ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА 2020. Т. 30. Вып. 3. С. 343–366.

УДК 517.9

© *А. А. Джалилов, Ж. Ж. Каримов*

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ ФОРМАЛИЗМ И ПОКАЗАТЕЛИ СИНГУЛЯРНОСТИ ИНВАРИАНТНОЙ МЕРЫ ОТОБРАЖЕНИЙ ОКРУЖНОСТИ С ОДНИМ ИЗЛОМОМ

Пусть $T \in C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{x_b\})$, $\varepsilon > 0$, — гомеоморфизм окружности с одной точкой излома x_b, в которой $T'(x)$ имеет разрыв первого рода и обе односторонние производные в точке x_b строго положительные, и иррациональным числом вращения ρ_T. Предположим, что разложение числа вращения ρ_T в непрерывную дробь, начиная с некоторого номера, совпадает с золотым сечением, т. е. $\rho_T = [m_1, m_2, \ldots, m_l, m_{l+1}, \ldots]$, $m_s = 1$, $s > l > 0$. Поскольку число вращения иррациональное, отображение T является строго эргодическим, т. е. обладает единственной вероятностной инвариантной мерой μ_T. В работе А. А. Джалилова и К. М. Ханина доказано, что вероятностная инвариантная мера μ_G любого гомеоморфизма окружности $G \in C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{x_b\})$, $\varepsilon > 0$, с одной точкой излома x_b и иррациональным числом вращения ρ_G является сингулярной относительно меры Лебега λ на окружности, т. е. существует измеримое подмножество $A \subset S^1$ такое, что $\mu_G(A) = 1$ и $\lambda(A) = 0$. Мы построим термодинамический формализм для гомеоморфизмов $T_b \in C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{x_b\})$, $\varepsilon > 0$, с одним изломом в точке x_b и числом вращения, равным золотому сечению, т. е. $\rho_T := \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Существенно используя построенный термодинамический формализм, мы изучили показатели сингулярности инвариантной меры μ_T гомеоморфизма T.

Ключевые слова: гомеоморфизм окружности, точка излома, число вращения, инвариантная мера, термодинамический формализм.

DOI: 10.35634/vm200301

§ 1. Введение

Настоящая работа посвящена изучению показателей сингулярности сингулярной инвариантной меры для гомеоморфизмов окружности с одной точкой излома на основе термодинамического формализма. Впервые в теории динамических систем термодинамический формализм (ТФ) был введен в пионерской работе Я. Г. Синая [19]. В дальнейшем термодинамический формализм был развит в работах Д. Рюелля [18], Р. Боуэна [2] и др.

В работе Е. Б. Вул, Я. Г. Синая и К. М. Ханина [20] термодинамический формализм был использован для изучения важного объекта теории универсальности — отображения Фейгенбаума. Кусочно-гладкие гомеоморфизмы окружности — одно из интенсивно изучаемых направлений в современной теории динамических систем. Такие отображения являются естественным обобщением диффеоморфизмов окружности, а также важной частью класса обобщенных (нелинейных) перекладываний (generalized (nonlinear) interval exchange transformations) (см. [6, 9, 16]).

Хорошо известно, что всякий сохраняющий ориентацию гомеоморфизм окружности T с иррациональным числом вращения $\rho = \rho_T$ является строго эргодическим, то есть обладает единственной вероятностной T-инвариантной мерой $\mu = \mu_T$ [7]. Пусть число вращения $\rho = \rho_T$ иррационально. А. Данжуа показал (см. [10]), что существует гомеоморфизм Φ такой, что $\Phi \circ T = T_\rho \circ \Phi$. Вопрос о гладкости сопряжения Φ и проблема абсолютно непрерывности инвариантной меры μ_T тесно связаны. В самом деле, инвариантная мера μ_T является абсолютно непрерывной относительно меры Лебега тогда и только тогда, когда $\Phi(x)$ —

абсолютно непрерывная функция. Это соображение впервые было использовано В. И. Арнольдом [1], где он изучал гладкость $\Phi(x)$. К настоящему времени эта проблема решена в определенном смысле полностью для диффеоморфизмов окружности. Хорошо известно, что для достаточно гладких отображений T с типичным иррациональным числом $\rho = \rho_T$ единственная инвариантная мера μ_T является абсолютно непрерывной относительно меры Лебега (см. [1, 8, 12, 13, 22]).

Естественным обобщением диффеоморфизмов окружности являются кусочно-гладкие гомеоморфизмы с изломам. Простейшими примерами кусочно-гладких отображений являются кусочно-линейные (КЛ) гомеоморфизмы с двумя изломами. Впервые такие отображения окружности были изучены М. Эрманом [12]. М. Эрман доказал [12], что инвариантная мера КЛ гомеоморфизма h с двумя изломами и иррациональным числом вращения является абсолютно непрерывной тогда и только тогда, когда обе точки излома лежат на одной орбите. Для гомеоморфизмов окружности с одной точкой излома характер инвариантной меры сильно отличается от случая диффеоморфизмов. В работе А. Джалилова и К. Ханина [3] доказано, что для гомеоморфизма окружности T из класса $C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{x_b\})$, $\varepsilon > 0$, с одной точкой излома x_b и иррациональным числом вращения ρ_T инвариантная мера μ_T является сингулярной относительно меры Лебега λ, то есть существует измеримое подмножество $A \subset S^1$ такое, что $\mu_T(A) = 1$ и $\lambda(A) = 0$.

Рассмотрим два гомеоморфизма T_1 и T_2 с тем же иррациональным числом вращения $\rho = \rho(T_1) = \rho(T_2)$ и с одной точкой излома $x_0 = x_b$. Вопрос о регулярности сопряжения Φ между T_1 и T_2 называется проблемой «жесткости». Эта проблема интенсивно изучалась в работах [14, 15] и др.

Сформулируем результат К. Ханина и Д. Хмелева [14].

Теорема 1 (см. [14]). *Пусть T_1, $T_2 \in C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{x_b\})$, $\varepsilon > 0$, — гомеоморфизмы окружности с одной точкой излома $x_0 = x_b$. Предположим, что*

1) *их числа вращения одинаковы $\rho(T_1) = \rho(T_2) = \rho$;*

2) *число ρ иррационально и разлагается в периодическую непрерывную дробь, то есть:*

$$\rho = [k_1, k_2, \ldots, k_s, k_1, k_2, \ldots, k_s, \ldots], \qquad s \geqslant 1.$$

Тогда сопрягающий гомеоморфизм Φ между T_1 и T_2 принадлежит классу $C^{1+\theta}(S^1)$, где $\theta > 0$ зависит только от числа вращения ρ.

Теперь определим нижний и верхний показатели сингулярности инвариантной меры $\mu = \mu_T$:

$$\underline{\tau}(x) = \liminf_{\delta\to 0} \frac{\ln \mu([x,\, x+\delta])}{\ln|\delta|}, \qquad \overline{\tau}(x) = \limsup_{\delta\to 0} \frac{\ln \mu([x,\, x+\delta])}{\ln|\delta|}.$$

Функции $\underline{\tau}(x)$ и $\overline{\tau}(x)$ являются инвариантными относительно T. Отсюда, а также из эргодичности T относительно мер μ_T и λ [12] следует, что обе эти функции являются почти постоянными и по мере μ_T, и по мере λ. Эти постоянные обозначим через $\overline{\tau}(\mu)$, $\underline{\tau}(\mu)$ и $\underline{\tau}(\lambda)$, $\overline{\tau}(\lambda)$ соответственно. А. Джалилов [4] показал, что для гомеоморфизмов окружности $T \in C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{x_b\})$, $\varepsilon > 0$, с одной точкой излома и с иррациональным числом вращения «ограниченного типа» (то есть когда последовательность элементов разложения ρ_T в непрерывную дробь ограничена) справедливы следующие оценки:

$$1 < \underline{\tau}(\lambda) \leqslant \overline{\tau}(\lambda) < +\infty, \tag{1.1}$$

$$0 < \overline{\tau}(\mu) \leqslant \underline{\tau}(\mu) < 1. \tag{1.2}$$

Другой важной характеристикой сингулярной инвариантной меры μ является хаусдорфова размерность $HD(\mu)$ (точная грань размерностей множеств «полной» меры μ). Известная лемма Фростмана утверждает, что хаусдорфова размерность $HD(\mu)$ совпадает с $\underline{\tau}(\mu)$. Отсюда, используя (1.1), получим, что $0 < HD(\mu) < 1$.

Теперь сформулируем основной результат нашей работы.

Теорема 2. *Пусть $T \in C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{x_b\})$, $\varepsilon > 0$, — гомеоморфизм окружности с одной точкой излома x_b. Предположим, что число вращения $\rho = \rho_T$ иррациональное и его разложение в непрерывную дробь имеет вид: $\rho = [m_1, m_2, \ldots, m_l, m_{l+1}, \ldots]$, где $m_s = 1$, $s \geqslant l > 0$. Пусть $\mu = \mu_T$ — вероятностная T-инвариантная мера. Тогда для почти всех x по мере Лебега λ (и по мере μ) существует конечный предел*

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\ln \mu([x, x+\delta])}{\ln |\delta|} = \tau_\lambda \ \ (\tau_\mu),$$

и его значение не зависит от x. Кроме того, константы τ_λ и τ_μ зависят только от числа вращения ρ.

Используя оценки (1.1) и (1.2), получаем: $0 < \tau_\mu < 1 < \tau_\lambda < +\infty$. Отметим, что для критических отображений окружности с числом вращения, равным золотому сечению $\rho = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = [1, 1, \ldots, 1, \ldots]$, аналогичный результат был получен в работе А. Джалилова [5].

Настоящая работа в определенным смысле дополняет работу А. Джалилова [5], и основной результат доказывается по схеме, предложенной в [5].

Отметим, что при доказательстве теоремы 2 существенно используется термодинамический формализм (ТФ).

Хорошо известно (см. [14, 21]), что ренормгрупповое преобразование R в пространстве достаточно гладких гомеоморфизмов окружности с одной точкой излома x_b и числом вращения, равным золотому сечению $\rho = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = [1, 1, \ldots, 1, \ldots]$, имеет периодическую траекторию периода два $\{T_1, T_2\}$ (см. [21]). Используя этот важный факт, можно доказать универсальные свойства орбиты особой точки $x = x_b$ отображений T_1 и T_2, что позволяет построить потенциал U. Потенциал U является универсальным для всех отображений, C^1-сопряженных с T_1.

Замечание 1. Для всех отображений окружности $T \in C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{x_b\})$, $\varepsilon > 0$, с одной точкой излома $x = x_b$ и числом вращения $\rho(T)$, имеющим периодическое разложение в непрерывную дробь, то есть $\rho = [k_1, k_2, \ldots, k_s, k_1, k_2, \ldots, k_s, \ldots]$, $s \geqslant 1$, можно построить ТФ. На основе построенного ТФ можно доказать обобщенную теорему 2.

§ 2. Ренормгрупповое преобразование для гомеоморфизмов окружности с изломами и их периодические орбиты

В этом параграфе мы рассмотрим ренормгрупповое преобразование (РП) в пространстве гомеоморфизмов окружности с одной точкой излома и с числом вращения, равным золотому сечению (более подробно см. [14, 21]). Преобразование ренормгруппы в пространстве гомеоморфизмов окружности с изломами и алгебраическим числом вращения имеет периодическую орбиту [21]. Мы построим потенциал для периодической траектории с числом вращения равным золотому сечению. Обозначим через X_b множество пар строго возрастающих функций $(f(x), x \in [-1, 0], g(x), x \in [0, \alpha])$, удовлетворяющих следующим условиям:

a) $f(0) = \alpha$, $g(0) = -1$;

б) $f(-1) = g(\alpha)$;

в) $f(g(0)) = f(-1) < 0$;

г) $f^{(2)}(g(0)) \geqslant 0$;

д) $f(x) \in C^{2+\varepsilon}([-1, 0])$, $g(x) \in C^{2+\varepsilon}([0, \alpha])$ для любого $\varepsilon > 0$.

