МАТЕМАТИКА 2019. Т. 29. Вып. 3. С. 332–340.

УДК 517.928.2

© *К. Г. Кожобеков, Д. А. Турсунов*

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ, КОГДА ПРЕДЕЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ИМЕЕТ НЕРЕГУЛЯРНУЮ ОСОБУЮ ТОЧКУ

В статье исследуются асимптотические поведения решений сингулярно возмущенных двухточечных краевых задач на отрезке. Объектом исследования является линейное неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с малым параметром при старшей производной искомой функций. Особенности рассматриваемых задач состоят в том, что малый параметр находится при старшей производной искомой функций и соответствующее невозмущенное дифференциальное уравнение первого порядка имеет иррегулярную особую точку на левом конце отрезка. На концах отрезка ставятся краевые условия. Рассматриваются две задачи, в одном функция перед первой производной искомой функций не положительна на рассматриваемом отрезке, а во втором не отрицательна. Асимптотические разложения задач строятся классическим методом пограничных функций Вишика–Люстерника–Васильевой–Иманалиева. Однако напрямую этот метод применить невозможно, так как внешнее решение имеет особенность. Мы сначала убираем эту особенность из внешнего решения, затем применяем метод пограничных функций. Построенные асимптотические разложения обоснованы с помощью принципа максимума, т. е. получены оценки для остаточных функций.

Ключевые слова: нерегулярная особая точка, сингулярное возмущение, асимптотика, метод погранфункций, задача Дирихле, пограничная функция, малый параметр.

DOI: 10.20537/vm190304

Введение

Краевые задачи для дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных, т. е. для сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений занимают особое место в математике. К ним непосредственно сводятся многие задачи физики, техники, химии и других наук. Во многих случаях построить явное решение сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений невозможно, следовательно, проблема построения полных асимптотических разложений решений для сингулярно возмущенных задач является актуальной. Для построения асимптотических решений сингулярно возмущенных уравнений разработаны различные методы [1–4]. Особый интерес в теории сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений представляют задачи с особыми точками (регулярная особая точка, нерегулярная особая точка, точка поворота и т. п.). Сингулярно возмущенные задачи с различными особенностями исследованы в работах [5–18] и в др. В работах [1, 5–7] исследованы случаи, когда соответствующее невозмущенное уравнение имеет регулярную особую точку. Как сказано в [8], общая теория асимптотических разложений дифференциальных уравнений с нерегулярными особыми точками является одним из замечательных достижений в исследованиях, так как она показала свою мощность в приложениях. В [9] построены асимптотические решения сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений с иррегулярной особой точкой в случае кратного спектра предельной матрицы в комплексной плоскости, а в работе [10] исследуются фуксовые линейные дифференциальные уравнения с иррегулярными особенностями. В [11] представлена математическая модель, описывающая поведение электромагнитного поля внутри проводящего резонатора с включениями металлических частиц малых размеров. При этом одна из предельных задач оказывается нестационарной задачей в области с особыми точками на границе. Для описания асимптотики решений применяется метод составных асимптотических разложений, а в [12] рассматривается применение метода продолжения решения по параметру к решению начальной задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с несколькими предельными особыми точками. Исследование показало, что сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения с нерегулярными особыми точками мало изучены.

Наша цель — построить полное асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенных задач с нерегулярными особыми точками. Здесь мы рассматриваем сингулярно возмущенное линейное неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с двухточечными краевыми условиями, когда соответствующее невозмущенное (предельное, $\varepsilon = 0$) уравнение имеет нерегулярную особую точку. Предлагаемый в настоящей работе алгоритм может быть эффективно применен при исследовании асимптотических поведении решений сингулярно возмущенных задач с особыми точками.

§ 1. Постановка задачи 1

Рассмотрим краевую задачу

$$\varepsilon y''_\varepsilon(x) - x^2 p(x) y'_\varepsilon(x) - q(x) y_\varepsilon(x) = f(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{1}$$

$$y_\varepsilon(0) = a, \quad y_\varepsilon(1) = b, \tag{2}$$

где $0 < \varepsilon$ — малый параметр, $p(x),\ q(x) > 0$, $x \in [0,1]$, $p, q, f \in C^\infty[0,1]$, $a, b = \text{const}$.

Задача (1)–(2) имеет единственное решение, требуется построить равномерное асимптотическое разложение решения $y_\varepsilon(x)$ на отрезке $x \in [0,1]$, когда $\varepsilon \to 0$.

