ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

МАТЕМАТИКА 2020. Т. 30. Вып. 3. С. 367–384.

УДК 517.929, 517.977

© *И. Г. Ким*

НАЗНАЧЕНИЕ КОНЕЧНОГО СПЕКТРА В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ С НЕСКОЛЬКИМИ СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ И РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ ПОСРЕДСТВОМ СТАТИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ПО ВЫХОДУ

Рассматривается управляемая система, заданная линейной стационарной системой дифференциальных уравнений с сосредоточенными и распределенными запаздываниями по состоянию. Управление в системе строится в виде линейной статической обратной связи по выходу с сосредоточенными и распределенными запаздываниями в тех же узлах. Исследуется задача назначения конечного спектра для замкнутой системы: требуется построить коэффициенты обратной связи таким образом, чтобы характеристическая функция замкнутой системы обращалась в полином с произвольными наперед заданными коэффициентами. Получены условия на коэффициенты системы, при которых найден критерий разрешимости данной задачи назначения конечного спектра. Получены следствия о стабилизации системы с несколькими запаздываниями посредством линейной статической обратной связи по выходу с запаздываниями.

Ключевые слова: линейные системы с последействием, управление спектром, стабилизация, обратная связь по выходу.

DOI: 10.35634/vm200302

Введение

Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{R}$; $\mathbb{K}^n = \{x = \operatorname{col}(x_1, \ldots, x_n) \colon x_i \in \mathbb{K}\}$ — линейное пространство вектор-столбцов над полем $\mathbb{K}$; $M_{m,n}(\mathbb{K})$ — пространство матриц размерности $m \times n$ над полем $\mathbb{K}$; $M_n(\mathbb{K}) := M_{n,n}(\mathbb{K})$; $I \in M_n$ — единичная матрица; T — операция транспонирования матрицы или вектора; $*$ — операция эрмитова сопряжения вектора или матрицы; $\operatorname{vec} \colon M_{m,n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^{mn}$ — отображение, которое «разворачивает» матрицу $H = \{h_{ij}\}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, по строкам в вектор-столбец $\operatorname{vec} H = \operatorname{col}(h_{11}, \ldots, h_{1n}, \ldots, h_{m1}, \ldots, h_{mn}) \in \mathbb{K}^{mn}$; $\chi(H; \lambda)$ — характеристический многочлен матрицы $H \in M_n(\mathbb{K})$.

Рассмотрим линейную стационарную дифференциальную систему с сосредоточенным и распределенным запаздываниями в состоянии

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + \int_{-h}^{0} S(\tau) x(t+\tau)\, d\tau + Bu(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

$$y(t) = C^* x(t), \tag{2}$$

с начальным условием $x(\tau) = \phi(\tau)$, $\tau \in [-h, 0]$; здесь $h > 0$ — постоянное запаздывание, $\phi : [-h, 0] \to \mathbb{K}^n$ — непрерывная функция, A_0, $A_1 \in M_n(\mathbb{K})$, $B \in M_{n,m}(\mathbb{K})$, $C \in M_{n,k}(\mathbb{K})$, $S \colon [-h, 0] \to M_n(\mathbb{K})$ — интегрируемая матричная функция, $u \in \mathbb{K}^m$ — вектор управляющего воздействия, $y \in \mathbb{K}^k$ — вектор выходных величин.

Задачи стабилизации и назначения спектра для систем вида (1) и для систем более общего вида или частного вида посвящено большое количество работ. В [1–4] исследуется задача назначения конечного спектра с использованием преобразования Лапласа. В [5] к этой задаче применяются численные квадратурные методы. Аналогичные задачи рассмотрены в работах [6–8]. В [9] для решения задач робастной стабилизации применяется назначение конечного спектра. В [10] назначение конечного спектра позволяет решить практическую задачу бокового управления транспортного средства. В работах [11–13] рассматриваются задачи назначения произвольного спектра, в [14–17] — задачи стабилизации, в [18] — задача оптимальной стабилизации.

Данная работа продолжает исследования [19–21]. В этих работах была исследована задача назначения конечного и произвольного спектра для систем с сосредоточенным запаздыванием посредством обратной связи по выходу. Был получен критерий разрешимости данных задач в терминах коэффициентов системы. В настоящей работе полученные результаты о назначении произвольного конечного спектра распространяются на системы с сосредоточенными и распределенными запаздываниями.

§ 1. Система с одним сосредоточенным и распределенным запаздыванием

Рассмотрим линейную стационарную дифференциальную систему с сосредоточенным и распределенным запаздываниями в состоянии (1), (2). Пусть управление в системе (1), (2) строится в виде линейной статической обратной связи по выходу с сосредоточенным и распределенным запаздываниями

$$u(t) = Q_0 y(t) + Q_1 y(t-h) + \int_{-h}^{0} R(\tau) y(t+\tau)\, d\tau, \tag{3}$$

$y(\tau) = 0$, $\tau < -h$. Здесь $Q_0 = \{q^0_{\alpha\beta}\}, Q_1 = \{q^1_{\alpha\beta}\} \in M_{m,k}(\mathbb{K})$ — постоянные матрицы, $R(\tau) = \{r_{\alpha\beta}(\tau)\} \in M_{m,k}(\mathbb{K})$, $r_{\alpha\beta}\colon [-h,0] \to \mathbb{K}$ — интегрируемые функции, $\alpha = \overline{1,m}$, $\beta = \overline{1,k}$. Замкнутая система (1), (2), (3) принимает вид

$$\dot{x}(t) = (A_0 + BQ_0C^*)x(t) + (A_1 + BQ_1C^*)x(t-h) + \int_{-h}^{0} (S(\tau) + BR(\tau)C^*)x(t+\tau)\, d\tau. \tag{4}$$

Обозначим через

$$\varphi(\lambda) = \det\Big[\lambda I - \Big((A_0 + BQ_0C^*) + (A_1 + BQ_1C^*)e^{-\lambda h} + \int_{-h}^{0} (S(\tau) + BR(\tau)C^*)e^{\lambda\tau} d\tau\Big)\Big]$$

характеристическую функцию замкнутой системы (4). Через $\varphi_0(\lambda)$ обозначим характеристическую функцию свободной системы

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + \int_{-h}^{0} S(\tau) x(t+\tau)\, d\tau,$$

т. е. $\varphi_0(\lambda) = \det\Big[\lambda I - \Big(A_0 + A_1 e^{-\lambda h} + \int_{-h}^{0} S(\tau) e^{\lambda\tau} d\tau\Big)\Big]$. Характеристическое уравнение $\varphi(\lambda) = 0$ замкнутой системы (4) имеет вид

$$\lambda^n + \sum_{i=1}^{n} \lambda^{n-i} \Bigg(\sum_{j=0}^{i} \delta_{i0j} \exp(-\lambda j h) + \\ + \sum_{\upsilon=1}^{i} \sum_{j=0}^{i-\upsilon} \int_{-h}^{0} \ldots \int_{-h}^{0} \delta_{i\upsilon j}(\tau_1, \ldots, \tau_\upsilon) \exp\Big(\lambda\Big(\sum_{\mu=1}^{\upsilon} \tau_\mu - jh\Big)\Big)\, d\tau_1 \ldots d\tau_\upsilon \Bigg) = 0. \tag{5}$$

Здесь числа δ_{i0j}, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{0,i}$, и функции $\delta_{ivj}(\tau_1,\dots,\tau_v)$, $\tau_\mu\in[-h,0]$, $i=\overline{1,n}$, $v=\overline{1,i}$, $j=\overline{0,i-v}$, $\mu=\overline{1,v}$, зависят от коэффициентов A_0, A_1, B, C, $S(\tau)$ системы (1), (2) и от коэффициентов Q_0, Q_1, $R(\tau)$ обратной связи (3). Множество $\sigma=\{\lambda\in\mathbb{C}:\varphi(\lambda)=0\}$ корней характеристического уравнения называется спектром системы (4). Если $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, то спектр σ симметричен относительно вещественной оси. В общем случае спектр σ системы (4) состоит из бесконечного числа точек $\lambda_\varkappa\in\mathbb{C}$. Если в уравнении (5) числа $\delta_{i0j}=0$ для всех $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,i}$, и функции $\delta_{ivj}(\tau_1,\dots,\tau_v)\equiv 0$, $\tau_\mu\in[-h,0]$, $i=\overline{1,n}$, $v=\overline{1,i}$, $j=\overline{0,i-v}$, $\mu=\overline{1,v}$, то характеристическая функция обращается в полином $\lambda^n+\delta_{100}\lambda^{n-1}+\ldots+\delta_{n00}$, и характеристическое уравнение имеет конечное число корней, то есть спектр σ является конечным множеством.