Условия а)–в) позволяют при помощи $(f, g) \in X_b$ построить гомеоморфизм окружности $[-1, \alpha)$ по формуле:

$$T_{f,g}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in [-1, 0), \\ g(x), & \text{если } x \in [0, \alpha). \end{cases}$$

Гомеоморфизм $T_{f,g}(x)$ при помощи линейного отображения $l(x) = \frac{x+1}{\alpha+1}$ переходит в гомеоморфизм окружности $S^1 = [0, 1)$. Число вращения $T_{f,g}(x)$ определяется как число вращения гомеоморфизма $\rho(l \circ T_{f,g} \circ l^{-1})$.

Обозначим через $X_b(\omega)$ подмножество, состоящее из таких пар $(f, g) \in X_b$, что число вращения $\rho(T_{f,g}) := \omega = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ — «золотое сечение».

Определим преобразование ренормгруппы $R_b\colon X_b(\omega) \to X_b(\omega)$ по формуле (см. [14,21]):

$$R_b(f(x), g(x)) = (\tilde{f}(x), \quad x \in [-1, 0]; \qquad \tilde{g}(x), \quad x \in [0, \alpha']),$$

где

$$\tilde{f}(x) = -\alpha^{-1} f(g(-\alpha x)), \qquad \tilde{g}(x) = -\alpha^{-1} f(-\alpha x), \qquad \alpha' = -\alpha^{-1} f(-1).$$

Отметим, что пара $(\tilde{f}, \tilde{g})$ соответствует отображению первого возвращения в новых линейных координатах.

Определим величину излома:

$$c = \sqrt{\frac{f'(-0)}{f'(+0)}}.$$

Ясно, что при $c = 1$ мы получим гладкое отображение. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $c \neq 1$. В работе [21] доказано, что при фиксированном c преобразование R_b в подмножестве $X_b(\omega)$ имеет единственную периодическую траекторию

$$\{f_i(x, c_i), g_i(x, c_i), i = 1, 2\}$$

периода два. Это означает, что

$$R_b(f_1(x, c_1), g_1(x, c_1)) = (f_2(x, c_2), g_2(x, c_2)),$$

$$R_b(f_2(x, c_2), g_2(x, c_2)) = (f_1(x, c_1), g_1(x, c_1)).$$

Функции $f_i(x, c_i)$ и $g_i(x, c_i)$, $i = 1, 2$, имеют вид:

$$f_i(x, c_i) = \frac{(\alpha_i + c_i x)\beta_i}{\beta_i + (\beta_i + \alpha_i - c_i)x}, \tag{2.1}$$

$$g_i(x, c_i) = \frac{\alpha_i \beta_i (x_i - c_i)}{\alpha_i \beta_i c_i + (c_i - \alpha_i - c_i \beta_i)x}, \tag{2.2}$$

где

$$\alpha_1 = \frac{c - \beta_0^2}{1 + \beta_0}, \qquad \alpha_2 = \frac{c^{-1} - \beta_0^2}{1 + \beta_0}, \qquad c_1 = c, \qquad c_2 = c^{-1}, \qquad \beta_1 = \beta_2 = \beta_0,$$

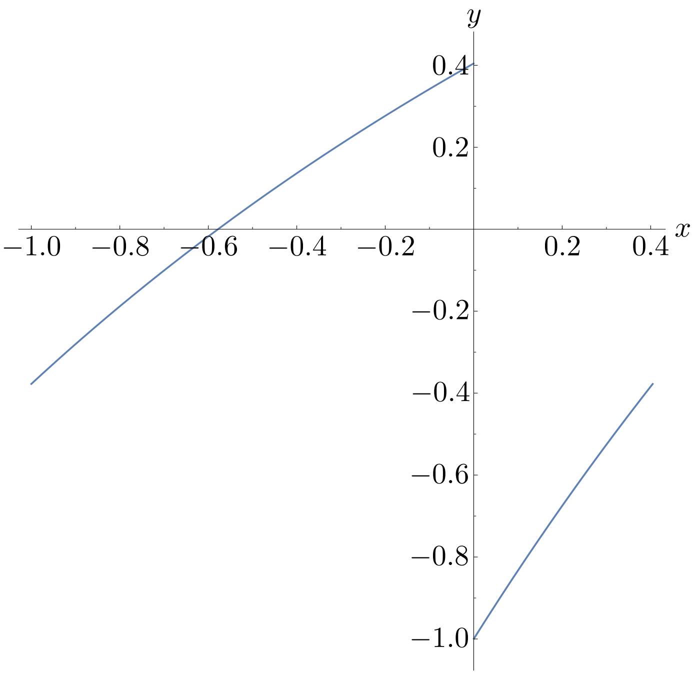

Рис. 1: График гомеоморфизма окружности T_b в случае $c = 0.7$

β_0 — единственный корень уравнения

$$\beta^4 - \beta^3 - \beta^2 \frac{(c+1)^2}{c} - \beta + 1 = 0,$$

принадлежащий интервалу $(0, 1)$.

Отождествляя концы полуинтервалов $[-1, \alpha_i)$, $i = 1, 2$, получаем окружности S_i, $i = 1, 2$. Теперь при помощи (f_i, g_i), $i = 1, 2$, определим гомеоморфизмы окружности $T_i \colon S_i \to S_i$ по формуле (см. рис. 1):

$$T_i(x) = \begin{cases} f_i(x, c_i), & \text{если } x \in [-1, 0), \\ g_i(x, c_i), & \text{если } x \in [0, \alpha_i). \end{cases}$$

Мы в дальнейшем будем изучать гомеоморфизм T_1 окружности S_1. Гомеоморфизм T_1 имеет изломы в точках x_0 и $x_1 = T_1(x_0)$, и произведение величин изломов в этих точках равно c_1. Гомеоморфизм T_1 переобозначим через T_b. Второй гомеоморфизм T_2 изучается аналогичным образом.

Определение 1. Два сохраняющих ориентацию гомеоморфизма окружности T и G называются C^k-сопряженными, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $\Phi \in C^k(S^1)$ (при $k \geqslant 1$ требуется $\Phi^{-1} \in C^1(S^1)$) такой, что выполняется равенство $\Phi \circ T = G \circ \Phi$.

Пара функций

$$(f_1(x, c),\ -1 \leqslant x \leqslant 0;\ g_1(x, c),\ 0 \leqslant x \leqslant \alpha_1)$$

является неподвижной точкой преобразования $R_b^2 = R_b \circ R_b$. Отсюда, используя определение преобразования R_b, получаем, что функции $f_1(x) = f_1(x, c)$ и $g_1(x) = g_1(x, c)$ удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\alpha_1\alpha'} f_1(g_1(f_1(\alpha_1\alpha' x))) = f_1(x), & x \in [-1, 0), \\ \dfrac{1}{\alpha_1\alpha'} f_1(g_1(\alpha_1\alpha' x)) = g_1(x), & x \in [0, \alpha_i], \end{cases} \tag{2.3}$$

где $\alpha' = -\frac{g_1(\alpha_1)}{\alpha_1}$. Путем простых вычислений можно легко убедиться, что $\alpha_1\alpha' = \beta_0$. Напомним, что $\beta_0 \in (0, 1)$. Перепишем систему (2.3):

$$\begin{cases} \beta_0^{-1} f_1(g_1(f_1(\beta_0 x))) = f_1(x), & x \in [-1, 0), \\ \beta_0^{-1} f_1(g_1(\beta_0 x)) = g_1(x), & x \in [0, \alpha_1]. \end{cases} \tag{2.4}$$

Ясно, что число вращения гомеоморфизма T_b равно ω. Обозначим через $\frac{p_n}{q_n}$, $n \geqslant 1$, n-ую подходящую дробь ω. Числа q_n удовлетворяют следующему разностному уравнению

$$q_{n+1} = q_n + q_{n-1}, \qquad q_0 = 1, \quad q_1 = 1.$$

Числа q_n называются числами Фибоначчи.

Теперь изучим поведение пары отображений $T_b^{q_{2n}}, T_b^{q_{2n+1}}$, $n \geqslant 1$.

Лемма 1. *Для всех $n \geqslant 1$ справедливы следующие формулы:*

$$T_b^{q_{2n}}(\beta_0^n x) = \beta_0^n g_1(x), \quad x \in [0, \alpha_1],$$
$$T_b^{q_{2n+1}}(\beta_0^n x) = \beta_0^n f_1(x), \quad x \in [-1, 0).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение леммы 1 докажем по индукции. Пусть $n = 1$. Тогда, используя (2.4), получаем:

$$T_b^{q_2}(\beta_0 x) = f_1(g_1(\beta_0 x)) = \beta_0 g_1(x), \quad x \in [0, \alpha_1],$$

$$T_b^{q_3}(\beta_0 x) = f_1(g_1(f_1(\beta_0 x))) = \beta_0 f_1(x), \quad x \in [-1, 0).$$

Используя (2.4) и предположение индукции, получаем:

$$T_b^{q_{2n+2}}(\beta_0^{n+1} x) = T_b^{q_{2n+1}}(T_b^{q_{2n}}(\beta_0^n(\beta_0 x))) = T_b^{q_{2n+1}}(\beta_0^n g_1(\beta_0 x)) =$$
$$= \beta_0^n f_1(g_1(\beta_0 x)) = \beta_0^{n+1} g_1(x), \quad x \in [0, \alpha_1].$$

Если $x \in [-1, 0)$, то

$$T_b^{q_{2n+3}}(\beta_0^{n+1} x) = T_b^{q_{2n+2}}(T_b^{q_{2n+1}}(\beta_0^n(\beta_0 x))) = T_b^{q_{2n+2}}(\beta_0^n f_1(\beta_0 x)) =$$
$$= T_b^{q_{2n+1}}(T_b^{q_{2n}}(\beta_0^n f_1(\beta_0 x))) = \ldots = T_b^{q_{2n+1}}(\beta_0^n g_1(f_1(\beta_0 x))) =$$
$$= \beta_0^n f_1(g_1(f_1(\beta_0 x))) = \beta_0^{n+1} f_1(x).$$

□

Обозначим $x_n := T_b^n(x_0)$, $n \geqslant 1$. Из утверждения леммы 1 вытекает, что

$$x_{q_{2n}} = -\beta_0^n, \qquad x_{q_{2n+1}} = T_b^{q_{2n+1}}(x_0) = T_b^{q_{2n-1}}(T_b^{q_{2n}}(0)) = \beta_0^{n-1} f_1(-\beta_0).$$

Теперь мы будем изучать орбиту точки излома $x_0 = 0$, то есть $\{x_i, i \geqslant 0\}$.

Следующая лемма играет важную роль при построении термодинамического формализма.

Лемма 2. *Для любого* $k \geqslant 1$ *разбиение* $\mathbb{P}_{k+2n} \cap [x_{q_{2n}}, x_{q_{2n+1}}]$ *отличается от разбиения* $\mathbb{P}_k \cap [-1, \alpha_1]$ *растяжением в* β_0^n *раз.*

Доказательство. По лемме 1 умножение на β_0^n сопрягает пару отображений (f_1, g_1) на отрезке $[-1, \alpha_1]$ с парой отображений $T_b^{q_{2n+1}}, T_b^{q_{2n}}$ на отрезке $[x_{q_{2n}}, x_{q_{2n+1}}]$. Как следует из структуры динамического разбиения, k-ое динамическое разбиение на $[x_{q_{2n}}, x_{q_{2n+1}}]$, которое соответствует $T_b^{q_{2n+1}}, T_b^{q_{2n}}$, совпадает с $\mathbb{P}_{k+2n} \cap [x_{q_{2n}}, x_{q_{2n+1}}]$. $\square$

Лемма 3. *Для любого* $k \geqslant 1$ *разбиение* $\mathbb{P}_{k+2n} \cap [x_{q_{2n}}, x_{q_{2n-1}}]$, $n \geqslant 1$, *отличается от разбиения* $\mathbb{P}_{k+1} \cap [-\beta_0, \alpha_1]$ *только растяжением в* β_0^{n-1} *раз.*

Лемма 3 доказывается так же, как аналогичные утверждения для критических отображений [20].

