

УДК 531.133.1, 531.36, 514.758.3

© *Е. А. Митюшов, Н. Е. Мисюра, С. А. Берестова*

КВАТЕРНИОННАЯ МОДЕЛЬ ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ ШАРА ЧАПЛЫГИНА

В работе рассматривается задача программного управления движением динамически несимметричного уравновешенного шара на плоскости при помощи трех двигателей-маховиков при условии, что шар катится без проскальзывания. Центр масс механической системы совпадает с геометрическим центром шара. Найдены законы управления, обеспечивающие движение шара вдоль базовых траекторий (прямой и окружности), а также по произвольно заданной кусочно-гладкой траектории на плоскости. В данной работе предлагается кватернионная модель движения шара, которая позволяет обойтись без традиционного использования тригонометрических функций, а кинематические уравнения записать в виде линейных дифференциальных уравнений, исключающих недостатки связанные с применением углов Эйлера. Решение поставленной задачи осуществляется с применением кватернионной функции времени, которая определяется видом траектории и законом движения точки контакта шара с плоскостью. Приведен пример управления движением шара и выполнена визуализация движения системы шар–маховики в пакете компьютерной алгебры.

Ключевые слова: кватернионы, программное управление, неголономная связь, геометрическая динамика, плавное движение, сферо-робот.

DOI: [10.20537/vm190310](https://doi.org/10.20537/vm190310)

Введение

Динамика робототехнических систем в последние годы остается одним из самых активно развивающихся направлений научных исследований. В дополнение к традиционным задачам появилось множество работ, посвященных движению так называемых сферо-роботов, которые приводятся в движение инерционными двигателями. Трудности в исследовании динамики движения таких механических систем связаны с необходимостью интегрирования дифференциальных уравнений движения при наличии неголономных связей и необходимостью выбора параметризации их положения в пространстве, исключающее возникновение особенностей при некоторых значениях параметров (*gimbal lock*). Традиционным подходом к решению задач при записи кинематических и динамических уравнений является тригонометрическая параметризация с помощью углов Эйлера. В данной работе предлагается кватернионная модель, которая позволяет обойтись без использования тригонометрических функций, а кинематические уравнения записать в виде линейных дифференциальных уравнений, исключающих недостатки, связанные с применением углов Эйлера.

Существующие сферо-роботы можно разделить условно на три группы. Сферо-роботы с маятниковыми системами, реализующими движение за счет смещения центра масс или перераспределения масс [12, 15–17, 20, 25]. Вторая группа относится к деформируемым объектам [30]. В работе рассматривается третий тип — динамически несимметричный сферо-робот, в котором расположены внутренние двигатели-маховики с балансирами [13, 14, 22]. Это конструкция, у которой центр масс совпадает с геометрическим центром шара. При нулевой угловой скорости вращения маховиков эта задача совпадает с известной задачей С. А. Чаплыгина [2]. Задача о движении шара была поставлена С. А. Чаплыгиным и

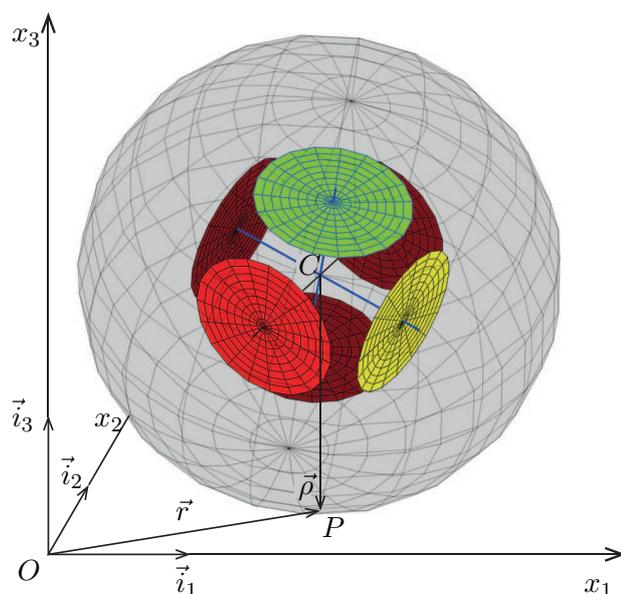


Рис. 1. Шар с тремя двигателями-маховиками и балансирями

решена им еще в 1903 году [11]. Но до сих пор исследуются различные методы ее решения, даются ее обобщения. Рассматриваются усеченные шары или шары комбинированного типа [18], ограничивается площадь контакта [26], а также активно идет разработка теорий управления движением шара. Это оптимальные теории управления [1, 7–10], рассматривающие кратчайшие траектории [28], переходные траектории с одной базовой на другую [19, 21, 27], минимизацию энергетических затрат [29] и т. д. Наравне с оптимальными теориями управления существует и второй подход к задачам управления, который опирается на геометрию движения [24]. При этом функции управления зависят от траектории точки контакта. Именно с этой точки зрения в работе рассматривается движение шара. Развитие этой задачи может идти по различным направлениям. Это и стабилизация движения [23], и исследование обратных задач управления [13, 14], и рассмотрение движения по более сложным поверхностям, по наклонной плоскости [21, 31], решения задачи с учетом сил трения и другие.

§ 1. Описание модели шара с тремя внутренними двигателями-маховиками

Следуя работам [2, 4, 5, 26–28] и вводя ряд упрощающих предположений, рассмотрим систему, состоящую из шара с тремя установленными в нем двигателями-маховиками и балансирями (см. рис. 1). Шар катится по горизонтальной плоскости без проскальзывания за счет вращения маховиков. При этом будем полагать, что конструкция системы удовлетворяет некоторым ограничениям. Центр масс всей системы совпадает с геометрическим центром шара. Двигатели-маховики осесимметричны. Оси вращения двигателей-маховиков совпадают с их осями симметрии, в результате чего, их вращение не меняет распределение масс системы. Оси вращения ортогональны и совпадают с главными осями инерции системы. Угловые скорости маховиков являются функциями времени $\tilde{\omega}_k(t)$, $k = 1, 2, 3$.