Определение 1. Для системы (1), (2) *разрешима задача назначения произвольного конечного спектра посредством регулятора* (3), если для любых чисел $\gamma_i\in\mathbb{K}$, $i=\overline{1,n}$, найдется регулятор вида (3), при котором характеристическое уравнение замкнутой системы (4) имеет вид

$$\lambda^n+\gamma_1\lambda^{n-1}+\ldots+\gamma_n=0. \tag{6}$$

Задача назначения произвольного конечного спектра для системы (1), (2) без запаздываний $(A_1=0,\ S(\tau)\equiv 0)$ посредством регулятора (3) без запаздываний $(Q_1=0,\ R(\tau)\equiv 0)$ исследовалась в работах [22, 23], для системы (1), (2) без распределенного запаздывания $(S(\tau)\equiv 0)$ посредством регулятора (3) без распределенного запаздывания $(R(\tau)\equiv 0)$ — в работе [19], для билинейных систем — в работах [24, 25]. Задача назначения произвольного спектра для систем без распределенных запаздываний посредством статической обратной связи по выходу без распределенных запаздываний исследовалась в [20] для систем с соизмеримыми запаздываниями, в [21] для систем с несоизмеримыми запаздываниями, в [26] для системы, заданной дифференциальным уравнением n-го порядка с сосредоточенными запаздываниями без распределенных запаздываний. Задача назначения произвольного спектра для системы, заданной дифференциальным уравнением n-го порядка с одним сосредоточенным и одним распределенным запаздываниями, посредством статической обратной связи по выходу с одним сосредоточенным и одним распределенным запаздываниями исследовалась в [27].

Пусть коэффициенты A_0, B, C системы (1), (2) имеют следующий специальный вид: матрица A_0 имеет форму Хессенберга; первые $p-1$ строк матрицы B и последние $n-p$ строк матрицы C равны нулю, то есть

$$A_0=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & \dots & a_{n-1,n}\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn}\end{bmatrix},\quad a_{i,i+1}\neq 0,\quad i=\overline{1,n}, \tag{7}$$

$$B=\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0\\ \vdots & & \vdots\\ 0 & \dots & 0\\ b_{p1} & \dots & b_{pm}\\ \vdots & & \vdots\\ b_{n1} & \dots & b_{nm}\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1k}\\ \vdots & & \vdots\\ c_{p1} & \dots & c_{pk}\\ 0 & \dots & 0\\ \vdots & & \vdots\\ 0 & \dots & 0\end{bmatrix},\quad p\in\{1,\dots,n\}. \tag{8}$$

Будем предполагать, что матрицы A_1, $S(\tau)$ системы (1) также имеют специальный вид: первые $p-1$ строк и последние $n-p$ столбцов матриц A_1, $S(\tau)$ равны нулю, то есть

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a^1_{p1} & \dots & a^1_{pp} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^1_{n1} & \dots & a^1_{np} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad S(\tau) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ s_{p1}(\tau) & \dots & s_{pp}(\tau) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{n1}(\tau) & \dots & s_{np}(\tau) & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Здесь число p то же самое, что и в (8).

Теорема 1. *Пусть матрицы A_0, A_1, B, C, $S(\tau)$ системы* (1)*,* (2) *имеют специальный вид* (7)*,* (8)*,* (9)*. Тогда равносильны следующие утверждения.*

1\. *Матрицы*

$$C^*B, \quad C^*A_0B, \quad \dots, \quad C^*A_0^{n-1}B \tag{10}$$

линейно независимы.

2\. *Задача назначения произвольного конечного спектра системы* (1)*,* (2) *посредством регулятора* (3) *разрешима.*

Теорема 1 следует из теоремы 2 (см. далее) при $\ell = 1$.

Замечание 1. Пусть система (1), (2) содержит только сосредоточенное запаздывание $(S(\tau) \equiv 0)$, и регулятор (3) содержит только сосредоточенное запаздывание $(R(\tau) \equiv 0)$. В этом случае соответствующая теорема была доказана в [19, Теорема 1]. Таким образом, теорема 1 распространяет результаты теоремы 1 [19] на системы, содержащие не только сосредоточенное, но и распределенное запаздывание.

Следствие 1. *Пусть матрицы A_0, A_1, B, C, $S(\tau)$ системы* (1)*,* (2) *имеют специальный вид* (7)*,* (8)*,* (9) *и матрицы* (10) *линейно независимы. Тогда система* (1)*,* (2) *стабилизируема посредством регулятора* (3)*.*

§ 2. Система с несколькими запаздываниями

Рассмотрим линейную стационарную дифференциальную систему с несколькими сосредоточенными и распределенными запаздываниями в состоянии

$$\dot{x}(t) = \sum_{\nu=0}^{\ell} A_\nu x(t-h_\nu) + \sum_{\nu=1}^{\ell} \int_{-h_\nu}^{-h_{\nu-1}} S_\nu(\tau)x(t+\tau)\,d\tau + Bu(t), \quad t > 0, \tag{11}$$

$$y(t) = C^*x(t), \tag{12}$$

с начальным условием $x(\tau) = \phi(\tau)$, $\tau \in [-h, 0]$; здесь $0 = h_0 < h_1 < \ldots < h_\ell =: h$ — постоянные запаздывания, $\phi : [-h, 0] \to \mathbb{K}^n$ — непрерывная функция, $A_\nu \in M_n(\mathbb{K})$ $(\nu = \overline{0, \ell})$, $B \in M_{n,m}(\mathbb{K})$, $C \in M_{n,k}(\mathbb{K})$, $S_\nu : [-h_\nu, -h_{\nu-1}] \to M_n(\mathbb{K})$ $(\nu = \overline{1, \ell})$ — интегрируемые матричные функции, $u \in \mathbb{K}^m$ — вектор управляющего воздействия, $y \in \mathbb{K}^k$ — вектор выходных величин. Обозначим $S\colon [-h, 0] \to M_n(\mathbb{K})$:

$$S(\tau) := \begin{cases} S_1(\tau), & \tau \in [-h_1, 0], \\ S_2(\tau), & \tau \in [-h_2, -h_1), \\ \dots\dots, & \\ S_\ell(\tau), & \tau \in [-h_\ell, -h_{\ell-1}). \end{cases} \tag{13}$$

Тогда система (11), (12) запишется в виде

$$\dot{x}(t)=\sum_{\nu=0}^{\ell}A_\nu x(t-h_\nu)+\int_{-h}^{0}S(\tau)x(t+\tau)\,d\tau+Bu(t),\quad t>0, \tag{14}$$

$$y(t)=C^*x(t). \tag{15}$$

Пусть управление в системе (14), (15) строится в виде линейной статической обратной связи по выходу с сосредоточенными и распределенными запаздываниями

$$u(t)=\sum_{\nu=0}^{\ell}Q_\nu y(t-h_\nu)+\int_{-h}^{0}R(\tau)y(t+\tau)\,d\tau, \tag{16}$$

$y(\tau)=0$, $\tau<-h$. Здесь $Q_\nu=\{q^\nu_{\alpha\beta}\}\in M_{m,k}(\mathbb{K})$ $(\nu=\overline{0,\ell})$ — постоянные матрицы, $R(\tau)=\{r_{\alpha\beta}(\tau)\}\in M_{m,k}(\mathbb{K})$, $r_{\alpha\beta}\colon[-h,0]\to\mathbb{K}$ — интегрируемые функции, $\alpha=\overline{1,m}$, $\beta=\overline{1,k}$. Замкнутая система (14), (15), (16) принимает вид

$$\dot{x}(t)=\sum_{\nu=0}^{\ell}(A_\nu+BQ_\nu C^*)x(t-h_\nu)+\int_{-h}^{0}(S(\tau)+BR(\tau)C^*)x(t+\tau)\,d\tau. \tag{17}$$

Обозначим через

$$\varphi(\lambda)=\det\Big[\lambda I-\Big(\sum_{\nu=0}^{\ell}(A_\nu+BQ_\nu C^*)e^{-\lambda h_\nu}+\int_{-h}^{0}(S(\tau)+BR(\tau)C^*)e^{\lambda\tau}d\tau\Big)\Big]$$

характеристическую функцию замкнутой системы (17). Через $\varphi_0(\lambda)$ обозначим характеристическую функцию свободной системы

$$\dot{x}(t)=\sum_{\nu=0}^{\ell}A_\nu x(t-h_\nu)+\int_{-h}^{0}S(\tau)x(t+\tau)\,d\tau,$$

т. е. $\varphi_0(\lambda)=\det\Big[\lambda I-\Big(\sum_{\nu=0}^{\ell}A_\nu e^{-\lambda h_\nu}+\int_{-h}^{0}S(\tau)e^{\lambda\tau}d\tau\Big)\Big]$.