§ 3. Термодинамический формализм для гомеоморфизмов окружности с изломами

По теоремы 1 любые два гомеоморфизма $T_1, T_2 \in C^{2+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, с одинаковым иррациональным числом вращения ρ «ограниченного типа» $C^{1+\theta(\rho)}$-сопряжены, при этом $\theta(\rho) > 0$ зависит только от числа вращения ρ. Обозначим через $B(T_b)$ множество всех $C^{1+\theta}$-сопряженных гомеоморфизмов T_b. В этом параграфе мы построим термодинамический формализм для отображений, принадлежащих $B(T_b)$. Возьмем произвольный гомеоморфизм $T \in B(T_b)$. Отображение $T \in C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{x_0, T(x_0)\})$, $\varepsilon > 0$, имеет две точки излома x_0 и $T(x_0)$, а число вращения равно «золотому сечению», то есть $\omega = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Обозначим через $\frac{p_n}{q_n}$, $n \geqslant 1$, n-ую подходящую дробь ω. Числа q_n удовлетворяют следующему разностному уравнению: $q_{n+1} = q_n + q_{n-1}$, $q_0 = 1$, $q_1 = 1$. Числа q_n называются числами Фибоначчи. Возьмем произвольную точку $x_0 \in S^1$ и рассмотрим ее орбиту

$$\mathbb{O}_T(x_0) = \{x_0,\, x_1 = T(x_0),\, x_2 = T^2(x_0), \ldots, x_n = T^n(x_0), \ldots\}.$$

Здесь и в дальнейшем T^n обозначает n-ую итерацию T. При помощи орбиты $\mathbb{O}_T(x_0)$ определим последовательность $\{\mathbb{P}_n(x_0),\ n \geqslant 1\}$ динамических разбиений окружности.

Разбиение $\mathbb{P}_n(x_0)$ получается при помощи части орбиты точки x_0: $\{x_i,\ 0 \leqslant i \leqslant q_n + q_{n+1} - 1\}$. Для каждого $n \geqslant 1$ обозначим через $\Delta_0^{(n)}(x_0)$ отрезок, соединяющий точки x_0 и x_{q_n}.

Положим $\Delta_i^{(n)}(x_0) = T^i(\Delta_0^{(n)}(x_0))$, $i \geqslant 0$. Тогда разбиение $\mathbb{P}_n(x_0)$ состоит из системы отрезков $\{\Delta_i^{(n)},\ 0 \leqslant i < q_{n+1}\}$ и $\{\Delta_j^{(n+1)},\ 0 \leqslant j < q_n\}$ (см. [7]). Разбиение $\mathbb{P}_n(x_0)$ называется *n-ым динамическим разбиением* окружности. Отметим, что любые два отрезка разбиения $\mathbb{P}_n(x_0)$ могут пересекаться только концевыми точками. При переходе от $\mathbb{P}_n(x_0)$ к $\mathbb{P}_{n+1}(x_0)$ все «короткие» отрезки $\Delta_j^{(n+1)}(x_0)$, $0 \leqslant j \leqslant q_n - 1$, сохраняются, а «длинные» отрезки $\Delta_i^{(n)}(x_0)$, $0 \leqslant i < q_{n+1}$, разбиваются на пары отрезков:

$$\Delta_i^{(n)} = \Delta_i^{(n+2)} \bigcup \Delta_{i+q_n}^{(n+1)}. \tag{3.1}$$

Следующая лемма показывает, что длины отрезков динамического разбиения экспоненциально малы.

Лемма 4. *Пусть* $n > k > 0$. *Пусть отрезки* $\Delta^{(n)} \in \mathbb{P}_n(x_0)$ *и* $\Delta^{(n-k)} \in \mathbb{P}_{n-k}(x_0)$ *такие, что* $\Delta^{(n)} \subset \Delta^{(n-k)}$. *Тогда справедливы следующие оценки*

$$\frac{|\Delta^{(n)}|}{|\Delta^{(n-k)}|} \leqslant C_1 \xi^k, \qquad C_2 \xi_1^n \leqslant |\Delta^{(n)}|,$$

здесь $|\cdot|$ *обозначает длину отрезка, а константы* $C_1, C_2 > 0$ *и* $0 < \xi_1 < \xi < 1$, *зависят только от* T.

Если отображение $T \in B(T_b)$, то для любой точки $z_0 \in S^1 \setminus \mathbb{O}_T(x_0)$ справедливо неравенство Данжуа

$$e^{-v} \leqslant (T^{q_n})'(z_0) \leqslant e^v,$$

где константа v обозначает вариацию $\ln T'$ по окружности S^1. Используя неравенство Данжуа, легко можно показать, что любые два соседних (по расположению на окружности) отрезка Δ_1, $\Delta_2 \in \mathbb{P}_{n-k}(x_0)$ являются соизмеримыми, т. е.

$$K^{-1} \leqslant \frac{|\Delta_1|}{|\Delta_2|} \leqslant K,$$

где константа $K > 1$ зависит только от T. Отсюда, путем стандартных рассуждений можно доказать утверждение леммы 4 [12]. Заметим, что неравенство Данжуа верно для кусочно-гладких гомеоморфизмов с конечным числом изломов, с ограниченной вариацией $\log T'$ и иррациональным числом вращения (см. [12, с. 74]).

При помощи последовательности динамических разбиений $\mathbb{P}_n(x_0)$ можно построить своеобразную символическую динамику следующим образом. Пусть $x \in S^1 \setminus \mathbb{O}_T(x_0)$. Положим $a_{n+1} := a_{n+1}(x) = a$, если $x \in \Delta_i^{(n+1)}(x_0)$, $0 \leqslant i < q_n$. Пусть $x \in \Delta_i^{(n)}(x_0)$, $0 \leqslant i < q_{n+1}$. В силу (3.1) точка x попадает в отрезок $\Delta_i^{(n+2)}(x_0)$ или в отрезок $\Delta_{i+q_n}^{(n+1)}(x_0)$. Положим в первом случае $a_{n+1} = 0$, а во втором $a_{n+1} = 1$. Таким образом, мы получим взаимно-однозначное соответствие

$$\varphi\colon S^1 \setminus O_f(x_0) \leftrightarrow \{\underline{a} = (a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots), \quad a_i \in \{a, 0, 1\},$$
$$\text{при этом } a_{n+1} = a \text{ тогда и только тогда, когда } a_n = 0,\ n \geqslant 1\} =: \Theta_+.$$

Отметим, что при этом каждому отрезку $\Delta^{(n)}$ динамического разбиения $\mathbb{P}_n(x_0)$ соответствует единственное слово длины n: $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. В частности, слова $(0, a, 0, a, \ldots, 0, a)$ и $(a, 0, a, 0, \ldots, a, 0)$ соответствует отрезкам $\Delta_0^{(n)}$ и $\Delta_0^{(n+1)}$ соответственно. Пусть $\Delta^{(n)} := \Delta(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Мера Лебега на S^1 индуцирует вероятностную меру λ_0 на Θ_+:

$$\lambda_0(a_1, a_2, \ldots, a_n) := |\Delta(a_1, a_2, \ldots, a_n)|.$$

При переходе от окружности S^1 на пространство бесконечных слов Θ_+ отображение T переходит в $\widetilde{T}\colon \Theta_+ \to \Theta_+$. Используя структуру динамических разбиений, легко можно убедиться, что $\widetilde{T}$ не является сдвигом Бернулли.

Теперь определим другое пространство Ω односторонних бесконечных слов с тем же алфавитом $a, 0, 1$:

$$\Omega := \{\underline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots), \quad a_i \in \{a, 0, 1\},$$
$$\text{при этом } a_{n+1} = 0 \text{ тогда и только тогда, когда } a_n = a,\ n \geqslant 1\}.$$

В дальнейшем через $\vec{a}$ будем обозначать вектор $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, а через $\underline{b}$ будем обозначать бесконечные слово $(b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$.

Определим следующую функцию

$$\underline{\gamma}(x) = \begin{cases} (a, 0, a, 0, \ldots, a, 0, \ldots), & \text{если } \ x = a, \\ (0, a, 0, a, \ldots, 0, a, \ldots), & \text{если } \ x = 0, 1. \end{cases}$$

Теперь сформулируем теорему о термодинамическом формализме.

Теорема 3. *Для всех отображений $T \in B(T_b)$ существует единственная непрерывная (в тихоновской топологии) функция $U_b\colon \Omega \to (-\infty, 0)$, обладающая следующими свойствами:*

1) *для любых $\underline{a} = (a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n, \dots)$ и $\underline{b} = (a_1, \dots, a_k, b_{k+1}, \dots, b_n, \dots)$ из пространства Ω верна оценка*
$$|U_b(\underline{a}) - U_b(\underline{b})| \leqslant C_1 \cdot q^k,$$
где константы $C_1 > 0$ и $q \in (0,1)$ не зависят от $\underline{a}$, $\underline{b}$ и k;

2) *пусть $\Delta_{s_n}^{(n)} \subset \Delta_{s_r}^{(r)}$, $1 \leqslant r < n$, $0 \leqslant s_r \leqslant q_{r+1} - 1$, $0 \leqslant s_n \leqslant q_{n+1} - 1$ и $\varphi(\Delta_{s_n}^{(n)}) = (b_1, \dots, b_r, \dots, b_n)$, $\varphi(\Delta_{s_r}^{(r)}) = (b_1 \dots, b_r)$, тогда*
$$|\Delta_{s_n}^{(n)}| = (1 + \psi_r(b_1, b_2, \dots, b_n))|\Delta_{s_r}^{(r)}| \exp\{\sum_{s=r+1}^{n} U_b(b_s, b_{s-1}, \dots, b_r, \dots, b_1, \underline{\gamma}(b_1))\},$$
где $|\psi_r(b_1, b_2, \dots, b_n)| \leqslant C_2 \cdot q^r$, с константой $C_2 > 0$, не зависящей от r, n и $(b_1, b_2, \dots, b_n)$.

Из второго утверждения теоремы 3 вытекает, что потенциал U_b однозначно определяется как предел отношения длин отрезков динамических разбиений $\mathbb{P}_n$ точки излома x_0 отображения T. Другими словами, динамика особой точки x_0 однозначно определяет потенциал соответствующий T, следовательно отображению T соответствует только один потенциал U_b.

Для доказательства теоремы 3 нам необходима следующая лемма.

Лемма 5. *Пусть $n > k > 0$. Рассмотрим три отрезка*
$$\Delta' \in \mathbb{P}_n, \qquad \Delta \in \mathbb{P}_{n-1}, \qquad \Delta_0^{(n-k)} \in \mathbb{P}_{n-k},$$
такие, что
$$\Delta' \subset \Delta \subset \Delta_0^{(n-k)}.$$
Тогда для любого $0 < r < q_{n-k+1}$ справедлива оценка
$$\left| \frac{|\Delta'|}{|\Delta|} : \frac{|T_b^r(\Delta')|}{|T_b^r(\Delta)|} - 1 \right| \leqslant C\xi^k,$$
где константа $C > 0$ зависит только от T.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала докажем лемму 5. Пусть $\Delta' \subset \Delta \subset \Delta_0^{(n-k)}$. Для любого $0 < r < q_{n-k+1}$ имеем:
$$\frac{|T_b^r(\Delta')|}{|T_b^r(\Delta|} = \frac{\prod T_b'(T_b^i(\varsigma_0)) \cdot |\Delta'|}{\prod T_b'(T_b^i(\vartheta_0)) \cdot |\Delta|} = \frac{|\Delta'|}{|\Delta|} \cdot \prod \frac{T_b'(T_b^i(\varsigma_0))}{T_b'(T_b^i(\vartheta_0))} =$$
$$= \frac{|\Delta'|}{|\Delta|} \prod \left\{ 1 + \frac{T_b''(\upsilon_i) \cdot |T_b^i(\varsigma_0) - T_b^i(\vartheta_0)|}{T_b'(T_b^i(\vartheta_0))} \right\} =$$
$$= \frac{|\Delta'|}{|\Delta|} \exp\left\{ \sum \log\left(1 + \frac{T_b''(\upsilon_i)}{T_b'(T_b^i(\vartheta_0))} \cdot \frac{|T_b^i(\varsigma_0) - T_b^i(\vartheta_0)|}{|T_b^i(|\Delta^{(n-k)})|} \cdot |T_b^i(\Delta^{(n-k)})| \right) \right\}, \quad (3.2)$$

здесь $\varsigma_0 \in \Delta'$, $\vartheta_0 \in \Delta$ и $\upsilon_i \in (T_b^i(\varsigma_0),\, T_b^i(\vartheta_0))$, $0 < i < q_{n-k+1}$.