Пусть моменты инерции маховиков i_k ($k = 1, 2, 3$), матрица тензора инерции рассматриваемой системы в главных осях имеет вид: $I = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$, а радиус шара равен a .

Требуется найти программное управление в виде функций для угловых скоростей маховиков $\tilde{\omega}_k(t)$, $k = 1, 2, 3$, при котором точка контакта P движется по заданной кусочно-гладкой траектории.

§ 2. Кинематические уравнения движения шара

Пусть траектория точки контакта задана параметрически:

$$x_k = x_k(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad k = 1, 2. \quad (2.1)$$

Кинематика движения шара полностью определяется уравнениями (2.1) и уравнением негोलомной связи

$$\vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{\rho} = 0, \quad \vec{v}_C - a\vec{\omega} \times \vec{i}_3 = 0, \quad (2.2)$$

где \vec{v}_C — скорость центра масс системы, состоящей из шара, двигателей маховиков и балансиров; $\vec{\omega}$ — угловая скорость шара; \vec{i}_3 — орт оси Ox_3 ; ρ — вектор, проведенный из центра масс в точку касания шара с плоскостью.

Из уравнений (2.1) и (2.2) следует, что при качении шара проекции вектора его угловой скорости на неподвижные оси определяются равенствами:

$$\omega_1 = -\frac{\dot{x}_2}{a}, \quad \omega_2 = \frac{\dot{x}_1}{a}, \quad \omega_3 = 0, \quad (2.3)$$

здесь и далее точкой сверху обозначена производная по времени.

Воспользуемся кватернионной записью кинематических уравнений в виде линейных дифференциальных уравнений для определения координат кватерниона ориентации $q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ через проекции вектора угловой скорости на оси неподвижной системы координат [6].

$$\begin{cases} \dot{q}_0 = -(q_1\omega_1 + q_2\omega_2 + q_3\omega_3)/2, \\ \dot{q}_1 = (q_0\omega_1 + q_3\omega_2 - q_2\omega_3)/2, \\ \dot{q}_2 = (q_0\omega_2 + q_1\omega_3 - q_3\omega_1)/2, \\ \dot{q}_3 = (q_0\omega_3 + q_2\omega_1 - q_1\omega_2)/2; \end{cases} \quad (2.4)$$

с начальным условием: $q|_{t=0} = \{1, 0, 0, 0\}$.

С учетом соотношений (2.3) дифференциальные уравнения (2.4) могут быть переписаны в виде

$$\begin{cases} \dot{q}_0 = (q_1\dot{x}_2 - q_2\dot{x}_1)/2a, \\ \dot{q}_1 = -(q_0\dot{x}_2 - q_3\dot{x}_1)/2a, \\ \dot{q}_2 = (q_0\dot{x}_1 + q_3\dot{x}_2)/2a, \\ \dot{q}_3 = -(q_2\dot{x}_2 + q_1\dot{x}_1)/2a; \end{cases} \quad (2.5)$$

с начальным условием: $q|_{t=0} = \{1, 0, 0, 0\}$.

Результат интегрирования этой системы линейных дифференциальных уравнений позволяет найти положение всех точек оболочки шара в любой момент времени из уравнения

$$r_t(u, v) = r(t) + R(t)r_0(u, v),$$

где $r(t) = (x_1(t), x_2(t), a)^T$, $r_0(u, v) = (a \cos u \sin v, a \sin u \sin v, a \cos v)^T$,

$$R(t) = \begin{pmatrix} 1 - 2q_2^2 - 2q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_0q_2 + q_1q_3) \\ 2(q_0q_3 + q_1q_2) & 1 - 2q_1^2 - 2q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_0q_1 + q_2q_3) & 1 - 2q_1^2 - 2q_2^2 \end{pmatrix} - \text{матрица поворота [3].}$$

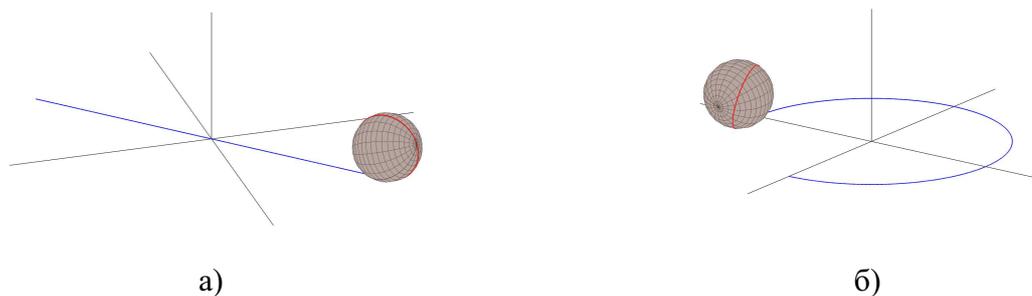


Рис. 2. Траектории точки касания в подвижной и неподвижной системах отсчета при законах движения: а) по прямой [32]; б) по окружности [33]

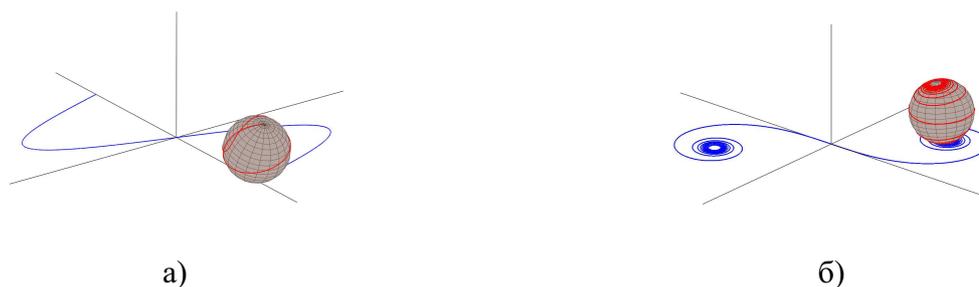


Рис. 3. Траектории точки касания в подвижной и неподвижной системах отсчета при законах движения: а) по траектории слалом [34]; б) по двойной клотоиде [35]