Введем обозначения:

$$\Omega_1=\Big\{\omega:\omega=\sum_{i=1}^{1}h_{\nu_i},\ \nu_i\in\{0,1,\ldots,\ell\}\Big\}=\{h_0,h_1,\ldots,h_\ell\}=:\{\omega^1_0,\omega^1_1,\ldots,\omega^1_{\theta_1}\},$$

$$\Omega_2=\Big\{\omega:\omega=\sum_{i=1}^{2}h_{\nu_i},\ \nu_i\in\{0,1,\ldots,\ell\}\Big\}=:\{\omega^2_0,\omega^2_1,\ldots,\omega^2_{\theta_2}\},$$

. . . . ,

$$\Omega_n=\Big\{\omega:\omega=\sum_{i=1}^{n}h_{\nu_i},\ \nu_i\in\{0,1,\ldots,\ell\}\Big\}=:\{\omega^n_0,\omega^n_1,\ldots,\omega^n_{\theta_n}\}.$$

Здесь i в записи ω^i_j означает индекс, а не степень. Считаем, что элементы ω^i_j множества Ω_i упорядочены по возрастанию, т. е. $\omega^i_j<\omega^i_{j+1}$. Имеем $\omega^1_0=\ldots=\omega^n_0=0$. Полагаем $\theta_0:=0$, $\omega^0_0:=0$.

Характеристическое уравнение $\varphi(\lambda) = 0$ замкнутой системы (17) имеет вид

$$\lambda^n + \sum_{i=1}^{n} \lambda^{n-i} \Bigg(\sum_{j=0}^{\theta_i} \delta_{i0j} \exp(-\lambda \omega_j^i) + \\ + \sum_{\upsilon=1}^{i} \sum_{j=0}^{\theta_{i-\upsilon}} \int_{-h}^{0} \dots \int_{-h}^{0} \delta_{i\upsilon j}(\tau_1, \dots, \tau_\upsilon) \exp\left(\lambda \Big(\sum_{\mu=1}^{\upsilon} \tau_\mu - \omega_j^{i-\upsilon} \Big) \right) d\tau_1 \dots d\tau_\upsilon \Bigg) = 0. \quad (18)$$

Здесь числа δ_{i0j}, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{0,\theta_i}$, и функции $\delta_{i\upsilon j}(\tau_1, \dots, \tau_\upsilon)$, $\tau_\mu \in [-h, 0]$, $i = \overline{1,n}$, $\upsilon = \overline{1,i}$, $j = \overline{0,\theta_{i-\upsilon}}$, $\mu = \overline{1,\upsilon}$, зависят от коэффициентов A_ν ($\nu = \overline{1,\ell}$), B, C, $S(\tau)$ системы (14), (15) и от коэффициентов Q_ν ($\nu = \overline{1,\ell}$), $R(\tau)$ обратной связи (16). Если в уравнении (18) числа $\delta_{i0j} = 0$ для всех $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,\theta_i}$, и функции $\delta_{i\upsilon j}(\tau_1, \dots, \tau_\upsilon) \equiv 0$, $\tau_\mu \in [-h, 0]$, $i = \overline{1,n}$, $\upsilon = \overline{1,i}$, $j = \overline{0,\theta_{i-\upsilon}}$, $\mu = \overline{1,\upsilon}$, то характеристическая функция обращается в полином $\lambda^n + \delta_{100}\lambda^{n-1} + \dots + \delta_{n00}$, и характеристическое уравнение имеет конечное число корней, то есть спектр σ является конечным множеством.

Замечание 2. Пусть $\ell = 1$, $h := h_1$. Тогда: $\theta_i = i$, $i = \overline{1,n}$; $\omega_j^i = jh$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,i}$; $\Omega_i = \{0, h, \dots, ih\}$, $i = \overline{1,n}$; формула (18) совпадает с (5).

Определение 2. Для системы (14), (15) *разрешима задача назначения произвольного конечного спектра посредством регулятора* (16), если для любых чисел $\gamma_i \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1,n}$, найдется регулятор вида (16), при котором характеристическое уравнение замкнутой системы (17) имеет вид (6).

Пусть коэффициенты A_0, B, C системы (14), (15) имеют специальный вид (7), (8). Будем предполагать, что матрицы A_ν ($\nu = \overline{1,\ell}$), $S(\tau)$ также имеют специальный вид: первые $p-1$ строк и последние $n-p$ столбцов матриц A_ρ, $S(\tau)$ равны нулю, то есть

$$A_\nu = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{p1}^\nu & \dots & a_{pp}^\nu & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}^\nu & \dots & a_{np}^\nu & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad S(\tau) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ s_{p1}(\tau) & \dots & s_{pp}(\tau) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{n1}(\tau) & \dots & s_{np}(\tau) & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Здесь число p то же самое, что и в (8).

Пусть $\chi(A_0; \lambda) =: \lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n$. Положим $\alpha_0 := 1$. Построим по матрице A_0 матрицы

$$F_s = \alpha_0 A_0^s + \alpha_1 A_0^{s-1} + \dots + \alpha_s I, \quad s = \overline{0, n-1}. \quad (20)$$

Приведем вспомогательное утверждение (см. [19, Лемма 1]).

Лемма 1. *Пусть матрица A_0 имеет вид (7), а матрица $D \in M_n(\mathbb{K})$ имеет следующий вид:*

$$D = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ d_{p1} & \dots & d_{pp} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{n1} & \dots & d_{np} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad p \in \{1, \dots, n\}. \quad (21)$$

Пусть $\chi(A_0 + D; \lambda) = \lambda^n + \varkappa_1\lambda^{n-1} + \dots + \varkappa_n$. Тогда $\varkappa_i = \alpha_i - \mathrm{Sp}\,(DF_{i-1})$ для всех $i = \overline{1,n}$.

Теорема 2. *Пусть коэффициенты системы* (14)*,* (15) *имеют специальный вид* (7)*,* (8)*,* (19)*. Тогда равносильны следующие утверждения.*

1. *Матрицы* (10) *линейно независимы.*

2. *Задача назначения произвольного конечного спектра системы* (14)*,* (15) *посредством регулятора* (16) *разрешима.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что матрицы A_ν, B, C, $S(\tau)$, $\nu = \overline{0,\ell}$, системы (14), (15) имеют специальный вид (7), (8), (19). Рассмотрим задачу назначения произвольного конечного спектра посредством регулятора (16). Пусть задан многочлен

$$q(\lambda) = \lambda^n + \gamma_1\lambda^{n-1} + \ldots + \gamma_n, \tag{22}$$

$\gamma_i \in \mathbb{K}$. Требуется построить Q_ρ, $R(\tau) \in M_{m,k}(\mathbb{K})$, $\rho = \overline{0,\ell}$, так, чтобы характеристическая функция

$$\varphi(\lambda) = \lambda^n + \sum_{i=1}^{n}\lambda^{n-i}\Biggl(\sum_{j=0}^{\theta_i}\delta_{i0j}\exp(-\lambda\omega_j^i) + \\ + \sum_{\upsilon=1}^{i}\sum_{j=0}^{\theta_{i-\upsilon}}\int_{-h}^{0}\ldots\int_{-h}^{0}\delta_{i\upsilon j}(\tau_1,\ldots,\tau_\upsilon)\exp\left(\lambda\Bigl(\sum_{\mu=1}^{\upsilon}\tau_\mu - \omega_j^{i-\upsilon}\Bigr)\right)d\tau_1\ldots d\tau_\upsilon\Biggr) \tag{23}$$

