МАТЕМАТИКА 2021. Т. 31. Вып. 3. С. 384–408.

УДК 519.63

© *М. Х. Бештоков*

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ВТОРОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Работа посвящена исследованию второй начально-краевой задачи для дифференциального уравнения третьего порядка псевдопараболического типа с переменными коэффициентами в многомерной области с произвольной границей. Рассматриваемое многомерное псевдопараболическое уравнение сводится к интегро-дифференциальному уравнению с малым параметром и для полученного уравнения строится локально-одномерная разностная схема А. А. Самарского. С помощью принципа максимума получена априорная оценка решения локально-одномерной разностной схемы в равномерной метрике в норме C. Доказаны устойчивость и сходимость локально-одномерной разностной схемы.

Ключевые слова: псевдопараболическое уравнение, уравнение влагопереноса, локально-одномерная схема, устойчивость, сходимость разностной схемы, аддитивность схемы.

DOI: 10.35634/210303

Решение многих практически важных задач, возникающих, например, при моделировании течения жидкости в трещиновато-пористых средах [1, 2], двухфазного течения в пористых средах с динамическим капиллярным давлением [3], переноса влаги [4, 5], движения подземных вод со свободной поверхностью в многослойных средах [6,7], теплопроводности в двухтемпературных системах [8] и течения некоторых неньютоновских жидкостей [9] связано с необходимостью исследования краевых задач для псевдопараболических уравнений. Псевдопараболические уравнения могут также использоваться в качестве регуляризации некорректных транспортных задач [10, 11].

В математической литературе псевдопараболическими уравнениями принято называть все уравнения высокого порядка с производной по времени первого порядка вида

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(A(u)\big) + B(u) = 0,$$

где $A(u)$ и $B(u)$ — эллиптические операторы.

Дифференциальные уравнения такого вида входят в класс уравнений, называемых уравнениями соболевского типа [12].

Работа [13] посвящена исследованию разрешимости второй смешанной задачи в нецилиндрической области для псевдопараболического уравнения. Доказываются теоремы существования и единственности решения в случае сужающейся при возрастании времени t области.

В статье [14] для приближенного решения краевых задач для псевдопараболических уравнений предложены и исследованы векторные операторно-разностные аддитивные схемы при расщеплении оператора при производной по времени на сумму положительно определенных самосопряженных операторов, а в [15] выделен класс задач с расщеплением как основного оператора задачи, так и оператора при производных по времени, который возникает при исследовании краевых задач для псевдопараболических уравнений. Предложены безусловно устойчивые векторные схемы расщепления по направлениям.

Статья [16] посвящена изучению одномерных и двумерных псевдопараболических уравнений с локальными и нелокальными граничными условиями. Для доказательства устойчивости одномерной задачи с классическими условиями используется спектральный метод, а для двумерной задачи — общая теория устойчивости Самарского А. А. для трехслойных разностных схем. Полученные результаты могут быть применены к псевдопараболическим задачам с нелокальными граничными условиями, если можно диагонализовать матрицу конечно-разностной схемы.

Работа [17] посвящена трехмерным параболическим и псевдопараболическим уравнениям с классическими, периодическими и нелокальными граничными условиями. Исследована устойчивость по начальным условиям. Устойчивость предложенных численных алгоритмов доказана при условии, что матрица дискретного оператора может быть диагонализована, а собственные векторы образуют полную базисную систему.

В работе [18] рассматривается задача Коши для двумерного псевдопараболического уравнения. Доказана существование и единственность решения поставленной задачи Коши и получено явное решение для двумерного псевдопараболического уравнения. В [19] исследуется вторая начально-краевая задача для псевдопараболического уравнения с малым параметром. Доказаны теоремы существования и единственности классического решения второй начально-краевой задачи. Методом Фурье в пространстве непрерывно-дифференцируемых функций получено решение в виде ряда. Доказано сходимость решения начально-краевой задачи для возмущенного псевдопараболического уравнения к решению соответствующей задачи для уравнения теплопроводности, когда малый параметр стремится к нулю.

Работы [20–22] посвящены исследованию псевдопараболических уравнений в двумерном случае. Строятся бессеточные схемы, основанные на радиальных базисных функциях [20, 21] и методе сингулярных границ [22], проводятся анализ устойчивости и сходимости этих бессеточных схем.

В [23–32] изучаются различные локальные, нелокальные и смешанные краевые задачи для псевдопараболических уравнений целочисленного [23–27] и дробного [28–32] порядков в одномерном случае. Построены разностные схемы, аппроксимирующие исходные дифференциальные задачи. Методом энергетических неравенств получены априорные оценки, откуда следуют единственность и устойчивость решений, а также сходимость разностных схем.

Настоящая работа посвящена исследованию второй начально-краевой задачи для многомерного псевдопараболического уравнения с переменными коэффициентами в области с произвольной границей. Многомерное псевдопараболическое уравнение сводится к нагруженному интегро-дифференциальному уравнению, для которого строится локально-одномерная (экономичная) разностная схема, основная идея которой состоит в сведении перехода со слоя на слой к последовательному решению ряда одномерных задач по каждому из координатных направлений. При этом для каждой из промежуточных задач строится безусловно устойчивая схема, требующая для своего решения числа действий, пропорционального числу узлов сетки на каждом временно́м слое. С помощью принципа максимума получены априорные оценки решения локально-одномерной разностной схемы в равномерной метрике в норме C. Доказаны устойчивость и сходимость локально-одномерной разностной схемы.

§ 1. Постановка второй начально-краевой задачи

В цилиндре $\overline{Q}_T = \overline{G} \times [0 \leqslant t \leqslant T]$ рассмотрим вторую начально-краевую задачу для многомерного псевдопараболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + \alpha \frac{\partial}{\partial t} Lu + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} \Theta_k u_{x_k} + \alpha \left(\Theta_k u_{x_k}\right)_t = \mu_{-k}(x,t), & x_k = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ -\left(\Theta_k u_{x_k} + \alpha \left(\Theta_k u_{x_k}\right)_t\right) = \mu_{+k}(x,t), & x_k = l_k, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \tag{1.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{G}, \quad \overline{G} = G + \Gamma, \tag{1.3}$$

где

$$Lu = \sum_{k=1}^{p} L_k u, \quad L_k u = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\Theta_k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) - q_k(x,t)u, \quad k = 1,2,\ldots,p, \tag{1.4}$$

$$0 < c_0 \leqslant \Theta_k(x,t), \quad q_k(x,t) \leqslant c_1, \quad c_0, c_1 = \mathrm{const} > 0, \quad \alpha > 0,$$

$$\mu_{+k} = \mu(l_k, x', t), \quad \mu_{-k} = \mu(0, x', t), \quad Q_T = G \times (0 < t \leqslant T], \quad k = 1,\ldots,p,$$
$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_p), \qquad x' = (x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_p),$$

Γ — граница области G, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ — точка p-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^p$.

Относительно области $\overline{G}$ используются два предположения ([33, с. 486]).

1. Пересечение области G с прямой C_k, параллельной оси координат O_{x_k}, состоит из одного интервала Δ_k.

2. Возможно построение в замкнутой области $\overline{G} = G \cup \Gamma$ связной сетки $\bar{\omega}_h$ с шагами h_k, $k = 1,2,\ldots,p$. Множество ω_h внутренних узлов сетки состоит из точек $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in G$ пересечения гиперплоскостей $x_k = i_k h_k$, $i_k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $k = 1,2,\ldots,p$, а множество γ_h граничных узлов — из точек пересечения прямых C_k, $k = 1,2,\ldots,p$, проходящих через внутренние узлы $x \in \omega_h$, с границей Γ.

Обозначим через $\gamma_{h,k}$ множество граничных по направлению x_k узлов, γ_h — множество всех граничных узлов $x \in \Gamma$, $\omega^*_{h,k}$ — множество приграничных по направлению x_k узлов, ω^*_h — множество всех приграничных узлов, $\omega^{**}_{h,k}$ — множество нерегулярных по направлению x_k узлов, ω^{**}_h — множество всех нерегулярных узлов, $\omega_{h,k}$ — множество регулярных по направлению x_k узлов, ω_h — множество всех регулярных узлов.

В дальнейшем будем предполагать, что коэффициенты уравнения и граничных условий (1.1)–(1.3) удовлетворяют необходимым по ходу изложения условиям, обеспечивающим нужную гладкость решения $u(x,t)$ в цилиндре Q_T.

Преобразуем уравнение (1.1) и краевые условия (1.2), тогда умножая обе части (1.1), (1.2) на $\frac{1}{\alpha}e^{\frac{1}{\alpha}t}$ и интегрируя полученное выражение по ξ от 0 до t, получим задачу

$$\mathcal{B}u = Lu + \widetilde{f}(x,t), \tag{1.5}$$

$$\begin{cases} \Theta_k(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x_k} = \widetilde{\mu}_{-k}(x,t), & x_k = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ -\Theta_k(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x_k} = \widetilde{\mu}_{+k}(x,t), & x_k = l_k, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \tag{1.6}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{G}, \tag{1.7}$$

где

$$\mathcal{B}u=\frac{1}{\alpha}\int_0^t e^{-\frac{1}{\alpha}(t-\xi)}u_\xi\,d\xi,\quad \widetilde{f}(x,t)=\frac{1}{\alpha}\int_0^t e^{-\frac{1}{\alpha}(t-\xi)}f(x,\xi)\,d\xi-e^{-\frac{1}{\alpha}}Lu_0(x),\quad \alpha>0,$$

$$\widetilde{\mu}_{\mp k}(x,t)u=\frac{1}{\alpha}\int_0^t e^{-\frac{1}{\alpha}(t-\xi)}\mu_{\mp k}(x,\xi)\,d\xi\mp e^{-\frac{t}{\alpha}}\Theta_k(x,0)u_0'(x).$$

В той же области вместо уравнения (1.5) рассмотрим следующее уравнение с малым параметром ε

$$\varepsilon u_t^\varepsilon+\mathcal{B}u^\varepsilon=Lu^\varepsilon+\widetilde{f}(x,t),\quad (x,t)\in Q_T, \tag{1.8}$$

где $\varepsilon=\mathrm{const}>0$.

Так как при $t=0$ начальные условия для уравнений (1.5) и (1.8) совпадают, то в окрестности $t=0$ у производной u_t^ε не возникает особенности типа пограничного слоя [34], [35, с. 10].

Покажем, что $u^\varepsilon\to u$ в некоторой норме при $\varepsilon\to 0$. Обозначим через $\tilde{z}=u^\varepsilon-u$ и подставим $u^\varepsilon=\tilde{z}+u$ в задачу (1.8), (1.6), (1.7). Тогда получим

$$\varepsilon\tilde{z}_t+\mathcal{B}\tilde{z}=L\tilde{z}+\overline{f}(x,t),\quad (x,t)\in Q_T, \tag{1.9}$$

с однородными граничными и начальными условиями, где $\overline{f}(x,t)=-\varepsilon\dfrac{\partial u}{\partial t}$.

Лемма 1. *Для любой абсолютно непрерывной на $[0,T]$ функции $v(t)$ справедливо неравенство*

$$v(t)\mathcal{B}v(t)\geqslant\frac{1}{2}\mathcal{B}v^2(t), \tag{1.10}$$

где $\mathcal{B}u=\dfrac{1}{\alpha}\int_0^t e^{-\frac{1}{\alpha}(t-\xi)}u_\xi\,d\xi$, $\alpha>0$.

Доказательство. Перепишем неравенство (1.10) в виде

$$v(t)\mathcal{B}v(t)-\frac{1}{2}\mathcal{B}v^2(t)=v(t)\frac{1}{\alpha}\int_0^t e^{-\frac{1}{\alpha}(t-\tau)}v_\tau\,d\tau-\frac{1}{2\alpha}\int_0^t e^{-\frac{1}{\alpha}(t-\tau)}(v^2)_\tau\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{\alpha}\int_0^t e^{-\frac{1}{\alpha}(t-\tau)}v_\tau(\tau)\left(v(t)-v(\tau)\right)d\tau=\frac{1}{\alpha}\int_0^t e^{-\frac{1}{\alpha}(t-\tau)}v_\tau(\tau)\left(\int_\tau^t v_\eta(\eta)\,d\eta\right)d\tau=$$

$$=\frac{1}{\alpha}\int_0^t v_\eta(\eta)\,d\eta\int_0^\eta e^{-\frac{1}{\alpha}(t-\tau)}v_\tau(\tau)\,d\tau=\frac{1}{\alpha}\int_0^t\frac{v_\eta(\eta)e^{-\frac{1}{\alpha}(t-\eta)}}{e^{-\frac{1}{\alpha}(t-\eta)}}\,d\eta\int_0^\eta e^{-\frac{1}{\alpha}(t-\tau)}v_\tau(\tau)\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{2\alpha}\int_0^t e^{\frac{1}{\alpha}(t-\eta)}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\int_0^\eta e^{-\frac{1}{\alpha}(t-\tau)}v_\tau(\tau)d\tau\right]^2d\eta=\frac{1}{2\alpha}\left[\int_0^t e^{-\frac{1}{\alpha}(t-\tau)}v_\tau(\tau)\,d\tau\right]^2+$$

$$+\frac{1}{2\alpha^2}\int_0^t e^{\frac{1}{\alpha}(t-\eta)}\left[\int_0^\eta e^{-\frac{1}{\alpha}(t-\tau)}v_\tau(\tau)d\tau\right]^2d\eta\geqslant 0.$$

Таким образом,

$$v(t)\mathcal{B}v(t)\geqslant\frac{1}{2}\mathcal{B}v^2(t).$$

Для получения априорной оценки воспользуемся методом энергетических неравенств. Умножим уравнение (1.9) скалярно на $\tilde{z}$ и получим энергетическое тождество:

$$\left(\varepsilon\frac{\partial\tilde{z}}{\partial t},\tilde{z}\right)+\left(\mathcal{B}\tilde{z},\tilde{z}\right)=\left(\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\Theta_k(x,t)\frac{\partial\tilde{z}}{\partial x_k}\right),\tilde{z}\right)-\left(\sum_{k=1}^{p}q_k(x,t)\tilde{z},\tilde{z}\right)+\left(\overline{f}(x,t),\tilde{z}\right). \tag{1.11}$$

Будем пользоваться скалярным произведением и нормой

$$(u,v)=\int_G uv\,dx,\quad (u,u)=\|u\|_0^2,\quad \|u\|^2_{L_2(0,l_k)}=\int_0^{l_k}u^2(x,t)\,dx_k.$$

Далее через M_i, $i=1,2,\ldots$, обозначаются положительные постоянные, зависящие только от входных данных рассматриваемой задачи.