Ясно, что

$$(T_b^i(\varsigma_0),\, T_b^i(\vartheta_0)) \subset T_b^i(\Delta) \subset T_b^i(\Delta_0^{(n-k)}),\ \ 0 < i < q_{n-k+1}.$$

Отсюда, используя утверждение леммы 4, получаем:

$$\frac{|T_b^i(\varsigma_0) - T_b^i(\vartheta_0)|}{|T_b^i(\Delta_s^{(n-k)})|} \leqslant \mathrm{Const}\cdot\xi^k. \tag{3.3}$$

Используя определение отображения T_b (см. (2.1), (2.2)) легко убедиться, что

$$0 < \mathrm{const} \leqslant T_b'(x), \qquad |T_b''(x)| \leqslant \mathrm{Const} \text{ для } \forall x \in S^1 \setminus \{x_0,\, x_1\}.$$

Используя (3.2), (3.3), а также последние оценки, легко можно показать, что сумма логарифмов в (3.2) оценивается как $\mathrm{const}\sum \xi^k |T_b^i(\Delta^{(n-k)})|$, и так как образы отрезка $\Delta^{(n-k)}$ не пересекаются, оценивается как $O(\xi^k)$. □

Теперь докажем теорему 3. Сперва построим потенциал U_b для отображения T_b. Из построения будет видно, что U_b будет универсальным для всех отображений, C^1-сопряженных с T_b отображений.

Потенциал построим при помощи двух шагов:

• Мы рассмотрим пока только T_b. Пусть $0 < k < n$. При помощи длин отрезков динамических разбиений $\mathbb{P}_n$ и $\mathbb{P}_{n+1}$, содержащихся внутри $(n-k)$-ой ренормализационной окрестности $[x_{q_{n-k}}, x_{q_{n-k+1}}]$ особой точки $x_0 = 0$, построим потенциалы

$$U_k^{(n)}(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(k)}), \qquad \widehat{U}_k^{(n)}(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(k)}).$$

Покажем сходимость $U_k^{(n)}$ и $\widehat{U}_k^{(n)}$ при $n \to \infty$ к одному и тому же $U_k(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(k)})$.

• Докажем существование предела $\lim\limits_{k\to\infty} U_k(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(k)})$.

I. Фиксируем $k \geqslant 1$. Пусть $n > k$. Для определенности предположим, что $(n-k)$ — нечетное число. Тогда

$$\Delta_0^{(n-k+1)}(x_0) \subset [-1, 0), \quad \Delta_0^{(n-k)}(x_0) \subset [0, \alpha_1).$$

Рассмотрим $(n-k)$-ую ренормализационную окрестность

$$\Upsilon_0^{(n-k)}(x_0) = \Delta_0^{(n-k+1)}(x_0) \cup \Delta_0^{(n-k)}(x_0)$$

точки излома $x_0 = 0$.

Рассмотрим динамические разбиения $\mathbb{P}_{n-k}$, $\mathbb{P}_{n-1}$ и $\mathbb{P}_n$. Пусть

$$\Delta' \subset \Delta \subset \Delta_0^{(n-k+1)}, \qquad \Delta' \in \mathbb{P}_n, \quad \Delta \in \mathbb{P}_{n-1}.$$

Пусть отрезкам Δ' и Δ соответствуют следующие слова длины $n-1$:

$$(0, a, 0, a, \ldots 0, a, a^{(k)}, a^{(k-1)}, \ldots, a^{(2)}, a^{(1)}), \qquad (0, a, 0, a, \ldots 0, a, a^{(k)}, a^{(k-1)}, \ldots, a^{(2)}).$$

Теперь при помощи длин отрезков $\Delta' := \Delta(0, a, 0, a, \ldots, 0, a, a^{(k)}, a^{(k-1)}, \ldots, a^{(2)}, a^{(1)})$ и $\Delta := \Delta(0, a, 0, a, \ldots, 0, a, a^{(k)}, a^{(k-1)}, \ldots, a^{(2)})$ определим следующий допредельный потенциал $U_k^{(n)}(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(k)})$ по формуле

$$U_k^{(n)}(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(k)}) := \ln\frac{|\Delta(0, a, \ldots, 0, a, a^{(k)}, \ldots, a^{(2)}, a^{(1)})|}{|\Delta(0, a, \ldots, 0, a, a^{(k)}, \ldots, a^{(2)})|}.$$

В случае

$$\Delta^{'} \subset \Delta \subset \Delta_0^{(n-k)},\ \Delta^{'} \in \mathbb{P}_{n+1},\ \Delta \in \mathbb{P}_n,$$

отрезкам $\Delta^{'}$ и Δ соответствуют слова вида $(a, 0, a, 0, \dots a, 0, a^{(k)}, a^{(k-1)}, \dots, a^{(2)}, a^{(1)})$ и $(a, 0, a, 0, \dots, a, 0, a^{(k)}, a^{(k-1)}, \dots, a^{(2)})$ соответственно. Теперь определим другой допредельный потенциал по формуле

$$\widehat{U}_k^{(n)}(a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(k)}) := \ln \frac{|\Delta(a, 0, \dots, a, 0, a, a^{(k)}, \dots, a^{(2)}, a^{(1)})|}{|\Delta(a, 0, \dots, a, 0, a, a^{(k)}, \dots, a^{(2)})|}. \tag{3.4}$$

Из структуры динамических разбиений и определения символической динамики следует, что $|\Delta(0, a, 0, a, \dots 0, a, a^{(k)}, a^{(k-1)}, \dots, 0, a)| = |\Delta(0, a, 0, a, \dots 0, a, a^{(k)}, a^{(k-1)}, \dots, 0)|$.

Используя утверждение леммы 2 получаем:

$$U_k^{(n)}(a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(k)}) := \ln \frac{|\Delta(a, 0, \dots, a, 0, a, a^{(k)}, \dots, a^{(2)}, a^{(1)})|}{|\Delta(a, 0, \dots, a, 0, a, a^{(k)}, \dots, a^{(2)})|} = \\ = \ln \frac{\beta_0^m |\Delta(a^{(k)}, \dots, a^{(2)}, a^{(1)})|}{\beta_0^m |\Delta(a^{(k)}, \dots, a^{(2)})|} = \ln \frac{|\Delta(a^{(k)}, \dots, a^{(2)}, a^{(1)})|}{|\Delta(a^{(k)}, \dots, a^{(2)})|}.$$

Очевидно, что $U_k^{(n)}(a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(k)})$ не зависит от n. Положим

$$U_k(a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(k)}) := \ln \frac{|\Delta(a^{(k)}, \dots, a^{(2)}, a^{(1)})|}{|\Delta(a^{(k)}, \dots, a^{(2)})|}.$$

Отрезок $\Delta_0^{(n-k+1)}$ разбит точками разбиения $\mathbb{P}_n$ так же, как и отрезок $T_b^{q_{n-k}}(\Delta_0^{(n-k+1)}) = \Delta_{q_{n-k}}^{(n-k+1)}$. Отсюда, а также из структуры динамических разбиений, следует, что отрезок $\Delta(a, 0, \dots, a, 0, a, a^{(k)}, \dots, a^{(2)}, a^{(1)})$ получается из отрезка $\Delta(0, a, \dots, 0, a, a^{(k)}, \dots, a^{(2)}, a^{(1)})$ под действием $T_b^{q_{n-k}}$, то есть

$$\Delta(a, 0, \dots, a, 0, a, a^{(k)}, \dots, a^{(2)}, a^{(1)}) = T_b^{q_{n-k}}(\Delta(0, a, \dots, 0, a, a^{(k)}, \dots, a^{(2)}, a^{(1)})).$$

Аналогичным образом, имеем

$$\Delta(a, 0, \dots, a, 0, a, a^{(k)}, \dots, a^{(2)}) = T_b^{q_{n-k}}(\Delta(0, a, \dots, 0, a, a^{(k)}, \dots, a^{(2)})).$$

Отсюда, используя определения допредельных потенциалов, а также утверждение леммы 5 и второе неравенство леммы 4, легко можно убедиться, что

$$\widehat{U}_k^{(n)}(a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(k)}) = \ln \frac{|\Delta(a, 0, \dots, a, 0, a, a^{(k)}, \dots, a^{(2)}, a^{(1)})|}{|\Delta(a, 0, \dots, a, 0, a, a^{(k)}, \dots, a^{(2)})|} = \\ = \ln \frac{|T_b^{q_{n-k}}(\Delta(0, a, \dots, 0, a, a^{(k)}, \dots, a^{(2)}, a^{(1)})|}{|T_b^{q_{n-k}}(\Delta(0, a, \dots, 0, a, a^{(k)}, \dots, a^{(2)})|} = U_k^{(n)}(a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(k)}) + O(\xi^k).$$

Отсюда видно, что при фиксированных $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, $\dots$, $a^{(k)}$ функции $U_k^{(n)}(a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(k)})$ и $\widehat{U}_k^{(n)}(a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(k)})$ при $n \to \infty$ имеют один и тот же предел $U_k(a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(k)})$.