замкнутой системы (17) удовлетворяла равенству

$$\varphi(\lambda) = q(\lambda). \tag{24}$$

Из (22) и (23) следует, что равенство (24) выполнено тогда и только тогда, когда

$$\gamma_i = \delta_{i00}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{25}$$

$$\delta_{i0j} = 0, \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,\theta_i}, \tag{26}$$

$$\delta_{i\upsilon j}(\tau_1,\ldots,\tau_\upsilon) = 0 \quad \text{п.в. } \tau_\mu \in [-h,0],\ i = \overline{1,n},\ \upsilon = \overline{1,i},\ j = \overline{0,\theta_{i-\upsilon}},\ \mu = \overline{1,\upsilon}. \tag{27}$$

Обозначим

$$D = BQ_0C^* + \sum_{\rho=1}^{\ell}e^{-\lambda h_\rho}(A_\rho + BQ_\rho C^*) + \int_{-h}^{0}\bigl(S(\tau) + BR(\tau)C^*\bigr)e^{\lambda\tau}d\tau. \tag{28}$$

Имеем

$$\varphi(\lambda) = \det\bigl(\lambda I - (A_0 + D)\bigr) = \chi(A_0 + D;\lambda). \tag{29}$$

Из условий (8), (19) следует, что матрица (28) имеет вид (21). Учитывая равенство (29), условие (7) и применяя лемму 1, получаем, что

$$\varphi(\lambda) = \lambda^n + \sum_{i=1}^{n}\varkappa_i\lambda^{n-i},$$

где

$$\varkappa_i = \alpha_i - \mathrm{Sp}\,(BQ_0C^*F_{i-1}) - \sum_{\rho=1}^{\ell}e^{-\lambda h_\rho}\mathrm{Sp}\,\Bigl((A_\rho + BQ_\rho C^*)F_{i-1}\Bigr) \\ - \int_{-h}^{0}\mathrm{Sp}\,\Bigl(\bigl(S(\tau) + BR(\tau)C^*\bigr)F_{i-1}\Bigr)e^{\lambda\tau}\,d\tau.$$

Таким образом, равенства (25), (26), (27) выполнены тогда и только тогда, когда

$$\gamma_i = \alpha_i - \mathrm{Sp}\,(BQ_0C^*F_{i-1}), \quad i = \overline{1,n}, \tag{30}$$

$$\mathrm{Sp}\,\Big((A_\rho + BQ_\rho C^*)F_{i-1}\Big) = 0, \quad i = \overline{1,n},\ \rho = \overline{1,\ell}, \tag{31}$$

$$\mathrm{Sp}\,\Big(\big(S(\tau) + BR(\tau)C^*\big)F_{i-1}\Big) = 0 \quad \text{п.в. } \tau \in [-h,0],\ i = \overline{1,n}. \tag{32}$$

Имеем для всех $\rho = \overline{0,\ell}$, $i = \overline{1,n}$

$$\mathrm{Sp}\,(BQ_\rho C^*F_{i-1}) = \mathrm{Sp}\,(Q_\rho C^*F_{i-1}B) = \sum_{r=0}^{i-1} \alpha_{i-1-r}\mathrm{Sp}\,(Q_\rho C^*A_0^rB),$$

$$\mathrm{Sp}\,\big(BR(\tau)C^*F_{i-1}\big) = \mathrm{Sp}\,\big(R(\tau)C^*F_{i-1}B\big) = \sum_{r=0}^{i-1} \alpha_{i-1-r}\mathrm{Sp}\,(R(\tau)C^*A_0^rB).$$

Обозначим $R\colon [-h,0] \to M_{m,k}(\mathbb{K})$:

$$R(\tau) := \begin{cases} R_1(\tau), & \tau \in [-h_1, 0], \\ R_2(\tau), & \tau \in [-h_2, -h_1), \\ \dots\dots, & \\ R_\ell(\tau), & \tau \in [-h_\ell, -h_{\ell-1}). \end{cases}$$

Тогда равенства (30), (31), (32) равносильны системам линейных уравнений

$$\gamma_i = \alpha_i - \sum_{r=0}^{i-1} \alpha_{i-1-r}\mathrm{Sp}\,(Q_0C^*A_0^rB), \quad i = \overline{1,n}, \tag{33}$$

$$\mathrm{Sp}\,(A_\rho F_{i-1}) = -\sum_{r=0}^{i-1} \alpha_{i-1-r}\mathrm{Sp}\,(Q_\rho C^*A_0^rB), \quad i = \overline{1,n}, \quad \rho = \overline{1,\ell}, \tag{34}$$

$$\begin{gathered} \mathrm{Sp}\big(S_\eta(\tau)F_{i-1}\big) = -\sum_{r=0}^{i-1} \alpha_{i-1-r}\mathrm{Sp}\,\big(R_\eta(\tau)C^*A_0^rB\big) \\ \text{п.в. } \tau \in [-h_\eta, -h_{\eta-1}], \quad i = \overline{1,n}, \quad \eta = \overline{1,\ell}. \end{gathered} \tag{35}$$

относительно элементов матриц Q_ρ, $\rho = \overline{0,\ell}$, и матриц $R_\eta(\tau)$, $\eta = \overline{1,\ell}$. Перепишем системы (33), (34), (35) в векторном виде. Для этого воспользуемся равенством $\mathrm{Sp}\,(XY) = (\mathrm{vec}\,Y)^T \cdot (\mathrm{vec}\,X^T)$. Применим это равенство к матрицам $Y = C^*A_0^rB$, $r = \overline{0,n-1}$, и к матрицам $X = Q_\rho$, $\rho = \overline{0,\ell}$, в (33), (34), и $X = R_\eta(\tau)$, $\eta = \overline{1,\ell}$, в (35). Построим матрицы

$$P := [\mathrm{vec}\,(C^*B), \mathrm{vec}\,(C^*A_0B), \dots, \mathrm{vec}\,(C^*A_0^{n-1}B)] \in M_{mk,n}(\mathbb{K}), \tag{36}$$

$$G := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-3} & \dots & 1 \end{bmatrix}. \tag{37}$$

Обозначим

$$\begin{gathered} v_\rho := \mathrm{vec}\,(Q_\rho^T) \in \mathbb{K}^{mk}, \quad \rho = \overline{0,\ell}, \\ w_0 := \mathrm{col}\,(\alpha_1 - \gamma_1, \ldots, a_n - \gamma_n) \in \mathbb{K}^n, \\ w_\rho := \mathrm{col}\,(-\mathrm{Sp}(A_\rho F_0), \ldots, -\mathrm{Sp}\,(A_\rho F_{n-1})) \in \mathbb{K}^n, \quad \rho = \overline{1,\ell}, \\ f_\eta(\tau) := \mathrm{vec}\,\big(R_\eta(\tau)^T\big) \in \mathbb{K}^{mk}, \quad \eta = \overline{1,\ell}, \\ g_\eta(\tau) := \mathrm{col}\Big(-\mathrm{Sp}\big(S_\eta(\tau)F_0\big), \ldots, -\mathrm{Sp}\,\big(S_\eta(\tau)F_{n-1}\big)\Big) \in \mathbb{K}^n, \quad \eta = \overline{1,\ell}. \end{gathered}$$

Тогда системы (33), (34), (35), можно записать в векторном виде

$$GP^T v_\rho = w_\rho, \quad \rho = \overline{0,\ell}, \tag{38}$$

$$GP^T f_\eta(\tau) = g_\eta(\tau) \text{ п.в. } \tau \in [-h_\eta, -h_{\eta-1}], \quad \eta = \overline{1,\ell}. \tag{39}$$

Задача назначения произвольного конечного спектра системы (14), (15) посредством регулятора (16) разрешима тогда и только тогда, когда система (38), (39) разрешима относительно v_ρ, $\rho = \overline{0,\ell}$, и $f_\eta(\tau)$, $\eta = \overline{1,\ell}$, для любого набора $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$. Условие линейной независимости матриц (10) является необходимым и достаточным для разрешимости системы (38), (39). В частности, система (38), (39) имеет решение

$$v_\rho = P(P^TP)^{-1}G^{-1}w_\rho, \qquad \rho = \overline{0,\ell}, \tag{40}$$

$$f_\eta(\tau) = P(P^TP)^{-1}G^{-1}g_\eta(\tau), \quad \eta = \overline{1,\ell}. \tag{41}$$

Искомые матрицы находятся из равенств $Q_\rho = (\mathrm{vec}^{-1} v_\rho)^T$, $R_\eta(\tau) = (\mathrm{vec}^{-1} f_\eta)^T$, $\rho = \overline{0,\ell}$, $\eta = \overline{1,\ell}$. □

Следствие 2. *Пусть коэффициенты системы* (14), (15) *имеют специальный вид* (7), (8), (19), *и матрицы* (10) *линейно независимы. Тогда система* (14), (15) *стабилизируема посредством регулятора* (16).