Пользуясь леммой 1, ε-неравенством Коши, после несложных преобразований из (1.11) получаем неравенство

$$\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|\tilde{z}\|_0^2+\frac{1}{2}\mathcal{B}\|\tilde{z}\|_0^2+c_0\|\tilde{z}_x\|_0^2+(c_0-\varepsilon_1)\,\|\tilde{z}\|_0^2\leqslant\sum_{k=1}^{p}\int_{G'}\Theta_k(x,t)\tilde{z}\frac{\partial\tilde{z}}{\partial x_k}\bigg|_0^{l_k}dx'+\frac{1}{4\varepsilon_1}\|\overline{f}\|_0^2. \tag{1.12}$$

где

$$G'=\{x'=(x_1,x_2,\ldots,x_{k-1},x_{k+1},\ldots,x_p)\colon 0<x_k<l_k\},$$
$$dx'=dx_1dx_2\cdot\ldots\cdot dx_{k-1}dx_{k+1}\cdot\ldots\cdot dx_p.$$

Выбирая $\varepsilon_1=\dfrac{c_0}{2}$, из (1.12) с учетом однородных граничных условий находим

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\|\tilde{z}\|_0^2+\mathcal{B}\|\tilde{z}\|_0^2+\|\tilde{z}_x\|_0^2+\|\tilde{z}\|_0^2\leqslant M\|\overline{f}\|_0^2. \tag{1.13}$$

Проинтегрируем (1.13) по τ от 0 до t, тогда получим

$$\varepsilon\|\tilde{z}\|_0^2+\int_0^t\left(\|\tilde{z}\|_0^2+\|\tilde{z}_x\|_0^2\right)d\tau\leqslant M\int_0^t\|\overline{f}\|_0^2\,d\tau=\varepsilon^2M\int_0^t\|u_\tau\|_0^2\,d\tau=O(\varepsilon^2), \tag{1.14}$$

где $\|\tilde{z}\|^2_{2,Q_t}=\int\limits_0^t\|\tilde{z}\|_0^2\,d\tau$, а M зависит только от входных данных задачи (1.1)–(1.3).

Из априорной оценки (1.14) следует сходимость u^ε к u при $\varepsilon\to0$ в норме $\|\tilde{z}\|_1^2=$ $=\varepsilon\|\tilde{z}\|_0^2+\|\tilde{z}\|^2_{2,Q_t}+\|\tilde{z}_x\|^2_{2,Q_t}$, если u_t — ограниченная, достаточно гладкая функция. Поэтому при малом ε решение задачи (1.8), (1.6), (1.7) будем принимать за приближенное решение второй начально-краевой задачи для псевдопараболического уравнения (1.1)–(1.3).

§ 2. Построение локально-одномерной схемы

Пространственную сетку выберем равномерной по каждому направлению Ox_k с шагом $h_k=\dfrac{l_k}{N_k}$, $k=1,2,\ldots,p$:

$$\bar{\omega}_{h_k}=\{x_k^{(i_k)}=i_kh_k\colon i_k=0,1,\ldots,N_k,\ h_k=\frac{l_k}{N_k},\ k=1,2,\ldots,p\},\quad \bar{\omega}=\prod_{k=1}^{p}\bar{\omega}_{h_k}.$$

На отрезке $[0,T]$ введем сетку

$$\bar\omega'_\tau=\{0,t_{j+\frac{k}{p}}=\left(j+\frac{k}{p}\right)\tau,\quad \tau=\frac{T}{j_0},\quad j=0,1,\ldots,j_0-1,\quad k=1,2,\ldots,p\},$$

содержащую наряду с узлами $t_j=j\tau$, фиктивные узлы $t_{j+\frac{k}{p}}$, $k=1,2,\ldots,p-1$. Будем обозначать через ω'_τ множество узлов сетки $\bar\omega'_\tau$, для которых $t>0$.

По аналогии с [33] уравнению (1.8) поставим в соответствие цепочку «одномерных» уравнений, для этого уравнение (1.8) перепишем в виде

$$\sum_{k=1}^{p}\pounds_k u^\varepsilon=0,\quad \pounds_k u^\varepsilon=\frac{\varepsilon}{p}u^\varepsilon_t+\frac{1}{p}\mathcal{B}u^\varepsilon-L_k u^\varepsilon-f_k,$$

где $f_k(x,t)$, $k=1,2,\ldots,p$, — произвольные функции, обладающие той же гладкостью, что и $f(x,t)$ и удовлетворяющие условию $\sum\limits_{k=1}^{p}f_k=f$.

Тогда на каждом полуинтервале $\Delta_k=\left(t_{j+\frac{k-1}{p}},t_{j+\frac{k}{p}}\right]$, $k=1,2,\ldots,p$, будем последовательно решать задачи

$$\pounds_k\vartheta_{(k)}=\frac{\varepsilon}{p}\vartheta_t+\frac{1}{p}\mathcal{B}\vartheta_{(k)}-L_k\vartheta_{(k)}-f_k=0,\quad x\in G,\quad t\in\Delta_k,\quad k=1,2,\ldots,p,\tag{2.1}$$

$$\begin{cases}\Theta_k(x,t)\dfrac{\partial\vartheta_{(k)}}{\partial x_k}=\mu_{-k}(x,t), & x_k=0,\\ -\Theta_k(x,t)\dfrac{\partial\vartheta_{(k)}}{\partial x_k}=\mu_{+k}(x,t), & x_k=l_k,\end{cases}$$

полагая при этом

$$\vartheta_{(1)}(x,0)=u_0(x),\quad \vartheta_{(1)}(x,t_j)=\vartheta_{(p)}(x,t_j),\quad j=0,1,\ldots,j_0-1,$$
$$\vartheta_{(k)}(x,t_{j+\frac{k-1}{p}})=\vartheta_{(k-1)}(x,t_{j+\frac{k-1}{p}}),\quad k=2,3,\ldots,p,$$

Γ — множество граничных точек по направлению x_k.

Будем называть решением этой задачи при $t=t_{j+1}$ функцию $\vartheta(t_{j+1})=\vartheta_{(p)}(t_{j+1})$.

Найдем дискретный аналог $\mathcal{B}u$:

$$\frac{1}{\alpha}\int_0^{t_{j+\frac{k}{p}}}e^{-\frac{1}{\alpha}\left(t_{j+\frac{k}{p}}-\xi\right)}u_\xi\,d\xi=\frac{1}{\alpha}\sum_{s=1}^{pj+k}\int_{t_{\frac{s-1}{p}}}^{t_{\frac{s}{p}}}e^{-\frac{1}{\alpha}\left(t_{j+\frac{k}{p}}-\xi\right)}\dot u(x,\xi)\,d\xi=$$
$$=\frac{1}{\alpha}\sum_{s=1}^{pj+k}\int_{t_{\frac{s-1}{p}}}^{t_{\frac{s}{p}}}e^{-\frac{1}{\alpha}\left(t_{j+\frac{k}{p}}-\xi\right)}\left(\dot u(x,\tilde t)+\ddot u(x,\bar\xi)(\xi-\tilde t)\right)d\xi=\tag{2.2}$$
$$=\sum_{s=1}^{pj+k}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s}{p}}}-e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s+1}{p}}}\right)u_{\bar t}^{\frac{s}{p}}+\frac{1}{\alpha}\sum_{s=1}^{pj+k}\int_{t_{\frac{s-1}{p}}}^{t_{\frac{s}{p}}}e^{-\frac{1}{\alpha}\left(t_{j+\frac{k}{p}}-\xi\right)}\ddot u(x,\bar\xi)(\xi-\tilde t)\,d\xi.$$

где $u_{\bar t}^{\frac{s}{p}}=\frac{u^{\frac{s}{p}}-u^{\frac{s-1}{p}}}{\frac{\tau}{p}}$, $\tilde t=t_{\frac{s}{p}-\frac{1}{2p}}$, $\dot u=\dfrac{\partial u}{\partial t}$, $\ddot u=\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}$, $t_{\frac{s-1}{p}}<\bar\xi<\xi$.

Оценим второе слагаемое в правой части (2.2). Тогда получим

$$\frac{1}{\alpha}\sum_{s=1}^{pj+k}\int_{t_{\frac{s-1}{p}}}^{t_{\frac{s}{p}}}e^{-\frac{1}{\alpha}\left(t_{j+\frac{k}{p}}-\xi\right)}\ddot u(x,\bar\xi)(\xi-\tilde t)\,d\xi\leqslant\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}M\sum_{s=1}^{pj+k}\int_{t_{\frac{s-1}{p}}}^{t_{\frac{s}{p}}}e^{-\frac{1}{\alpha}\left(t_{j+\frac{k}{p}}-\xi\right)}d\xi=$$

$$= \frac{M\tau}{p}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s}{p}}} - e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s+1}{p}}}\right) = \frac{M\tau}{p}\left(1 - e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k}{p}}}\right) \leqslant \frac{M\tau}{p} = O\left(\frac{\tau}{p}\right),$$

где $\ddot{u}(x,\xi) \leqslant M$.

Итак, имеем

$$\frac{1}{\alpha}\int_0^{t_{j+\frac{k}{p}}} e^{-\frac{1}{\alpha}\left(t_{j+\frac{k}{p}}-\xi\right)} u_\xi\, d\xi = \sum_{s=1}^{pj+k}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s}{p}}} - e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s+1}{p}}}\right) u_{\bar{t}}^{\frac{s}{p}} + O\left(\frac{\tau}{p}\right).$$

Каждое из уравнений (2.1) заменим разностной схемой на Δ_k:

$$\begin{gathered}\frac{\varepsilon}{p} y_{\bar{t}}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{p}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s}{p}}} - e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s+1}{p}}}\right) y_{\bar{t}}^{\frac{s}{p}} = \\ = \Lambda_k\left(\sigma_k y^{j+\frac{k}{p}} + (1-\sigma_k) y^{j+\frac{k-1}{p}}\right) + \varphi_k^{j+\frac{k}{p}}, \quad x \in \omega_h, \quad k = 1,2,\ldots,p,\end{gathered} \tag{2.3}$$

$$\begin{cases} a_k^{(1_k)} y_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}} = \widetilde{\mu}_{-k}, & x_k = 0, \\ -a_k^{(N_k)} y_{\bar{x}_k,N_k}^{j+\frac{k}{p}} = \widetilde{\mu}_{+k}, & x_k = l_k, \end{cases} \tag{2.4}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \quad k = 1,2,\ldots,p,$$

σ_k — произвольные параметры, $\gamma_{h,k}$ — множество граничных по направлению x_k узлов,

$$x \in \bar{\omega}_h = \left\{x_i = (i_1h_1,\ldots,i_ph_p) \in \overline{G}, \quad i_k = 0,1,\ldots,N_k, \quad h_k = \frac{l_k}{N_k}\right\},$$

$$a^{(+1)} = a_{i+1}, \quad a_i = \Theta(x_{i-1/2}, t_{j+\frac{k}{p}}), \quad d_k^{j+\frac{k}{p}} = q_k\left(x, t_{j+\frac{k}{p}}\right),$$

$$\varphi_k^{j+\frac{k}{p}} = f_k\left(x, t_{j+\frac{k}{p}}\right), \qquad k = 1,2,\ldots,p,$$

$$\widetilde{\mu}_{\pm k}^{j+\frac{k}{p}} = \sum_{s=0}^{pj+k}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s}{p}}} - e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s+1}{p}}}\right)\mu_{\pm k}\left(x, t_{\frac{s}{p}}\right) + e^{-\frac{1}{\alpha}t_{\frac{s}{p}}}\Theta_k^0 u_0'(x), \qquad y_{\bar{t}}^{\frac{s}{p}} = \frac{y^{\frac{s}{p}} - y^{\frac{s-1}{p}}}{\frac{\tau}{p}}.$$

Разностный оператор $\Lambda_k \sim L_k$ имеет следующий вид.