Многие исследователи рассматривают набор базовых движений сферо-робота [18, 21]. Считается, что последовательным комбинированием этих движений можно реализовать достаточно произвольное движение шара по плоскости. Базовые движения, в основном, ограничиваются отрезком прямой, либо дугой окружности. Также предлагаются варианты стыковки базовых траекторий [29]. С помощью предложенного алгоритма в качестве примера на рис. 2 представлены кадры анимации движения шара с указанием изменения положения точки контакта при типовых законах его движения вдоль прямой

$$x_1(t) = t, \quad x_2(t) = t$$

и по окружности

$$x_1(t) = \sin(t), \quad x_2(t) = \cos(t).$$

Предложенное решение задачи можно реализовать и для более сложной иллюстрации движения (рис. 3) по траектории «слалом»

$$x_1(t) = t, \quad x_2(t) = \sin(\pi t)$$

и двойной клотоиде

$$x_1(t) = \int_0^t \cos(s^2) ds, \quad x_2(t) = \int_0^t \sin(s^2) ds.$$

§ 3. Динамические уравнения движения

Для получения динамических уравнений движения системы, состоящей из шара, трех двигателей-маховиков и балансиров, воспользуемся теоремами о движении центра масс и об изменении кинетического момента в относительном движении

$$m\dot{\vec{v}}_C = m\vec{g} + \vec{R}, \quad (3.1)$$

$$\dot{\vec{K}}_C = \vec{\rho} \times \vec{R}. \quad (3.2)$$

Здесь \vec{R} — реакция неподвижной плоскости.

Дифференцируем уравнение связи (2.2) и с помощью получаемого соотношения исключаем реакцию неподвижной плоскости из равенств (3.1) и (3.2). В результате приходим к уравнению

$$\dot{\vec{K}}_C = -ma^2\dot{\vec{\omega}}.$$

Интегрируя это уравнение в предположении о неподвижности шара в начальный момент времени, находим

$$\vec{K}_C = -ma^2\vec{\omega}.$$

В проекциях на оси подвижной системы координат

$$I_1\Omega_1 + i_1\tilde{\omega}_1 = -ma^2\Omega_1, \quad I_2\Omega_2 + i_2\tilde{\omega}_2 = -ma^2\Omega_2, \quad I_3\Omega_3 + i_3\tilde{\omega}_3 = -ma^2\Omega_3,$$

где Ω_k — проекции вектора угловой скорости на главные оси. Откуда

$$\tilde{\omega}_1 = -\frac{ma^2 + I_1}{i_1}\Omega_1, \quad \tilde{\omega}_2 = -\frac{ma^2 + I_2}{i_2}\Omega_2, \quad \tilde{\omega}_3 = -\frac{ma^2 + I_3}{i_3}\Omega_3.$$

§ 4. Задача управления движением

Для решения поставленной задачи управления остается выразить координаты Ω_k вектора угловой скорости в подвижной системе координат через функции (2.1), задающие траекторию точки контакта шара с неподвижной горизонтальной плоскостью и определяющие закон движения шара. Для этого достаточно воспользоваться преобразованием $\Omega = Q\omega$, где

$$\Omega = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)^T, \quad \omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T = \left(-\frac{\dot{x}_2}{a}, \frac{\dot{x}_1}{a}, 0 \right)^T,$$

$$Q = R^T = \begin{pmatrix} 1 - 2q_2^2 - 2q_3^2 & 2(q_0q_3 + q_1q_2) & 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 1 - 2q_1^2 - 2q_3^2 & 2(q_0q_1 + q_2q_3) \\ 2(q_0q_2 + q_1q_3) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) & 1 - 2q_1^2 - 2q_2^2 \end{pmatrix},$$

Q — матрица направляющих косинусов.

Управление движением шара маховиками при заданном законе движения осуществляется по алгоритму:

$$\tilde{\omega}_1 = \frac{ma^2 + I_1}{i_1a} [(1 - 2q_2^2 - 2q_3^2) \dot{x}_2 - 2(q_0q_3 + q_1q_2) \dot{x}_1],$$

$$\tilde{\omega}_2 = \frac{ma^2 + I_2}{i_2a} [2(q_1q_2 - q_0q_3) \dot{x}_2 - (1 - 2q_1^2 - 2q_3^2) \dot{x}_1],$$

$$\tilde{\omega}_3 = \frac{ma^2 + I_3}{i_3a} [2(q_0q_2 + q_1q_3) \dot{x}_2 - 2(q_2q_3 - q_0q_1) \dot{x}_1].$$

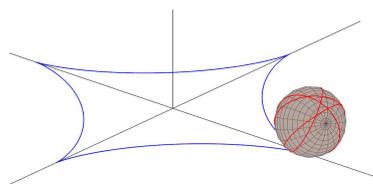


Рис. 4. Траектории точки касания в подвижной и неподвижной системах отсчета при движении шара по астроиде [36]

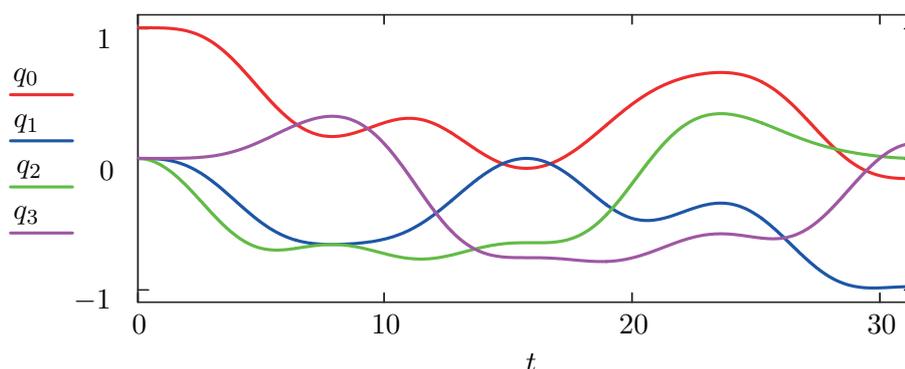


Рис. 5. Графики изменения координат кватерниона

Координаты кватерниона ориентации $q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ находятся из решения системы линейных дифференциальных уравнений (2.5).