§ 3. Примеры

Пример 1. Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $n = 3$, $m = 2$, $k = 2$, $s = 2$, и коэффициенты системы (1), (2) имеют следующий вид:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{42}$$

$$S(\tau) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2\cos\tau & -2\sin\tau & 0 \\ \sin\tau & \sin 2\tau & 0 \end{bmatrix}. \tag{43}$$

Характеристическая функция $\varphi_0(\lambda)$ свободной системы имеет вид

$$\varphi_0(\lambda) = \lambda^3 + \left(2 - e^{-\lambda h} + 2\int_{-h}^0 \sin\tau e^{\lambda\tau} d\tau\right)\lambda^2 +$$

$$+\left(1 + 2e^{-\lambda h} - \int_{-h}^0 (2\cos\tau - 2\sin\tau + \sin 2\tau)e^{\lambda\tau} d\tau\right)\lambda + e^{-\lambda h} - \int_{-h}^0 (2\cos\tau + \sin\tau)e^{\lambda\tau} d\tau.$$

Характеристическая функция замкнутой системы (4) с матрицами (42), (43) имеет вид

$$\varphi(\lambda) = \lambda^3 + \sum_{i=1}^{3} \lambda^{3-i} \Bigg(\sum_{j=0}^{i} \delta_{i0j} \exp(-\lambda j h) + \\ + \sum_{v=1}^{i} \sum_{j=0}^{i-v} \int_{-h}^{0} \ldots \int_{-h}^{0} \delta_{ivj}(\tau_1, \ldots, \tau_v) \exp\left(\lambda \Big(\sum_{\mu=1}^{v} \tau_\mu - jh \Big) \right) d\tau_1 \ldots d\tau_v \Bigg),$$

где

$$\delta_{100} = q_{11}^0 - q_{12}^0 - q_{21}^0 + q_{22}^0 + 2, \quad \delta_{101} = q_{11}^1 - q_{12}^1 - q_{21}^1 + q_{22}^1 - 1,$$
$$\delta_{110}(\tau_1) = 2\sin\tau_1 + r_{11}(\tau_1) - r_{12}(\tau_1) - r_{21}(\tau_1) + r_{22}(\tau_1),$$
$$\delta_{200} = 2q_{11}^0 - q_{12}^0 - q_{21}^0 + 1, \quad \delta_{201} = 2q_{11}^1 - q_{12}^1 - q_{21}^1 + 2, \quad \delta_{202} = 0,$$
$$\delta_{210}(\tau_1) = -2\cos\tau_1 + 2\sin\tau_1 - \sin 2\tau_1 + 2r_{11}(\tau_1) - r_{12}(\tau_1) - r_{21}(\tau_1),$$
$$\delta_{211}(\tau_1) = 0, \quad \delta_{220}(\tau_1, \tau_2) = 0, \quad \delta_{300} = q_{11}^0, \quad \delta_{301} = q_{11}^1 + 1, \quad \delta_{302} = 0,$$
$$\delta_{303} = 0, \quad \delta_{310}(\tau_1) = -2\cos\tau_1 - \sin\tau_1 + r_{11}(\tau_1), \quad \delta_{311}(\tau_1) = 0,$$
$$\delta_{312}(\tau_1) = 0, \quad \delta_{320}(\tau_1, \tau_2) = 0, \quad \delta_{321}(\tau_1, \tau_2) = 0, \quad \delta_{330}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = 0.$$

Коэффициенты системы удовлетворяют условиям теоремы 1, то есть имеют специальный вид (7), (8), (9), где $p = 2$. Имеем $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 0$. Построим матрицы (10):

$$C^* B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad C^* A_0 B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C^* A_0^2 B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}. \tag{44}$$

Построим матрицы (36), (37):

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}. \tag{45}$$

Имеем $\operatorname{rank} P = 3 = n$, следовательно, матрицы (44) линейно независимы. Таким образом, по теореме 1 для системы (1), (2) разрешима задача назначения произвольного конечного спектра посредством регулятора (3). Построим такой регулятор. Пусть к примеру $q(\lambda) = (\lambda+1)^3 = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1$. Тогда $\gamma_1 = 3$, $\gamma_2 = 3$, $\gamma_3 = 1$. Вычислим матрицы F_0, F_1, F_2 по формуле (20), получим $F_0 = I$,

$$F_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{46}$$

Далее находим

$$w_0 = \operatorname{col}(\alpha_1 - \gamma_1, \alpha_2 - \gamma_2, \alpha_3 - \gamma_3) = \operatorname{col}(-1, -2, -1),$$
$$w_1 = \operatorname{col}\big(-\operatorname{Sp}(A_1 F_0), -\operatorname{Sp}(A_1 F_1), -\operatorname{Sp}(A_1 F_2) \big) = \operatorname{col}(-1, 2, 1),$$
$$g_1(\tau) = \operatorname{col}\big(-\operatorname{Sp}(S(\tau) F_0), -\operatorname{Sp}(S(\tau) F_1), -\operatorname{Sp}(S(\tau) F_2) \big) =$$
$$= \operatorname{col}(2\sin\tau, -2\cos\tau + 2\sin\tau - \sin 2\tau, -2\cos\tau - \sin\tau).$$

Вычисляя v_0, v_1, $f_1(\tau)$ по формулам (40), (41), получим

$$v_0 = \operatorname{col}(1, 0, 0, 0), \qquad v_1 = \operatorname{col}(-1, 0, 0, 2),$$
$$f_1(\tau) = \operatorname{col}\big(2\cos\tau + \sin\tau, 2\sin\tau + \cos\tau - \sin\tau\cos\tau, 2\sin\tau + \cos\tau - \sin\tau\cos\tau, \sin\tau - \sin 2\tau\big).$$

Отсюда находим

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \tag{47}$$

$$R(\tau) = \begin{bmatrix} 2\cos\tau + \sin\tau & 2\sin\tau + \cos\tau - \sin\tau\cos\tau \\ 2\sin\tau + \cos\tau - \sin\tau\cos\tau & \sin\tau - \sin 2\tau \end{bmatrix}. \tag{48}$$

Система (1), (2), замкнутая управлением (3) с матрицами (47), (48) принимает вид

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t-h) +$$
$$+ \int_{-h}^{0} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \cos\tau + \sin\tau - \sin\tau\cos\tau & 0 & 0 \\ -\sin\tau - \cos\tau + \sin\tau\cos\tau & -\sin\tau - \cos\tau + \sin\tau\cos\tau & 0 \end{bmatrix} x(t+\tau)\, d\tau. \tag{49}$$

Вычисляя характеристическую функцию $\varphi(\lambda)$ замкнутой системы (49) получаем, что $\varphi(\lambda) = (\lambda+1)^3$. В частности, система (49) экспоненциально устойчива. □

Пример 2. Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $n = 3$, $m = 2$, $k = 2$, $p = 2$, $\ell = 2$, $h_0 = 0$, $h_1 = 1$, $h_2 = 4$, и коэффициенты системы (14), (15) имеют вид (42), (13) и

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{50}$$

$$S_1(\tau) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \cos\tau + 2\sin\tau & 2\sin 2\tau & 0 \\ 0 & \cos\tau & 0 \end{bmatrix}, \quad S_2(\tau) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2\sin\tau & 2\cos\tau & 0 \\ \cos\tau & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{51}$$

Построим множества Ω_i, $i = \overline{1,3}$. Имеем $\theta_1 = 2$, $\theta_2 = 5$, $\theta_3 = 9$,

$\Omega_1 = \{h_0, h_1, h_2\} = \{0, 1, 4\} =: \{\omega_0^1, \omega_1^1, \omega_2^1\}$,

$\Omega_2 = \{2h_0, h_0+h_1, 2h_1, h_0+h_2, h_1+h_2, 2h_2\} = \{0, 1, 2, 4, 5, 8\} =: \{\omega_0^2, \omega_1^2, \omega_2^2, \omega_3^2, \omega_4^2, \omega_5^2\}$,

$\Omega_3 = \{3h_0, 2h_0+h_1, h_0+2h_1, 3h_1, 2h_0+h_2, h_0+h_1+h_2, 2h_1+h_2, h_0+2h_2, h_1+2h_2, 3h_2\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 12\} =: \{\omega_0^3, \omega_1^3, \omega_2^3, \omega_3^3, \omega_4^3, \omega_5^3, \omega_6^3, \omega_7^3, \omega_8^3, \omega_9^3\}$.