1. В регулярных узлах:

$$\Lambda_k y^{j+\frac{k}{p}} = \left(a_k y_{\bar{x}_k}^{j+\frac{k}{p}}\right)_{x_k} - d_k y^{j+\frac{k}{p}}, \qquad a^{(+1)} = a_{i+1}, a_i = \Theta(x_{i-1/2}, t_{j+\frac{k}{p}}),$$

2. В нерегулярных узлах:

$$\Lambda_k y_{(k)} = \begin{cases} \dfrac{1}{h_k}\left(a_{k,i_k+1}\dfrac{y^{(+1_k)} - y}{h_k} - a_{k,i_k}\dfrac{y - y^{(-1_k)}}{h_k^*}\right) - d_k y_{(k)}, & x^{(-1_k)} \in \gamma_{h,k}, \\ \dfrac{1}{h_k}\left(a_{k,i_k+1}\dfrac{y^{(+1_k)} - y}{h_k^*} - a_{k,i_k}\dfrac{y - y^{(-1_k)}}{h_k}\right) - d_k y_{(k)}, & x^{(+1_k)} \in \gamma_{h,k}, \end{cases}$$

где h_k^* — расстояние от нерегулярного узла x до граничного узла $x^{(+1_k)}$ или $x^{(-1_k)}$. Если оба соседних с $x \in \omega_{h,k}^*$ узла $x^{(+1_k)}$ и $x^{(-1_k)}$ являются граничными, т. е. $x^{(\pm 1_k)} \in \gamma_{h,k}$, то

$$\Lambda_k y^{j+\frac{k}{p}} = \frac{1}{h_k}\left(a_{k,i_k+1}\frac{y^{(+1_k)} - y}{h_k^*} - a_{k,i_k}\frac{y - y^{(-1_k)}}{h_k^*}\right) - d_k y^{j+\frac{k}{p}},$$

— общий вид оператора, где $h_{k\pm}^*$ — расстояние между x и $x^{(+1_k)}$, $h_{k\pm}^* \leqslant h_k$.

В регулярных узлах Λ_k имеет второй порядок аппроксимации, $\Lambda_k u - L_k u = O(h_k^2)$, а в нерегулярных узлах $\Lambda_k u - L_k u = O(1)$ [33, с. 232].

Условия (2.4) имеют порядок аппроксимации $O(h_k)$. Повысим порядок аппроксимации до $O(h_k^2)$ на решениях уравнения (2.1) при каком-либо k.

Так как

$$\Theta_k \frac{\partial \vartheta_{(k)}}{\partial x_k} = a_k^{(1_k)} \vartheta_{(k)x_k,0} - 0.5h_k \left(\frac{\varepsilon}{p}\vartheta_t + \frac{1}{p}\mathcal{B}\vartheta_{(k)} + q_k(x,t)\vartheta_{(k)} - f_k \right)_0 + O(h_k^2),$$

то

$$a_k^{(1_k)} \vartheta_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}} - 0.5h_k \left(\frac{1}{p} \sum_{s=1}^{pj+k} \left(e^{-\frac{1}{\alpha} t_{j+\frac{k-s}{p}}} - e^{-\frac{1}{\alpha} t_{j+\frac{k-s+1}{p}}} \right) \vartheta_{\bar t}^{\frac{s}{p}} - \frac{\varepsilon}{p}\vartheta_t + q_k(x,t)\vartheta^{j+\frac{k}{p}} - f_k \right)_0 =$$
$$= \widetilde{\mu}_{-k} + O(h_k^2) + O(h_k\tau). \tag{2.5}$$

В (2.5) отбросим величины порядка малости $O(h_k^2)$, $O(h_k\tau)$, тогда после замены $\vartheta_{(k)}$ на y получим

$$\frac{\varepsilon}{p} y_{t,0} + \frac{1}{p}\mathcal{B}_\tau y_0^{j+\frac{k}{p}} = \frac{a_k^{(1_k)} y_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}} - \bar\beta_{-k} y_0^{j+\frac{k}{p}}}{0.5h_k} - \frac{\bar\mu_{-k}}{0.5h_k}. \tag{2.6}$$

Аналогично при $x_k = l_k$ получаем:

$$\frac{\varepsilon}{p} y_{t_N} + \frac{1}{p}\mathcal{B}_\tau y_{N_k}^{j+\frac{k}{p}} = -\frac{a_k^{(N_k)} y_{\bar x_k,N_k}^{j+\frac{k}{p}} + \bar\beta_{+k} y_{N_k}^{j+\frac{k}{p}}}{0.5h_k} - \frac{\bar\mu_{+k}}{0.5h_k}, \tag{2.7}$$

где $\bar\beta_{-k} = 0.5h_k d_k^{(0)}$, $\bar\beta_{+k} = 0.5h_k d_k^{(N_k)}$, $\bar\mu_{-k} = \widetilde{\mu}_{-k} + 0.5h_k f_{k,0}$, $\bar\mu_{+k} = \widetilde{\mu}_{+k} + 0.5h_k f_{k,N_k}$.

Итак, разностный аналог задачи (1.8), (1.6), (1.7) имеет вид:

$$\frac{\varepsilon}{p} y_t + \frac{1}{p}\mathcal{B}_\tau y^{j+\frac{k}{p}} = \bar\Lambda_k y^{j+\frac{k}{p}} + \Phi_k^{j+\frac{k}{p}}, \quad k = 1, 2, \ldots, p, \tag{2.8}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \tag{2.9}$$

где

$$\bar\Lambda_k y = \begin{cases} \Lambda_k y = (a_k y_{\bar x_k})_{x_k} - d_k y, & x_k \in \omega_{h_k}, \\ \Lambda_k^- y = \dfrac{a_k^{(1_k)} y_{x_k,0} - \bar\beta_{-k} y_0}{0.5h_k}, & x_k = 0, \\ \Lambda_k^+ y = -\dfrac{a_k^{(N_k)} y_{\bar x_k,N_k} + \bar\beta_{+k} y_{N_k}}{0.5h_k}, & x_k = l_k, \end{cases} \qquad \Phi_{(k)} = \begin{cases} \varphi_k, & x_k \in \omega_{h_k}, \\ \dfrac{\bar\mu_{-k}}{0.5h_k}, & x_k = 0, \\ \dfrac{\bar\mu_{+k}}{0.5h_k}, & x_k = l_k. \end{cases}$$

§ 3. Погрешность аппроксимации ЛОС

Перейдем к изучению погрешности аппроксимации (невязки) локально-одномерной схемы и убедимся в том, что каждое в отдельности уравнение (2.3) номера k не аппроксимирует уравнение (1.8), но сумма погрешностей аппроксимации $\psi = \psi_1 + \psi_2 + \ldots + \psi_p$ стремится к нулю при τ и $|h|$, стремящимся к нулю.

Будем считать $\sigma_k = 1$, $k = 1, 2, \ldots, p$. Пусть $u = u(x,t)$ — решение задачи (1.8), а $y^{j+\frac{k}{p}}$ — решение разностной задачи (2.3). Характеристикой точности локально-одномерной схемы является разность $y^{j+1}-u^{j+1}=z^{j+1}$. Промежуточные значения $y^{j+\frac{k}{p}}$ будем сравнивать с $u^{j+\frac{k}{p}}=u(x,t_{j+\frac{k}{p}})$, полагая $z^{j+\frac{k}{p}}=y^{j+\frac{k}{p}}-u^{j+\frac{k}{p}}$. Подставляя $y^{j+\frac{k}{p}}=z^{j+\frac{k}{p}}+u^{j+\frac{k}{p}}$ в разностное уравнение (2.3), получим

$$\frac{\varepsilon}{p}z_{\bar{t}}^{j+\frac{k}{p}}+\frac{1}{p}\mathcal{B}_\tau z^{j+\frac{k}{p}}=\Lambda_k z^{j+\frac{k}{p}}+\psi_k^{j+\frac{k}{p}}, \tag{3.1}$$

$$\psi_k^{j+\frac{k}{p}}=\Lambda_k u^{j+\frac{k}{p}}+\varphi_k^{j+\frac{k}{p}}-\frac{1}{p}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s}{p}}}-e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s+1}{p}}}\right)u_{\bar{t}}^{\frac{s}{p}}-\frac{\varepsilon}{p}u_{\bar{t}}^{j+\frac{k}{p}},$$

$$\mathcal{B}_\tau z^{j+\frac{k}{p}}=\sum_{s=1}^{pj+k}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s}{p}}}-e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s+1}{p}}}\right)z_{\bar{t}}^{\frac{s}{p}}.$$

Вводя обозначение

$$\overset{\circ}{\psi}_k=\left(L_k u+f_k-\frac{\varepsilon}{p}u_t-\frac{1}{p}\mathcal{B}u\right)^{j+\frac{1}{2}} \tag{3.2}$$

и замечая, что $\sum\limits_{k=1}^{p}\overset{\circ}{\psi}_k=0$, если $\sum\limits_{k=1}^{p}f_k=f$, представим $\psi_k=\psi_k^{j+\frac{k}{p}}$ в виде $\psi_k=\overset{\circ}{\psi}_k+\overset{*}{\psi}_k$, где

$$\overset{*}{\psi}_k=\left(\Lambda_k u^{j+\frac{k}{p}}-L_k u^{j+\frac{1}{2}}\right)+\left(\varphi_k^{j+\frac{k}{p}}-f_k^{j+\frac{1}{2}}\right)-$$
$$-\left(\frac{1}{p}\mathcal{B}_\tau u^{j+\frac{k}{p}}-\frac{1}{p}\left(\mathcal{B}u\right)^{j+\frac{1}{2}}\right)-\left(\frac{\varepsilon}{p}u_{\bar{t}}^{j+\frac{k}{p}}-\frac{\varepsilon}{p}u_t^{j+\frac{1}{2}}\right).$$

Ясно, что

$$\overset{*}{\psi}_k=\begin{cases}O(h_k^2+\tau) \text{ в регулярных узлах,}\\ O(1) \text{ в нерегулярных узлах,}\end{cases}$$

так как каждая из схем (2.3) номера k аппроксимирует в обычном смысле соответствующее уравнение (2.1). Таким образом

$$\overset{*}{\psi}_k=O(h_k^2+\tau),\quad \overset{\circ}{\psi}_k=O(1),\quad \sum_{k=1}^{p}\overset{\circ}{\psi}_k=0,\quad \sum_{k=1}^{p}\psi_k=\sum_{k=1}^{p}\left(\overset{\circ}{\psi}_k+\overset{*}{\psi}_k\right)=\sum_{k=1}^{p}\overset{*}{\psi}_k=O(|h|^2+\tau),$$

в регулярных узлах сетки ω_h.

Рассмотрим теперь погрешность краевых условий разностной схемы (2.6), (2.7), обозначив через $z^{j+\frac{k}{p}}=y^{j+\frac{k}{p}}-u^{j+\frac{k}{p}}$. Запишем граничное условие при $x_k=0$ следующим образом:

$$0.5h_k\frac{\varepsilon}{p}y_{t,0}+\frac{0.5h_k}{p}\mathcal{B}_\tau y_0^{j+\frac{k}{p}}=a_k^{(1_k)}y_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}}-\bar{\beta}_{-k}y_0^{j+\frac{k}{p}}+0.5h_k f_{k,0}+\mu_{-k}, \tag{3.3}$$

Тогда, подставляя $y^{j+\frac{k}{p}}=z^{j+\frac{k}{p}}+u^{j+\frac{k}{p}}$ в (3.3), получим

$$0.5h_k\frac{\varepsilon}{p}z_{t,0}+\frac{0.5h_k}{p}\mathcal{B}_\tau z_0^{j+\frac{k}{p}}=a_k^{(1_k)}z_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}}-\bar{\beta}_{-k}z_0^{j+\frac{k}{p}}-\bar{\beta}_{-k}u_0^{j+\frac{k}{p}}-$$
$$-0.5h_k\frac{\varepsilon}{p}u_{t,0}-\frac{0.5h_k}{p}\mathcal{B}_\tau u_0^{j+\frac{k}{p}}+a_k^{(1_k)}u_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}}+0.5h_k f_{k,0}+\mu_{-k}.$$

К правой части полученного выражения добавим и вычтем

$$0.5h_k \overset{\circ}{\psi}_{-k} = 0.5h_k \left(L_k u + f_k - \frac{\varepsilon}{p} u_t - \frac{1}{p} \mathcal{B} u \right)_0^{j+\frac{1}{2}}.$$

Тогда

$$\psi_{-k} = 0.5h_k \left(f_{k,0} - \frac{\varepsilon}{p} u_{t,0}^{j+\frac{k}{p}} - \frac{1}{p} \mathcal{B}_\tau u_0^{j+\frac{k}{p}} \right) + a_k^{(1_k)} u_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}} - \bar{\beta}_{-k} u_0^{j+\frac{k}{p}} - \mu_{-k} -$$

$$- 0.5h_k \left(L_k u + f_k - \frac{\varepsilon}{p} u_t - \frac{1}{p} \mathcal{B} u \right)_0^{j+\frac{1}{2}} + 0.5h_k \overset{\circ}{\psi}_{-k} =$$

$$= a_k^{(1_k)} u_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}} - \bar{\beta}_{-k} u_0^{j+\frac{k}{p}} - \mu_{-k} - 0.5h_k \left(L_k u \right)_0^{j+\frac{1}{2}} + 0.5h_k \overset{\circ}{\psi}_{-k} + O(h_k \tau) =$$

$$= \Theta_k \frac{\partial u^{j+\frac{k}{p}}}{\partial x_k} + 0.5h_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\Theta_k \frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^{j+\frac{k}{p}} - 0.5h_k d_{k,0} u_0^{j+\frac{k}{p}} - \mu_{-k} -$$

$$- 0.5h_k \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\Theta_k \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) - q_k u \right)_0^{j+\frac{1}{2}} + 0.5h_k \overset{\circ}{\psi}_{-k} + O(h_k^2) + O(h_k \tau) =$$

$$= \left[\Theta_k \frac{\partial u^{j+\frac{k}{p}}}{\partial x_k} - \mu_{-k} \right] \Bigg|_{x_k=0} + 0.5h_k \overset{\circ}{\psi}_{-k} + O(h_k^2) + O(h_k \tau).$$