§ 5. Движение шара по астроиде

Более подробно проанализируем движение шара по кусочно-гладкой кривой — астроиде (рис. 4). Найдем законы изменения координат кватерниона ориентации, координат угловой скорости шара на подвижные и неподвижные оси, угловых скоростей и законов движения маховиков, если уравнения движения точки контакта шара с плоскостью имеют вид:

$$x_1 = 5\cos^3(0.2t), \quad x_2 = 5\sin^3(0.2t), \quad 0 \leq t \leq 10\pi.$$

Для определенности возьмем следующие числовые значения геометрических и инерционных характеристик: $m = 10$, $I = \text{diag}(10, 20, 30)$, $i_1 = i_2 = i_3 = 1$, $a = 2.5$. Кадр анимации движения шара по астроиде показан на рис. 4.

В результате численного интегрирования в одном из алгебраических пакетов прикладных программ получены графики изменения координат кватерниона, как результат интегрирования системы дифференциальных уравнений (2.5). Графики координат кватерниона, определяющего положение шара в любой момент времени, приведены на рис. 5. Графики изменения проекций угловой скорости шара на неподвижные оси приведены на рис. 6. Графики изменения проекций угловой скорости шара на подвижные оси, совпадающие с главными осями инерции шара, приведены на рис. 7. Графики изменения угловых скоростей маховиков приведены на рис. 8. Графики законов вращения двигателей-маховиков приведены на рис. 9.

Получено программное управление динамически несимметричным шаром при его качении по произвольно заданной кусочно-гладкой траектории при помощи трех двигателей ма-