Отметим, что соответствующее невозмущенное (предельное) уравнение ($\varepsilon = 0$)

$$x^2 p(x) y'_0(x) + q(x) y_0(x) = -f(x)$$

имеет нерегулярную особую точку $x = 0$.

Далее, если в функциях присутствует символ суммирования, он означает их асимптотическое разложение.

§ 2. Основной результат задачи 1

Решение соответствующего невозмущенного уравнения ($\varepsilon = 0$) в точке $x = 0$ имеет особенность. Поэтому мы выберем постоянную интегрирования так, чтобы $y_0(x) \in C^\infty[0,1]$ (см. [1, с. 143]). В таком случае решение соответствующего невозмущенного уравнения представимо в виде

$$y_0(x) = -\frac{f(x)}{q(x)} + e^{-Q(x)} \int_0^x \left(\frac{f(s)}{q(s)}\right)' e^{Q(s)} ds,$$

где $Q(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{q(t)}{t^2 p(t)}\, dt.$

Заметим, что это решение $y_0(x)$ не удовлетворяет краевым условиям (2).

Чтобы решить эту проблему, асимптотическое решение задачи (1), (2) ищем в виде:

$$y_\varepsilon(x) = V_\varepsilon(x) + \Pi_\mu(t) + Z_\varepsilon(\tau), \tag{3}$$

где

$$V_\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(x), \quad \Pi_\mu(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \pi_k(t), \quad t = x/\mu,$$

$$Z_\varepsilon(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k z_k(\tau), \quad \tau = (1-x)/\varepsilon, \quad \mu = \sqrt{\varepsilon}.$$

Тогда

$$y'_\varepsilon(x) = V'_\varepsilon(x) + \frac{1}{\mu}\Pi'_\mu(t) - \frac{1}{\varepsilon}Z'_\varepsilon(\tau), \tag{4}$$

$$y''_\varepsilon(x) = V''_\varepsilon(x) + \frac{1}{\mu^2}\Pi''_\mu(t) + \frac{1}{\varepsilon^2}Z''_\varepsilon(\tau). \tag{5}$$

Подставляя соотношения (3)–(5) в равенство (1), получаем:

$$\varepsilon V''_\varepsilon(x) - x^2 p(x) V'_\varepsilon(x) - q(x)V_\varepsilon(x) = f(x). \tag{6}$$

Потребуем, чтобы $v_k(x) \in C^\infty[0,1]$. Для $\Pi_\mu(t)$ получаем уравнение

$$\Pi''_\mu(t) - \mu t^2 p(\mu t)\Pi'_\mu(t) - q(\mu t)\Pi_\mu(t) = 0. \tag{7}$$

Потребуем, чтобы функции $\pi_k(t)$ удовлетворяли краевым условиям

$$\pi_0(0) = a - v_0(0), \quad \pi_{2k-1}(0) = 0, \quad \pi_{2k}(0) = -v_k(0), \quad \lim_{t\to\infty} \pi_{k-1}(t) = 0, \quad k \in \mathbb{N};$$

а для уравнения

$$Z''_\varepsilon(\tau) + (1-\varepsilon\tau)^2 p(1-\varepsilon\tau)Z'_\varepsilon(\tau) - \varepsilon q(1-\varepsilon\tau)Z_\varepsilon(\tau) = 0 \tag{8}$$

подставим краевые условия в виде

$$z_0(0) = b - v_0(1), \;\; z_k(0) = -v_k(1), \;\; \lim_{\tau\to\infty} z_k(\tau) = 0.$$

Из (6) имеем:

$$x^2 p(x) v'_0(x) + q(x)v_0(x) = -f(x),$$
$$x^2 p(x) v'_k(x) + q(x)v_k(x) = v''_{k-1}(x), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Отсюда получаем

$$v_0(x) = -\frac{f(x)}{q(x)} + e^{-Q(x)} \int_0^x \left(\frac{f(s)}{q(s)}\right)' e^{Q(s)} ds, \quad v_0 \in C^\infty[0,1],$$

$$v_k(x) = \frac{v''_{k-1}(x)}{q(x)} - e^{-Q(x)} \int_0^x \left(\frac{v''_{k-1}(s)}{q(s)}\right)' e^{Q(s)} ds, \quad v_k \in C^\infty[0,1], \quad k \in \mathbb{N},$$

