МАТЕМАТИКА 2021. Т. 31. Вып. 3. С. 414–423.

УДК 517.55

© *А. П. Ляпин, С. С. Ахтамова*

РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ СЕЧЕНИЙ ПРОИЗВОДЯЩЕГО РЯДА РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ

В данной работе изучены сечения производящего ряда для решений линейного многомерного разностного уравнения с постоянными коэффициентами и найдены рекуррентные соотношения, связывающие такие сечения. Как следствие, доказан многомерный аналог теоремы Муавра о рациональности сечений производящего ряда в зависимости от вида начальных данных задачи Коши для многомерного разностного уравнения. Для задач о числе путей на целочисленной решетке показано, что при подходящем выборе шагов сечения их производящего ряда представляют известные последовательности многочленов (Фибоначчи, Пелля и др.).

Ключевые слова: разностное уравнение, производящая функция, сечение, решеточный путь.

DOI: 10.35634/vm210305

Производящие функции (или z-преобразование) являются мощным инструментом перечислительного комбинаторного анализа, а исследование их свойств представляет большой интерес, особенно, когда речь идет о принадлежности функции одному из классов в иерархии, предложенной Ричардом Стенли в 1900 году: $\{$рациональные$\} \subset \{$алгебраические$\} \subset \subset \{D$-финитные$\}$. В работе [13] отмечалось, что «наиболее полезными» являются рациональные производящие функции.

А. Муавр рассмотрел под названием возвратных рядов степенные ряды $F(z) = a_0 + + a_1 z + \ldots + a_k z^k + \ldots$ с коэффициентами $a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots,$ образующими возвратные последовательности, т. е. удовлетворяющими соотношению вида

$$c_0 a_{m+p} + c_1 a_{m+p-1} + \ldots + c_m a_p = 0, \quad p = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $c_j, j = 0, \ldots, m,$ — некоторые постоянные (см. [11]). Оказалось, что такие ряды всегда изображают рациональные функции. Точнее, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. *Степенной ряд $F(z)$ является возвратным тогда и только тогда, когда он представляет правильную рациональную функцию.*

Доказательство этого простого факта можно найти, например, в [13]. Аналог теоремы Муавра для многомерного разностного уравнения с постоянными коэффициентами был сформулирован и доказан в работе [6]. А именно, было доказано, что производящая функция решения многомерного разностного уравнения с постоянными коэффициентами будет рациональна тогда и только тогда, когда рациональна производящая функция начальных данных.

В данной работе найдены рекуррентные соотношения для сечений производящих рядов решений многомерных разностных уравнений и доказан аналог теоремы Муавра для сечений таких производящих рядов.

§ 1. Основные обозначения и определения

Пусть $\mathbb{Z}_{\geqslant}$ — множество неотрицательных целых чисел, а $\mathbb{Z}^n_{\geqslant} = \underbrace{\mathbb{Z}_{\geqslant} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{\geqslant}}_{n \text{ раз}}$. Для $j = 1, \ldots, N$ определим $\pi_j \colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$ — оператор проектирования вида

$$\pi_j \colon (x_1, \ldots, x_n) \to (x_1, \ldots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \ldots, x_n).$$

Зафиксируем набор $J = \{j_1, \ldots, j_k\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_k \leqslant n$, и обозначим через π_J — суперпозицию таких операторов: $\pi_J = \pi_{j_1} \circ \pi_{j_2} \circ \cdots \circ \pi_{j_k}$. Такими же символами π_j и π_J будем обозначать операторы проектирования в $\mathbb{C}^n$:

$$\pi_j \colon (z_1, \ldots, z_n) \to (z_1, \ldots, z_{j-1}, 0, z_{j+1}, \ldots, z_n)$$

и суперпозицию таких операторов соответственно. Пусть $f \colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$, будем рассматривать $\mathbb{C}[[z]]$ — кольцо формальных степенных рядов вида $F(z) = \sum\limits_{x \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant}} f(x) z^x$.

