ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА 2021. Т. 31. Вып. 3. С. 409–413.

УДК 515.122

© *А. А. Грызлов*

О ПРОЕКЦИЯХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ПРОСТРАНСТВ

Рассматриваются всюду плотные подмножества произведений топологических пространств. Доказано, что в произведении $Z^c = \prod\limits_{\alpha\in 2^\omega} Z_\alpha$, где $Z_\alpha = Z$ $(\alpha \in 2^\omega)$, сепарабельных пространств существуют счетные всюду плотные множества такие, что всякие счетные их подмножества имеют проекции на грани, обладающие дополнительными свойствами. Это позволяет доказать ряд фактов о всюду плотных множествах, в частности отсутствие сходящихся последовательностей, оценивать характер замкнутых подмножеств произведений.

Ключевые слова: произведение пространств, проекции, всюду плотные множества.

DOI: 10.35634/vm210304

Введение

Одним из наиболее интересных направлений в теории произведений топологических пространств является изучение всюду плотных множеств в произведениях. Известная теорема Хьюитта–Марчевского–Пондишери (см. [1]) устанавливает, что в произведении $\prod\limits_{\alpha\in 2^\omega} Z_\alpha$ сепарабельных пространств существует счетное всюду плотное множество. В этой связи важной является проблема существования в таком произведении всюду плотных множеств, обладающих дополнительными свойствами. Известной является проблема существования в произведении $\prod\limits_{\alpha\in 2^\omega} Z_\alpha$ сепарабельных пространств счетного всюду плотного множества, не содержащего сходящихся последовательностей и поэтому секвенциально замкнутого. Существование таких множеств доказано для произведений различных пространств в [2–7].

Еще одна проблема связана с изучением проекций всюду плотных множеств и их подмножеств на грани различной размерности произведений пространств. В данной работе доказывается существование в произведении $\prod\limits_{\alpha\in 2^\omega} Z_\alpha$ сепарабельных пространств счетного всюду плотного множества, проекции счетных подмножеств которого на грани обладают дополнительными свойствами. Эти свойства обеспечивают, в частности, что это счетное всюду плотное множество не содержит сходящихся последовательностей, что замыкание всякого его счетного подмножества имеет мощность 2^c. Доказательства основаны на использовании так называемой независимой матрицы подмножеств счетного множества, введенной и широко используемой в теории расширений дискретных пространств (см. [8–11]).

§ 1. Предварительные результаты

Терминология и обозначения, используемые в работе, стандартны, их можно найти в [1].

Через Z^m обозначим произведение $\prod\limits_{\alpha\in A} Z_\alpha$, где $|A| = m$, $Z_\alpha = Z$ для всех Z_α $(\alpha \in A)$.

Для произведения $\prod\limits_{\alpha\in A} Z_\alpha$ пространство $\prod\limits_{\alpha\in A'} Z_\alpha$, где $A' \subseteq A$, $|A'| = \tau$, называется τ-гранью $\prod\limits_{\alpha\in A} Z_\alpha$. Мы обозначаем $c = 2^\omega$. Для отображения $f\colon X \to Y$ и $X' \subseteq X$ через $f|_{X'}\colon X' \to f(X')$ обозначается сужение f на X'.

Множество A называется счетным, если $|A| = \omega$. $\pi_{A'}\colon \prod\limits_{\alpha\in A} Z_\alpha \to \prod\limits_{\alpha\in A'} Z_\alpha$ обозначает проекцию $\prod\limits_{\alpha\in A} Z_\alpha$ на грань $\prod\limits_{\alpha\in A'} Z_\alpha$.