В силу граничных условий (2.4) выражение, стоящее в квадратных скобках, равно нулю, поэтому

$$\psi_{-k} = 0.5h_k \overset{\circ}{\psi}_{-k} + \overset{*}{\psi}_{-k}, \quad \overset{*}{\psi}_{-k} = O(h_k^2 + \tau) + O(h_k \tau).$$

Итак,

$$\frac{\varepsilon}{p} z_{t,0} + \frac{1}{p} \mathcal{B}_\tau z_0^{j+\frac{k}{p}} = \Lambda_k^- z^{j+\frac{k}{p}} + \psi_{-k}, \quad \psi_{-k} = \overset{\circ}{\psi}_{-k} + \frac{\psi^*{}_{-k}}{0.5h_k}. \tag{3.4}$$

Аналогично при $x_\alpha = l_\alpha$ имеем

$$\frac{\varepsilon}{p} z_{t,N_k} + \frac{1}{p} \mathcal{B}_\tau z_{N_k}^{j+\frac{k}{p}} = \Lambda_k^+ z^{j+\frac{k}{p}} + \psi_{+k}, \quad \psi_{+k} = \overset{\circ}{\psi}_{+k} + \frac{\psi^*{}_{+k}}{0.5h_k}, \tag{3.5}$$

$$\overset{\circ}{\psi}_{\pm k} = O(1), \quad \sum_{k=1}^{p} \overset{\circ}{\psi}_{\pm k} = 0, \quad \overset{*}{\psi}_{\pm k} = O(h_k^2 + \tau) + O(h_k \tau).$$

Очевидно, что

$$\overset{*}{\psi}_{\pm k} = \begin{cases} O(h_k^2 + \tau) + O(h_k \tau), & \text{в регулярных узлах,} \\ O(1) & \text{в нерегулярных узлах.} \end{cases}$$

Учитывая (3.1)–(3.5), для погрешности $z^{j+\frac{k}{p}}$ получаем задачу:

$$\frac{\varepsilon}{p} z_{\bar{t}}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{p} \mathcal{B}_\tau z^{j+\frac{k}{p}} = \bar{\Lambda}_k z^{j+\frac{k}{p}} + \Psi_k^{j+\frac{k}{p}},$$

$$z(x, 0) = 0,$$

где

$$\bar{\Lambda}_k = \begin{cases} \Lambda_k, & x_k \in \omega_{h_k} \\ \Lambda_k^-, & x_k = 0, \\ \Lambda_k^+, & x_k = l_k, \end{cases} \qquad \Psi_k = \begin{cases} \psi_k, & x_k \in \omega_{h_k} \\ \psi_{-k}, & x_k = 0, \\ \psi_{+k}, & x_k = l_k, \end{cases} \qquad \psi_k = \overset{\circ}{\psi}_k + \overset{*}{\psi}_k, \quad \overset{\circ}{\psi}_k = O(1),$$

$$\sum_{k=1}^{p} \overset{\circ}{\psi}_k = 0, \qquad \psi = \sum_{k=1}^{p} \psi_k = \sum_{k=1}^{p} \left(\overset{\circ}{\psi}_k + \overset{*}{\psi}_k \right) = \sum_{k=1}^{p} \overset{*}{\psi}_k = O(|h|^2 + \tau),$$

$$\overset{*}{\psi}_k = O\left(h_k^2 + \tau\right), \qquad \psi_{-k} = \overset{\circ}{\psi}_{-k} + \frac{\overset{*}{\psi}_{-k}}{0.5h_k}, \qquad \psi_{+k} = \overset{\circ}{\psi}_{+k} + \frac{\overset{*}{\psi}_{+k}}{0.5h_k},$$

$$\psi_{\pm k} = O(h_k^2 + \tau), \qquad \overset{*}{\psi}_{\pm k} = O(h_k^2) + O(h_k\tau), \qquad \overset{\circ}{\psi}_{\pm k} = O(1), \qquad \sum_{k=1}^{p} \overset{\circ}{\psi}_{\pm k} = 0.$$

Таким образом, ЛОС (2.8), (2.9) обладает суммарной аппроксимацией $O(|h|^2 + \tau)$ в регулярных узлах сетки $\bar{\omega}_h$. В нерегулярных узлах $\psi = O(1)$.

§ 4. Устойчивость ЛОС

Получим априорную оценку в сеточной норме C для решения разностной задачи (2.8), (2.9), выражающую устойчивость локально-одномерной схемы по начальным данным и правой части. Разностную задачу (2.8), (2.9) перепишем в виде

$$\frac{\varepsilon}{p} y_{\bar{t}}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{p} \sum_{s=1}^{pj+k} \left(e^{-\frac{1}{\alpha} t_{j+\frac{k-s}{p}}} - e^{-\frac{1}{\alpha} t_{j+\frac{k-s+1}{p}}} \right) y_{\bar{t}}^{\frac{s}{p}} = \left(a_k y_{\bar{x}_k}^{j+\frac{k}{p}} \right)_{x_k} - d_k y^{j+\frac{k}{p}} + \varphi_k^{j+\frac{k}{p}}, \quad x_k \in \omega_{h_k}, \tag{4.1}$$

$$\frac{\varepsilon}{p} y_{\bar{t},0}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{p} \sum_{s=1}^{pj+k} \left(e^{-\frac{1}{\alpha} t_{j+\frac{k-s}{p}}} - e^{-\frac{1}{\alpha} t_{j+\frac{k-s+1}{p}}} \right) y_{\bar{t},0}^{\frac{s}{p}} = \frac{a_k^{(1_k)} y_{x_k,0}^{j+\frac{s}{p}} - \bar{\beta}_{-k} y_0^{j+\frac{k}{p}}}{0.5h_k} + \frac{\bar{\mu}_{-k}}{0.5h_k}, \tag{4.2}$$

$$\frac{\varepsilon}{p} y_{\bar{t},N}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{p} \sum_{s=1}^{pj+k} \left(e^{-\frac{1}{\alpha} t_{j+\frac{k-s}{p}}} - e^{-\frac{1}{\alpha} t_{j+\frac{k-s+1}{p}}} \right) y_{\bar{t},N_k}^{\frac{s}{p}} = -\frac{a_k^{(N_k)} y_{\bar{x}_k,N_k}^{j+\frac{s}{p}} + \bar{\beta}_{+k} y_{N_k}^{j+\frac{k}{p}}}{0.5h_k} + \frac{\bar{\mu}_{+k}}{0.5h_k}, \tag{4.3}$$

$$y(x, 0) = u_0(x). \tag{4.4}$$

Исследование устойчивости разностной схемы (4.1)–(4.4) будем проводить с помощью принципа максимума [36, с. 339]. Получим априорную оценку для (4.1)–(4.4), для этого решение задачи (4.1)–(4.4) представим в виде суммы

$$y = \overline{y} + v + w,$$

где $\overline{y}$ — решение однородных уравнений (4.1) с неоднородными краевыми условиями (4.2), (4.3) и однородными начальными условиями (4.4):

$$\frac{\varepsilon}{p} \overline{y}_{\bar{t}}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{p} \sum_{s=1}^{pj+k} \left(e^{-\frac{1}{\alpha} t_{j+\frac{k-s}{p}}} - e^{-\frac{1}{\alpha} t_{j+\frac{k-s+1}{p}}} \right) \overline{y}_{\bar{t}}^{\frac{s}{p}} = \left(a_k \overline{y}_{\bar{x}_k}^{j+\frac{k}{p}} \right)_{x_k} - d_k \overline{y}^{j+\frac{k}{p}}, \tag{4.5}$$

а v — решение неоднородного уравнения (4.1) с однородными краевыми (4.2), (4.3) и неоднородными начальными условиями (4.4):

$$\frac{\varepsilon}{p} v_t^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{p} \sum_{s=1}^{pj+k} \left(e^{-\frac{1}{\alpha} t_{j+\frac{k-s}{p}}} - e^{-\frac{1}{\alpha} t_{j+\frac{k-s+1}{p}}} \right) v_{\bar{t}}^{\frac{s}{p}} = \left(a_k v_{\bar{x}_k}^{j+\frac{k}{p}} \right)_{x_k} - d_k v^{j+\frac{k}{p}} + \overset{\circ}{\varphi}_k^{j+\frac{k}{p}}, \tag{4.6}$$

и w — решение неоднородного уравнения (4.1) с однородными краевыми и начальными условиями (4.2)–(4.4):

$$\frac{\varepsilon}{p} w_t^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{p}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s}{p}}} - e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s+1}{p}}}\right) w_t^{\frac{s}{p}} = \left(a_k w_{\bar{x}_k}^{j+\frac{k}{p}}\right)_{x_k} - d_k w^{j+\frac{k}{p}} + \overset{*}{\varphi}{}_k^{j+\frac{k}{p}}, \tag{4.7}$$

где $\overset{\circ}{\varphi}{}_k^{j+\frac{k}{p}}$, $\overset{*}{\varphi}{}_k^{j+\frac{k}{p}}$ определяются условиями

$$\overset{\circ}{\varphi}{}_k^{j+\frac{k}{p}} = \begin{cases}\varphi_k, & x\in \overset{\circ}{\omega}_h,\\ 0, & x\in\overset{*}{\omega}_h,\end{cases} \qquad \overset{*}{\varphi}{}_k^{j+\frac{k}{p}} = \begin{cases}\varphi_k, & x\in \overset{*}{\omega}_h,\\ 0, & x\in\overset{\circ}{\omega}_h,\end{cases}$$

так, что $\overset{\circ}{\varphi}_k + \overset{*}{\varphi}_k = \varphi_k$ при $x\in\omega_h$, т. е. $\overset{*}{\varphi}_k$ отлична от нуля только в приграничных узлах.

Получим оценку для $\bar{y}$. Для этого уравнение (4.5) приведем к каноническому виду. В точке $P = P(x_{i_k}, t_{j+\frac{k}{p}})$ имеем:

$$\left[\frac{1}{\tau}\left(\varepsilon + 1 - e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right) + \frac{a_{k,i_k+1}}{h_k h^*_{k_+}} + \frac{a_{k,i_k}}{h_k h^*_{k_-}} + d_k\right]\bar{y}_{i_k}^{j+\frac{k}{p}} = \frac{a_{k,i_k+1}}{h_k h^*_{k_+}}\bar{y}_{i_k+1}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{a_{k,i_k}}{h_k h^*_{k_-}}\bar{y}_{i_{k-1}}^{j+\frac{k}{p}} +$$
$$+\frac{1}{\tau}\left[\varepsilon + \left(1 - e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right)^2\right]\bar{y}_{i_k}^{j+\frac{k-1}{p}} + \frac{1}{\tau}\left[e^{-\frac{1}{\alpha}t_{\frac{1}{p}}} - 2e^{-\frac{1}{\alpha}t_{\frac{2}{p}}} + e^{-\frac{1}{\alpha}t_{\frac{3}{p}}}\right]\bar{y}_{i_k}^{j+\frac{k-2}{p}} + \ldots +$$
$$+\frac{1}{\tau}\left[e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-2}{p}}} - 2e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-1}{p}}} + e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k}{p}}}\right]\bar{y}_{i_k}^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{\tau}\left[e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-1}{p}}} - e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k}{p}}}\right]\bar{y}_{i_k}^{0}.$$

К каноническому виду следует привести и граничные условия. В точке $P = P(x_0, t_{j+\frac{k}{p}})$ имеем:

$$\left[\frac{1}{\tau}\left(\varepsilon + 1 - e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right) + \frac{a_k^{(1_k)}}{0.5h_k h^*_{k_+}} + d_k^{(0)}\right]\bar{y}_0^{j+\frac{k}{p}} = \frac{a_k^{(1_k)}}{0.5h_k h^*_{k_+}}\bar{y}_1^{j+\frac{k}{p}} +$$
$$+\frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{1}{\tau}\left(1 - e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right)^2\bar{y}_0^{j+\frac{k-1}{p}} + \frac{1}{\tau}e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\left(1 - e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right)^2\bar{y}_0^{j+\frac{k-2}{p}} + \ldots +$$
$$+\frac{1}{\tau}e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-2}{p}}}\left(1 - e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right)^2\bar{y}_0^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{\tau}e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-1}{p}}}\left(1 - e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right)^2\bar{y}_0^{0}.$$