Для набора $\Delta = \{\alpha^0, \alpha^1, \ldots, \alpha^N\}$ из $N+1$ векторов с неотрицательными координатами $\alpha^j = (\alpha^j_1, \ldots, \alpha^j_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant}$, $j = 0, \ldots, N$, $\alpha^0 = (0, \ldots, 0)$, некоторой функции $f \colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$ и вектора $c = (c_0, c_1, \ldots, c_N) \in \mathbb{C}^{N+1}$, $c_0 = 1$, определим линейное разностное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\sum_{j=0}^{N} c_j f(x - \alpha^j) = 0, \quad x \geqslant m, \tag{1.1}$$

где $m = (m_1, \ldots, m_n)$, $m_i = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant N} \alpha^j_i$, $i = 1, \ldots, n$, а неравенство $x \geqslant m$ означает, что $x_i \geqslant m_i$ для $i = 1, \ldots, n$. *Характеристический многочлен* данного уравнения имеет вид

$$P(z) = \sum_{j=0}^{N} c_j z^{-\alpha^j}.$$

Для разностного уравнения (1.1) сформулируем *задачу Коши*: найти такую функцию $f(x)$, которая удовлетворяет уравнению (1.1) и совпадает с некоторой заданной функцией начальных данных $\varphi \colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$ на множестве $X_0 = \{x \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant} \colon x \not\geqslant m\} = \mathbb{Z}^n_{\geqslant} \setminus \bigl(m + \mathbb{Z}^n_{\geqslant}\bigr)$:

$$f(x) = \varphi(x), \quad x \in X_0. \tag{1.2}$$

Многомерные разностные уравнения такого вида возникают в теории цифровых рекурсивных фильтров (см. [2]), а также в комбинаторном анализе (см. [14]), где они называются линейными рекуррентными соотношениями. В [4, 5] получено решение задачи Коши для однородного многомерного линейного разностного уравнения с постоянными коэффициентами на основе понятия амебы характеристического многочлена и его фундаментального решения. Вопросы разрешимости задачи Коши для полиномиального разностного оператора рассматривались в работе [8]. Отметим, что понятие амебы алгебраического множества оказалось полезным для переноса на многомерный случай известной теоремы Пуанкаре об асимптотике решений разностных уравнений (см. [7]).

Для функции $f \colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$ введем понятие *производящего ряда*

$$F(z) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant}} f(x)\, z^x,$$

и определим его сечения (см. [9, 12]) следующим образом. Пусть $J' = \{1, 2, \ldots, N\} \setminus J$, $x_J = \pi_J x$, $x_{J'} = \pi_{J'} x$, тогда

$$F(z) = \sum_{x_J \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant}} \left(\sum_{x_{J'} \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant}} f(x)\, z^{x_{J'}} \right) z^{x_J} = \sum_{x_J \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant}} F(x_J; z_{J'}) z^{x_J},$$

а ряд

$$F(x_J; z_{J'}) = \sum_{x_{J'} \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant}} f(x)\, z^{x_{J'}}, \quad x_J \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant},$$

естественно называть *сечением* производящего ряда $F(z)$.

Заметим, что если $J = \{1, 2, \ldots, n\}$, тогда $x_J = x$, $z_J = z$ и $F(x_J; z_{J'}) = f(x)$, и если $J = \varnothing$, $J' = \{1, 2, \ldots, n\}$, тогда $F(x_J; z_{J'}) = F(z)$.

Рассмотрим функцию $\widetilde{\varphi}(x) \colon \mathbb{Z}^n_{\geqslant} \to \mathbb{C}$, которая совпадает с функцией начальных данных $\varphi(x)$ на множестве X_0 и равна нулю на его дополнении $\mathbb{Z}^n_{\geqslant} \setminus X_0$, и определим ряды вида

$$\Phi(x_J; \tau_{J'}; z_{J'}) = \sum_{\substack{x_{J'} \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant} \\ x_{J'} \ngeqslant \tau_{J'}}} \widetilde{\varphi}(x)\, z^{x_{J'}},$$

производящую функцию начальных данных

$$\Phi(z) = \Phi(x_{\varnothing}; m; z) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant}} \widetilde{\varphi}(x)\, z^{x}$$

и ее *сечения*

$$\Phi(x_J; z_{J'}) = \Phi(x_J; m; z_{J'}) = \sum_{x_{J'} \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant}} \widetilde{\varphi}(x)\, z^{x_{J'}}.$$

§ 2. Основные результаты

Сечения производящего ряда для решения многомерного разностного уравнения связаны между собой рекуррентными соотношениями.