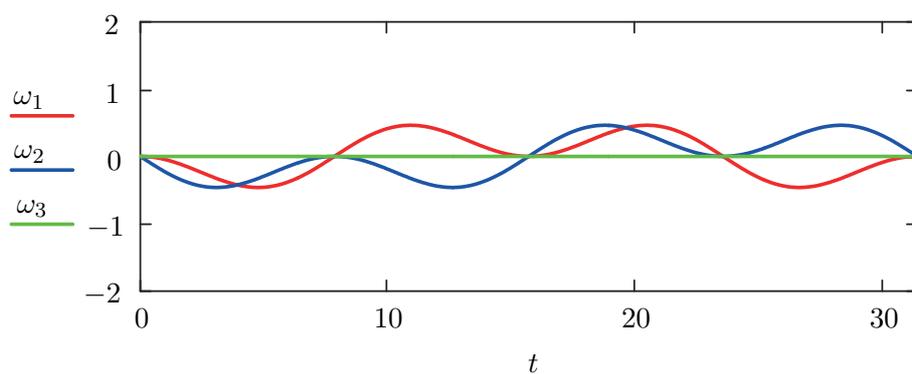


Рис. 6. Графики изменения проекций угловой скорости шара на неподвижные оси

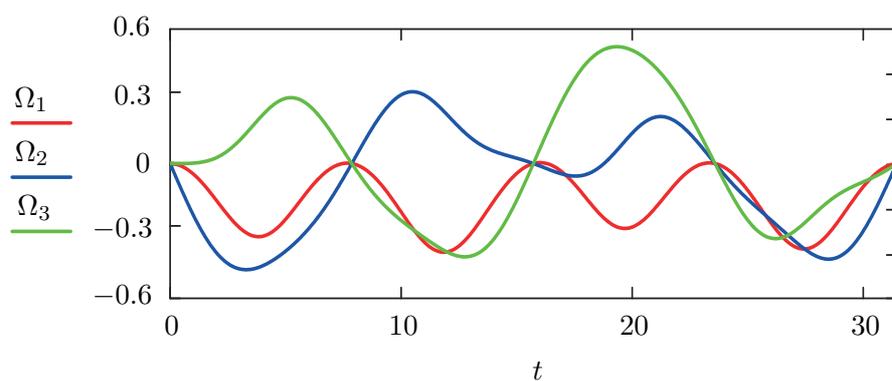


Рис. 7. Графики изменения проекций угловой скорости шара на подвижные оси

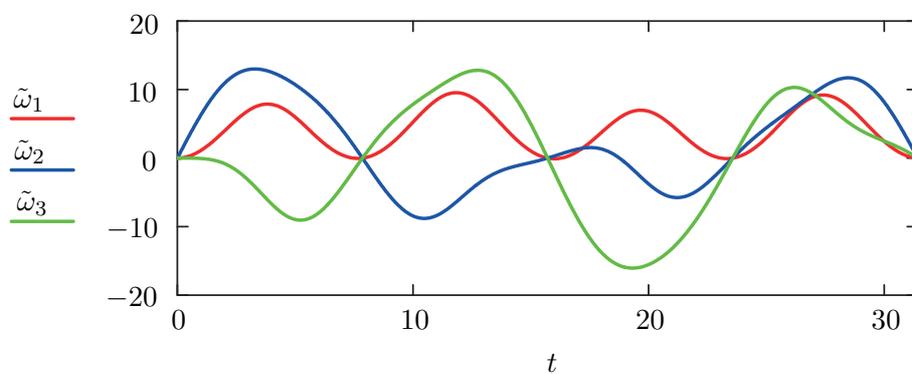


Рис. 8. Графики изменения угловых скоростей двигателей-маховиков шара

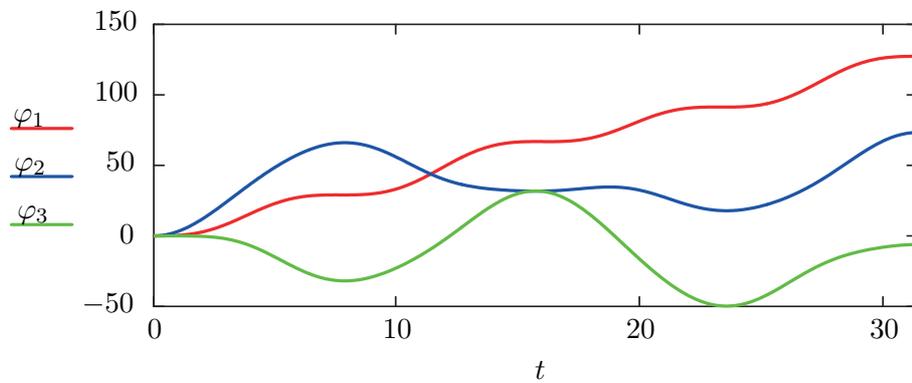


Рис. 9. Законы движения двигателей-маховиков шара

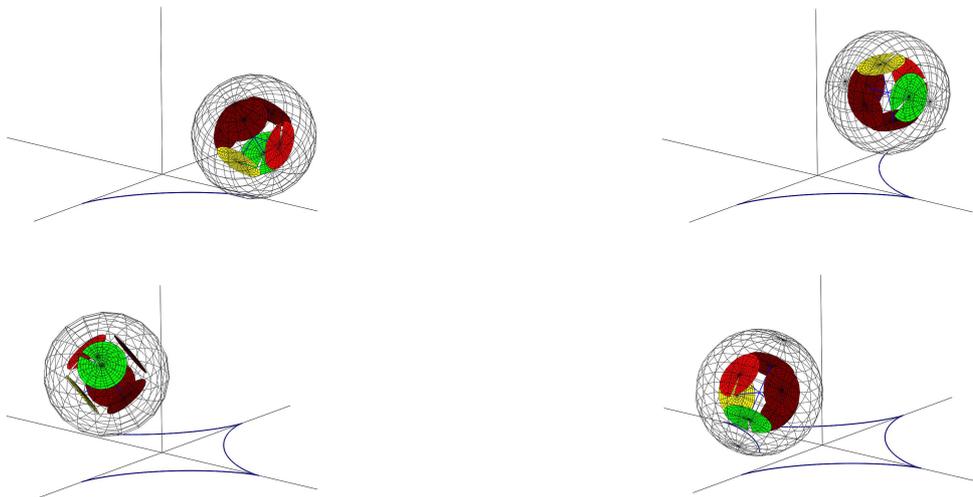


Рис. 10. Кадры анимации изменений положений шара с учетом вращения внутренних двигателей-маховиков, когда точка контакта шара с неподвижной горизонтальной поверхностью движется по астройде в моменты времени 7, 14, 21 и 28 с [37]

ховиков с различными моментами инерции. Преимущество предлагаемого подхода заключается в использовании кватернионной модели управления пространственным движением, в которой процедура решения сводится к интегрированию линейных дифференциальных уравнений.

При практическом применении предложенного в работе алгоритма для управления сферическим роботом остаются нерешенными ряд проблем [4], основная из которых — неучтенное трение качения. Вместе с тем, как отмечено в работах [4, 17, 29], использование двигателей-маховиков выглядит перспективным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болотин С.В. Задача оптимального управления качением шара с роторами // *Нелинейная динамика*. 2012. Т. 8. № 4. С. 837–852. <https://doi.org/10.20537/nd1204011>
2. Борисов А.В., Килин А.А., Мамаев И.С. Как управлять шаром Чаплыгина с помощью роторов // *Мобильные роботы: робот-колесо и робот-шар* / А.В. Борисов, И.С. Мамаев, Ю.Л. Караваев. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013. С. 131–168.
3. Борисов А.В., Мамаев И.С. *Динамика твердого тела*. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 384 с.
4. Борисов А.В., Килин А.А., Мамаев И.С. Как управлять шаром Чаплыгина при помощи роторов // *Нелинейная динамика*. 2012. Т. 8. № 2. С. 289–307. <https://doi.org/10.20537/nd1202006>
5. Борисов А.В., Килин А.А., Мамаев И.С. Как управлять шаром Чаплыгина при помощи роторов. II // *Нелинейная динамика*. 2013. Т. 9. № 1. С. 59–76. <https://doi.org/10.20537/nd1301006>
6. Голубев Ю.Ф. Алгебра кватернионов в кинематике твердого тела // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*. 2013. № 39. 23 с. <http://mi.mathnet.ru/ipmp1789>
7. Маштаков А.П., Сачков Ю.Л. Экстремальные траектории и асимптотика времени Максвелла в задаче об оптимальном качении сферы по плоскости // *Матем. сб.* 2011. Т. 202. № 9. С. 97–120. <https://doi.org/10.4213/sm7762>
8. Павловский В.Е., Терехов Г.П. Управление мобильным сферическим информационным роботом с тремя ортогональными маховиками // *Спецтехника и связь*. 2012. № 3. С. 19–24. <https://elibrary.ru/item.asp?id=17878482>
9. Терехов Г.П. Управление шаром с тремя маховиками на ортогональных осях // *Современная мехатроника. Сборник научных трудов Всероссийской научной школы*. Орехово-Зуево, 2011. С. 126–130.
10. Терехов Г.П., Павловский В.Е. Управление роботом-шаром с помощью маховиков // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*. 2017. № 16. 31 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2017-16>
11. Чаплыгин С.А. О катании шара по горизонтальной плоскости // *Матем. сб.* 1903. Т. 24. № 1. С. 139–168. <http://mi.mathnet.ru/msb6665>
12. Furuse Y., Hirano T., Ishikawa M. Dynamical analysis of spherical mobile robot utilizing off-centered internal mass distribution // *IFAC-PapersOnLine*. 2015. Vol. 48. Issue 13. P. 176–181. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2015.10.235>
13. Gajbhiye S., Banavar R.N. Geometric approach to tracking and stabilization for a spherical robot actuated by internal rotors // *arXiv: 1511.00428v2 [cs.SY]*. 2015. <https://arxiv.org/abs/1511.00428v2>
14. Gajbhiye S., Banavar R.N. Geometric tracking control for a nonholonomic system: a spherical robot // *IFAC-PapersOnLine*. 2016. Vol. 49. Issue 18. P. 820–825. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2016.10.267>
15. Ishikawa M., Kitayoshi R., Sugie T. Volvot: A spherical mobile robot with eccentric twin rotors // *2011 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics*. 2011. P. 1462–1467. <https://doi.org/10.1109/ROBIO.2011.6181496>