В точке $P = P(x_{N_k}, t_{j+\frac{k}{p}})$ имеем:

$$\left[\frac{1}{\tau}\left(\varepsilon + 1 - e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right) + \frac{a_k^{(N_k)}}{0.5h_k h^*_{k_-}} + d_k^{(N_k)}\right]\bar{y}_{N_k}^{j+\frac{k}{p}} = \frac{a_k^{(N_k)}}{0.5h_k h^*_{k_-}}\bar{y}_{N_k-1}^{j+\frac{k}{p}} +$$
$$+\frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{1}{\tau}\left(1 - e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right)^2\bar{y}_{N_k}^{j+\frac{k-1}{p}} + \frac{1}{\tau}e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\left(1 - e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right)^2\bar{y}_{N_k}^{j+\frac{k-2}{p}} + \ldots +$$
$$+\frac{1}{\tau}e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-2}{p}}}\left(1 - e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right)^2\bar{y}_{N_k}^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{\tau}e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-1}{p}}}\left(1 - e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right)^2\bar{y}_{N_k}^{0}.$$

В [36] доказан принцип максимума и получены априорные оценки для решения сеточного уравнения общего вида

$$A(P)y(P) = \sum_{Q\in\Psi'(P)} B(P,Q)y(Q) + F(P), \quad P\in\Omega,$$

где P, Q — узлы сетки $\Omega + S$, $W'(P)$ — окрестность узла P, не содержащего самого узла P. Коэффициенты $A(P)$, $B(P,Q)$ удовлетворяют условиям

$$A(P) > 0, \quad B(P,Q) > 0, \quad D(P) = A(P) - \sum_{Q \in W'(P)} B(P,Q) \geqslant 0.$$

Обозначим через $P(x,t')$, где $x \in \omega_h$, $t' \in \omega'_\tau$, узел $(p+1)$-мерной сетки $\Omega = \omega_h \times \omega'_\tau$, через S — границу Ω, состоящую из узлов $P(x,0)$ при $x \in \overline{\omega}_h$ и узлов $P(x, t_{j+\frac{k}{p}})$ при $t_{j+\frac{k}{p}} \in \omega'_\tau$ и $x \in \gamma_{h,k}$ для всех $k = 1,2,\ldots,p$, $j = 0,1,\ldots,j_0$, $\overset{*}{\Omega}_k$ — множество узлов $P(x, t_{j+\frac{k}{p}})$, где $x \in \overset{*}{\omega}_{h,k}$, — приграничный по направлению x_k узел сетки $\bar{\omega}_h$.

Проверим, учитывая положительность выражений, стоящих в круглых скобках, выполнимость условий теоремы 1 [36].

В точке $P = P(x_{i_k}, t_{j+\frac{k}{p}})$ имеем:

$$A(P) = \left[\frac{1}{\tau}\left(\varepsilon + 1 - e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right) + \frac{a_{k,i_k+1}}{h_k h^*_{k_+}} + \frac{a_{k,i_k}}{h_k h^*_{k_-}} + d_k\right] > 0, \qquad D(P) = d_k \geqslant c_0 > 0,$$

$$B(P,Q) = \left\{\frac{a_{k,i_k+1}}{h_k h^*_{k_+}}; \frac{a_{k,i_k}}{h_k h^*_{k_-}}; \frac{1}{\tau}\left[\varepsilon + \left(1 - e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right)^2\right]; \frac{1}{\tau}\left[e^{-\frac{1}{\alpha}t_{\frac{1}{p}}} - 2e^{-\frac{1}{\alpha}t_{\frac{2}{p}}} + e^{-\frac{1}{\alpha}t_{\frac{3}{p}}}\right]; \ldots;\right.$$
$$\left.\ldots; \frac{1}{\tau}\left[e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-2}{p}}} - 2e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-1}{p}}} + e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k}{p}}}\right]; \frac{1}{\tau}\left[e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-1}{p}}} - e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k}{p}}}\right]\right\} > 0,$$

а в точке $P = P(x_0, t_{j+\frac{k}{p}})$ имеем:

$$A(P) = \left[\frac{1}{\tau}\left(\varepsilon + 1 - e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right) + \frac{a_k^{(1_k)}}{0.5 h_k h^*_{k_+}} + d_k^{(0)}\right] > 0, \qquad D(P) = d_k^{(0)} \geqslant c_0 > 0,$$

$$B(P,Q) = \left\{\frac{a_k^{(1_k)}}{0.5 h_k h^*_{k_+}}; \frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{1}{\tau}\left(1 - e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right)^2; \frac{1}{\tau}e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\left(1 - e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right)^2; \ldots;\right.$$
$$\left.\ldots; \frac{1}{\tau}e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-2}{p}}}\left(1 - e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right)^2; \frac{1}{\tau}e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-1}{p}}}\left(1 - e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right)^2\right\} > 0.$$

В точке $P = P(x_{N_k}, t_{j+\frac{k}{p}})$ имеем:

$$A(P) = \left[\frac{1}{\tau}\left(\varepsilon + 1 - e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right) + \frac{a_k^{(N_k)}}{0.5 h_k h^*_{k_-}} + d_k^{(N_k)}\right] > 0, \qquad D(P) = d_k^{(N_k)} \geqslant c_0 > 0,$$

$$B(P,Q) = \left\{\frac{a_k^{(N_k)}}{0.5 h_k h^*_{k_-}}; \frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{1}{\tau}\left(1 - e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right)^2; \frac{1}{\tau}e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\left(1 - e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right)^2; \ldots;\right.$$
$$\left.\ldots; \frac{1}{\tau}e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-2}{p}}}\left(1 - e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right)^2; \frac{1}{\tau}e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-1}{p}}}\left(1 - e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right)^2\right\} > 0.$$

Таким образом, на основании теоремы 1 [36] для $\bar{y}$ получаем оценку:

$$\|\bar{y}^{j+1}\|_C \leqslant \frac{1}{c_0}\max_{0<t'\leqslant t_j}\left(\|\bar{\mu}_{-k}(x,t')\|_{C_\gamma} + \|\bar{\mu}_{+k}(x,t')\|_{C_\gamma}\right), \tag{4.8}$$

где $\|y\|_C = \max_{x\in\bar\omega_h}|y|$, $\|y\|_{C_\gamma} = \max_{x\in\gamma_h}|y|$.

Переходим к оценке функции v. Уравнение (4.6) перепишем в каноническом виде:

$$\left[\frac{1}{\tau}\left(\varepsilon+1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right)+\frac{a_{k,i_k+1}}{h_kh^*_{k_+}}+\frac{a_{k,i_k}}{h_kh^*_{k_-}}+d_k\right]v_{i_k}^{j+\frac{k}{p}}=\frac{a_{k,i_k+1}}{h_kh^*_{k_+}}v_{i_k+1}^{j+\frac{k}{p}}+\frac{a_{k,i_k}}{h_kh^*_{k_-}}v_{i_{k-1}}^{j+\frac{k}{p}}+\Phi(P_{j+\frac{k}{p}}),$$

где

$$\Phi(P_{j+\frac{k}{p}})=\frac{1}{\tau}\left(\varepsilon+\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right)^2\right)v_{i_k}^{j+\frac{k-1}{p}}+\overline{\varphi}_k^{j+\frac{k}{p}},\qquad \overline{\varphi}_k^{j+\frac{k}{p}}=\overset{\circ}{\varphi}{}_k^{j+\frac{k}{p}}+$$
$$+\frac{1}{\tau}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{\frac{1}{p}}}-e^{-\frac{1}{\alpha}t_{\frac{2}{p}}}\right)v_{i_k}^{j+\frac{k-2}{p}}-\frac{1}{\tau}\sum_{s=1}^{pj+k-2}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s}{p}}}-e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s+1}{p}}}\right)\left(v_{i_k}^{\frac{s}{p}}-v_{i_k}^{\frac{s-1}{p}}\right).$$

Проверим выполнимость условий теоремы 2 [36], тогда в точке $P_{(k)}=P(x,t_{j+\frac{k}{p}})$ имеем:

$$A(P_{(k)})=\left[\frac{1}{\tau}\left(\varepsilon+1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right)+\frac{a_{k,i_k+1}}{h_kh^*_{k_+}}+\frac{a_{k,i_k}}{h_kh^*_{k_-}}+d_k\right]>0,$$

$$B(P_{(k)},Q)=\left\{\frac{a_{k,i_k+1}}{h_kh^*_{k_+}};\frac{a_{k,i_k}}{h_kh^*_{k_-}};\frac{1}{\tau}\left[\varepsilon+\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right)^2\right];\frac{1}{\tau}\left[e^{-\frac{1}{\alpha}t_{\frac{1}{p}}}-2e^{-\frac{1}{\alpha}t_{\frac{2}{p}}}+e^{-\frac{1}{\alpha}t_{\frac{3}{p}}}\right];\ldots;\right.$$
$$\left.\ldots;\frac{1}{\tau}\left[e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-2}{p}}}-2e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-1}{p}}}+e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k}{p}}}\right];\frac{1}{\tau}\left[e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-1}{p}}}-e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k}{p}}}\right]\right\}>0,$$

$$D'(P_{(k)})=A(P_{(k)})-\sum_{Q\in W'_k(P)}B(P_{(k)},Q)=\frac{1}{\tau}\left(\varepsilon+1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right)+d_k\geqslant\frac{1}{\tau}\left(\varepsilon+1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right)>0, \tag{4.9}$$

для всех $Q\in W''_{k-1}$, $Q\in W'_k$,

$$\sum_{Q\in W''_{k-1}}B(P_{(k)},Q)=\frac{1}{\tau}\left[\varepsilon+\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right)^2\right]>0,$$

$$\frac{1}{D'(P_{(k)})}\sum_{Q\in W''_{k-1}}B(P_{(k)},Q)=\frac{\varepsilon+\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right)^2}{\varepsilon+1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}}\leqslant 1,$$

где

$$W'_{(P(k))}=W_k+W''_{k-1},\quad W'_k\text{ — множество узлов }\ Q=Q(\xi,t_k)\in W'_{(P(x,t_k))},$$
$$W''_{k-1}\text{ — множество узлов }\ Q=Q(\xi,t_{k-1})\in W'_{(P(x,t_{k-1}))}.$$

На основании теоремы 2 [36] и в силу (4.9) для v получаем оценку:

$$\|v^{j+\frac{k}{p}}\|_C\leqslant\frac{\tau}{\varepsilon+1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}}\|\overline{\varphi}_k^{j+\frac{k}{p}}\|_C+\frac{\varepsilon+\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right)^2}{\varepsilon+1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}}\|v^{j+\frac{k}{p}}\|_C. \tag{4.10}$$

Оценим $\|\bar{\varphi}_k^{j+\frac{k}{p}}\|_C$, где

$$\bar{\varphi}_k^{j+\frac{k}{p}} = \overset{\circ}{\varphi}{}_k^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{\tau}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{\frac{1}{p}}} - e^{-\frac{1}{\alpha}t_{\frac{2}{p}}}\right) v_{i_k}^{j+\frac{k-2}{p}} -$$
$$- \frac{1}{\tau}\sum_{s=1}^{pj+k-2}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s}{p}}} - e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s+1}{p}}}\right)\left(v_{i_k}^{\frac{s}{p}} - v_{i_k}^{\frac{s-1}{p}}\right) = \overset{\circ}{\varphi}{}_k^{j+\frac{k}{p}} +$$
$$+ \frac{1}{\tau}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-1}{p}}} - e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k}{p}}}\right) v_{i_k}^0 + \frac{1}{\tau}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-2}{p}}} - 2e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-1}{p}}} + e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k}{p}}}\right) v_{i_k}^{\frac{1}{p}} + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{\tau}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{\frac{1}{p}}} - 2e^{-\frac{1}{\alpha}t_{\frac{2}{p}}} + e^{-\frac{1}{\alpha}t_{\frac{3}{p}}}\right) v_{i_k}^{j+\frac{k-2}{p}}. \tag{4.11}$$

Так как выражения, стоящие в круглых скобках, положительны, то из (4.11) получаем оценку

$$\|\bar{\varphi}_k^{j+\frac{k}{p}}\|_C \leqslant \|\overset{\circ}{\varphi}{}_k^{j+\frac{k}{p}}\|_C + \frac{1}{\tau}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{\frac{1}{p}}} - e^{-\frac{1}{\alpha}t_{\frac{2}{p}}}\right)\max_{0\leqslant s\leqslant k-2}\|v^{j+\frac{s}{p}}\|_C. \tag{4.12}$$

С помощью (4.12) из (4.10) находим

$$\begin{aligned}\max_{0\leqslant s\leqslant k}\|v^{j+\frac{s}{p}}\|_C &\leqslant \max_{0\leqslant s\leqslant k-1}\|v^{j+\frac{s}{p}}\|_C + \frac{\tau}{\varepsilon + 1 - e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}} + \tau d_k}\max_{0\leqslant s\leqslant k}\|\overset{\circ}{\varphi}{}_k^{j+\frac{s}{p}}\|_C \leqslant \\ &\leqslant \max_{0\leqslant s\leqslant k-1}\|v^{j+\frac{s}{p}}\|_C + \frac{\tau}{\varepsilon + 1 - e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}}\max_{0\leqslant s\leqslant k}\|\overset{\circ}{\varphi}{}_k^{j+\frac{s}{p}}\|_C.\end{aligned} \tag{4.13}$$

Суммируем (4.13) сначала по $k = 1, 2, \ldots, p$, затем по $j' = 0, 1, 2, \ldots, j$. Тогда получим

$$\|v^{j+\frac{k}{p}}\|_C \leqslant \|v^0\|_C + \sum_{j'=0}^{j}\frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau}\sum_{k=1}^{p}\max_{0\leqslant s\leqslant k}\|\overset{\circ}{\varphi}{}_k^{j'+\frac{s}{p}}\|_C, \tag{4.14}$$

где $\gamma = \frac{1}{p\alpha}e^{-\frac{\tau}{p\alpha}}$.