Теорема 1. *Сечения производящего ряда решения задачи Коши* (1.1)–(1.2) *связаны рекуррентным соотношением*

$$\sum_{j=0}^{N} c_j z^{\alpha^j_{J'}} F(x_J - \alpha^j_J; z_{J'}) = \sum_{j=0}^{N} c_j z^{\alpha^j_{J'}} \Phi(x_J - \alpha^j_J; m_{J'} - \alpha^j_{J'}; z_{J'}) \tag{2.1}$$

для всех $x_J \geqslant m_J$.

Доказательство. Зафиксируем некоторое подмножество $J' = \{j'_1, \ldots, j'_l\} \subset$ $\subset \{1, 2, \ldots, N\}$, домножим обе части уравнения (1.1) на $z^{x_{J'}}$ и просуммируем по всем целым $x_{J'} \geqslant m_{J'} = \pi_{J'} m$:

$$\sum_{x_{J'} \geqslant m_{J'}} \sum_{j=0}^{N} c_j f(x - \alpha^j) z^{x_{J'}} = \sum_{j=0}^{N} c_j \sum_{x_{J'} \geqslant m_{J'}} f(x - \alpha^j) z^{x_{J'}} =$$

$$= \sum_{j=0}^{N} c_j \sum_{x_{J'} \geqslant m_{J'} - \alpha^j_{J'}} f(x - \alpha^j + \alpha^j_{J'}) z^{x_{J'} + \alpha^j_{J'}} = \sum_{j=0}^{N} c_j z^{\alpha^j_{J'}} \sum_{x_{J'} \geqslant m_{J'} - \alpha^j_{J'}} f(x - \alpha^j_J) z^{x_{J'}} =$$

$$= \sum_{j=0}^{N} c_j z^{\alpha^j_{J'}} \left(\sum_{x_{J'} \geqslant 0} f(x - \alpha^j_J) z^{x_{J'}} - \sum_{x_{J'} \ngeqslant m_{J'} - \alpha^j_{J'}} f(x - \alpha^j_J) z^{x_{J'}} \right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{N} c_j z^{\alpha^j_{J'}} \big(F(x_J - \alpha^j_J; z_{J'}) - \Phi(x_J - \alpha^j_J; m_{J'} - \alpha^j_{J'}; z_{J'}) \big) = 0,$$

откуда и получаем утверждение теоремы. □

Рассмотрим частные случаи формулы (2.1) при $J' = \varnothing$ и $J' = M$. При $J' = \varnothing$ тождество принимает вид исходного разностного уравнения, так как не происходит ни умножения на $z_{J'}$, ни суммирования по $x_{J'}$.

Случай $J = \varnothing$, $J' = M$ был подробно исследован в [6], где было доказано соотношение

$$\underbrace{\sum_{j=0}^{N} c_j z^{\alpha_j}}_{=P(\frac{1}{z})} F(z) = \sum_{j=0}^{N} c_j z^{\alpha^j} \Phi(x_\varnothing; m - \alpha^j; z), \tag{2.2}$$

где $P(z)$ — характеристический многочлен для заданного разностного уравнения. При помощи формулы (2.2) в [6] производящая функция решения разностного уравнения вычислена через производящую функцию начальных данных и коэффициенты разностого уравнения, а затем доказан многомерный аналог теоремы Муавра.

Теорема 2 (теорема Муавра). *Производящая функция $F(z)$ решения задачи Коши (1.1)–(1.2) рациональна тогда и только тогда, когда рациональна производящая функция $\Phi(z)$ начальных данных.*

В качестве «начальных данных» для рекуррентного соотношения (2.1) по аналогии с задачей Коши (1.1)–(1.2) будем рассматривать сечения $F(x_J; z_{J'}) = \Phi(x_J; z_{J'})$ производящего ряда начальных данных $\Phi(z)$ для всех $x_J \ngeqslant m_J$. Теперь можно сформулировать аналог теоремы Муавра для сечений производящего ряда решений многомерного разностного уравнения, доказательство которой является прямым следствием теоремы 1, но также может быть получено из теоремы из работы [6].