II. Существование предела $\lim\limits_{k\to\infty} U_k(a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(k)})$. Возьмем произвольное бесконечное слово $\underline{a} = (a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)}, \dots) \in \Theta_+$ и два натуральные числа k и m. Мы покажем, что последовательность $\{U_r(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(r)}),\ \ r \geqslant 1\}$ является фундаментальной. Нам достаточно оценить разность

$$U_{k+m}(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(k)}, \ldots, a^{(k+m)}) - U_k(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(k)}).$$

Для каждого натурального $n \geqslant 1$ определим функцию $\vec{\gamma}_d(x)$. Если $d = 2n$, то

$$\vec{\gamma}_{2n}(x) := \begin{cases} (a, 0, a, 0, \ldots, a, 0), & \text{если} \quad x = a, \\ (0, a, 0, a, \ldots, 0, a), & \text{если} \quad x = 0, 1; \end{cases}$$

если $d = 2n + 1$, то

$$\vec{\gamma}_{2n+1}(x) := \begin{cases} (0, a, 0, a, 0, \ldots, a, 0), & \text{если} \quad x = a, \\ (a, 0, a, 0, a, \ldots, 0, a), & \text{если} \quad x = 0, 1. \end{cases}$$

Ясно, что

$$U_{k+m}(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(k)}, \ldots, a^{(k+m)}) = \ln \frac{|\Delta(\vec{\gamma}_{2n}(a^{(k+m)}), a^{(k+m)}, \ldots, a^{(2)}, a^{(1)})|}{|\Delta(\vec{\gamma}_{2n}(a^{(k+m)}), a^{(k)}, \ldots, a^{(2)})|}.$$

Заметим, что отрезки $\Delta(\vec{\gamma}_{2n}(a^{(k+m)}), a^{(k+m)}, \ldots, a^{(2)}, a^{(1)})$ и $\Delta(\vec{\gamma}_{2n}(a^{(k+m)}), a^{(k+m)}, \ldots, a^{(2)})$ являются элементами динамических разбиений $\mathbb{P}_{2n+k+m}$ и $\mathbb{P}_{2n+k+m-1}$ соответственно. Из определения символической динамики следует, что эти отрезки принадлежат орбитам отрезков $\Delta(\vec{\gamma}_{2n+m}(a^{(k)}), a^{(k)}, \ldots, a^{(2)}, a^{(1)})$ и $\Delta(\vec{\gamma}_{2n+m}(a^{(k)}), a^{(k)}, \ldots, a^{(2)})$, где слово $\vec{\gamma}_{2n+m}(a^{(k)})$:

$$\vec{\gamma}_{2n}(x) = \begin{cases} (a, 0, a, 0, \ldots, a, 0), & \text{если} \quad x = a, \\ (0, a, 0, a, \ldots, 0, a), & \text{если} \quad x = 0, 1, \end{cases}$$

определяется аналогично слову $\vec{\gamma}_{2n}(a^{(k+m)})$. Следовательно,

$$\Delta(\vec{\gamma}_{2n}(a^{(k+m)}), a^{(k)}, \ldots, a^{(2)}, a^{(1)}) = T_b^i(\Delta(\vec{\gamma}_{2n+m}(a^{(k)}), a^{(k+m)}, \ldots, a^{(2)}, a^{(1)})), \tag{3.5}$$

$$\Delta(\vec{\gamma}_{2n}(a^{(k+m)}), a^{(k)}, \ldots, a^{(2)}) = T_b^i(\Delta(\vec{\gamma}_{2n+m}(a^{(k)}), a^{(k)}, \ldots, a^{(2)})), \tag{3.6}$$

где i таково, что $0 \leqslant i < q_{2n+m+1}$, если $a^{(k)} = a$, и $0 \leqslant i < q_{2n+m}$, если $a^{(k)} = 0 \vee 1$. Теперь, используя (3.5) и (3.6), а также утверждение леммы 5 получаем:

$$\left| \ln \left\{ \frac{|T_b^i(\Delta(\vec{\gamma}_{2n+m}(a^{(k)}), a^{(k)}, \ldots, a^{(2)}, a^{(1)}))|}{|T_b^i(\Delta(\vec{\gamma}_{2n+m}(a^{(k)}), a^{(k)}, \ldots, a^{(2)}))|} : \frac{|\Delta(\vec{\gamma}_{2n+m}(a^{(k)}), a^{(k)}, \ldots, a^{(2)}, a^{(1)})|}{|\Delta(\vec{\gamma}_{2n+m}(a^{(k)}), a^{(k)}, \ldots, a^{(2)})|} \right\} \right| \leqslant \\ \leqslant \mathrm{Const} \cdot \xi^k.$$

Отсюда, учитывая

$$\frac{|\Delta(\vec{\gamma}_{2n+m}(a^{(k)}), a^{(k)}, \ldots, a^{(2)}, a^{(1)})|}{|\Delta(\vec{\gamma}_{2n+m}(a^{(k)}), a^{(k)}, \ldots, a^{(2)})|}| = U_k(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(k)}),$$

получим, что

$$|U_{k+m}(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(k)}) - U_k(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(k)})| \leqslant Kq^k, \tag{3.7}$$

где константы $K > 0$ и $q \in (0, 1)$ зависят только от T_b. Тем самым фундаментальность последовательности $\{U_r(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(r)}),\ \ r \geqslant 1\}$ доказана. Обозначим предельную функцию через $U(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(n)}, \ldots)$. Переходя пределу в (3.7) при $m \to \infty$ получаем:

$$|U_b(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(k)}, \ldots, a^{(n)}, \ldots) - U_k(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(k)})| \leqslant Kq^k. \tag{3.8}$$

Отсюда легко можно вывести первое утверждение теоремы 3 для отображения T_b.

Теперь покажем, что потенциал является единственным для всех отображений из $B(T_b)$. Пусть $T \in B(T_b)$. Тогда T и T_b C^1-сопряжены, т. е. существует диффеоморфизм Ψ такой, что $\Psi \circ T_b = T \circ \Psi$. Отметим, что $0 < \mathrm{const} \leqslant \Psi'(x) \leqslant \mathrm{Const}$ для любого $x \in S^1$. Предположим, что T_b действует на одной окружности, а T — на другой. Динамическое разбиение $\mathbb{P}_n$ точки x_0 переходит в разбиение $\Psi(\mathbb{P}_n)$ точки $\Psi(x_0)$. Пусть $n > k > 0$. Рассмотрим отрезки Δ и Δ' такие, что

$$\Delta^{'} \subset \Delta \subset \Delta_0^{(n-k+1)}, \qquad \Delta^{'} \in \mathbb{P}_n, \quad \Delta \in \mathbb{P}_{n-1}.$$

Тогда

$$\Psi(\Delta^{'}) \subset \Psi(\Delta) \subset \Psi(\Delta_0^{(n-k+1)}).$$

Пусть отрезкам $\Delta^{'}$ и $\Psi(\Delta^{'})$ соответствует слово длины $n-1$:

$$(0, a, 0, a, \ldots 0, a, a^{(k)}, a^{(k-1)}, \ldots, a^{(2)}, a^{(1)}),$$

а отрезкам Δ и $\Psi(\Delta)$ соответствует слово $(0, a, 0, a, \ldots 0, a, a^{(k)}, a^{(k-1)}, \ldots, a^{(2)})$. Определим следующий допредельный потенциал $U_{T,k}^{(n)}(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(k)})$ соответствующий T по формуле

$$U_{T,k}^{(n)}(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(k)}) := \ln \frac{|\Psi(\Delta(0, a, \ldots, 0, a, a^{(k)}, \ldots, a^{(2)}, a^{(1)}))|}{|\Psi(\Delta(0, a, \ldots, 0, a, a^{(k)}, \ldots, a^{(2)}))|}. \tag{3.9}$$

Ясно, что

$$\begin{gathered} U_{T,k}^{(n)}(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(k)}) := \ln \frac{|\Psi(\Delta')|}{|\Psi(\Delta)|} = \ln \frac{\Psi'(\xi)|\Delta'|}{\Psi'(\eta)|\Delta|} = \\ = \ln \frac{|\Delta'|}{|\Delta|} + \ln \frac{\Psi'(\xi)}{\Psi'(\eta)} = U_k^{(n)}(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(k)}) + \ln\left(1 + \frac{\Psi'(\xi) - \Psi'(\eta)}{\Psi'(\eta)}\right), \end{gathered} \tag{3.10}$$

где $\xi \in \Delta'$, $\eta \in \Delta$. Точки ξ, η принадлежат отрезку $\Delta \in \mathbb{P}_n$, а длины отрезков, в силу утверждения леммы 4, равномерно (по всем отрезкам разбиения $\mathbb{P}_n$) и экспоненциально убывают к нулю. Из соотношения (3.10), учитывая равномерную непрерывность $\Psi'(x)$ на окружности, получаем:

$$\lim_{n\to\infty} U_{T,k}^{(n)}(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(k)}) = U_k(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(k)}). \tag{3.11}$$

Для отображения T аналогично (см. (3.4) и (3.9)) определяется другой допредельный потенциал $\widehat{U}_{T,k}^{(n)}(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(k)})$. Повторяя все приведенные выше рассуждения, можно показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{U}_{T,k}^{(n)}(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(k)}) = U_k(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(k)}). \tag{3.12}$$

Из соотношений (3.8), (3.11) и (3.12) вытекает, что всем отображениям из $B(T_b)$ соответствует единственный потенциал U_b.

Теперь докажем второе утверждение теоремы 3.

Пусть $\Delta(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(n)}) \subset \Delta(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(r)}) \subset S^1 \setminus [x_{q_n}, x_{q_{n+1}}]$, $r < n$. Для каждого $1 \leqslant i \leqslant n-r$ рассмотрим отрезки $\Delta(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(r+i)})$ и $\Delta(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(r+i-1)})$. Ясно, что $\Delta(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(r+i)}) \subset \Delta(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(r+i-1)})$.

Учитывая определения допредельных и предельных потенциалов, получаем:

$$
\begin{gathered}
\ln \frac{|\Delta(a^{(1)},a^{(2)},\dots,a^{(n)})|}{|\Delta(a^{(1)},a^{(2)},\dots,a^{(r)})|} = \ln \prod_{i=1}^{n-r} \frac{|\Delta(a^{(1)},a^{(2)},\dots,a^{(r+i)})|}{|\Delta(a^{(1)},a^{(2)},\dots,a^{(r+i-1)})|} = \\
= \sum_{i=1}^{n-r} U_{r+i}(a^{(r+i)},\dots,a^{(1)}) = \sum_{i=1}^{n-r} U_{r+i}(a^{(r+i)},\dots,a^{(1)},\underline{\gamma}(a^{(1)})) + \\
+ \sum_{i=1}^{n-r} \{U_{r+i}(a^{(r+i)},\dots,a^{(1)}) - U_{r+i}(a^{(r+i)},\dots,a^{(1)},\underline{\gamma}(a^{(1)}))\}.
\end{gathered}
\tag{3.13}
$$

Теперь оценим последнюю сумму в (3.13). Используя (3.8) получаем:

$$
\begin{gathered}
|\sum_{i=1}^{n-r} \{U_{r+i}(a^{(r+i)},\dots,a^{(1)}) - U_{r+i}(a^{(r+i)},\dots,a^{(1)},\underline{\gamma}(a^{(1)}))\}| \leqslant \\
\leqslant \sum_{i=1}^{n-r} |U_{r+i}(a^{(r+i)},\dots,a^{(1)}) - U_{r+i}(a^{(r+i)},\dots,a^{(1)},\underline{\gamma}(a^{(1)}))| \leqslant K \sum_{i=1}^{n-r} q^{r+i} \leqslant \frac{K}{1-q}\cdot q^r.
\end{gathered}
$$

Из последней оценки, а также из соотношения (3.13) легко можно вывести второе утверждение теоремы 3 для отображения T_b.

В силу (3.12) и условия $\Psi \in C^{1+\theta}$ допредельные потенциалы для $T \in B(T_b)$ и T_b экспоненциально мало отличаются. Учитывая последнее замечание и повторяя выше приведенные рассуждения, можно показать второе утверждение теоремы 3 для отображения T. Теорема 3 полностью доказана. □

Теперь определим оператор трансфер-матрицы, соответствующий потенциалу U.

Сдвиг $\sigma\colon \Omega \to \Omega$ определим по формуле $\sigma(\underline{a})_i = a_{i+1}$, $i \geqslant 1$. Для каждого $\beta \in R^1$ введем оператор трансфер-матрицы, то есть линейный оператор $D_\beta\colon C(\Omega) \to C(\Omega)$, действующий по формуле

$$
(D_\beta f)(\underline{a}) = \sum_{\vec{x}\in\sigma^{-1}(\underline{a})} e^{\beta U(\vec{x})} f(\vec{x}).
$$

Обозначим через $M(\Omega)$ пространство действительных мер на Ω. Тогда сопряженный оператор $D^*_\beta\colon M(\Omega) \to M(\Omega)$ задается формулой $(D^*_\beta\mu)(b,\underline{a}) = e^{\beta U(b,\underline{a})}\mu(\underline{a})$.

Обозначим $\mu(f) = \int f(\underline{a})d\mu(\underline{a})$. Сформулируем рюэлевский вариант эргодической теоремы Перрона–Фробениуса.