Характеристическая функция $\varphi_0(\lambda)$ свободной системы имеет вид

$$\varphi_0(\lambda) = \lambda^3 + \left(2 - e^{-\lambda} - e^{-4\lambda} - 2\int_{-1}^{0} \sin 2\tau e^{\lambda\tau} d\tau - 2\int_{-4}^{-1} \cos\tau e^{\lambda\tau} d\tau\right)\lambda^2 +$$
$$+ \left(1 + 2e^{-\lambda} - 2\int_{-1}^{0} (\sin 2\tau + \cos\tau + \sin\tau) e^{\lambda\tau} d\tau + 2\int_{-4}^{-1} (\sin\tau - \cos\tau) e^{\lambda\tau} d\tau\right)\lambda +$$
$$+ e^{-\lambda} - e^{-4\lambda} - \int_{-1}^{0} (\cos\tau + 2\sin\tau) e^{\lambda\tau} d\tau + \int_{-4}^{-1} (2\sin\tau - \cos\tau) e^{\lambda\tau} d\tau.$$

Характеристическая функция замкнутой системы (18) с матрицами (42), (43), (50), (51) имеет вид

$$\varphi(\lambda) = \lambda^3 + \sum_{i=1}^{3} \lambda^{3-i} \left(\sum_{j=0}^{\theta_i} \delta_{i0j} \exp(-\lambda\omega_j^i) + \right.$$
$$\left. + \sum_{v=1}^{i} \sum_{j=0}^{\theta_{i-v}} \int_{-h}^{0} \dots \int_{-h}^{0} \delta_{ivj}(\tau_1, \dots, \tau_v) \exp\left(\lambda\Big(\sum_{\mu=1}^{v} \tau_\mu - \omega_j^{i-v}\Big)\right) d\tau_1 \dots d\tau_v \right),$$

где

$$\delta_{100} = q^0_{11} - q^0_{12} - q^0_{21} + q^0_{22} + 2, \quad \delta_{101} = q^1_{11} - q^1_{12} - q^1_{21} + q^1_{22} - 1,$$
$$\delta_{102} = q^2_{11} - q^2_{12} - q^2_{21} + q^2_{22} - 1,$$
$$\delta_{110}(\tau_1) = \begin{cases} -2\sin 2\tau_1 + r^1_{11}(\tau_1) - r^1_{12}(\tau_1) - r^1_{21}(\tau_1) + r^1_{22}(\tau_1), & \tau_1 \in [-1, 0], \\ -2\cos\tau_1 + r^2_{11}(\tau_1) - r^2_{12}(\tau_1) - r^2_{21}(\tau_1) + r^2_{22}(\tau_1), & \tau_1 \in [-4, -1), \end{cases}$$
$$\delta_{200} = 2q^0_{11} - q^0_{12} - q^0_{21} + 1, \quad \delta_{201} = 2q^1_{11} - q^1_{12} - q^1_{21} + 2, \quad \delta_{202} = 0,$$
$$\delta_{203} = 2q^2_{11} - q^2_{12} - q^2_{21}, \quad \delta_{204} = 0, \quad \delta_{205} = 0,$$
$$\delta_{210}(\tau_1) = \begin{cases} -2\cos\tau_1 - 2\sin 2\tau_1 - 2\sin\tau_1 + 2r^1_{11}(\tau_1) - r^1_{12}(\tau_1) - r^1_{21}(\tau_1), & \tau_1 \in [-1, 0], \\ 2\sin\tau_1 - 2\cos\tau_1 + 2r^2_{11}(\tau_1) - r^2_{12}(\tau_1) - r^2_{21}(\tau_1), & \tau_1 \in [-4, -1), \end{cases}$$
$$\delta_{211}(\tau_1) = 0, \quad \delta_{212}(\tau_1) = 0, \quad \delta_{220}(\tau_1, \tau_2) = 0, \quad \delta_{300} = q^0_{11}, \quad \delta_{301} = q^1_{11} + 1, \quad \delta_{302} = 0,$$
$$\delta_{303} = 0, \quad \delta_{304} = q^2_{11} - 1, \quad \delta_{305} = 0, \quad \delta_{306} = 0, \quad \delta_{307} = 0, \quad \delta_{308} = 0, \quad \delta_{309} = 0$$
$$\delta_{310}(\tau_1) = \begin{cases} -\cos\tau_1 - 2\sin\tau_1 + r^0_{11}(\tau_1), & \tau_1 \in [-1, 0], \\ 2\sin\tau_1 - \cos\tau_1 + r^1_{11}(\tau_1), & \tau_1 \in [-4, -1), \end{cases}$$
$$\delta_{311}(\tau_1) = 0, \quad \delta_{312}(\tau_1) = 0, \quad \delta_{313}(\tau_1) = 0, \quad \delta_{314}(\tau_1) = 0, \quad \delta_{315}(\tau_1) = 0, \quad \delta_{320}(\tau_1, \tau_2) = 0,$$
$$\delta_{321}(\tau_1, \tau_2) = 0, \quad \delta_{322}(\tau_1, \tau_2) = 0, \quad \delta_{330}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = 0.$$

Коэффициенты системы удовлетворяют условиям теоремы 2, то есть имеют специальный вид (7), (8), (19), где $p = 2$. Имеем $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 0$. Матрицы C^*B, C^*A_0B, $C^*A_0^2B$, P, G имеют вид (44), (45). Имеем $\operatorname{rank} P = 3 = n$, следовательно, матрицы (44) линейно независимы. Таким образом, по теореме 2 для системы (14), (15) разрешима задача назначения конечного спектра посредством регулятора (16). Построим такой регулятор. Пусть, к примеру, $q(\lambda) = (\lambda + 1)^3 = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1$. Тогда $\gamma_1 = 3$, $\gamma_2 = 3$, $\gamma_3 = 1$. Матрицы F_0, F_1, F_2 имеют вид (46).

Далее находим

$$w_0 = \operatorname{col}(\alpha_1 - \gamma_1, \alpha_2 - \gamma_2, \alpha_3 - \gamma_3) = \operatorname{col}(-1, -2, -1),$$
$$w_1 = \operatorname{col}\big(-\operatorname{Sp}(A_1F_0), -\operatorname{Sp}(A_1F_1), -\operatorname{Sp}(A_1F_2)\big) = \operatorname{col}(-1, 2, 1),$$
$$w_2 = \operatorname{col}\big(-\operatorname{Sp}(A_2F_0), -\operatorname{Sp}(A_2F_1), -\operatorname{Sp}(A_2F_2)\big) = \operatorname{col}(-1, 0, -1),$$
$$g_1(\tau) = \operatorname{col}\big(-\operatorname{Sp}(S_1(\tau)F_0), -\operatorname{Sp}(S_1(\tau)F_1), -\operatorname{Sp}(S_1(\tau)F_2)\big) =$$
$$= \operatorname{col}(-2\sin 2\tau, -2(\cos\tau + \sin\tau + \sin 2\tau), -\cos\tau - 2\sin\tau),$$
$$g_2(\tau) = \operatorname{col}\big(-\operatorname{Sp}(S_2(\tau)F_0), -\operatorname{Sp}(S_2(\tau)F_1), -\operatorname{Sp}(S_2(\tau)F_2)\big) =$$
$$= \operatorname{col}(-2\cos\tau, 2(\sin\tau - \cos\tau), 2\sin\tau - \cos\tau).$$