Теорема 3. *Сечения $F(x_J; z_{J'})$ производящего ряда $F(z)$ рациональны тогда и только тогда, когда рациональны сечения производящего ряда начальных данных $\Phi(x_J; z_{J'})$.*

Отметим простую связь между характеристическими многочленами исходного разностного уравнения (1.1) и уравнения (2.1), которая получается из определения характеристического многочлена.

Предложение 1. *Характеристический многочлен для разностного уравнения (2.1) получается из характеристического многочлена для уравнения (1.1) при $z_{j'_1} = \ldots = z_{j'_l} = 1$.*

§ 3. Сечения производящих рядов для числа путей на целочисленной решетке и рекуррентные многочлены

Наиболее естественным классом задач, связанным с разностными уравнениями вида (1.1), являются задачи о путях на целочисленной решетке (см. [1, 10]). К самыми известным классам таких путей относятся пути Дика, Моцкина и Шрёдера.

Пусть, как и прежде, набор $\Delta = \{\alpha^1, \dots, \alpha^N\}$ состоит из N ненулевых векторов с неотрицательными координатами $\alpha^j = (\alpha_1^j, \dots, \alpha_n^j) \in \mathbb{Z}_{\geqslant}^n$, $j = 1, \dots, N$, $\alpha^0 = (0, \dots, 0)$. Рассмотрим n-мерную целочисленную решетку $\mathbb{Z}^n$. Решеточным путем назовем конечную последовательность точек $p_0, p_1, \dots, p_L$ в $\mathbb{Z}^n$ такую, что $p_k - p_{k-1} \in \Delta = \{\alpha^1, \dots, \alpha^N\}$, для всех $k = 1, 2, \dots, L$. Будем предполагать, что все точки множества $p_0, p_1, \dots, p_L$ различны (пути не самопересекаются) и, не теряя общности, будем считать, что все пути выходят из начала координат, т. е. $p_0 = 0$, а конус K, натянутый на вектора из набора Δ, заостренный (то есть не содержит никакой прямой). Тогда количество путей из начала координат в точку $x \in \mathbb{Z}^n$ конечно и удовлетворяет уравнению (1.1), а начальные данные $\varphi(x), x \not\geqslant m$ для задачи Коши также удовлетворяют разностному уравнению и могут быть восстановлены, исходя из условия, что $\varphi(x) = 0, x \notin \mathbb{Z}_{\geqslant}^n$ и $\varphi(0) = 1$. Тогда справедливо следствие.

Следствие 1. *Для сечений решеточных путей с шагами из набора Δ справедливо соотношение*

$$\sum_{j=0}^{N} c_j z^{\alpha^j_{J'}} F(x_J - \alpha_J^j; z_{J'}) = 0$$

для всех $x_J \geqslant m_J$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что в случае решеточных путей правая часть в формуле из теоремы 1 обращается в ноль:

$$\sum_{j=0}^{N} c_j z_J^{\alpha_J^j} \Phi(x_{J'} - \alpha_{J'}^j; m_J - \alpha_J^j; z_{J'}) = \sum_{j=0}^{N} c_j z_J^{\alpha_J^j} \sum_{x \not\geqslant m_J - \alpha_J^j} \varphi(x - \alpha_{J'}^j) z_J^{x_J} =$$

$$= \sum_{j=0}^{N} \sum_{x - \alpha_J^j \not\geqslant m_J - \alpha_J^j} c_j \varphi(x \underbrace{- \alpha_{J'}^j - \alpha_J^j}_{= -\alpha^j}) z_J^{x_J} = \sum_{j=0}^{N} \sum_{x \not\geqslant m_J} c_j \varphi(x - \alpha^j) z_J^{x^J} =$$

$$= \sum_{x \not\geqslant m_J} \underbrace{\sum_{j=0}^{N} c_j \varphi(x - \alpha^j)}_{=0} z_J^{x^J} = 0,$$

откуда и следует доказательство следствия. □

Отметим, что в задаче о числе решеточных путей сечения $F(x_J^0; z_{J'})$ представляют собой производящую функцию для числа путей с шагами из Δ из начала координат во все точки плоскости $x \in \mathbb{Z}^n : x_J = x_J^0$.