Рассмотрим теперь задачу (4.7) для w. Тогда перепишем уравнение (4.7) в каноническом виде

$$\left[\frac{1}{\tau}\left(\varepsilon + 1 - e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right) + \frac{a_{k,i_k+1}}{h_k h^*_{k_+}} + \frac{a_{k,i_k}}{h_k h^*_{k_-}} + d_k\right] w_{i_k}^{j+\frac{k}{p}} = \frac{a_{k,i_k+1}}{h_k h^*_{k_+}} w_{i_k+1}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{a_{k,i_k}}{h_k h^*_{k_-}} w_{i_k-1}^{j+\frac{k}{p}} +$$
$$+ \frac{1}{\tau}\left[\varepsilon + \left(1 - e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right)^2\right] w_{i_k}^{j+\frac{k-1}{p}} + \frac{1}{\tau}\left[e^{-\frac{1}{\alpha}t_{\frac{1}{p}}} - 2e^{-\frac{1}{\alpha}t_{\frac{2}{p}}} + e^{-\frac{1}{\alpha}t_{\frac{3}{p}}}\right] w_{i_k}^{j+\frac{k-2}{p}} + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{\tau}\left[e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-2}{p}}} - 2e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-1}{p}}} + e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k}{p}}}\right] w_{i_k}^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{\tau}\left[e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-1}{p}}} - e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k}{p}}}\right] w_{i_k}^0 + \overset{*}{\varphi}{}_k^{j+\frac{k}{p}},$$

и присоединим однородные граничные и начальные условия

$$\frac{\varepsilon}{p} w_{\bar{t},0}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{p}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s}{p}}} - e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s+1}{p}}}\right) w_{\bar{t},0}^{\frac{s}{p}} = \frac{a_k^{(1_k)} w_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}} - \bar{\beta}_{-k} w_0^{j+\frac{k}{p}}}{0.5h_k}, \tag{4.15}$$

$$\frac{\varepsilon}{p} w_{\bar{t},N_k}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{p}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s}{p}}} - e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s+1}{p}}}\right) w_{\bar{t},N_k}^{\frac{s}{p}} = -\frac{a_k^{(N_k)} w_{\bar{x}_k,N_k}^{j+\frac{k}{p}} + \bar{\beta}_{+k} w_{N_k}^{j+\frac{k}{p}}}{0.5h_k}, \tag{4.16}$$

$$w(x, 0) = 0,$$

т. е. $w = 0$ на границе S сетки Ω, т. е. $w(P) = 0$ при $P \in S$.

Правая часть $\overset{*}{\varphi}$ отлична от нуля лишь в узлах (x, t'), где $x \in \overset{*}{\omega}_h$. Видно, что

$$A(P) = \left[\frac{1}{\tau}\left(\varepsilon + 1 - e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right) + \frac{a_{k,i_k+1}}{h_k h^*_{k_+}} + \frac{a_{k,i_k}}{h_k h^*_{k_-}} + d_k\right] > 0,$$

$$B(P,Q) = \left\{\frac{a_{k,i_k+1}}{h_k h^*_{k_+}}; \frac{a_{k,i_k}}{h_k h^*_{k_-}}; \frac{1}{\tau}\left[\varepsilon + \left(1 - e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right)^2\right]; \frac{1}{\tau}\left[e^{-\frac{1}{\alpha}t_{\frac{1}{p}}} - 2e^{-\frac{1}{\alpha}t_{\frac{2}{p}}} + e^{-\frac{1}{\alpha}t_{\frac{3}{p}}}\right]; \ldots;\right.$$

$$\left.\ldots; \frac{1}{\tau}\left[e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-2}{p}}} - 2e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-1}{p}}} + e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k}{p}}}\right]; \frac{1}{\tau}\left[e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-1}{p}}} - e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k}{p}}}\right]\right\} > 0,$$

$$D(P) = \frac{1}{\tau}\left(\varepsilon + 1 - e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right) + d_k > 0.$$

Тогда в силу однородных краевых условий (4.15), (4.16) имеем

$$D(P) = \frac{\varepsilon + \gamma\tau + \tau d_k}{\tau}.$$

На основании теоремы 1 [36], получаем

$$\max_{\Omega+S}|w(P)| \leqslant \max_{t'\in w_\tau}\left\|\frac{\overset{*}{\varphi}(x,t')}{D}\right\|_{\overset{*}{C}} \leqslant \max_{0<t'\leqslant t_j}\frac{\tau\|\varphi^*\|_{\overset{*}{C}}}{\varepsilon + \gamma\tau + \tau d_k} \leqslant \max_{0<t'\leqslant t_j}\frac{\tau\|\varphi^*\|_{\overset{*}{C}}}{\varepsilon + \gamma\tau}. \tag{4.17}$$

Из оценок (4.8), (4.14) и (4.17) следует окончательная оценка

$$\begin{aligned} \|y^{j+1}\|_C \leqslant \|u^0\|_C + \frac{1}{c_0}\max_{0<t'\leqslant j\tau}\left(\|\bar{\mu}_{-k}(x,t')\|_{C_\gamma} + \|\bar{\mu}_{+k}(x,t')\|_{C_\gamma}\right) + \\ + \max_{0<t'\leqslant t_j}\frac{\tau\|\varphi^*\|_{\overset{*}{C}}}{\varepsilon + \gamma\tau} + \sum_{j'=0}^{j}\frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau}\sum_{k=1}^{p}\max_{0\leqslant s\leqslant k}\|\overset{\circ}{\varphi}{}_k^{j'+\frac{s}{p}}\|_{\overset{\circ}{C}}, \end{aligned} \tag{4.18}$$

где $\|y\|_C = \max\limits_{x\in\omega_h}|y|$, $\|y\|_{C_\gamma} = \max\limits_{x\in\gamma_h}|y|$, $\|\varphi\|_{\overset{*}{C}} = \max\limits_{x\in\overset{*}{\omega}_h}|\varphi|$, $\|\varphi\|_{\overset{\circ}{C}} = \max\limits_{x\in\overset{\circ}{\omega}_h}|\varphi|$.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (1.4)*, тогда ЛОС* (2.8)*,* (2.9) *устойчива по начальным данным и правой части, так что для решения задачи* (2.8)*, 2.9) справедлива оценка* (4.18).

§ 5. Равномерная сходимость ЛОС

Чтобы использовать свойство $\sum\limits_{k=1}^{p}\overset{\circ}{\psi}_k = 0$, $\overset{\circ}{\psi}_k = O(1)$, представим по аналогии с [36] решение задачи для погрешности в виде суммы

$$z_{(k)} = v_{(k)} + \eta_{(k)}, \quad z_{(k)} = z^{j+\frac{k}{p}},$$

где $\eta_{(k)}$ определяется условиями

$$\frac{\varepsilon}{p}\eta_{\bar{t}}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{p}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s}{p}}} - e^{-\frac{1}{\alpha}t_{j+\frac{k-s+1}{p}}}\right)\eta_{\bar{t}}^{\frac{s}{p}} = \overset{\circ}{\Psi}_k, \quad x \in \omega_h + \gamma_{h,k}, \quad k = 1, 2, \ldots, p, \tag{5.1}$$

$$\eta(x,0) = 0, \qquad \overset{\circ}{\Psi}_k = \begin{cases} \overset{\circ}{\psi}_k, & x_k \in \omega_{h_k}, \\ \overset{\circ}{\psi}_{-k}, & x_k = 0, \\ \overset{\circ}{\psi}_{+k}, & x_k = l_k. \end{cases}$$

Функция $v_{(k)}$ определяется условиями

$$\mathcal{B}_\tau v_{(k)}^{j+\frac{k}{p}} = \Lambda_k v_{(k)} + \widetilde{\Psi}_k, \quad \widetilde{\Psi}_k = \Lambda_k \eta_{(k)} + \overset{*}{\Psi}, \quad x_k \in \omega_{h_k}, \tag{5.2}$$

$$\mathcal{B}_\tau v_{(k)}^{j+\frac{k}{p}} = \Lambda_k^- v_{(k)} + \widetilde{\Psi}_{-k}, \quad \widetilde{\Psi}_{-k} = \Lambda_k^- \eta_{(k)} + \frac{\overset{*}{\Psi}_{-k}}{0.5h_k}, \quad x_k = 0, \tag{5.3}$$

$$\mathcal{B}_\tau v_{(k)}^{j+\frac{k}{p}} = \Lambda_k^+ \vartheta_{(k)} + \widetilde{\Psi}_{+k}, \quad \widetilde{\Psi}_{+k} = \Lambda_k^+ \eta_{(k)} + \frac{\overset{*}{\Psi}_{+k}}{0.5h_k}, \quad x_k = l_k, \tag{5.4}$$

$$v(x,0) = 0, \tag{5.5}$$

где $\widetilde{\Psi}_k = \overset{*}{\Psi} + \Lambda_k \eta_{(k)}$, $\overset{*}{\Psi} = O\left(h_k^2 + \tau\right)$, $\overset{*}{\Psi}_{\pm k} = O\left(h_k^2 + \tau\right)$.

Покажем, что $\eta^{j+\frac{k}{p}} = O\left(\dfrac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau}\right)$, $k = 1, 2, \ldots, p$, $j = 0, 1, 2, \ldots, j_0 - 1$.

Ради простоты рассмотрим двумерный случай ($p = 2$). Сначала положим $j = 0$, т. е. рассмотрим первый слой $(0, t_1]$. Тогда задача (5.1) примет вид

$$\frac{\varepsilon}{2}\eta_{\bar t}^{\frac{k}{2}} + \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{k}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{\frac{k-s}{p}}} - e^{-\frac{1}{\alpha}t_{\frac{k-s+1}{p}}}\right)\eta_{\bar t}^{\frac{s}{2}} = \overset{\circ}{\Psi}_k, \qquad k = 1, 2.$$

Пусть $k = 1$, тогда получим

$$\frac{\varepsilon}{2}\eta_{\bar t}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\left(1 - e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}}\right)\eta_{\bar t}^{\frac{1}{2}} = \overset{\circ}{\Psi}_1\,. \tag{5.6}$$

При $k = 2$ получаем

$$\frac{\varepsilon}{2}\eta_{\bar t}^{1} + \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{\frac{1}{2}}} - e^{-\frac{1}{\alpha}t_1}\right)\eta_{\bar t}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\left(1 - e^{-\frac{1}{\alpha}t_{\frac{1}{2}}}\right)\eta_{\bar t}^{1} = \overset{\circ}{\Psi}_2\,. \tag{5.7}$$

Складывая выражения (5.6) и (5.7), получаем

$$\frac{\varepsilon}{2}\eta_{\bar t}^{\frac{1}{2}} + \frac{\varepsilon}{2}\eta_{\bar t}^{1} + \frac{1}{2}\left(1 - e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}}\right)\eta_{\bar t}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}} - e^{-\frac{1}{\alpha}\tau}\right)\eta_{\bar t}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\left(1 - e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}}\right)\eta_{\bar t}^{1} = 0. \tag{5.8}$$

Из (5.8) следует

$$\eta^1 = \frac{e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}} - 1\right)\eta^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon + 1 - e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}}} = -\frac{e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}}\gamma\tau\eta^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon + \gamma\tau}. \tag{5.9}$$

Из (5.6) находим

$$\eta^{\frac{1}{2}} = \frac{\tau}{\varepsilon + 1 - e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}}}\,\overset{\circ}{\Psi}_1 = \frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau}\,\Psi_1 = -\frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau}\,\Psi_2\,. \tag{5.10}$$

Учитывая (5.10), из (5.9) находим

$$\eta^{\frac{1}{2}} = O\left(\frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau}\right), \quad \eta^1 = O\left(\frac{\tau^2}{(\varepsilon + \gamma\tau)^2}\right).$$

Допустим, что при $j = n$ выполнено условие

$$\eta^{\frac{1}{2}}, \eta^1, \eta^{1+\frac{1}{2}}, \ldots, \eta^{n+1} = O\left(\frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau}\right). \tag{5.11}$$

Опираясь на допущение (5.11), покажем, что аналогичное условие выполнено и при $j=n+1$. Для чего запишем уравнение (5.1) при $j=n+1$, $p=2$:

$$\frac{\varepsilon}{2}\eta_{\bar t}^{n+1+\frac{k}{2}}+\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{2(n+1)+k}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{n+1+\frac{k-s}{2}}}-e^{-\frac{1}{\alpha}t_{n+1+\frac{k-s+1}{2}}}\right)\eta_{\bar t}^{\frac{s}{2}}=\mathring{\Psi}_k \qquad k=1,2. \tag{5.12}$$

Полагая в (5.12) $k=1$, находим

$$\frac{\varepsilon}{2}\eta_{\bar t}^{n+\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{2(n+1)+1}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{n+1+\frac{1-s}{2}}}-e^{-\frac{1}{\alpha}t_{n+1+\frac{2-s}{2}}}\right)\eta_{\bar t}^{\frac{s}{2}}=\mathring{\Psi}_1,$$

Преобразуем последнее следующим образом

$$\begin{gathered}-\frac{1}{\tau}\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}}\right)\left[\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}}\right)e^{-\frac{1}{\alpha}(n+\frac{1}{2})\tau}\eta^{\frac{1}{2}}+\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}}\right)e^{-\frac{1}{\alpha}n\tau}\eta^{1}+\ldots+\right.\\ \left.+\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}}+\frac{\varepsilon}{1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}}}\right)\eta^{n+1}-\left(1+\frac{\varepsilon}{1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}}}\right)\eta^{n+\frac{3}{2}}\right]=\mathring{\Psi}_1\,.\end{gathered}\tag{5.13}$$

Рассмотрим отдельно содержимое квадратной скобки, тогда перепишем в виде убывающего ряда:

$$\left(1+\frac{\varepsilon}{1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}}}\right)|\eta^{n+\frac{3}{2}}|\leqslant\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}}+\frac{\varepsilon}{1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}}}\right)\max_{\frac{1}{2}\leqslant s\leqslant n+1}|\eta^s|\sum_{s=0}^{n+\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{\alpha}s\tau}$$

и, следовательно,

$$|\eta^{n+\frac{3}{2}}|\leqslant\frac{1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}}+\frac{\varepsilon}{1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}}}}{1+\frac{\varepsilon}{1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}}}}\max_{\frac{1}{2}\leqslant s\leqslant n+1}|\eta^s|\leqslant\max_{\frac{1}{2}\leqslant s\leqslant n+1}|\eta^s|=O\left(\frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau}\right).\tag{5.14}$$

Учитывая (5.14), с учетом (5.11) и достаточной ограниченности коэффициентов при $\eta^{\frac{1}{2}}$, η^1, $\ldots$, $\eta^{n+\frac{3}{2}}$, находим $\eta^{n+\frac{3}{2}}=O\left(\dfrac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau}\right)$.