16. Joshi V.A., Banavar R.N. Motion analysis of a spherical mobile robot // *Robotica*. 2009. Vol. 27. Issue 3. P. 343–353. <https://doi.org/10.1017/S0263574708004748>
17. Joshi V.A., Banavar R.N., Hippalgaonkar R. Design and analysis of a spherical mobile robot // *Mechanism and Machine Theory*. 2010. Vol. 45. Issue 2. P. 130–136. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2009.04.003>
18. Kilin A.A. The dynamics of Chaplygin ball: the qualitative and computer analysis // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2001. Vol. 6. No. 3. P. 291–306. <https://doi.org/10.1070/RD2001v006n03ABEH000178>
19. Kilin A.A., Pivovarova E.N. Chaplygin top with a periodic gyrostatic moment // *Russian Journal of Mathematical Physics*. 2018. Vol. 25. No. 4. P. 509–524. <https://doi.org/10.1134/S1061920818040088>
20. Kilin A.A., Pivovarova E.N., Ivanova T.B. Spherical robot of combined type: dynamics and control // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2015. Vol. 20. No. 6. P. 716–728. <https://doi.org/10.1134/S1560354715060076>
21. Madhushani T.W.U., Maithripala D.H.S., Wijayakulasooriya J.V., Berg J.M. Semi-globally exponential trajectory tracking for a class of spherical robots // *Automatica*. 2017. Vol. 85. P. 327–338. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2017.07.060>
22. Morinaga A., Svinin M., Yamamoto M. A motion planning strategy for a spherical rolling robot driven by two internal rotors // *IEEE Transactions on Robotics*. 2014. Vol. 30. No. 4. P. 993–1002. <https://doi.org/10.1109/TRO.2014.2307112>
23. Muralidharan V., Mahindrakar A.D. Geometric controllability and stabilization of spherical robot dynamics // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2015. Vol. 60. No. 10. P. 2762–2767. <https://doi.org/10.1109/TAC.2015.2404512>
24. Ohsawa T. Geometric kinematic control of a spherical rolling robot // *Journal of Nonlinear Science*. 2019. P. 1–25. <https://doi.org/10.1007/s00332-019-09568-x>
25. Otani T., Urakubo T., Maekawa S., Tamaki H., Tada Y. Position and attitude control of a spherical rolling robot equipped with a gyro // 9th IEEE International Workshop on Advanced Motion Control. 2006. P. 416–421. <https://doi.org/10.1109/AMC.2006.1631695>
26. Svinin M., Hosoe Sh. Motion planning algorithms for a rolling sphere with limited contact area // *IEEE Transactions on Robotics*. 2008. Vol. 24. No. 3. P. 612–625. <https://doi.org/10.1109/TRO.2008.921568>
27. Svinin M., Morinaga A., Yamamoto M. An analysis of the motion planning problem for a spherical rolling robot driven by internal rotors // 2012 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. 2012. P. 414–419. <https://doi.org/10.1109/IROS.2012.6386077>
28. Svinin M., Morinaga A., Yamamoto M. On the dynamic model and motion planning for a class of spherical rolling robots // 2012 IEEE International Conference on Robotics and Automation. 2012. P. 3226–3231. <https://doi.org/10.1109/ICRA.2012.6224795>
29. Svinin M., Morinaga A., Yamamoto M. On the dynamic model and motion planning for a spherical rolling robot actuated by orthogonal internal rotors // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2013. Vol. 18. Nos. 1–2. P. 126–143. <https://doi.org/10.1134/S1560354713010097>
30. Sugiyama Y., Hirai S. Crawling and jumping by a deformable robot // *Experimental Robotics IX* / Eds.: M.H. Ang, O. Khatib. Vol. 21. Berlin: Springer, 2006. P. 281–291. https://doi.org/10.1007/11552246_27
31. Tao Y., Hanxu S., Qingxuan J., Wei Zh. Path following control of a spherical robot rolling on an inclined plane // *Sensors and Transducers*. 2013. Vol. 21. P. 42–47.
32. Математическое Моделирование в УрФУ. Движение шара с тремя внутренними двигателями-маховиками по прямой. <https://youtu.be/kUta7x1hB-o>
33. Математическое Моделирование в УрФУ. Движение шара с тремя внутренними двигателями по окружности. https://youtu.be/I8BvP84_YcI
34. Математическое Моделирование в УрФУ. Движение шара с тремя внутренними двигателями по траектории «слалом». <https://youtu.be/aHbboXhw1ZY>

35. Математическое Моделирование в УрФУ. Движение шара с тремя внутренними двигателями вдоль клотоиды. <https://youtu.be/-r566MX3keg>
36. Математическое Моделирование в УрФУ. Движение шара с тремя внутренними двигателями вдоль астроиды. <https://youtu.be/7mo-XR0QebI>
37. Математическое Моделирование в УрФУ. Анимация движения шара по плоскости без проскальзывания. <https://youtu.be/9PVqnH1Ap9A>

Поступила в редакцию 27.06.2019

Митюшов Евгений Александрович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра теоретической механики, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.