Теорема 1 (см. [6, теорема 4.1]). *Пусть Z — сепарабельное пространство, $|Z| \geqslant \omega$ и $\eta \subseteq \operatorname{Exp} Z$ — семейство счетных подмножеств Z, $|\eta| \leqslant 2^\omega$.*

Тогда существует счетное всюду плотное подмножество $Q \subseteq Z^c = \prod\limits_{\alpha\in 2^\omega} Z_\alpha$, удовлетворяющее условию: всякое счетное множество $E \subseteq Q$ содержит счетное подмножество $E' \subseteq E$ такое, что для всякого $G \in \eta$ существует $\alpha \in 2^\omega$, для которого $\pi_\alpha(E') = G$ и $\pi_\alpha|_{E'}\colon E' \to G$ конечно кратно.

Лемма 1. *Пусть X — бесконечное T_2 -пространство без изолированных точек. Тогда X содержит счетное дискретное нигде не плотное множество.*

Доказательство. Рассмотрим счетное множество $\{x_i\}_{i=0}^\infty$ и семейство окрестностей $\{Ox_i\}_{i=0}^\infty$ таких, что $|Ox_i| \geqslant \omega$ для $i = 0, 1, \ldots$, удовлетворяющих условиям

– $X \setminus [Ox_0] \neq \varnothing$ и, следовательно, бесконечно;

– $Ox_k = X \setminus \bigcup\limits_{i=0}^{k-1} [Ox_i]$ для $k \geqslant 1$.

Из свойств этих семейств следует, что множество $D = \{x_i\}_{i=0}^\infty$ дискретно.

Покажем, что D нигде не плотно. Предположим, что $\langle [D] \rangle \neq \varnothing$. Мы имеем $\langle [D] \rangle \cap D \neq \neq \varnothing$. Пусть $x \in D \cap \langle [D] \rangle$. Поскольку D дискретно, существует окрестность Ox точки x такая, что $Ox \cap D = \{x\}$ и $Ox \subseteq \langle [D] \rangle$. Но тогда для открытого множества $U = Ox \setminus \{x\}$ имеем $U \neq \varnothing$ и $U \subseteq [D]$, но $U \cap D = \varnothing$. Противоречие.

Итак, D — счетное дискретное нигде не плотное множество. □

Лемма 2. *Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение, $D \subseteq Y$ и $E \subseteq X$ — счетные подмножества такие, что $f(E) = D$ и $f|_E\colon E \to D$ конечно кратно. Тогда*

(a) *если $D \subseteq Y$ дискретно, то E — дискретное подмножество X;*

(b) *если $D \subseteq Y$ дискретно и замкнуто, то E — дискретное и замкнутое подмножество X.*

Доказательство. **(a)** Пусть $D \subseteq Y$ дискретно, $E \subseteq X$ и $f|_E\colon E \to D$ конечно кратно. Пусть $z \in E$. Рассмотрим $f(z)$. Поскольку D дискретно, существует окрестность U точки $f(z)$ такая, что $U \cap D = \{f(z)\}$. Тогда $f^{-1}(U) \cap E = \widetilde{f}^{-1}(f(z))$ для $\widetilde{f} = f|_E$.

Поскольку $\widetilde{f} = f|_E$ конечно кратно, то множество $f^{-1}(f(z)) = f^{-1}(U) \cap E$ конечно. Поэтому существует окрестность V_z точки z такая, что $V_z \subseteq f^{-1}(U)$ и $V_z \cap (f^{-1}(U) \cap E) = = \{z\}$. Таким образом E дискретно.

(b) Пусть $D \subseteq Y$ дискретно и замкнуто, $E \subseteq X$, $f(E) = D$. В силу **(a)** E дискретно. Покажем, что E замкнуто.

Рассмотрим точку $z \in X \setminus E$. Пусть $f(z) \in D$. Аналогично доказательству пункта **(a)** существует окрестность V_z точки z такая, что $V_z \cap D \neq \varnothing$.

Если $f(z) \notin D$, то поскольку $D \subseteq Y$ замкнуто, существует окрестность U точки $f(z)$ такая, что $U \cap D = \varnothing$. Тогда $f^{-1}(U)$ — окрестность точки z такая, что $f^{-1}(U) \cap E \neq \varnothing$.