Положим теперь в (5.12) $k=2$

$$\frac{\varepsilon}{2}\eta_{\bar t}^{n+2}+\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{2n+4}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}t_{n+1+\frac{2-s}{2}}}-e^{-\frac{1}{\alpha}t_{n+1+\frac{3-s}{2}}}\right)\eta_{\bar t}^{\frac{s}{2}}=\mathring{\Psi}_2,$$

тогда

$$\begin{gathered}\frac{1}{\tau}\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}}\right)\left[(1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}})e^{-\frac{1}{\alpha}(n+1)\tau}\eta^{\frac{1}{2}}+(1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}})e^{-\frac{1}{\alpha}(n+\frac{1}{2})\tau}\eta^{1}+\ldots+\right.\\ \left.+(1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}})e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}}\eta^{n+1}+\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}}+\frac{\varepsilon}{1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}}}\right)\eta^{n+\frac{3}{2}}-\left(1+\frac{\varepsilon}{1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}}}\right)\eta^{n+2}\right]=\mathring{\Psi}_2\,.\end{gathered}\tag{5.15}$$

Складывая (5.13) и (5.15), с учетом равенства $\mathring{\Psi}_1+\mathring{\Psi}_2=0$, получим

$$\begin{gathered}-\frac{1}{\tau}\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}}\right)\left[\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}\tau}\right)e^{-\frac{1}{\alpha}(n+\frac{1}{2})\tau}\eta^{\frac{1}{2}}+\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}\tau}\right)e^{-\frac{1}{\alpha}n\tau}\eta^{1}+\ldots+\right.\\ \left.+\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}}+\frac{\varepsilon}{1-e^{-\frac{1}{\alpha}\tau}}\right)\eta^{n+1}-e^{\frac{1}{\alpha}\tau}\eta^{n+\frac{3}{2}}-\left(1+\frac{\varepsilon}{1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{2}}}\right)\eta^{n+2}\right]=0.\end{gathered}\tag{5.16}$$

Тогда из (5.16) получим

$$\eta^{\frac{1}{2}}, \eta^{1}, \eta^{n+1}, \eta^{n+\frac{3}{2}}, \eta^{n+2} = O\left(\frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau}\right). \tag{5.17}$$

Итак, равенство (5.17) выполнено при любом значении j. Нетрудно заметить, что аналогично можно показать, что $\eta^{j+\frac{k}{p}} = O\left(\frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau}\right)$, $k = 1, 2, \ldots, p$, $j = 0, 1, \ldots, j_0 - 1$. Для оценки решения задачи (5.2)–(5.5) воспользуемся теоремой 1:

$$\begin{aligned} \|v^{j+1}\|_C \leqslant \frac{0.5ph}{c_0\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{p}}\right)} \max_{0<j'+\frac{k}{p}\leqslant j+1} \|\eta^{j'+\frac{k}{p}}\|_{C_\gamma} + \\ + \max_{0<j'+\frac{k}{p}\leqslant j+1} \frac{\tau\|\widetilde{\Psi}\|_{\overset{*}{C}}}{\varepsilon+\gamma\tau} + \sum_{j'=0}^{j} \frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau} \sum_{k=1}^{p} \max_{0\leqslant s\leqslant k} \|\widetilde{\Psi}^{j'+\frac{s}{p}}\|_C, \end{aligned} \tag{5.18}$$

где $\widetilde{\Psi}_k = \overset{*}{\Psi}_k + \Lambda_k \eta_{(k)}$.

Если существуют непрерывные в замкнутой области $\bar{Q}_T$, производные

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x_k^2 \partial x_\nu^2}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x_k^2 \partial t}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}, \quad 1 \leqslant k, \nu \leqslant p, \quad k \neq \nu,$$

то $\bar{\Lambda}_k \eta_{(k)} = -\dfrac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau} a_k \bar{\Lambda}_k \left(\overset{\circ}{\Psi}_{k+1} + \ldots + \overset{\circ}{\Psi}_p\right) = O\left(\dfrac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau}\right)$ во всех узлах $x \in \omega_h$, так как $\eta_{(k)}$ определяется из уравнения (5.1) всюду в $\omega_h + \gamma_h$, где a_k —известные постоянные. С другой стороны, имеем $\overset{*}{\Psi}_k = O\left(h^2 + \dfrac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau}\right)$ в регулярных узлах ω_h и $\overset{*}{\Psi}_k = O(1)$ в нерегулярных узлах сетки. Поэтому

$$\frac{\tau\|\widetilde{\Psi}\|_{\overset{*}{C}}}{\varepsilon+\gamma\tau} = O\left(\frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau}\right), \quad \|\widetilde{\Psi}_k^{j'+\frac{s}{p}}\|_C = O\left(h^2 + \frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau}\right).$$

Тогда из оценки (5.18) получим

$$\begin{aligned} \|v^{j+1}\|_C = M\left(\frac{h+\tau}{\varepsilon+\gamma\tau} + \sum_{j'=0}^{j} \frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau} \sum_{k=1}^{p} \left(h_k^2 + \frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau}\right)\right) = \\ = M\left(\frac{h+\tau}{\varepsilon+\gamma\tau} + \frac{pt_j}{\varepsilon+\gamma\tau}\left(h^2 + \frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau}\right)\right) \leqslant M\left(\frac{h}{\tau+\varepsilon} + \frac{\tau}{(\tau+\varepsilon)^2}\right), \qquad h = \max_{1\leqslant k\leqslant p} h_k. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|z^{j+1}\|_C \leqslant \|\eta^{j+1}\|_C + \|v^{j+1}\|_C = O\left(\frac{h}{\tau+\varepsilon} + \frac{\tau}{(\tau+\varepsilon)^2}\right).$$

Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть задача* (1.8), (1.6), (1.7) *имеет единственное непрерывное решение* $u(x,t)$ *в* $\overline{Q}_T$ *при всех значениях* ε *и существуют непрерывные в* $\overline{Q}_T$ *производные*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x_k^2 \partial x_\nu^2}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x_k^2 \partial t}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}, \quad 1 \leqslant k, \nu \leqslant p, \quad k \neq \nu, \quad \alpha > 0,$$

тогда решение разностной задачи (2.8), (2.9) *равномерно сходится к решению дифференциальной задачи* (1.1)–(1.3) *со скоростью* $O\left(\dfrac{h}{\tau+\varepsilon} + \dfrac{\tau}{(\tau+\varepsilon)^2} + \varepsilon\right)$, $h = o(\tau+\varepsilon)$, $\tau = o((\tau+\varepsilon)^2)$, *где* ε *— малый параметр,* $\alpha > 0$.

Очевидно, что скорость сходимости будет определяться наилучшим образом, если выбрать $\varepsilon = \tau^{\frac{1}{3}}$ при любых $\alpha > 0$.

Замечание 1. Если $\varepsilon = \tau^{\frac{1}{3}}$, тогда решение разностной задачи (2.8), (2.9) при любых $\alpha > 0$ равномерно сходится к решению дифференциальной задачи (1.1)–(1.3) со скоростью $O\left(\frac{h}{\tau^{\frac{1}{3}}} + \tau^{\frac{1}{3}}\right)$.

Финансирование. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и ГФЕН Китая в рамках научного проекта № 20–51–53007.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984.
2. Шхануков М. Х. О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18. № 4. С. 689–699. http://mi.mathnet.ru/de4523
3. Cuesta C., van Duijn C. J., Hulshof J. Infiltration in porous media with dynamic capillary pressure: travelling waves // European Journal of Applied Mathematics. 2000. Vol. 11. Issue 4. P. 381–397. https://doi.org/10.1017/S0956792599004210
4. Чудновский А. Ф. Теплофизика почв. М.: Наука, 1976.
5. Hallaire M. Le potentiel efficace de l’eau dans le sol en régime de dessèchement // L’Eau et la Production Végétale. Paris: Institut national de la recherche agronomique, 1964. No. 9. P. 27–62.
6. Colton D. L. On the analytic theory of pseudoparabolic equations // The Quarterly Journal of Mathematics. 1972. Vol. 23. Issue 2. P. 179–192. https://doi.org/10.1093/qmath/23.2.179
7. Дзекцер Е. С. Уравнение движения подземных вод со свободной поверхностью в многослойных средах // Докл. АН СССР. 1975. Т. 220. № 3. С. 540–543. http://mi.mathnet.ru/dan38808
8. Chen P. J., Gurtin M. E. On a theory of heat conduction involving two temperatures // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP. 1968. Vol. 19. Issue 4. P. 614–627. https://doi.org/10.1007/BF01594969
9. Ting T. W. Certain non-steady flows of second-order fluids // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1963. Vol. 14. Issue 1. P. 1–26. https://doi.org/10.1007/BF00250690
10. Barenblatt G. I., Bertsch M., Dal Passo R., Ughi M. A degenerate pseudoparabolic regularization of a nonlinear forward-backward heat equation arising in the theory of heat and mass exchange in stably stratified turbulent shear flow // SIAM Journal on Mathematical Analysis. 1993. Vol. 24. No. 6. P. 1414–1439. https://doi.org/10.1137/0524082
11. Novick-Cohen A., Pego R. L. Stable patterns in a viscous diffusion equation // Transactions of the American Mathematical Society. 1991. Vol. 324. No. 1. P. 331–351. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1991-1015926-7
12. Свешников А. А., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.
13. Иванова М. В., Ушаков В. И. Вторая краевая задача для псевдопараболического уравнения в нецилиндрической области // Матем. заметки. 2002. Т. 72. Вып. 1. С. 48–53. https://doi.org/10.4213/mzm403
14. Vabishchevich P. N. On a new class of additive (splitting) operator-difference schemes // Mathematics of Computation. 2012. Vol. 81. No. 277. C. 267–276. https://www.jstor.org/stable/23075227
15. Вабищевич П. Н., Григорьев А. В. Схемы расщепления для псевдопараболических уравнений // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49. № 7. С. 837–843. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=19402643
16. Čiegis R., Tumanova N. On construction and analysis of finite difference schemes for pseudoparabolic problems with nonlocal boundary conditions // Mathematical Modelling and Analysis. 2014. Vol. 19. No. 2. P. 281–297. https://doi.org/10.3846/13926292.2014.910562