E-mail: mityushov-e@mail.ru

Мисюра Наталья Евгеньевна, к. ф.-м. н., доцент, кафедра теоретической механики, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.

E-mail: n_misura@mail.ru

Берестова Светлана Александровна, д. ф.-м. н., доцент, заведующая кафедрой теоретической механики, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.

E-mail: s.a.berestova@urfu.ru

Цитирование: Е. А. Митюшов, Н. Е. Мисюра, С. А. Берестова. Кватернионная модель программного управления движением шара Чаплыгина // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2019. Т. 29. Вып. 3. С. 408–421.

E. A. Mityushov, N. E. Misyura, S. A. Berestova

Quaternion model of programmed control over motion of a Chaplygin ball

Keywords: quaternions, control, nonholonomic connection, geometric dynamics, smooth movement, spherical robot.

MSC2010: 70Q05, 34H05, 93C15

DOI: [10.20537/vm190310](https://doi.org/10.20537/vm190310)

This paper deals with the problem of program control of the motion of a dynamically asymmetric balanced ball on the plane using three flywheel motors, provided that the ball rolls without slipping. The center of mass of the mechanical system coincides with the geometric center of the ball. Control laws are found to ensure the motion of the ball along the basic trajectories (line and circle), as well as along an arbitrarily given piecewise smooth trajectory on the plane. In this paper, we propose a quaternion model of ball motion. The model does not require using the traditional trigonometric functions. Kinematic equations are written in the form of linear differential equations eliminating the disadvantages associated with the use of Euler angles. The solution of the problem is carried out using the quaternion function of time, which is determined by the type of trajectory and the law of motion of the point of contact of the ball with the plane. An example of ball motion control is given and a visualization of the ball–flywheel system motion in a computer algebra package is presented.

REFERENCES

1. Bolotin S.V. The problem of optimal control of a Chaplygin ball by internal rotors, *Nelin. Dinam.*, 2012, vol. 8, no. 4, pp. 837–852 (in Russian). <https://doi.org/10.20537/nd1204011>
2. Borisov A.V., Kilin A.A., Mamaev I.S. How to control the Chaplygin sphere using rotors, *Mobil'nye roboty: robot-koleso i robot-shar* (Mobile robots: robot wheel and robot ball), Eds.: A.V. Borisov, I. S. Mamaev, Yu. L. Karavaev. Moscow–Izhevsk: Institute of Computer Science, 2013, pp. 131–168 (in Russian).
3. Borisov A.V., Mamaev I.S. *Dinamika tverdogo tela* (Rigid body dynamics), Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics, 2001, 384 p.
4. Borisov A.V., Kilin A.A., Mamaev I.S. How to control the Chaplygin sphere using rotors, *Nelin. Dinam.*, 2012, vol. 8, no. 2, pp. 289–307 (in Russian). <https://doi.org/10.20537/nd1202006>
5. Borisov A.V., Kilin A.A., Mamaev I.S. How to control the Chaplygin ball using rotors. II, *Nelin. Dinam.*, 2013, vol. 9, no. 1, pp. 59–76 (in Russian). <https://doi.org/10.20537/nd1301006>
6. Golubev Yu.F. Quaternion algebra in rigid body kinematics, *Keldysh Institute Preprints*, 2013, no. 39, 23 p. (In Russian). <http://mi.mathnet.ru/eng/ipmp1789>
7. Mashtakov A.P., Sachkov Yu.L. Extremal trajectories and the asymptotics of the Maxwell time in the problem of the optimal rolling of a sphere on a plane, *Sbornik: Mathematics*, 2011, vol. 202, no. 9, pp. 1347–1371. <https://doi.org/10.1070/SM2011v202n09ABEH004190>
8. Pavlovskii V.E., Terekhov G.P. Control of the mobile spherical information robot with three orthogonal flywheels, *Spetstekhnika i Svyaz'*, 2012, no. 3, pp. 19–24 (in Russian). <https://elibrary.ru/item.asp?id=17878482>
9. Terekhov G.P. Control of the ball with three wheels on orthogonal axes, *Sovremennaya mekhatronika. Sbornik nauchnykh trudov Vserossiiskoi nauchnoi shkoly* (Modern mechatronics. Collection of scientific papers of the All-Russian Scientific School), Orekhovo–Zuyevo, 2011, pp. 126–130 (in Russian).
10. Terekhov G.P., Pavlovsky V.E. Control of the spherical robot by means of fly-wheels, *Keldysh Institute Preprints*, 2017, no. 16, 31 p. (In Russian). <http://mi.mathnet.ru/eng/ipmp2232>
11. Chaplygin S.A. On a ball's rolling on a horizontal plane, *Mat. Sb.*, 1903, vol. 24, no. 1, pp. 139–168 (in Russian). <http://mi.mathnet.ru/eng/msb6665>