Таким образом E замкнуто. □

§ 2. Основные результаты

Теорема 2. *Пусть Z —сепарабельное неодноточечное T_2-пространство и $Z^c = \prod_{\alpha\in 2^\omega} Z_\alpha$, где $Z_\alpha = Z$. Тогда существует счетное всюду плотное множество $Q \subseteq Z^c$, удовлетворяющее следующему условию:*

$(*)$ *всякое счетное множество $E \subseteq Q$ содержит дискретное нигде не плотное подмножество $E' \subseteq E$, для которого существует c-грань $\widetilde{Z}^c$ пространства Z^c такая, что для проекции $\pi\colon Z^c \to \widetilde{Z}^c$ множество $\pi(E')$ всюду плотно в $\widetilde{Z}^c$.*

Доказательство. Пусть $\tau = \{L_\beta\colon \beta \in 2^\omega\}$ — разбиение множества 2^ω, где $|L_\beta| = 2^\omega$ для всякого $\beta \in 2^\omega$. Обозначим $Y = Y_\beta = \prod_{\alpha\in L_\beta} Z_\alpha$.

Пространство Z^c естественным образом гомеоморфно пространству $\prod_{\beta\in 2^\omega} Y_\beta$.

Рассмотрим пространство $Y = Y_\beta = \prod_{\alpha\in L_\beta} Z_\alpha$ $(\beta \in 2^\omega)$. Оно является произведением 2^ω сепарабельных T_2-пространств, и по теореме Хьюитта–Марчевского–Пондишери существует счетное всюду плотное множество S.

Пусть $S \subseteq Y$ есть счетное всюду плотное множество пространства $Y = Y_\beta$.

Пространство $Y = Y_\beta$ $(\beta \in 2^\omega)$ — бесконечное T_2-пространство без изолированных точек. По лемме 1 Y содержит счетное дискретное нигде не плотное множество $D \subseteq Y$. Рассмотрим семейство $\eta = \{S, D\}$ счетных подмножеств Y. По теореме 1 существует счетное всюду плотное подмножество $Q \subseteq Z^c$, удовлетворяющее условию: всякое счетное подмножество $E \subseteq Q$ содержит счетное подмножество $E' \subseteq E$ такое, что

(a) для $D \in \eta$ существует $\beta_D \in 2^\omega$ такое, что для проекции $\pi_{\beta_D}\colon \prod_{\beta\in 2^\omega} Y_\beta \to Y_{\beta_D}$ выполняется $\pi_{\beta_D}(E') = D$ и $\pi_{\beta_D}|_{E'}\colon \prod_{\beta\in 2^\omega} Y_\beta \to Y_{\beta_D}$ конечно кратно;

(b) для $S \in \eta$ существует $\beta_S \in 2^\omega$ такое, что для проекции $\pi_{\beta_S}\colon \prod_{\beta\in 2^\omega} Y_\beta \to Y_{\beta_S}$ выполняется $\pi_{\beta_S}(E') = S$ и $\pi_{\beta_S}|_{E'}\colon E' \to S$ конечно кратно.

Из **(a)** по лемме 2 следует, что E' дискретно и нигде не плотно.

Из **(b)** и всюду плотности S в Y_{β_S} следует что $\pi_{\beta_S}(E')$ всюду плотно в Y_{β_S}.

Пространство $Y_{\beta_S} = \prod_{\beta\in L_{\beta_S}} Z_\beta$ есть c-грань Z^c. □

Теорема 3. *Пусть Z — сепарабельное компактное неодноточечное T_2-пространство и $Z^c = \prod_{\alpha\in 2^\omega} Z_\alpha$, где $Z_\alpha = Z$. Тогда существует счетное всюду плотное в Z^c множество Q такое, что для всякого счетного подмножества $E \subseteq Q$ выполняется $|[E]| = 2^c$.*

Доказательство. Пусть $Q \subseteq Z^c$ — подмножество Z^c из теоремы 2 и $E \subseteq Q$ — счетное подмножество Q. По теореме 2 существует c-грань $\widetilde{Z}^c$ пространства Z^c такая, что для проекции $\pi\colon Z^c \to \widetilde{Z}^c$ множество $\pi(E)$ всюду плотно в $\widetilde{Z}^c$. Множество $[E] \subseteq Z^c$ компактно. Тогда $\pi([E]) \subseteq \widetilde{Z}^c$ — тоже компактное подмножество компакта $\widetilde{Z}^c$.