Вычисляя v_ρ, $\rho = 0, 1, 2$, и $f_\eta(\tau)$, $\eta = 1, 2$, по формулам (40), (41), получим

$$v_0 = \operatorname{col}(1, 0, 0, 0); \quad v_1 = \operatorname{col}(-1, 0, 0, 2), \quad v_2 = \operatorname{col}(1, 1, 1, 2),$$
$$f_1(\tau) = \operatorname{col}(\cos\tau + 2\sin\tau, \sin\tau - \sin 2\tau, \sin\tau - \sin 2\tau, -\cos\tau),$$
$$f_2(\tau) = \operatorname{col}(-2\sin\tau + \cos\tau, -\sin\tau, -\sin\tau, \cos\tau).$$

Отсюда находим

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \tag{52}$$

$$R_1(\tau) = \begin{bmatrix} \cos\tau + 2\sin\tau & \sin\tau - \sin 2\tau \\ \sin\tau - \sin 2\tau & -\cos\tau \end{bmatrix}, \quad R_2(\tau) = \begin{bmatrix} -2\sin\tau + \cos\tau & -\sin\tau \\ -\sin\tau & \cos\tau \end{bmatrix}. \tag{53}$$

Система (14), (15), замкнутая управлением (16) с матрицами (52), (53) принимает вид

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t-1) + \\ + \int_{-1}^{0} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sin\tau - \sin 2\tau & 0 & 0 \\ -\sin\tau + \sin 2\tau & -\sin\tau + \sin 2\tau & 0 \end{bmatrix} x(t+\tau)\, d\tau + \\ + \int_{-4}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\sin\tau - \cos\tau & 0 & 0 \\ \sin\tau + \cos\tau & \sin\tau + \cos\tau & 0 \end{bmatrix} x(t+\tau)\, d\tau. \quad (54)$$

Вычисляя характеристическую функцию $\varphi(\lambda)$ замкнутой системы (54) получаем, что $\varphi(\lambda) = (\lambda+1)^3$. В частности, система (54) экспоненциально устойчива. □

При выполнении исследований были использованы вычислительные ресурсы центра коллективного пользования ИММ УрО РАН «Суперкомпьютерный центр ИММ УрО РАН».

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № 075-00232-20-01, проект 0827-2020-0010 «Развитие теории и методов управления и стабилизации динамических систем».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Manitius A., Olbrot A. Finite spectrum assignment problem for systems with delays // IEEE Transactions on Automatic Control. 1979. Vol. 24. Issue 4. P. 541–552. https://doi.org/10.1109/TAC.1979.1102124
2. Watanabe K., Ito M., Kaneko M., Ouchi T. Finite spectrum assignment problem for systems with delay in state variables // IEEE Transactions on Automatic Control. 1983. Vol. 28. Issue 4. P. 506–508. https://doi.org/10.1109/TAC.1983.1103258
3. Suyama K. Distributed delays in finite spectrum assignment // Proceedings of the 2003 American Control Conference. 2003. https://doi.org/10.1109/ACC.2003.1243484
4. Kosugi N., Suyama K. Finite spectrum assignment of systems with general delays // International Journal of Control. 2011. Vol. 84. Issue 12. P. 1983–1995. https://doi.org/10.1080/00207179.2011.631150
5. Melchor-Aguilar D., Tristan-Tristan B. On the implementation of control laws for finite spectrum assignment: the multiple delays case // 2007 4th International Conference on Electrical and Electronics Engineering. 2007. https://doi.org/10.1109/ICEEE.2007.4345023
6. Mondie S., Michiels W. Finite spectrum assignment of unstable time-delay systems with a safe implementation // IEEE Transactions of Automatic Control. 2003. Vol. 48. Issue 12. P. 2207–2212. https://doi.org/10.1109/TAC.2003.820147
7. Metel'skii A.V. Finite spectrum assignment problem for a delay type system // Differential Equations. 2014. Vol. 50. Issue 5. P. 689–699. https://doi.org/10.1134/S0012266114050115
8. Metel'skii A.V. Feedback control of the spectrum of differential-difference system // Automation and Remote Control. 2015. Vol. 76. Issue 4. P. 560–572. https://doi.org//10.1134/S0005117915040025
9. Molnar T.G., Insperger T. On the robust stabilizability of unstable systems with feedback delay by finite spectrum assignment // Journal of Vibration and Control. 2014. Vol. 22. Issue 3. P. 649–661. https://doi.org//10.1177/1077546314529602
10. Voros I., Varszegi B. Lateral vehicle control using finite spectrum assignment // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51. Issue 14. P. 306–311. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.07.241

11. Борковская И.М., Марченко В.М. Модальное управление системами с распределенным запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 1993. Вып. 8. С. 40–52.
12. Марченко В.М., Борковская И.М. Модальное управление системами с распределенным запаздыванием в условиях неполной информации // Дифференциальные уравнения. 1993. Том 29. № 11. С. 1928–1936.
13. Metel'skii A.V. Modal controllability of a delay differential system by an incomplete output // Differential Equations. 2018. Vol. 54. Issue 11. P. 1483–1493. https://doi.org/10.1134/S0012266118110095
14. Choon K.A. Stabilization of linear systems with distributed input delay using reduction transformation // Chinese Science Bulletin. 2011. Vol. 56. Issue 13. P. 1413–1416. https://doi.org/10.1007/s11434-010-4152-x
15. Olgac N., Kammer A.S. Stabilisation of open-loop unstable plants under feedback control with distributed delays // IET Control Theory and Applications. 2014. Vol. 8. Issue 10. P. 813–820. https://doi.org/10.1049/iet-cta.2013.0652
16. Xu X., Liu L., Feng G. Stability and stabilization of infinite delay systems: a Lyapunov based approach // IEEE Transactions on Automatic Control. 2019. P. 1–16. https://doi.org/10.1109/TAC.2019.2958557
17. Metel'skii A.V. Algebraic approach to the stabilization of a differential system of retarded type // Differential Equations. 2018. Vol. 54. Issue 8. P. 1102–1114. https://doi.org/10.1134/S0012266118080098
18. Dolgii Yu.F. Stabilization of linear autonomous systems of differential equations with distributed delay // Automation and Remote Control. 2007. Vol. 68. Issue 10. P. 1813–1825. https://doi.org/10.1134/S0005117907100098
19. Зайцев В.А., Ким И.Г. Задача назначения конечного спектра в линейных системах с запаздыванием по состоянию при помощи статической обратной связи по выходу // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 4. С. 463–473. https://doi.org/10.20537/vm160402
20. Зайцев В.А., Ким И.Г. О назначении произвольного спектра в линейных стационарных системах с соизмеримыми запаздываниями по состоянию при помощи статической обратной связи по выходу // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27. Вып. 3. С. 313–325. https://doi.org/10.20537/vm170303
21. Kim I.G., Zaitsev V.A. Spectrum assignment by static output feedback for linear systems with time delays in states // 2018 14th International Conference "Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems" (Pyatnitskiy's Conference) (STAB). 2018. https://doi.org/10.1109/STAB.2018.8408365
22. Zaitsev V.A. Spectrum control in linear systems with incomplete feedback // Differential Equations. 2009. Vol. 45. Issue 9. P. 1348–1357. https://doi.org/10.1134/S0012266109090109
23. Zaitsev V.A. Necessary and sufficient conditions in a spectrum control problem // Differential Equations. 2010. Vol. 46. Issue 12. P. 1789–1793. https://doi.org/10.1134/S0012266110120128
24. Zaitsev V.A., Kim I.G. On finite spectrum assignment problem in bilinear systems with state delay // Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki. 2019. Vol. 29. Issue 1. P. 19–28. https://doi.org/10.20537/vm190102
25. Zaitsev V.A., Kim I.G., Khartovskii V.E. Finite spectrum assignment problem for bilinear systems with several delays // Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki. 2019. Vol. 29. Issue 3. P. 319–331. https://doi.org/10.20537/vm190303
26. Zaitsev V.A., Kim I.G. Arbitrary spectrum assignment by static output feedback for linear differential equations with state variable delays // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51. Issue 32. P. 810–814. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.11.446
27. Zaitsev V.A., Kim I.G. Spectrum assignment and stabilization of linear differential equations with delay by static output feedback with delay // Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika.

