
15. Poznyak E. G., Shikin E. V. *Differentsial'naya geometriya: pervoe znakomstvo* (Differential geometry: the first acquaintance), Moscow: Moscow State University, 1990.
16. Shcherbakov R. N., Pichurin L. F. *Differentsialy pomagayut geometrii* (Differentials help geometry), Moscow: Prosveshchenie, 1982.
17. Uspenskii A. A. Calculation formulas for nonsmooth singularities of the optimal result function in a time-optimal problem, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2015, vol. 291, suppl. 1, pp. 239–254. <https://doi.org/10.1134/S0081543815090163>
18. Lebedev P. D., Uspenskii A. A. *Program for constructing wave fronts and functions of the Euclidean distance to a compact nonconvex set*. Certificate of state registration of the computer program no. 2017662074, October 27, 2017.

Received 19.07.2021

Aleksandr Aleksandrovich Uspenskii, Doctor of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Department of Dynamical Systems, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0725-4233>

E-mail: uspen@imm.uran.ru

Pavel Dmitrievich Lebedev, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Department of Dynamical Systems, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1693-3476>

E-mail: pleb@yandex.ru

Citation: A. A. Uspenskii, P. D. Lebedev. On the structure of the singular set of solutions in one class of 3D time-optimal control problems, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2021, vol. 31, issue 3, pp. 471–486.