Так как $\widetilde{Z}^c$ является T_2-пространством и $\pi([E])$ всюду плотно в $\widetilde{Z}^c$, то $\pi([E]) = \widetilde{Z}^c$. Тогда $|[E]| = |\widetilde{Z}^c| = 2^c$. □

Теорема 4. *Пусть Z — не счетно компактное T_2-простраство и $Z^c = \prod_{\alpha\in 2^\omega} Z_\alpha$, где $Z_\alpha = Z$ $(\alpha \in 2^\omega)$. Тогда для всякого замкнутого не открытого подмножества $F \subseteq 2^\omega$ выполнено $\chi(F, Z^c) > \omega$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку Z не является счетно компактным, в Z существует замкнутое дискретное счетное множество $D \subseteq Z$. Заметим, что $|Z| \geqslant \omega$.

Пусть $F \subseteq 2^\omega$ — замкнутое не открытое подмножество Z^c. Предположим, что $\chi(F) = \omega$ и $B = \{U_i\}_{i=1}^\infty$ — база открытых множеств в F в Z^c.

По теореме 1 существует счетное всюду плотное множество $S \subseteq Z^c$, удовлетворяющее условию: всякое счетное множество $E \subseteq S$ содержит счетное множество $E' \subseteq E$ такое, что существует такое $\alpha \in 2^\omega$, что для проекции $\pi_\alpha\colon Z^c \to Z_\alpha$ выполняется $\pi_\alpha(E') = D$ и $\pi_\alpha|_{E'}\colon E' \to D$ конечно кратно.

Выберем для каждого U_i $(i = 1, 2, \ldots)$ по точке $x_i \in (U_i \setminus F) \cap S$. Рассмотрим множество $E = \{x_i\}_{i=1}^\infty$. По свойству множества S существует счетное множество E' и $\alpha \in 2^\omega$ такие, что для проекции $\pi_\alpha\colon Z^c \to Z_\alpha$ выполняется $\pi_\alpha(E') = D$ и $\pi_\alpha|_{E'}\colon E' \to D$ конечно кратно. Тогда E' замкнуто и дискретно по лемме 2.

Рассмотрим окрестность $V = X \setminus E'$ множества F. Мы имеем $U_i \setminus V \neq \varnothing$ для всякого $U_i \in S$. Это противоречит тому, что $B = \{U_i\}_{i=1}^\infty$ — открытая база множества F в Z^c. □

Финансирование. Исследование выполнено в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (FEWS-2020-0009).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.
2. Priestley W. M. A sequentially closed countable dense subset of I^I // Proceedings of the American Mathematical Society. 1970. Vol. 24. No. 2. P. 270–271. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1970-0249547-2
3. Simon P. Divergent sequences in compact Hausdorff spaces // Topology. Vol. II (Proc. Fourth Colloq., Budapest, 1978). Amsterdam: North-Holland, 1980. P. 1087–1094.
4. Gryzlov A. A. On dense subsets of Tychonoff products // Topology and its Applications. 2014. Vol. 170. P. 86–95. https://doi.org/10.1016/j.topol.2014.04.006
5. Gryzlov A. A. About dense subsets of Tychonoff products of discrete spaces // Topology and its Applications. 2017. Vol. 221. P. 300–308. https://doi.org/10.1016/j.topol.2017.02.047
6. Gryzlov A. A. On dense subsets of Tychonoff products of $T1$-spaces // Topology and its Applications. 2018. Vol. 248. P. 164–175. https://doi.org/10.1016/j.topol.2018.09.003
7. Gryzlov A. A. Sequences and dense sets // Topology and its Applications. 2020. Vol. 271. 106988. https://doi.org/10.1016/j.topol.2019.106988
8. Kunen K. Weak P-points in $\mathbf{N}^*$ // Topology. Vol. II (Proc. Fourth Colloq., Budapest, 1978). Amsterdam: North-Holland, 1980. P. 711–749.
9. Kunen K. Ultrafilters and independent sets // Transactions of the American Mathematical Society. 1972. Vol. 172. P. 299–306. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1972-0314619-7
10. van Mill J. Weak P-poins in compact F-spaces // Topology Proceedings. 1979. Vol. 4. P. 609–628.
11. van Mill J. A remark on the Rudin–Keisler order of ultrafilters // Houston Journal of Mathematics. 1983. Vol. 9. No. 1. P. 125–129.