Пример 1. Пусть $\alpha^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, c_1 = c_2 = -1$, тогда $m = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ и разностное уравнение имеет вид

$$f(x_1, x_2) - f(x_1 - 1, x_2 - 2) - f(x_1 - 3, x_2 - 1) = 0, \quad (x_1, x_2) \geqslant (3, 2), \tag{3.1}$$

а начальные данные заданы в виде $f(x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2)$ на множестве $(x_1, x_2) \not\geqslant (3, 2)$.

Случай $J' = \varnothing$ не представляет интереса.

В случае $J' = \{1\}$ и $J = \{2\}$ сечения производящей функции связаны соотношением вида

$$F(x_2; z_1) - z_1 F(x_2 - 2; z_1) - z_1^3 F(x_2 - 1; z_1) =$$
$$= \Phi(x_2; 3; z_1) - z_1 \Phi(x_2 - 2; 2; z_1) - z_1^3 \Phi(x_2 - 1; 0; z_1), \quad x_2 \geqslant 2,$$

а выражения в правой части являются конечными суммами (что справедливо только для случая $n = 2$) вида $\Phi(x_2; 3; z_1) = \varphi(0, x_2) + \varphi(1, x_2)z_1 + \varphi(2, x_2)z_1^2$, $\Phi(x_2 - 2; 2; z_1) = \varphi(0, x_2 - 2) + \varphi(1, x_2 - 2)z_1$, $\Phi(x_2 - 2; 0; z_1) = 0$. В качестве «начальных данных» этой (одномерной) задачи Коши выступают ряды вида $F(0; z_1) = \Phi(0; z_1)$ и $F(1; z_1) = \Phi(1; z_1)$.

В случае $J' = \{2\}$ и $J = \{1\}$ сечения производящей функции связаны соотношением вида

$$F(x_1; z_2) - z_2^2 F(x_1 - 1; z_2) - z_2 F(x_1 - 3; z_2) =$$
$$= \Phi(x_1; 2; z_2) - z_1\Phi(x_1 - 1; 0; z_2) - z_1^3\Phi(x_1 - 3; 1; z_2), \quad x_1 \geqslant 3,$$

а выражения в правой части имеют вид $\Phi(x_1; 2; z_2) = \varphi(x_1, 0) + \varphi(x_1, 1)z_2$, $\Phi(x_1 - 1; 0; z_2) = 0$, $\Phi(x_1 - 3; 1; z_2) = \varphi(x_1 - 3, 0)$. В качестве «начальных данных» этой задачи Коши выступают ряды вида $F(0; z_2) = \Phi(0; z_2)$, $F(1; z_2) = \Phi(1; z_2)$ и $F(2; z_2) = \Phi(2; z_2)$.

В случае, когда $J' = \{1, 2\}$ получим соотношение $(1 - z_1z_2^2 - z_1^3z_2)F(z_1, z_2) = 1$, связывающее характеристический многочлен и прозводящий ряд решения уравнения (3.1).

Для решеточных путей с шагами $\alpha^1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ и $\alpha^2 = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ разностное уравнение имеет тот же вид (3.1), тогда для $J' = \{1\}$ все J-сечения производящей функции будут связаны соотношением вида

$$F(x_2; z_1) - z_1F(x_2 - 2; z_1) - z_1^3F(x_2 - 1; z_1) = 0, \quad x_2 \geqslant 2,$$

причем «начальные данные» соответствующей задачи Коши имеют вид $F(0; z_1) = 1$, $F(1; z_1) = z_1^2$. Для $J' = \{2\}$ получим

$$F(x_1; z_2) - z_2^2F(x_1 - 1; z_2) - z_2F(x_1 - 3; z_2) = 0, \quad x_2 \geqslant 3,$$