где $Q(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{q(t)}{t^2 p(t)}\, dt.$

Перейдем теперь к исследованию задачи (7). Имеем:

$$\pi''_0(t) - q(0)\pi_0(t) = 0, \; t \in (0,\infty), \quad \pi_0(0) = a - v_0(0), \quad \lim_{t\to\infty} \pi_0(t) = 0; \tag{9}$$

$$\begin{gathered} \pi''_k(t) - q(0)\pi_k(t) = G_k(t, \pi_0, \pi'_0, \dots, \pi_{k-1}, \pi'_{k-1}), \; t \in (0,\infty), \quad \lim_{t\to\infty} \pi_k(t) = 0, \; k \in \mathbb{N}, \\ \pi_k(0) = 0 \text{ при } k = 2n-1, \quad \pi_k(0) = -v_n(0) \text{ при } k = 2n, \; n \in \mathbb{N}; \end{gathered} \tag{10}$$

здесь правые части $G_k(t,\pi_0,\pi_0',\dots,\pi_{k-1},\pi_{k-1}')$ линейно зависят от предыдущих $\pi_0,\pi_1,\dots,$ π_{k-1}, от производных первого порядка этих функций и полиномиально зависят от t.

Задачи (9), (10) имеют единственные решения [1], представимые в виде

$$\pi_0(t)=(a-v_0(0))e^{-\sqrt{q(0)}t},\quad \pi_{2k}(t)=-v_k(0)e^{-\sqrt{q(0)}t}+te^{-\sqrt{q(0)}t}H_{2k}(t),$$
$$\pi_{2k-1}(t)=te^{-\sqrt{q(0)}t}H_{2k-1}(t),\quad k\in\mathbb{N},$$

где $H_k(t)$ — полиномы. Заметим, что $\pi_k(t)\in C^\infty[0,\infty),\ k\in\mathbb{N}_0$.

Из (8) получаем

$$z_0''(\tau)+p(1)z_0'(\tau)=0,\ \tau\in(0,\infty),\quad z_0(0)=b-v_0(1),\ \lim_{\tau\to\infty}z_0(\tau)=0; \tag{11}$$

$$\begin{gathered} z_k''(\tau)+p(1)z_k'(\tau)=\widetilde{G}_k(\tau,z_0,z_0',\dots,z_{k-1},z_{k-1}'),\ \tau\in(0,\infty),\\ z_k(0)=-v_k(1),\quad \lim_{\tau\to\infty}z_k(\tau)=0,\quad k\in\mathbb{N}; \end{gathered} \tag{12}$$

здесь правые части $\widetilde{G}_k(\tau,z_0,z_0',\dots,z_{k-1},z_{k-1}')$ линейно зависят от предыдущих $z_0,z_1,\dots,$ z_{k-1}, от производных первого порядка этих функций и полиномиально зависят от τ.

Задачи (11), (12) имеют единственные решения [1], представимые в виде

$$z_0(\tau)=(b-v_0(1))e^{-p(1)\tau},\ z_k(\tau)=-v_k(1)e^{-p(1)\tau}+\tau e^{-p(1)\tau}\widetilde{H}_k(\tau),\quad k\in\mathbb{N},$$

где $\widetilde{H}_k(\tau)$ — полиномы. Заметим, что $z_k(\tau)\in C^\infty[0,\infty)$, $k\in\mathbb{N}_0$.

Обоснование асимптотического разложения. Оценим остаточный член: пусть

$$y_\varepsilon(x)=V_{\varepsilon,n}(x)+\Pi_{\mu,2n}(t)+Z_{\varepsilon,n}(\tau)+R_{\varepsilon,n}(x),$$

где $V_{\varepsilon,n}(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\varepsilon^k v_k(x),\ \Pi_{\mu,2n}(t)=\sum\limits_{k=0}^{2n}\mu^k\pi_k(t),\ Z_{\varepsilon,n}(\tau)=\sum\limits_{k=0}^{n}\varepsilon^k z_k(\tau),\ R_{\varepsilon,n}(x)$ — остаточная функция. Тогда для остаточной функций получим следующую задачу:

$$\begin{gathered}\varepsilon R_{\varepsilon,n}''(x)-x^2p(x)R_{\varepsilon,n}'(x)-q(x)R_{\varepsilon,n}(x)=O(\varepsilon^{n+1/2}),\ \varepsilon\to0,\quad 0\leqslant x\leqslant1,\\ R_{\varepsilon,n}(0)=O(e^{-1/\varepsilon}),\quad R_{\varepsilon,n}(1)=O(e^{-1/\sqrt{\varepsilon}}),\quad \varepsilon\to0.\end{gathered}$$

Из теоремы 26.2 [1] следует, что $R_{\varepsilon,n}(x)=O(\varepsilon^{n+1/2})$, $\varepsilon\to0$, $0\leqslant x\leqslant1$.