Поступила в редакцию 25.07.2021

Грызлов Анатолий Александрович, д. ф.-м. н., профессор, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: gryzlov@udsu.ru

Цитирование: А. А. Грызлов. О проекциях произведений пространств // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31. Вып. 3. С. 409–413.

A. A. Gryzlov

On projections of products of spaces

Keywords: product of spaces, projection, dense sets.

MSC2020: 54A25, 54B10

DOI: 10.35634/vm210304

We consider dense sets of products of topological spaces. We prove that in the product $Z^c = \prod\limits_{\alpha \in 2^\omega} Z_\alpha$, where $Z_\alpha = Z$ $(\alpha \in 2^\omega)$, there are dense sets such that their countable subsets have projections with additional properties. These properties entail that these dense sets contain no convergent sequences. By these properties we prove that the character of closed sets of the product is uncountable.

Funding. The work was carried out within the framework of the state assignment of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, project FEWS-2020-0009.

REFERENCES

1. Engelking R. *General topology*, Warszawa: PWN, 1977.
2. Priestley W. M. A sequentially closed countable dense subset of I^I, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1970, vol. 24, no. 2, pp. 270–271. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1970-0249547-2
3. Simon P. Divergent sequences in compact Hausdorff spaces, *Topology, Vol. II (Proc. Fourth Colloq., Budapest, 1978)*, Amsterdam: North-Holland, 1980, pp. 1087–1094.
4. Gryzlov A. A. On dense subsets of Tychonoff products, *Topology and its Applications*, 2014, vol. 170, pp. 86–95. https://doi.org/10.1016/j.topol.2014.04.006
5. Gryzlov A. A. About dense subsets of Tychonoff products of discrete spaces, *Topology and its Applications*, 2017, vol. 221, pp. 300–308. https://doi.org/10.1016/j.topol.2017.02.047
6. Gryzlov A. A. On dense subsets of Tychonoff products of $T1$-spaces, *Topology and its Applications*, 2018, vol. 248, pp. 164–175. https://doi.org/10.1016/j.topol.2018.09.003
7. Gryzlov A. A. Sequences and dense sets, *Topology and its Applications*, 2020, vol. 271, 106988. https://doi.org/10.1016/j.topol.2019.106988
8. Kunen K. Weak P-points in $\mathbf{N}^*$, *Topology, Vol. II (Proc. Fourth Colloq., Budapest, 1978)*, Amsterdam: North-Holland, 1980, pp. 711–749.
9. Kunen K. Ultrafilters and independent sets, *Transactions of the American Mathematical Society*, 1972, vol. 172, pp. 299–306. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1972-0314619-7
10. van Mill J. Weak P-poins in compact F-spaces, *Topology Proceedings*, 1979, vol. 4, pp. 609–628.
11. van Mill J. A remark on the Rudin–Keisler order of ultrafilters, *Houston Journal of Mathematics*, 1983, vol. 9, no. 1, pp. 125–129.

Received 25.07.2021

Anatolii Aleksandrovich Gryzlov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: gryzlov@udsu.ru

Citation: A. A. Gryzlov. On projections of products of spaces, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2021, vol. 31, issue 3, pp. 409–413.