а «начальные данные» имеют вид $F(0; z_2) = 1$, $F(1; z_2) = z_2^2$, $F(2; z_2) = z_2^4$. Таким образом, получаем две серии многочленов:

$F(0; z_1) = 1$
$F(1; z_1) = z_1^3$
$F(2; z_1) = z_1(1 + z_1^5)$
$F(3; z_1) = z_1^4(2 + z_1^5)$
$F(4; z_1) = z_1^2(1 + 3z_1^5 + z_1^{10})$
$\dots$

$F(0; z_2) = 1$
$F(1; z_2) = z_2^2$
$F(2; z_2) = z_2^4$
$F(3; z_2) = z_2(1 + z_2^5)$
$F(4; z_2) = z_2^3(2 + z_2^5)$
$\dots$

При подходящем выборе набора шагов Δ, сечения производящего ряда для числа путей на целочисленной решетке будут представлять известные последовательности многочленов. Например, в [3] такие последовательности изучались при помощи массивов Риордана.

Пример 2. Для набора шагов $\alpha^1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \alpha^2 = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ число путей из начала координат в точку (x_1, x_2) удовлетворяет разностному уравнению

$$f(x_1, x_2) - f(x_1 - 1, x_2 - 1) - f(x_1 - 2, x_2) = 0,$$

тогда сечения производящего ряда для функции $f(x_1, x_2)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$F(x_1, z_2) - z_2F(x_1 - 1, z_2) - F(x_1 - 2, z_2) = 0$$

с начальными данными $F(0;z_2)=1, F(1;z_2)=z_2$. Продолжая вычисления, получим известную последовательность многочленов Фибоначчи:

$$\begin{aligned}F(2;z_2)=&z_2^2+1,\\F(3;z_2)=&z_2^3+2z_2,\\F(4;z_2)=&z_2^4+3z_2^2+1,\\F(5;z_2)=&z_2^5+4z_2^3+3z_2,\\&\ldots\end{aligned}$$

Пример 3. Для набора шагов $\alpha^1=\alpha^2=\binom{1}{1}, \alpha^3=\binom{2}{0}$ (будем считать, что шаг α^1 имеет кратность два, или что существует два таких шага разного цвета) функция $f(x_1,x_2)$ числа путей из начала координат в точку (x_1,x_2) удовлетворяет разностному уравнению

$$f(x_1,x_2)-2f(x_1-1,x_2-1)-f(x_1-2,x_2)=0.$$

Сечения $F(x_1;z_2)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$F(x_1;z_2)-2z_2F(x_1-1;z_2)-F(x_1-2;z_2)=0$$

с начальными данными $F(0;z_2)=1, F(1;z_2)=2z_2$. Продолжая вычисления, получим известную последовательность многочленов Пелля:

$$\begin{aligned}F(2;z_2)=&4z_2^2+1,\\F(3;z_2)=&8z_2^3+4z_2,\\F(4;z_2)=&16z_2^4+12z_2^2+1,\\&\ldots\end{aligned}$$

Финансирование. Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075–02–2021–1388).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bousquet-Mélou M., Petkovšek M. Linear recurrences with constant coefficients: the multivariate case // Discrete Mathematics. 2000. Vol. 225. Issues 1–3. P. 51–75. https://doi.org/10.1016/S0012-365X(00)00147-3
2. Dudgeon D. E., Mersereau R. M. Multidimensional digital signal processing. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1983.
3. Luzón A., Morón M. A. Recurrence relations for polynomial sequences via Riordan matrices // Linear Algebra and its Applications. 2010. Vol. 433. Issue 7. P. 1422–1446. https://doi.org/10.1016/j.laa.2010.05.021
4. Leinartas E. K. Multiple Laurent series and difference equations // Siberian Mathematical Journal. 2004. Vol. 45. Issue 2. P. 321–326. https://doi.org/10.1023/B:SIMJ.0000021287.35640.87
5. Leinartas E. K. Multiple Laurent series and fundamental solutions of linear difference equations // Siberian Mathematical Journal. 2007. Vol. 48. Issue 2. P. 268–272. https://doi.org/10.1007/s11202-007-0026-0
6. Лейнартас Е. К., Ляпин А. П. О рациональности многомерных возвратных степенных рядов // Журнал Сибирского федерального университета. Математика и физика. 2009. Т. 2. № 4. С. 449–455. http://elib.sfu-kras.ru/handle/2311/1515