Теорема 4 (см. [2]). 1. *Для каждого $\beta \in R^1$ существуют $\lambda_\beta > 0$, $h_\beta(\underline{a}) \in C(\Omega)$, $\nu_\beta \in M(\Omega)$ такие, что $h_\beta(\underline{a}) > 0$ для каждого $\underline{a} \in \Omega$, ν_β — вероятностная мера на Ω и*

$$
D_\beta h_\beta = \lambda_\beta h_\beta, \qquad D^*_\beta \nu_\beta = \lambda_\beta \nu_\beta,
\tag{3.14}
$$

причем выполнено условие нормировки $\int h_\beta(\underline{a})d\nu_\beta = 1$.

2. *Если $f \in C(\Omega)$, то*

$$
\lim_{n\to\infty} \|\lambda_\beta^{-n} D_\beta^n f - (E_\beta f)h_\beta\| = 0,
$$

где $(E_\beta f)$ — математическое ожидание f по мере ν_β.

3. *Если $\mu \in M(\Omega)$, то*

$$
\lim_{n\to\infty} \lambda_\beta^{-n}(D^*_\beta)^n \mu = (E_\beta f)h_\beta
$$

в слабой топологии.

§ 4. Доказательство теоремы 2

Рассмотрим гомеоморфизм окружности $T \in C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{x_b\})$ с одной точкой излома $x_0 = x_b$ и величиной излома c_T, то есть

$$\sqrt{\frac{T'_-(x_0)}{T'_+(x_0)}} = c_T \neq 1.$$

Пусть число вращения $\rho = \rho(T)$ иррациональное и $\rho(T_b) = [k_1, k_2, \ldots, k_m, 1, 1, \ldots]$, $m \geqslant 1$. Рассмотрим $\mathfrak{I}_m = [T^{q_m}(x_0),\ T^{q_{m+1}}(x_0))$ и отображение Пуанкаре $\pi_m \colon \mathfrak{I}_m \to \mathfrak{I}_m$, определенное по формуле:

$$\pi_m(x) = \begin{cases} T^{q_{m+1}}(x), & \text{если } x \in [x_{q_m}, x_0), \\ T^{q_m}(x), & \text{если } x \in [x_0, x_{q_{m+1}}). \end{cases}$$

Обозначим через $\rho(\pi_m)$ число вращения гомеоморфизма π_m. Хорошо известно (см., например, [11]), что разложение в непрерывную дробь $\rho(\pi_m)$ получается из разложения $\rho(T_b)$ сдвигом влево на m шагов. Следовательно, $\rho(\pi_m) := \omega = [1, 1, \ldots, 1, \ldots]$.

Нетрудно проверить, что отображение π_m имеет две точки излома в точках x_0 и $\pi_m(x_0)$ и

$$c_{\pi_m}(x_0) \cdot c_{\pi_m}(\pi_m(x_0)) = c_T(x_0) = c.$$

Из теории «жесткости» для гомеоморфизмов окружности (см., например, [14]) следует, что отображения π_m и T_b являются $C^{1+\varepsilon}$-сопряженными, где гомеоморфизмом T_b определен парой $(f_1(x), g_1(x))$, дробно-линейные функции $f_1(x)$ и $g_1(x)$ определяются по (2.1), (2.2) соответственно (причем с той же величиной излома c).

Это означает, что существует диффеоморфизм $\Psi \colon [x_{q_m}, x_{q_{m+1}}) \to [-1, \alpha_1)$ из класса $C^1(S^1)$ такой, что

$$\Psi(\pi_m(x)) = T_b(\Psi(x)),\ \ \forall x \in [x_{q_m}, x_{q_{m+1}}).$$

Следовательно, теорема 3 о термодинамическом формализме справедлива и для отображения π_m. Возьмем точку x_0 и ее орбиту, полученную под действием π_m:

$$O_{\pi_m} = \{x_0, \pi_m(x_0), \ldots, \pi_m^n(x_0), \ldots\}.$$

Для каждого $n \geqslant 0$ обозначим через $I_{s,0}^{(n)}(x_0)$, $s = m \vee (m+1)$, отрезок, соединяющий точки $x_{q_{s+n}}$ и x_0. Ясно, что $I_{s,0}^{(n)}(x_0) = \Delta_0^{(s+n)}(x_0)$, $s = m \vee (m+1)$. Рассмотрим n-ое динамическое разбиение $\mathbb{P}_{m,n}(x_0)$ окружности $[x_{q_m}, x_{q_{m+1}})$, полученное при помощи части орбиты

$$\{x_0, \pi_m(x_0), \ldots, \pi_m^{q_n+q_{n+1}-1}(x_0)\}.$$

Хорошо известно (см. [17]), что:

$$\mathbb{P}_{m,n}(x_0) = \{I_{m,0}^{(n)}(x_0),\ \pi_m(I_{m,0}^{(n)}(x_0)),\ \ldots,\ \pi_m^{(q_n-1)}(I_{m,0}^{(n)}(x_0))\} \bigcup$$

$$\bigcup \{I_{m+1,0}^{(n)}(x_0),\ \pi_m(I_{m+1,0}^{(n)}(x_0)),\ \ldots,\ \pi_m^{(q_{n+1}-1)}(I_{m+1,0}^{(n)}(x_0))\}.$$

Обозначим через ν_m инвариантную меру гомеоморфизма π_m.

Легко понять, что для $\forall I^{(n)} \in \mathbb{P}_n(\pi_m)$:

$$\nu_m(I^{(n)}) = \frac{\mu_{T_b}(I^{(n)})}{\mu_{T_b}(\mathfrak{I}_m)}.$$

Обозначим через $I^{(n)}(x)$ отрезок разбиения $\mathbb{P}_{m,n}(x_0)$, содержащий точку x.

Покажем, что для почти всех $x \in [x_{q_m}, x_{q_{m+1}})$ (по мере Лебега на Υ_m) следующий предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left|I^{(n)}(x)\right|}{\ln \nu_m(I^n(x))} \tag{4.1}$$

существует и не зависит от x.

Легко убедиться, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \nu_m(I^{(n)}(x))}{n} = \ln \omega.$$

Нам достаточно показать существование предела

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|I^{(n)}(x)|}{n} \quad \text{п. в. по мере Лебега.}$$

Возьмем произвольную точку x окружности Υ_m. Пусть ей соответствует слово

$$\underline{a} = (0, a, \ldots, 0, a, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) \in \Theta_+.$$

Применяя теорему 3 для $T = \pi_m$ и $r = 1$, получаем:

$$\frac{1}{n}\ln|I^{(n)}(x)| = \frac{1}{n}\ln|I(0, a, \ldots, 0, a, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n)| =$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n} U_b(a_s, a_{s-1}, \ldots, a_1, \underline{\gamma}(a_1)) + \tilde{\psi}_1(a_1, a_2, \ldots, a_n), \tag{4.2}$$

где

$$|\tilde{\psi}_1(a_1, a_2, \ldots, a_n)| := \frac{1}{n}\cdot|\ln(1 + \psi(a_1, a_2, \ldots, a_n)) + \ln\Delta(a_1)| \leqslant \frac{K_1}{n}, \tag{4.3}$$

и константа $K_1 > 0$ зависит только от T.

Обозначим через V_b естественное расширение функции $U_b\colon \Theta_+ \to \mathbb{R}^1$ на пространство двусторонних последовательностей Ω по формуле

$$V(\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \ldots) = U_b(a_1, a_2, \ldots).$$

Отсюда, а также из (4.2) следует, что

$$\frac{1}{n}\ln|I^{(n)}(x)| = \frac{1}{n}\sum_{s=2}^{n+2} V_b(\sigma^{-s}(\ldots, a_n, \ldots, a_1, \underline{\gamma}(a_1)) + \tilde{\psi}_1(a_1, a_2, \ldots, a_n), \tag{4.4}$$

здесь в слове $(\ldots, a_n, \ldots, a_1, \underline{\gamma}(a_1))$ буква a_1 стоит на первом месте.

Прежде чем доказать существование последнего предела, приведем необходимую в дальнейшем лемму. Мера Лебега на окружности при переходе к символической динамике порождает вероятностную меру λ_0 на пространстве последовательностей Θ_+.

Лемма 6. *Существует вероятностная мера μ_0 на Θ_+ такая, что она инвариантна относительно сдвига σ и меры μ_0 и λ_0 эквивалентны между собой.*

Для полноты доказательства теоремы 2 сначала приведем доказательство леммы 6 из работы [5].

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим оператор трансфер-матрицы D_β при $\beta = 1$, то есть D_1. По утверждению теоремы 4 этот оператор имеет положительное собственное значение λ_1 и собственный вектор $h(\underline{a})$. Соответствующий сопряженный оператор D_1^* имеет собственный вектор ν_1 с тем же собственным значением λ_1. Отметим, что кратность λ_1 равна 1. Определим вероятностную меру $\tilde{\nu}_1$: $d\tilde{\nu}_1 = h_1 d\nu_1$. Покажем, что мера $\tilde{\nu}_1$ инвариантна относительно сдвига σ. Для этого нам достаточно показать, что $\tilde{\nu}_1(f) = \nu_1(f \circ \sigma)$ для каждого $f \in C(\Omega)$. Ясно, что

$$((D_1 f) \cdot g))(\underline{a}) = \sum_{\vec{y} \in \sigma^{-1}(\underline{a})} e^{U(\vec{y})} f(\vec{y}) g(\underline{a}) = \sum_{\vec{y} \in \sigma^{-1}(\underline{a})} e^{U(\vec{y})} f(\vec{y}) g(\sigma(\vec{y})) = D_1(f \cdot (g \circ \sigma))(\underline{a}).$$

Отсюда получаем

$$\tilde{\nu}_1(f) = \nu_1(h_1 \cdot f) = \nu_1(\lambda_1^{-1} D_1 h_1 \cdot f) = \lambda_1^{-1} \nu_1(D_1(h_1 \cdot (f \circ \sigma))) =$$

$$= \lambda_1^{-1}(D_1^* \nu_1)(h_1 \cdot (f \circ \sigma)) = \nu_1(h_1 \cdot (f \circ \sigma)) = \tilde{\nu}_1(f \circ \sigma).$$

Обозначим через $\overline{\Omega}$ естественное расширение пространства Ω на пространство двусторонних последовательностей:

$$\overline{\Omega} = \{\underline{a} = (\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots),\ a_i = a, 0, 1;\ a_{i+1} = 0 \Leftrightarrow a_i = a,\ i \geqslant 1\}.$$

Аналогичном образом определяется расширение $\overline{\Theta}_+$ пространства Θ_+. Определим меру μ_1 на $\overline{\Omega}$ по мере $\tilde{\nu}_1$:

$$\mu_1(\{\underline{a} \in \overline{\Omega}\colon \underline{a}_{i_1} \in A_1,\ \underline{a}_{i_2} \in A_2, \ldots, \underline{a}_{i_r} \in A_r\}) =$$

$$= \tilde{\nu}_1(\{\underline{a} \in \Omega\colon a_{i_1+n} \in A_1,\ a_{i_2+n} \in A_2, \ldots, a_{i_r+n} \in A_r\}),$$

где n таково, что все $i_k + n \geqslant 0$, $k = \overline{1, r}$, а $A_i \subset \{a, 0, 1\}$, $\overline{i = 1, r}$. Мера μ_1, очевидно, инвариантна относительно сдвига σ, действующего на $\overline{\Omega}$.

Определим «отражение» $\phi\colon \overline{\Omega} \leftrightarrow \overline{\Theta}_+$:

$$\phi(\underline{a})_i = a_{-i}, \quad i = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots.$$

При отражении мера μ_1 на $\overline{\Omega}$ порождает меру μ на $\overline{\Theta}$. Заметим, что мера μ тоже инвариантна относительно сдвига σ. Обозначим через μ_0 проекцию меры μ на Θ. Очевидно, что μ_0 тоже инвариантна относительно сдвига σ.