17. Čiegis R., Subač O., Bugajev A. Parallel algorithms for three-dimensional parabolic and pseudoparabolic problems with different boundary conditions // Nonlinear Analysis: Modelling and Control. 2014. Vol. 19. No. 3. P. 382–395. https://doi.org/10.15388/NA.2014.3.5
18. Аблабеков Б. С., Байсеркеева А. Б. Явное решение задачи Коши для двумерного псевдопараболического уравнения // Известия ВУЗов Кыргызстана. 2015. № 10. С. 3–7. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=28766897
19. Аблабеков Б. С., Муканбетова А. Т. О разрешимости решений второй начально-краевой задачи для псевдопараболического уравнения с малым параметром // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. 2019. № 3. С. 41–47. http://science-journal.kg/ru/journal/1/archive/12271
20. Shivanian E., Aslefallah M. Stability and convergence of spectral radial point interpolation method locally applied on two-dimensional pseudoparabolic equation // Numerical Methods for Partial Differential Equations. 2017. Vol. 33. No. 3. C. 724–741. https://doi.org/10.1002/num.22119
21. Aslefallah M., Abbasbandy S., Shivanian E. Meshless singular boundary method for two-dimensional pseudo-parabolic equation: analysis of stability and convergence // Journal of Applied Mathematics and Computing. 2020. Vol. 63. Issues 1–2. P. 585–606. https://doi.org/10.1007/s12190-020-01330-x
22. Hussain M., Haq S., Ghafoor A. Meshless RBFs method for numerical solutions of two-dimensional high order fractional Sobolev equations // Computers and Mathematics with Applications. 2020. Vol. 79. No. 3. C. 802–816. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2019.07.033
23. Amiraliyev G. M., Cimen E., Amirali I., Cakir M. High-order finite difference technique for delay pseudo-parabolic equations // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2017. Vol. 321. P. 1–7. https://doi.org/10.1016/j.cam.2017.02.017
24. Jachimavičiené J., Sapagovas M., Štikonas A., Štikoniené O. On the stability of explicit finite difference schemes for a pseudoparabolic equation with nonlocal conditions // Nonlinear Analysis: Modelling and Control. 2014. Vol. 19. No. 2. P. 225–240. https://doi.org/10.15388/NA.2014.2.6
25. Бештоков М. Х. Разностный метод решения одной нелокальной краевой задачи для псевдопараболического уравнения третьего порядка // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49. № 9. С. 1170–1177. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=20280569
26. Бештоков М. Х. Разностный метод решения нелокальной краевой задачи для вырождающегося псевдопараболического уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2016. Т. 56. № 10. С. 1780–1794. https://doi.org/10.7868/S0044466916100045
27. Бештоков М. Х. Дифференциальные и разностные краевые задачи для нагруженных псевдопараболических уравнений третьего порядка и разностные методы их численной реализации // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017. Т. 57. № 12. С. 2021–2041. https://doi.org/10.7868/S0044466917120092
28. Бештоков М. Х. Краевые задачи для вырождающихся и невырождающихся уравнений соболевского типа с нелокальным источником в дифференциальной и разностной трактовках // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 2. С. 249–266. https://doi.org/10.1134/S0374064118020115
29. Бештоков М. Х. Краевые задачи для нагруженных псевдопараболических уравнений дробного порядка и разностные методы их решения // Известия вузов. Математика. 2019. № 2. С. 3–12. https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-2-3-12
30. Бештоков М. Х. Краевые задачи для нагруженного модифицированного уравнения влагопереноса дробного порядка с оператором Бесселя и разностные методы их решения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30. Вып. 2. С. 158–175. https://doi.org/10.35634/vm200202
31. Mesloub S., Bachar I. On a nonlocal 1-D initial value problem for a singular fractional-order parabolic equation with Bessel operator // Advances in Difference Equations. 2019. Vol. 2019. Issue 1. Article number: 254. https://doi.org/10.1186/s13662-019-2196-z
32. Luc N. H., Jafari H., Kumam P., Tuan N. H. On an initial value problem for time fractional pseudoparabolic equation with Caputo derivative // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2021. https://doi.org/10.1002/mma.7204
33. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983.

34. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // УМН. 1957. Т. 12. Вып. 5 (77). С. 3–122. http://mi.mathnet.ru/umn7705
35. Годунов С. К., Рябенький В. С. Разностные схемы. М.: Наука, 1977.
36. Самарский А. А., Гулин А. В. Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973.

Поступила в редакцию 11.05.2021

Бештоков Мурат Хамидбиевич, к. ф.-м. н., доцент, Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, 360000, Россия, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А.
E-mail: beshtokov-murat@yandex.ru

Цитирование: М. Х. Бештоков. Численный метод решения второй начально-краевой задачи для многомерного псевдопараболического уравнения третьего порядка // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31. Вып. 3. С. 384–408.

MATHEMATICS 2021. Vol. 31. Issue 3. Pp. 384–408.

M. Kh. Beshtokov
A numerical method for solving the second initial-boundary value problem for a multidimensional third-order pseudoparabolic equation

Keywords: pseudoparabolic equation, moisture transfer equation, locally one-dimensional scheme, stability, convergence of the difference scheme, additivity of the scheme.

MSC2020: 35L35

DOI: 10.35634/210303

The work is devoted to the study of the second initial-boundary value problem for a general-form third-order differential equation of pseudoparabolic type with variable coefficients in a multidimensional domain with an arbitrary boundary. In this paper, a multidimensional pseudoparabolic equation is reduced to an integro-differential equation with a small parameter, and a locally one-dimensional difference scheme by A. A. Samarskii is used. Using the maximum principle, an a priori estimate is obtained for the solution of a locally one-dimensional difference scheme in the uniform metric in the C norm. The stability and convergence of the locally one-dimensional difference scheme are proved.

Funding. The reported study was funded by RFBR and NSFC, project no. 20–51–53007.

REFERENCES

1. Barenblatt G. I., Entov V. M., Ryzhik V. M. *Theory of fluid flows through natural rocks*, Springer, 1990. https://www.springer.com/gp/book/9780792301677
2. Shkhanukov M. Kh. Some boundary value problems for a third-order equation that arise in the modeling of the filtration of a fluid in porous media, *Differentsial'nye Uravneniya*, 1982, vol. 18, no. 4, pp. 689–699 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/de4523
3. Cuesta C., van Duijn C. J., Hulshof J. Infiltration in porous media with dynamic capillary pressure: travelling waves, *European Journal of Applied Mathematics*, 2000, vol. 11, issue 4, pp. 381–397. https://doi.org/10.1017/S0956792599004210
4. Chudnovskii A. F. *Teplofizika pochv* (The thermophysics of soils), Moscow: Nauka, 1976.
5. Hallaire M. Le potentiel efficace de l'eau dans le sol en régime de dessèchement, *L'Eau et la Production Végétale*, Paris: Institut national de la recherche agronomique, 1964, no. 9, pp. 27–62.
6. Colton D. L. On the analytic theory of pseudoparabolic equations, *The Quarterly Journal of Mathematics*, 1972, vol. 23, issue 2, pp. 179–192. https://doi.org/10.1093/qmath/23.2.179
7. Dzekcer E. S. Equation of motion of underground water with a free surface in multilayer media, *Sov. Phys., Dokl.*, 1975, vol. 20, pp. 24–26. https://zbmath.org/?q=an:0331.76056
8. Chen P. J., Gurtin M. E. On a theory of heat conduction involving two temperatures, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, 1968, vol. 19, issue 4, pp. 614–627. https://doi.org/10.1007/BF01594969
9. Ting T. W. Certain non-steady flows of second-order fluids, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1963, vol. 14, issue 1, pp. 1–26. https://doi.org/10.1007/BF00250690
10. Barenblatt G. I., Bertsch M., Dal Passo R., Ughi M. A degenerate pseudoparabolic regularization of a nonlinear forward-backward heat equation arising in the theory of heat and mass exchange in stably stratified turbulent shear flow, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 1993, vol. 24, no. 6, pp. 1414–1439. https://doi.org/10.1137/0524082
11. Novick-Cohen A., Pego R. L. Stable patterns in a viscous diffusion equation, *Transactions of the American Mathematical Society*, 1991, vol. 324, no. 1, pp. 331–351. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1991-1015926-7
12. Sveshnikov A. A., Al'shin A. B., Korpusov M. O., Pletner Yu. D. *Lineinye i nelineinye uravneniya sobolevskogo tipa* (Linear and nonlinear Sobolev type equations), Moscow: Fizmatlit, 2007.
13. Ivanova M. V., Ushakov V. I. The second boundary-value problem for pseudoparabolic equations in noncylindrical domains, *Mathematical Notes*, 2002, vol. 72, no. 1, pp. 43–47. https://doi.org/10.1023/A:1019812920385

14. Vabishchevich P. N. On a new class of additive (splitting) operator-difference schemes, *Mathematics of Computation*, 2012, vol. 81, no. 277, pp. 267–276. https://www.jstor.org/stable/23075227
15. Vabishchevich P. N., Grigor'ev A. V. Splitting schemes for pseudoparabolic equations, *Differential Equations*, 2013, vol. 49, no. 7, pp. 807–814. https://doi.org/10.1134/S0012266113070033
16. Čiegis R., Tumanova N. On construction and analysis of finite difference schemes for pseudoparabolic problems with nonlocal boundary conditions, *Mathematical Modelling and Analysis*, 2014, vol. 19, no. 2, pp. 281–297. https://doi.org/10.3846/13926292.2014.910562
17. Čiegis R., Subоč O., Bugajev A. Parallel algorithms for three-dimensional parabolic and pseudoparabolic problems with different boundary conditions, *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 2014, vol. 19, no. 3, pp. 382–395. https://doi.org/10.15388/NA.2014.3.5
18. Ablabekov B. S., Baiserkeeva A. B. Explicit solution Cauchy problem for two-dimensional pseudoparabolic equations, *Izvestiya Vuzov Kyrgyzstana*, 2015, no. 10, pp. 3–7 (in Russian). https://www.elibrary.ru/item.asp?id=28766897
19. Ablabekov B. S., Mukanbetova A. T. On solvability of solutions of the second initial-boundary problem for pseudoparabolic equations with a small parameter, *Nauka, Novye Tekhnologii i Innovatsii Kyrgyzstana*, 2019, no. 3, pp. 41–47 (in Russian). http://science-journal.kg/en/journal/1/archive/12271
20. Shivanian E., Aslefallah M. Stability and convergence of spectral radial point interpolation method locally applied on two-dimensional pseudoparabolic equation, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 2017, vol. 33, no. 3, pp. 724–741. https://doi.org/10.1002/num.22119
21. Aslefallah M., Abbasbandy S., Shivanian E. Meshless singular boundary method for two-dimensional pseudo-parabolic equation: analysis of stability and convergence, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 2020, vol. 63, issues 1–2, pp. 585–606. https://doi.org/10.1007/s12190-020-01330-x
22. Hussain M., Haq S., Ghafoor A. Meshless RBFs method for numerical solutions of two-dimensional high order fractional Sobolev equations, *Computers and Mathematics with Applications*, 2020, vol. 79, no. 3, pp. 802–816. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2019.07.033
23. Amiraliyev G. M., Cimen E., Amirali I., Cakir M. High-order finite difference technique for delay pseudo-parabolic equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2017, vol. 321, pp. 1–7. https://doi.org/10.1016/j.cam.2017.02.017
24. Jachimavičiené J., Sapagovas M., Štikonas A., Štikoniené O. On the stability of explicit finite difference schemes for a pseudoparabolic equation with nonlocal conditions, *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 2014, vol. 19, no. 2, pp. 225–240. https://doi.org/10.15388/NA.2014.2.6
25. Beshtokov M. Kh. Finite-difference method for a nonlocal boundary value problem for a third-order pseudoparabolic equation, *Differential Equations*, 2013, vol. 49, no. 9, pp. 1134–1141. https://doi.org/10.1134/S0012266113090085
26. Beshtokov M. Kh. Difference method for solving a nonlocal boundary value problem for a degenerating third-order pseudo-parabolic equation with variable coefficients, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2016, vol. 56, no. 10, pp. 1763–1777. https://doi.org/10.1134/S0965542516100043
27. Beshtokov M. Kh. Differential and difference boundary value problem for loaded third-order pseudoparabolic differential equations and difference methods for their numerical solution, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2017, vol. 57, no. 12, pp. 1973–1993. https://doi.org/10.1134/S0965542517120089
28. Beshtokov M. Kh. Boundary value problems for degenerating and nondegenerating Sobolev-type equations with a nonlocal source in differential and difference forms, *Differential Equations*, 2018, vol. 54, no. 2, pp. 250–267. https://doi.org/10.1134/S0012266118020118
29. Beshtokov M. Kh. Boundary-value problems for loaded pseudoparabolic equations of fractional order and difference methods of their solving, *Russian Mathematics*, 2019, vol. 63, no. 2, pp. 1–10. https://doi.org/10.3103/S1066369X19020014
30. Beshtokov M. Kh. Boundary value problems for a loaded modified fractional-order moisture transfer equation with the Bessel operator and difference methods for their solution, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2020, vol. 30, issue 2, pp. 158–175. https://doi.org/10.35634/vm200202

31. Mesloub S., Bachar I. On a nonlocal 1-D initial value problem for a singular fractional-order parabolic equation with Bessel operator, *Advances in Difference Equations*, 2019, vol. 2019, issue 1, article number: 254. https://doi.org/10.1186/s13662-019-2196-z
32. Luc N. H., Jafari H., Kumam P., Tuan N. H. On an initial value problem for time fractional pseudo-parabolic equation with Caputo derivative, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2021. https://doi.org/10.1002/mma.7204
33. Samarskii A. A. *The theory of difference schemes*, New York: CRC Press, 2001. https://doi.org/10.1201/9780203908518
34. Vishik M. I., Lyusternik L. A. Regular degeneration and boundary layer for linear differential equations with small parameter, *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 1957, vol. 12, issue 5 (77), pp. 3–122 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/umn7705
35. Godunov S. K., Ryaben'kii V. S. *Raznostnye skhemy* (Difference schemes), Moscow: Nauka, 1977.
36. Samarskii A. A., Gulin A. V. *Ustoichivost' raznostnykh skhem* (Stability of difference schemes), Moscow: Nauka, 1973.

Received 11.05.2021

Murat Khamidbievich Beshtokov, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Institute of Applied Mathematics and Automation, Kabardino-Balkaria Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, ul. Shortanova, 89 A, Nalchik, 360000, Russia.
E-mail: beshtokov-murat@yandex.ru

Citation: M. Kh. Beshtokov. A numerical method for solving the second initial-boundary value problem for a multidimensional third-order pseudoparabolic equation, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2021, vol. 31, issue 3, pp. 384–408.