7. Лейнартас Е. К., Пассаре М., Цих А. К. Многомерные версии теоремы Пуанкаре для разностных уравнений // Математический сборник. 2008. Т. 199. № 10. С. 87–104. https://doi.org/10.4213/sm4503
8. Лейнартас Е. К., Рогозина М. С. Разрешимость задачи Коши для полиномиального разностного оператора и мономиальные базисы факторов в кольце полиномов // Сибирский математический журнал. 2015. Т. 56. № 1. С. 111–121. http://mi.mathnet.ru/smj2625
9. Lipshits L. D-finite power series // Journal of Algebra. 1989. Vol. 122. Issue 2. P. 353–373. https://doi.org/10.1016/0021-8693(89)90222-6
10. Lyapin A. P., Chandragiri S. The Cauchy problem for multidimensional difference equations in lattice cones // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. 2020. Vol. 13. Issue 2. P. 187–196. https://doi.org/10.17516/1997-1397-2020-13-2-187-196
11. De Moivre A. III. De fractionibus algebraicis radicalitate immunibus ad fractiones simpliciores reducendis, deque summandis terminis quarumdam serierum æquali intervallo a se distantibus // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 1723. Vol. 32. Issue 373. P. 162–178. https://doi.org/10.1098/rstl.1722.0029
12. Некрасова Т. И. Об иерархии производящих функций решений многомерных разностных уравнений // Известия Иркутского государственного университета. Сер. Математика. 2014. Т. 9. С. 91–102. http://mathizv.isu.ru/ru/article?id=1017
13. Stanley R. P. Enumerative combinatorics. Vol. 2. Cambridge: Cambridge University Press, 2011. https://doi.org/10.1017/CBO9780511609589
14. Riordan J. Combinatorial identities. New York: John Wiley and Sons, 1968.

Поступила в редакцию 09.03.2021

Ляпин Александр Петрович, к. ф.-м. н., доцент, базовая кафедра вычислительных и информационных технологий, Сибирский федеральный университет, 660041, Россия, г. Красноярск, пр. Свободный, 79.
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-0149-7587
E-mail: aplyapin@sfu-kras.ru

Ахтамова Светлана Станиславовна, к. пед. н., доцент, кафедра высшей математики, информатики и естествознания, Лесосибирский педагогический институт — филиал СФУ, 662544, Россия, Красноярский край, г. Лесосибирск, ул. Победы, 42.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4627-2023
E-mail: ahtamova-ss@mail.ru

Цитирование: А. П. Ляпин, С. С. Ахтамова. Рекуррентные соотношения для сечений производящего ряда решения многомерного разностного уравнения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31. Вып. 3. С. 414–423.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'UTERNYE NAUKI
MATHEMATICS 2021. Vol. 31. Issue 3. Pp. 414–423.

A. P. Lyapin, S. S. Akhtamova

Recurrence relations for the sections of the generating series of the solution to the multidimensional difference equation

Keywords: difference equation, generating function, section, lattice path.

MSC2020: 32A05, 32A08, 39B32, 05A15

DOI: 10.35634/vm210305

In this paper, we study the sections of the generating series for solutions to a linear multidimensional difference equation with constant coefficients and find recurrent relations for these sections. As a consequence, a multidimensional analogue of Moivre's theorem on the rationality of sections of the generating series depending on the form of the initial data of the Cauchy problem for a multidimensional difference equation is proved. For problems on the number of paths on an integer lattice, it is shown that the sections of their generating series represent the well-known sequences of polynomials (Fibonacci, Pell, etc.) with a suitable choice of steps.

Funding. This work is supported by the Krasnoyarsk Mathematical Center and financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of the establishment and development of regional Centers for Mathematics Research and Education (Agreement No. 075-02-2021-1388).