Покажем теперь, что меры меры μ_0 и λ_0 эквивалентны между собой. Для этого нужно сравнить $\lambda_0(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\mu_0(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. По определению

$$\lambda_0(a_1, a_2, \ldots, a_n) = |\Delta(a_1, a_2, \ldots, a_n)|. \tag{4.5}$$

Из последнего утверждения теоремы 3 вытекает, что

$$\text{const} \leqslant \frac{|\Delta(a_1, a_2, \ldots, a_n)|}{\exp(\sum\limits_{s=1}^{n} U(a_s, a_{s-1}, \ldots, a_1, \vec{\gamma}(a_1)))} \leqslant \text{Const}. \tag{4.6}$$

Имеем

$$\mu_0(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \tilde{\nu}_1(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \int h_1(\underline{a}) \chi_n(\underline{a}) d\nu_1(\underline{a}) = \nu_1(h_1 \cdot \chi_1), \tag{4.7}$$

где $\chi_n(\underline{a})$ — характеристическая функция цилиндрического множества

$$\{\underline{a}\colon \underline{a} = (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, \vec{y}) \in \Omega\}.$$

Используя (3.14) и (4.7), получаем

$$\begin{aligned}\mu_0(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \nu_1(h_1 \cdot \chi_1) = \lambda_1^{-1}(D_1^*\nu_1)(h_1 \cdot \chi_1) = \\ = \ldots = \lambda_1^{-n}((D_1^*)^n\nu_1)(h_1 \cdot \chi_1) = \lambda_1^{-n}\nu_1(D_1^n(h_1 \cdot \chi_1)) = \\ = \int \exp\left(\sum_{s=1}^{n} U(a_s, a_{s-1}, \ldots, a_1, \vec{y})\right) h_1(\vec{y})d\nu_1(\vec{y}). \quad (4.8)\end{aligned}$$

В силу теоремы 3

$$|U(a_s, a_{s-1}, \ldots, a_1, \vec{y}) - U(a_s, a_{s-1}, \ldots, a_1, \vec{\gamma}(a_1))| \leqslant \mathrm{const} \cdot |\alpha_0|^{-s}. \quad (4.9)$$

Из (4.5), (4.6), (4.8) и (4.9) легко можно получить

$$\mathrm{const} \leqslant \frac{\lambda_0(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{\mu_0(a_1, a_2, \ldots, a_n)} \leqslant \mathrm{Const}.$$

Лемма полностью доказана. □

Функция V_b является непрерывной (в тихоновской топологии) и ограниченной, а вероятностная мера μ_0 инвариантна относительно сдвига σ. Используя эргодическую теорему Биркгофа–Хинчина получим, что почти для всех x (по мере μ_0) существует конечный предел «эргодической» суммы, стоящей в правой части (4.4), последнее слагаемое в (4.4) сходиться к нулю в силу оценки (4.3).

Предельную функцию обозначим через $\widetilde{V}(\ldots, a_2, a_1, \underline{\gamma}(a_1))$ (a_1 стоит на первом месте). Отметим, что функция $\widetilde{V}$ определена на множестве X_m по «полной» мере (мере μ_0). Ясно, что $X_m \subset \{(\ldots, a_n, \ldots, a_1, \underline{\gamma} \subset \Theta_+, a_1)$.

Ясно, что $\mu_0(\phi^{-1}(X_m)) = 1$ и для элементов $(a_1, a_2, \ldots)$ этого множества существует предел:

$$\begin{aligned}\tau_\lambda(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left|I^{(n)}(x)\right|}{\ln \nu_m(I^n(x))} = \\ = \frac{1}{\ln\omega} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln|\Delta(0, a, 0, a, \ldots, a_1, a_2, \ldots, a_n)| = \frac{1}{\ln\omega}\widetilde{V}(\ldots, a_n, \ldots, a_1, \underline{\gamma}(a_1)). \quad (4.10)\end{aligned}$$

Учитывая эквивалентность мер μ_0 и λ_0, получим, что $\lambda_0(\phi^{-1}(X_m)) = 1$. С другой стороны, функция $\tau_\lambda(x)$ является инвариантной относительно отображения π_m. Отсюда, а также из эргодичности относительно π_m меры Лебега λ [7] следует, что $\tau_\lambda(x)$ является «почти» постоянной (по мере Лебега). Точки полуотрезка $[x_{q_m}, x_{q_{m+1}})$, соответствующие элементам подмножества $\phi^{-1}(X_m)$, обозначим через $\mathfrak{D}_m$.

Положим

$$\begin{gathered}\mathfrak{D}_m^1 := \mathfrak{D}_m \cap [x_{q_m}, x_0), \qquad \mathfrak{D}_m^2 := \mathfrak{D}_m \cap [x_0, x_{q_{m+1}}), \\ \mathfrak{D} := \{\mathfrak{D}_m^1 \cup T_b(\mathfrak{D}_m^1) \cup T_b^{q_{m+1}}(\mathfrak{D}_m^1)\} \bigcup \{\mathfrak{D}_m^2 \cup T_b(\mathfrak{D}_m^2) \cup T_b^{q_m}(\mathfrak{D}_m^2)\}.\end{gathered}$$

Ясно, что подмножество $\mathfrak{D}$ имеет «полную» лебегову меру на окружности $[-1, \alpha_1)$. Возьмем любую точку t_0 подмножества $\mathfrak{D}$, лежащую вне $[x_{q_m}, x_{q_{m+1}})$. Пусть $t_0 \in \Delta^{(m+n)} \in \mathbb{P}_{m+n}(x_0)$. Пусть для определенности $\Delta^{(m+n)} = T_b^k(\Delta^{(m+n+1)}(x_0))$, $0 < k \leqslant q_m$.

Вычислим предел (4.10) в точке $x = t_0$. Ясно, что

$$\tau_\lambda(t_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left|T_b^k(\Delta^{(m+n+1)}(x_0))\right|}{\ln \mu_{T_b}(T_b^k(\Delta^{(m+n+1)}(x_0))} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left|T_b^k(\Delta^{(m+n+1)}(x_0))\right|}{n} \cdot \frac{n}{\ln \mu_{T_b}(\Delta^{(m+n+1)}(x_0))} =$$

$$= \frac{1}{\ln\omega} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\{D(T_b^k)(\eta_0)|\Delta^{(m+n+1)}(T^{-k}(t_0))|\}}{n} =$$

$$= \frac{1}{\ln\omega} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\ln D(T_b^k)(\eta_0)}{n} + \frac{1}{\ln\omega} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\ln|\Delta^{(m+n+1)}(T^{-k}(t_0))|}{n} =$$

$$= \frac{1}{\ln\omega} \cdot \widetilde{V}(\ldots, b_n, \ldots, b_1, \underline{\gamma}(b_1));$$

здесь слово $(0, a, \ldots, 0, a, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots) \in \Theta_+$ соответствует точке $T^{-k}(t_0)$, а точка $\eta_0 \subset \subset \Delta^{(m+n+1)}(x_0)$. Утверждение теоремы 2 полностью доказано для меры Лебега.

В заключение мы приведем схему доказательства теоремы 2 относительно T-инвариантной меры μ.

I. Построение термодинамического формализма для отображений из $B(T_b)$ по инвариантной мере.

Рассмотрим произвольный $T \in B(T_b)$ и сопряжение Ψ такое, что $\Psi(x_0) = x_0$. Пусть $\frac{p_n}{q_n}$ есть n-ая подходящая дробь «золотого сечения» $\omega = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Обозначим через $\widehat{P}_n$ n-ое динамическое разбиение, полученное при помощи точек множества $\{x_0, T(x_0), \ldots, T^{q_{n+2}-1}(x_0)\}$. Хорошо известно, что

$$\widehat{P}_n := \{[x_0, T^{q_n}(x_0)], T([x_0, T^{q_n}(x_0)]) \ldots, T^{q_{n+1}-1}[x_0, T^{q_n}(x_0)]\} \cup$$

$$\cup \{[T^{q_{n+1}}(x_0), x_0], T([T^{q_{n+1}}(x_0), x_0]) \ldots, T^{q_n-1}([T^{q_{n+1}}(x_0), x_0])\}.$$

Напишем инвариантные меры атомов этого разбиения

$$\mu(T^i[x_0, T^{q_n}(x_0)]) = \Delta_n = |q_n\omega - p_n|, \qquad 0 \leqslant i \leqslant q_{n+1} - 1,$$

$$\mu(T^i[T^{q_{n+1}}(x_0), x_0]) = \Delta_n = |q_{n+1}\omega - p_{n+1}|, \qquad 0 \leqslant j \leqslant q_n - 1.$$

Из структуры динамических разбиений следует, что последовательность чисел $\{\Delta_n,\ n \geqslant 1\}$ удовлетворяет следующими разностному уравнению:

$$\Delta_n = \Delta_{n+1} + \Delta_{n+2}, \quad n \geqslant 1, \quad \Delta_1 = 1 - \omega, \quad \Delta_2 = 2\omega - 1.$$

Решение последнего разностного уравнения имеет вид:

$$\Delta_n = (\omega - 1) \cdot \omega^{n-1}, \quad n \geqslant 1.$$

Допредельные потенциалы для отображения T определим как для T_b, но длины отрезков заменим на их инвариантные меры. Легко убедиться, что полученный таким образом потенциал U_ω принимает всего три значения: 0, ω, $1 - \omega$.

II. Построение инвариантной меры относительно сдвига Бернулли.

Построим (как в случае T_b) соответствующий потенциалу U_ω оператор трансфер-матрицы $D_\beta^{(\omega)}$. Для оператора $D_\beta^{(\omega)}$ и его сопряжения $(D_\beta^{(\omega)})^*$ тоже верно утверждение теоремы 4.

Инвариантная мера μ при переходе от окружности к символической динамике порождает вероятностную меру μ_0 на пространстве последовательностей Θ_+. Используя меру ν^ω_β, отвечающей старшему положительному собственному значению $(D^{(\omega)}_\beta)^*$, можно построит инвариантную относительно сдвига Бернулли σ вероятностную меру μ^ω, эквивалентную мере μ_0.

III. Существование предела $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\left|I^{(n)}(x)\right|}{\ln\nu_m(I^n(x))}$ относительно инвариантной меры.

Используя (4.1), (4.2), (4.3) и (4.4) получим, что

$$\tau_\lambda(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left|I^{(n)}(x)\right|}{\ln\nu_m(I^n(x))}=\frac{1}{\ln\omega}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left|I^{(n)}(x)\right|=$$

$$=\frac{1}{\ln\omega}\cdot\frac{1}{n}\sum_{s=2}^{n+2}V_b(\sigma^{-s}(\ldots,a_n,\ldots,a_1,\underline{\gamma}(a_1))+\frac{1}{\ln\omega}\cdot\tilde{\psi}_1(a_1,a_2,\ldots,a_n),$$

где в слове $(\ldots,a_n,\ldots,a_1,\underline{\gamma}(a_1))$ буква a_1 стоит на первом месте и

$$|\tilde{\psi}_1(a_1,a_2,\ldots,a_n)|\leqslant\frac{K_4}{n}.$$

Повторяя те же рассуждения для случая меры Лебега, можно доказать, что последний предел существует п. в. относительно меры μ^ω.

Благодарности. Авторы выражают свою глубокую благодарность К. Х. Ханину за полезные обсуждения. Авторы выражают глубокую благодарность рецензенту за ценные замечания, которые помогли улучшить текст статьи.