12. Furuse Y., Hirano T., Ishikawa M. Dynamical analysis of spherical mobile robot utilizing off-centered internal mass distribution, *IFAC-PapersOnLine*, 2015, vol. 48, issue 13, pp. 176–181.
<https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2015.10.235>
13. Gajbhiye S., Banavar R.N. Geometric approach to tracking and stabilization for a spherical robot actuated by internal rotors, 2015, arXiv: 1511.00428v2 [cs.SY].
<https://arxiv.org/abs/1511.00428v2>
14. Gajbhiye S., Banavar R.N. Geometric tracking control for a nonholonomic system: a spherical robot, *IFAC-PapersOnLine*, 2016, vol. 49, issue 18, pp. 820–825.
<https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2016.10.267>
15. Ishikawa M., Kitayoshi R., Sugie T. Volvot: A spherical mobile robot with eccentric twin rotors, *2011 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics*, 2011, pp. 1462–1467.
<https://doi.org/10.1109/ROBIO.2011.6181496>
16. Joshi V.A., Banavar R.N. Motion analysis of a spherical mobile robot, *Robotica*, 2009, vol. 27, issue 3, pp. 343–353. <https://doi.org/10.1017/S0263574708004748>
17. Joshi V.A., Banavar R.N., Hippalgaonkar R. Design and analysis of a spherical mobile robot, *Mechanism and Machine Theory*, 2010, vol. 45, issue 2, pp. 130–136.
<https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2009.04.003>
18. Kilin A.A. The dynamics of Chaplygin ball: the qualitative and computer analysis, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2001, vol. 6, no. 3, pp. 291–306.
<https://doi.org/10.1070/RD2001v006n03ABEH000178>
19. Kilin A.A., Pivovarova E.N. Chaplygin top with a periodic gyrostatic moment, *Russian Journal of Mathematical Physics*, 2018, vol. 25, no. 4, pp. 509–524.
<https://doi.org/10.1134/S1061920818040088>
20. Kilin A.A., Pivovarova E.N., Ivanova T.B. Spherical robot of combined type: dynamics and control, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2015, vol. 20, no. 6, pp. 716–728.
<https://doi.org/10.1134/S1560354715060076>
21. Madhushani T.W.U., Maithripala D.H.S., Wijayakulasooriya J.V., Berg J.M. Semi-globally exponential trajectory tracking for a class of spherical robots, *Automatica*, 2017, vol. 85, pp. 327–338.
<https://doi.org/10.1016/j.automatica.2017.07.060>
22. Morinaga A., Svinin M., Yamamoto M. A motion planning strategy for a spherical rolling robot driven by two internal rotors, *IEEE Transactions on Robotics*, 2014, vol. 30, no. 4, pp. 993–1002.
<https://doi.org/10.1109/TRO.2014.2307112>
23. Muralidharan V., Mahindrakar A.D. Geometric controllability and stabilization of spherical robot dynamics, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, vol. 60, no. 10, pp. 2762–2767.
<https://doi.org/10.1109/TAC.2015.2404512>
24. Ohsawa T. Geometric kinematic control of a spherical rolling robot, *Journal of Nonlinear Science*, 2019, pp. 1–25. <https://doi.org/10.1007/s00332-019-09568-x>
25. Otani T., Urakubo T., Maekawa S., Tamaki H., Tada Y. Position and attitude control of a spherical rolling robot equipped with a gyro, *9th IEEE International Workshop on Advanced Motion Control*, 2006, pp. 416–421. <https://doi.org/10.1109/AMC.2006.1631695>
26. Svinin M., Hosoe Sh. Motion planning algorithms for a rolling sphere with limited contact area, *IEEE Transactions on Robotics*, 2008, vol. 24, no. 3, pp. 612–625.
<https://doi.org/10.1109/TRO.2008.921568>
27. Svinin M., Morinaga A., Yamamoto M. An analysis of the motion planning problem for a spherical rolling robot driven by internal rotors, *2012 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2012, pp. 414–419. <https://doi.org/10.1109/IROS.2012.6386077>
28. Svinin M., Morinaga A., Yamamoto M. On the dynamic model and motion planning for a class of spherical rolling robots, *2012 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2012, pp. 3226–3231. <https://doi.org/10.1109/ICRA.2012.6224795>
29. Svinin M., Morinaga A., Yamamoto M. On the dynamic model and motion planning for a spherical rolling robot actuated by orthogonal internal rotors, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2013, vol. 18, nos. 1–2, pp. 126–143. <https://doi.org/10.1134/S1560354713010097>

30. Sugiyama Y., Hirai S. Crawling and jumping by a deformable robot, *Experimental Robotics IX*, Eds.: M.H. Ang, O. Khatib, vol. 21, Berlin: Springer, 2006, pp. 281–291.
https://doi.org/10.1007/11552246_27
31. Tao Y., Hanxu S., Qingxuan J., Wei Zh. Path following control of a spherical robot rolling on an inclined plane, *Sensors and Transducers*, 2013, vol. 21, pp. 42–47.
32. Movement of the ball with three internal flywheel engines in a straight line, *Mathematical Modeling in UrFU*. <https://youtu.be/kUta7xlhB-o>
33. Movement of the ball with three internal engines around the circle, *Mathematical Modeling in UrFU*. https://youtu.be/I8BvP84_YcI
34. Movement of the ball with three internal engines on the trajectory of “slalom”, *Mathematical Modeling in UrFU*. <https://youtu.be/aHbboXhw1ZY>
35. Movement of the ball with three internal engines along the clothoid, *Mathematical Modeling in UrFU*. <https://youtu.be/-r566MX3keg>
36. Movement of the ball with three internal engines along the astroid, *Mathematical Modeling in UrFU*. <https://youtu.be/7mo-XR0QebI>
37. Animation of a ball moving on a plane without slipping, *Mathematical Modeling in UrFU*. <https://youtu.be/9PVqnH1Ap9A>

Received 27.06.2019

Mityushov Evgenii Aleksandrovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Theoretical Mechanics, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.

E-mail: mityushov-e@mail.ru

Misyura Natal'ya Evgen'evna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Theoretical Mechanics, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.

E-mail: n_misura@mail.ru

Berestova Svetlana Aleksandrovna, Doctor of Physics and Mathematics, Head of the Department of Theoretical Mechanics, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.

E-mail: s.a.berestova@urfu.ru

Citation: E. A. Mityushov, N. E. Misyura, S. A. Berestova. Quaternion model of programmed control over motion of a Chaplygin ball, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, issue 3, pp. 408–421.