REFERENCES

1. Bousquet-Mélou M., Petkovšek M. Linear recurrences with constant coefficients: the multivariate case, *Discrete Mathematics*, 2000, vol. 225, issues 1–3, pp. 51–75. https://doi.org/10.1016/S0012-365X(00)00147-3
2. Dudgeon D. E., Mersereau R. M. *Multidimensional digital signal processing*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1983.
3. Luzón A., Morón M. A. Recurrence relations for polynomial sequences via Riordan matrices, *Linear Algebra and its Applications*, 2010, vol. 433, issue 7, pp. 1422–1446. https://doi.org/10.1016/j.laa.2010.05.021
4. Leinartas E. K. Multiple Laurent series and difference equations, *Siberian Mathematical Journal*, 2004, vol. 45, issue 2, pp. 321–326. https://doi.org/10.1023/B:SIMJ.0000021287.35640.87
5. Leinartas E. K. Multiple Laurent series and fundamental solutions of linear difference equations, *Siberian Mathematical Journal*, 2007, vol. 48, issue 2, pp. 268–272. https://doi.org/10.1007/s11202-007-0026-0
6. Leinartas E. K, Lyapin A. P. On the rationality of multidimentional recusive series, *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*, 2009, vol. 2, issue 4, pp. 449–455 (in Russian). http://elib.sfu-kras.ru/handle/2311/1515
7. Leinartas E. K., Passare M., Tsikh A. K. Multidimensional versions of Poincaré's theorem for difference equations, *Sbornik: Mathematics*, 2008, vol. 199, no. 10, pp. 1505–1521. https://doi.org/10.1070/sm2008v199n10abeh003970
8. Leĭnartas E. K., Rogozina M. S. Solvability of the Cauchy problem for a polynomial difference operator and monomial bases for the quotients of a polynomial ring, *Siberian Mathematical Journal*, 2015, vol. 56, issue 1, pp. 92–100. https://doi.org/10.1134/S0037446615010097
9. Lipshits L. *D*-finite power series, *Journal of Algebra*, 1989, vol. 122, issue 2, pp. 353–373. https://doi.org/10.1016/0021-8693(89)90222-6
10. Lyapin A. P., Chandragiri S. The Cauchy problem for multidimensional difference equations in lattice cones, *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*, 2020, vol. 13, issue 2, pp. 187–196. https://doi.org/10.17516/1997-1397-2020-13-2-187-196

11. De Moivre A. De fractionibus algebraicis radicalitate immunibus ad fractiones simpliciores reducendis, deque summandis terminis quarumdam serierum æquali intervallo a se distantibus, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 1723, vol. 32, issue 373, pp. 162–178. https://doi.org/10.1098/rstl.1722.0029
12. Nekrasova T. I. On the hierarchy of generating functions for solutions of multidimensional difference equations, *Izvestiya Irkutskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Ser. Matematika*, 2014, vol. 9, pp. 91–102 (in Russian). http://mathizv.isu.ru/ru/article?id=1017
13. Stanley R. P. *Enumerative combinatorics. Vol. 2*, Cambridge: Cambridge University Press, 2011. https://doi.org/10.1017/CBO9780511609589
14. Riordan J. *Combinatorial identities*, New York: John Wiley and Sons, 1968.

Received 09.03.2021

Alexander Petrovich Lyapin, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Computational and Information Technologies, Siberian Federal University, pr. Svobodnyi, 79, Krasnoyarsk, 660041, Russia.
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-0149-7587
E-mail: aplyapin@sfu-kras.ru

Svetlana Stanislavovna Akhtamova, Candidate of Pedagogical Science, Assosiate Professor, Department of Mathematics and Computer Science, Lesosibirsk Pedagogical Institute — Branch of SibFU, ul. Pobedy, 42, Lesosibirsk, Krasnoyarskii Krai, 662544, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4627-2023
E-mail: ahtamova-ss@mail.ru

Citation: A. P. Lyapin, S. S. Akhtamova. Recurrence relations for the sections of the generating series of the solution to the multidimensional difference equation, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2021, vol. 31, issue 3, pp. 414–423.