Первый автор (Д.А.) является ассоциированным членом «Международного Центра Теоретической Физики» (Триест, Италия) и выражает свою благодарность за частичную финансовую поддержку при выполнении данной статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В. И. Малые знаменатели. I. Об отображениях окружности на себя // Изв. АН СССР. Сер. матем., 1961. Т. 25. Вып. 1. С. 21–86. http://mi.mathnet.ru/izv3366
2. Боуэн Р. Методы символической динамики. М.: Мир, 1979.
3. Джалилов А. А., Ханин К. М. Об инвариантной мере для гомеоморфизмов окружности с одним изломом // Функциональный анализ и его приложения. 1998. Т. 32. Вып. 3. С. 11–21. https://doi.org/10.4213/faa419
4. Джалилов А. А. Гельдеровость сингулярных мер гомеоморфизмов окружности с одной точкой излома // Теоретическая и математическая физика. 1999. Т. 121. № 3. С. 355–366. https://doi.org/10.4213/tmf815
5. Джалилов А. А. Термодинамический формализм и сингулярные инвариантные меры критических отображений окружности // Теоретическая и математическая физика. 2003. Т. 134. № 2. С. 191–206. https://doi.org/10.4213/tmf150
6. Джалилов А. А. Предельные законы времени попадания для критических отображений окружности // Теоретическая и математическая физика. 2004. Т. 138. № 2. С. 225–245. https://doi.org/10.4213/tmf19
7. Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.
8. Синай Я. Г., Ханин К. М. Гладкость сопряжений диффеоморфизмов окружности с поворотами // Успехи математических наук. 1989. Т. 44. Вып. 1 (265). С. 57–82. http://mi.mathnet.ru/umn1965

9. Cunha K., Smania D. Rigidity for piecewise smooth homeomorphisms on the circle // Advances in Mathematics. 2014. Vol. 250. P. 193–226. https://doi.org/10.1016/j.aim.2013.09.017

10. Denjoy A. Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. 1932. Vol. 11. P. 333–376.

11. de Faria E., de Melo W. Rigidity of critical circle mappings I // Journal of the European Mathematical Society. 1999. Vol. 1. Issue 4. P. 339–392. https://doi.org/10.1007/s100970050011

12. Herman M. R. Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle a des rotations // Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques. 1979. Vol. 49. Issue 1. P. 5–233. https://doi.org/10.1007/BF02684798

13. Katznelson Y., Ornstein D. The differentiability of the conjugation of certain diffeomorphisms of the circle // Ergodic Theory and Dynamical Systems. 1989. Vol. 9. Issue 4. P. 643–680. https://doi.org/10.1017/S0143385700005277

14. Khanin K. M., Khmelev D. Renormalizations and rigidity theory for circle homeomorphisms with singularities of break type // Communications in Mathematical Physics. 2003. Vol. 235. No. 1. P. 69–124. https://doi.org/10.1007/s00220-003-0809-5

15. Khanin K., Kocić S. Renormalization conjecture and rigidity theory for circle diffeomorphisms with breaks // Geometric and Functional Analysis. 2014. Vol. 24. Issue 6. P. 2002–2028. https://doi.org/10.1007/s00039-014-0309-0

16. Marmi S., Moussa P., Yoccoz J.-C. Linearization of generalized interval exchange maps // Annals of Mathematics. 2012. Vol. 176. No. 3. P. 1583–1646. http://doi.org/10.4007/annals.2012.176.3.5

17. de Melo W., van Strien S. One-dimensional dynamics. Berlin: Springer, 1993. https://doi.org/10.1007/978-3-642-78043-1

18. Ruelle D. Thermodynamic formalism. The mathematical structures of classical equilibrium statistical mechanics. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. https://doi.org/10.1017/CBO9780511617546

19. Синай Я. Г. Гиббсовские меры в эргодической теории // Успехи математических наук. 1972. Т. 27. Вып. 4 (166). С. 21–64. http://mi.mathnet.ru/umn5083

20. Vul E. B., Sinai Ya. G., Khanin K. M. Feigenbaum universality and the thermodynamic formalism // Russian Mathematical Surveys. 1984. Vol. 39. No. 3. P. 1–40. https://doi.org/10.1070/RM1984v039n03ABEH003162

21. Vul E. B., Khanin K. M. Circle homeomorphisms with weak discontinuities // Advances in Sov. Math. 1991. Vol. 3. P. 57–98. https://bookstore.ams.org/advsov-3

22. Yoccoz J.-C. Conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle dont le nomber de rotation vérifie une condition diophantienne // Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure. Serie 4. 1984. Vol. 17. No. 3. P. 333–359. https://doi.org/10.24033/asens.1475

Поступила в редакцию 24.02.2020

Джалилов Ахтам Абдурахманович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра математических и естественных наук, Туринский политехнический университет в г. Ташкенте, 100095, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Кичик Халка йули, 17.
E-mail: adzhalilov21@gmail.com

Каримов Жавлон Журабой угли, докторант, кафедра математического анализа, Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, 100174, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Университетская, 4; Туринский политехнический университет в г. Ташкенте, 100095, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Кичик Халка йули, 17.
E-mail: jkarimov0702@gmail.com

Цитирование: А. А. Джалилов, Ж. Ж. Каримов. Термодинамический формализм и показатели сингулярности инвариантной меры отображений окружности с одним изломом // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30. Вып. 3. С. 343–366.

A. A. Dzhalilov, J. J. Karimov

The thermodynamic formalism and exponents of singularity of invariant measure of circle maps with a single break

Keywords: circle homeomorphism, break point, rotation number, invariant measure, thermodynamic formalism.

MSC2010: 37A05, 28D05

DOI: 10.35634/vm200301

Let $T \in C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{x_b\})$, $\varepsilon > 0$, be a circle homeomorphism with one break point x_b, at which $T'(x)$ has a discontinuity of the first kind and both one-sided derivatives at the point x_b are strictly positive. Assume that the rotation number ρ_T is irrational and its decomposition into a continued fraction beginning from a certain place coincides with the golden mean, i. e., $\rho_T = [m_1, m_2, \ldots, m_l, m_{l+1}, \ldots]$, $m_s = 1$, $s > l > 0$. Since the rotation number is irrational, the map T is strictly ergodic, that is, possesses a unique probability invariant measure μ_T. A. A. Dzhalilov and K. M. Khanin proved that the probability invariant measure μ_G of any circle homeomorphism $G \in C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{x_b\})$, $\varepsilon > 0$, with one break point x_b and the irrational rotation number ρ_G is singular with respect to the Lebesgue measure λ on the circle, i. e., there is a measurable subset of $A \subset S^1$ such that $\mu_G(A) = 1$ and $\lambda(A) = 0$. We will construct a thermodynamic formalism for homeomorphisms $T_b \in C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{x_b\})$, $\varepsilon > 0$, with one break at the point x_b and rotation number equal to the golden mean, i. e., $\rho_T := \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Using the constructed thermodynamic formalism, we study the exponents of singularity of the invariant measure μ_T of homeomorphism T.

REFERENCES

1. Arnol'd V. I. Small denominators. I. Mappings of the circumference onto itself, *Am. Math. Soc., Transl., II. Ser.*, 1965, vol. 46, pp. 213–284. https://zbmath.org/?q=an:0152.41905
2. Bowen R. *Metody simvolicheskoi dinamiki* (Methods of symbolic dynamics), Moscow: Mir, 1979.
3. Dzhalilov A. A., Khanin K. M. On an invariant measure for homeomorphisms of a circle with a point of break, *Functional Analysis and Its Applications*, 1998, vol. 32, no. 3, pp. 153–161. https://doi.org/10.1007/BF02463336
4. Dzhalilov A. A. The Hölder property of singular invariant measures of circle homeomorphisms with single corners, *Theoretical and Mathematical Physics*, 1999, vol. 121, no. 3, pp. 1557–1566. https://doi.org/10.1007/BF02557202
5. Dzhalilov A. A. Thermodynamic formalism and singular invariant measures for critical circle maps, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2003, vol. 134, no. 2, pp. 166–180. https://doi.org/10.1023/A:1022271903129
6. Dzhalilov A. A. Limiting laws for entrance times of critical mappings of a circle, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2004, vol. 138, no. 2, pp. 190–207. https://doi.org/10.1023/B:TAMP.0000014851.67668.fb
7. Cornfeld I. P., Fomin S. V., Sinai Ya. G. *Ergodic theory*, New York: Springer, 1982. https://doi.org/10.1007/978-1-4615-6927-5
8. Sinai Ya. G., Khanin K. M. Smoothness of conjugacies of diffeomorphisms of the circle with rotations, *Russian Mathematical Surveys*, 1989, vol. 44, no. 1, pp. 69–99. https://doi.org/10.1070/RM1989v044n01ABEH002008
9. Cunha K., Smania D. Rigidity for piecewise smooth homeomorphisms on the circle, *Advances in Mathematics*, 2014, vol. 250, pp. 193–226. https://doi.org/10.1016/j.aim.2013.09.017
10. Denjoy A. Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 1932, vol. 11, pp. 333–376.
11. de Faria E., de Melo W. Rigidity of critical circle mappings I, *Journal of the European Mathematical Society*, 1999, vol. 1, issue 4, pp. 339–392. https://doi.org/10.1007/s100970050011

12. Herman M. R. Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle a des rotations, *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, 1979, vol. 49, issue 1, pp. 5–233. https://doi.org/10.1007/BF02684798
13. Katznelson Y., Ornstein D. The differentiability of the conjugation of certain diffeomorphisms of the circle, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 1989, vol. 9, issue 4, pp. 643–680. https://doi.org/10.1017/S0143385700005277
14. Khanin K. M., Khmelev D. Renormalizations and rigidity theory for circle homeomorphisms with singularities of break type, *Communications in Mathematical Physics*, 2003, vol. 235, no. 1, pp. 69–124. https://doi.org/10.1007/s00220-003-0809-5
15. Khanin K., Kocić S. Renormalization conjecture and rigidity theory for circle diffeomorphisms with breaks, *Geometric and Functional Analysis*, 2014, vol. 24, issue 6, pp. 2002–2028. https://doi.org/10.1007/s00039-014-0309-0
16. Marmi S., Moussa P., Yoccoz J.-C. Linearization of generalized interval exchange maps, *Annals of Mathematics*, 2012, vol. 176, no. 3, pp. 1583–1646. http://doi.org/10.4007/annals.2012.176.3.5
17. de Melo W., van Strien S. *One-dimensional dynamics*, Berlin: Springer, 1993. https://doi.org/10.1007/978-3-642-78043-1
18. Ruelle D. *Thermodynamic formalism. The mathematical structures of classical equilibrium statistical mechanics*, Cambridge: Cambridge University Press, 2004. https://doi.org/10.1017/CBO9780511617546
19. Sinai Ya. G. Gibbs measures in ergodic theory, *Russian Mathematical Surveys*, 1972, vol. 27, no. 4, pp. 21–69. https://doi.org/10.1070/RM1972v027n04ABEH001383
20. Vul E. B., Sinai Ya. G., Khanin K. M. Feigenbaum universality and the thermodynamic formalism, *Russian Mathematical Surveys*, 1984, vol. 39, no. 3, pp. 1–40. https://doi.org/10.1070/RM1984v039n03ABEH003162
21. Vul E. B., Khanin K. M. Circle homeomorphisms with weak discontinuities, *Advances in Sov. Math*, 1991, vol. 3, pp. 57–98. https://bookstore.ams.org/advsov-3
22. Yoccoz J.-C. Conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle dont le nomber de rotation vérifie une condition diophantienne, *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, Serie 4*, 1984, vol. 17, no. 3, pp. 333–359. https://doi.org/10.24033/asens.1475

Received 24.02.2020

Dzhalilov Akhtam Abdurakhmanovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematics and Natural Sciences, Turin Polytechnic University in Tashkent, ul. Kichik Khalka yuli, 17, Tashkent, 100095, Uzbekistan.
E-mail: adzhalilov21@gmail.com

Karimov Javlon Juraboy ugli, PhD Researcher, Department of Mathematical Analysis, National University of Uzbekistan, ul. Universitetskaya, 4, Tashkent, 100174, Uzbekistan;
Turin Polytechnic University in Tashkent, ul. Kichik Khalka yuli, 17, Tashkent, 100095, Uzbekistan.
E-mail: jkarimov0702@gmail.com

Citation: A. A. Dzhalilov, J. J. Karimov. The thermodynamic formalism and exponents of singularity of invariant measure of circle maps with a single break, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2020, vol. 30, issue 3, pp. 343–366.