Komp'yuternye Nauki. 2020. Vol. 30. Issue 2. P. 208–220.
https://doi.org/10.35634/vm200205

Поступила в редакцию 01.06.2020

Ким Инна Геральдовна, научный сотрудник, лаборатория математической теории управления, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: kimingeral@gmail.com

Цитирование: И. Г. Ким. Назначение конечного спектра в линейных системах с несколькими сосредоточенными и распределенными запаздываниями посредством статической обратной связи по выходу // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30. Вып. 3. С. 367–384.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'UTERNYE NAUKI
MATHEMATICS 2020. Vol. 30. Issue 3. Pp. 367–384.

I. G. Kim

Finite spectrum assignment in linear systems with several lumped and distributed delays by means of static output feedback

Keywords: linear delay systems, spectrum assignment, stabilization, output feedback.

MSC2010: 93B55, 93B52, 93D20, 93C15, 93C05, 34H15

DOI: 10.35634/vm200302

We consider a control system defined by a linear time-invariant system of differential equations with lumped and distributed delays in the state variable. We construct a controller for the system as linear static output feedback with lumped and distributed delays in the same nodes. We study a finite spectrum assignment problem for the closed-loop system. One needs to construct gain coefficients such that the characteristic function of the closed-loop system becomes a polynomial with arbitrary preassigned coefficients. We obtain conditions on coefficients of the system under which the criterion was found for solvability of the finite spectrum assignment problem. Corollaries on stabilization by linear static output feedback with several delays are obtained for the closed-loop system.

Funding. This research was funded by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of state assignment No. 075-00232-20-01, project 0827-2020-0010 "Development of the theory and methods of control and stabilization of dynamical systems".

REFERENCES

1. Manitius A., Olbrot A. Finite spectrum assignment problem for systems with delays, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1979, vol. 24, issue 4, pp. 541–552. https://doi.org/10.1109/TAC.1979.1102124
2. Watanabe K., Ito M., Kaneko M., Ouchi T. Finite spectrum assignment problem for systems with delay in state variables, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1983, vol. 28, issue 4, pp. 506–508. https://doi.org/10.1109/TAC.1983.1103258
3. Suyama K. Distributed delays in finite spectrum assignment, *Proceedings of the 2003 American Control Conference*, 2003. https://doi.org/10.1109/ACC.2003.1243484
4. Kosugi N., Suyama K. Finite spectrum assignment of systems with general delays, *International Journal of Control*, 2011, vol. 84, issue 12, pp. 1983–1995. https://doi.org/10.1080/00207179.2011.631150
5. Melchor-Aguilar D., Tristan-Tristan B. On the implementation of control laws for finite spectrum assignment: the multiple delays case, *2007 4th International Conference on Electrical and Electronics Engineering*, 2007. https://doi.org/10.1109/ICEEE.2007.4345023
6. Mondie S., Michiels W. Finite spectrum assignment of unstable time-delay systems with a safe implementation, *IEEE Transactions of Automatic Control*, 2003, vol. 48, issue 12, pp. 2207–2212. https://doi.org/10.1109/TAC.2003.820147
7. Metel'skii A.V. Finite spectrum assignment problem for a delay type system, *Differential Equations*, 2014, vol. 50, issue 5, pp. 689–699. https://doi.org/10.1134/S0012266114050115
8. Metel'skii A.V. Feedback control of the spectrum of differential-difference system, *Automation and Remote Control*, 2015, vol. 76, issue 4, pp. 560–572. https://doi.org/10.1134/S0005117915040025
9. Molnar T.G., Insperger T. On the robust stabilizability of unstable systems with feedback delay by finite spectrum assignment, *Journal of Vibration and Control*, 2014, vol. 22, issue 3, pp. 649–661. https://doi.org/10.1177/1077546314529602
10. Voros I., Varszegi B. Lateral vehicle control using finite spectrum assignment, *IFAC-PapersOnLine*, 2018, vol. 51, issue 14, pp. 306–311. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.07.241

11. Borkovskaya I.M, Marchenko V.M. Modal control of systems with distributed delay, *Automation and Remote Control*, 1993, vol. 54, issue 8, pp. 1211–1222.
12. Marchenko V.M., Borkovskaya I.M. Modal control of systems with distributed delay under incomplete information conditions, *Differential Equations*, 1993, vol. 29, issue 11, pp. 1673–1680.
13. Metel'skii A.V. Modal controllability of a delay differential system by an incomplete output, *Differential Equations*, 2018, vol. 54, issue 11, pp. 1483–1493. https://doi.org/10.1134/S0012266118110095
14. Choon K.A. Stabilization of linear systems with distributed input delay using reduction transformation, *Chinese Science Bulletin*, 2011, vol. 56, issue 13, pp. 1413–1416. https://doi.org/10.1007/s11434-010-4152-x
15. Olgac N., Kammer A.S. Stabilisation of open-loop unstable plants under feedback control with distributed delays, *IET Control Theory and Application*, 2014, vol. 8, issue 10, pp. 813–820. https://doi.org/10.1049/iet-cta.2013.0652
16. Xu X., Liu L., Feng G. Stability and stabilization of infinite delay systems: a Lyapunov based approach, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2019, pp. 1–16. https://doi.org/10.1109/TAC.2019.2958557
17. Metel'skii A.V. Algebraic approach to the stabilization of a differential system of retarded type, *Differential Equations*, 2018, vol. 54, issue 8, pp. 1102–1114. https://doi.org/10.1134/S0012266118080098
18. Dolgii Yu.F. Stabilization of linear autonomous systems of differential equations with distributed delay, *Automation and Remote Control*, 2007, vol. 68, issue 10, pp. 1813–1825. https://doi.org/10.1134/S0005117907100098
19. Zaitsev V.A., Kim I.G. Finite spectrum assignment problem in linear systems with state delay by static output feedback, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, issue 4, pp. 463–473 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm160402
20. Zaitsev V.A., Kim I.G. On arbitrary spectrum assignment in linear stationary systems with commensurate time delays in state variables by static output feedback, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 3, pp. 315–325 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm170303
21. Kim I.G., Zaitsev V.A. Spectrum assignment by static output feedback for linear systems with time delays in states, *2018 14th International Conference "Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems" (Pyatnitskiy's Conference) (STAB)*, 2018. https://doi.org/10.1109/STAB.2018.8408365
22. Zaitsev V.A. Spectrum control in linear systems with incomplete feedback, *Differential Equations*, 2009, vol. 45, issue 9, pp. 1348–1357. https://doi.org/10.1134/S0012266109090109
23. Zaitsev V.A. Necessary and sufficient conditions in a spectrum control problem, *Differential Equations*, 2010, vol. 46, issue 12, pp. 1789–1793. https://doi.org/10.1134/S0012266110120128
24. Zaitsev V.A., Kim I.G. On finite spectrum assignment problem in bilinear systems with state delay, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, issue 1, pp. 19–28. https://doi.org/10.20537/vm190102
25. Zaitsev V.A., Kim I.G., Khartovskii V.E. Finite spectrum assignment problem for bilinear systems with several delays, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, issue 3, pp. 319–331. https://doi.org/10.20537/vm190303
26. Zaitsev V.A., Kim I.G. Arbitrary spectrum assignment by static output feedback for linear differential equations with state variable delays, *IFAC-PapersOnLine*, 2018, vol. 51, issue 32, pp. 810–814. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.11.446
27. Zaitsev V.A., Kim I.G. Spectrum assignment and stabilization of linear differential equations with delay by static output feedback with delay, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2020, vol. 30, issue 2, pp. 208–220. https://doi.org/10.35634/vm200205

Received 01.06.2020

Kim Inna Geraldovna, Researcher, Laboratory of Mathematical Control Theory, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: kimingeral@gmail.com

Citation: I. G. Kim. Finite spectrum assignment in linear systems with several lumped and distributed delays by means of static output feedback, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2020, vol. 30, issue 3, pp. 367–384.