Отсюда следует справедливость теоремы.

Теорема 1. *Для решения задачи* (1)–(2) *справедливо асимптотическое разложение*

$$y_\varepsilon(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(x)+\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\pi_k(t)+\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k z_k(\tau),$$

а также предельное соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to0}y_\varepsilon(x)=y_0(x),\quad x\in(0,1).$$

Пример 1. Пусть $p(x)\equiv1$, $q(x)\equiv1$, $f(x)\equiv1$, $a=1$, $b=4$, тогда $v_0(x)=-1$, $v_k(x)\equiv0$, $k\in\mathbb{N}$, и

$$y_\varepsilon(x)=-1+2e^{-t}+\sqrt{\varepsilon}e^{-t}t(c_0t^2+c_1t+c_2)+5e^{-\tau}+\varepsilon c_3\tau e^{-\tau}(\tau-1)+O(\varepsilon^2),\quad \varepsilon\to0,$$

где $t=x/\sqrt{\varepsilon}$, $\tau=(1-x)/\varepsilon$, $c_j=\text{const}$, $j=0,1,2,3$.

§ 3. Постановка задачи 2

Рассмотрим теперь краевую задачу

$$\varepsilon y_\varepsilon''(x) + x^2 p(x) y_\varepsilon'(x) - q(x) y_\varepsilon(x) = f(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{13}$$

$$y_\varepsilon(0) = a, \quad y_\varepsilon(1) = b, \tag{14}$$

где также $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $p(x),\ q(x) > 0$, $x \in [0,1]$, $p, q, f \in C^\infty[0,1]$, $a, b = \mathrm{const}$.

Задача (13)–(14) тоже имеет единственное решение, требуется построить равномерное асимптотическое разложение решения $y_\varepsilon(x)$ на отрезке $x \in [0,1]$, когда $\varepsilon \to 0$. Эта задача решается легче, чем предыдущая, так как $0 \leqslant x^2 p(x),\ x \in [0,1]$, и в окрестности точки $x = 1$ нет никакой особенности.

§ 4. Основной результат задачи 2

Асимптотическое решение задачи (13), (14) ищем в виде

$$y_\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k y_k(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \pi_k(t), \tag{15}$$

где $\mu = \sqrt{\varepsilon}$, $x = \mu t$.

Подставляя выражение (15) в (13) получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \Big(\varepsilon y_k''(x) + x^2 p(x) y_k'(x) - q(x) y_k(x)\Big) + \\ + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \Big(\pi_k''(t) + \mu t^2 p(\mu t)\pi_k'(t) - q(\mu t)\pi_k(t)\Big) = f(x). \tag{16}$$

Отсюда для $y_k(x)$ имеем

$$x^2 p(x) y_0'(x) - q(x) y_0(x) = f(x), \quad y_0(1) = b,$$

$$x^2 p(x) y_k'(x) - q(x) y_k(x) = -y_{k-1}''(x), \quad y_k(1) = 0, \quad k \in \mathbb{N},$$

или

$$y_0(x) = b e^{Q(x)} - e^{Q(x)} \int_1^x \frac{f(s)}{s^2 p(s)} e^{-Q(s)} ds, \quad y_k(x) = e^{Q(x)} \int_1^x \frac{y_{k-1}''(s)}{s^2 p(s)} e^{-Q(s)} ds, \quad k \in \mathbb{N},$$

где $Q(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{q(t)}{t^2 p(t)}\, dt$.

При $x \to 0$ имеем $y_k(x) = O\left(x^\alpha e^{-c/x}\right)$, $k \in \mathbb{N}$, $0 < c = q(0)/p(0)$, $\alpha = \mathrm{const}$.

Из (16) для $\pi_k(t)$ получим

$$\pi_0''(t) - q(0)\pi_0(t) = 0, \quad \pi_0(0) = a, \quad \lim_{t\to\infty} \pi_0(t) = 0, \tag{17}$$

$$\pi_k''(t) - q(0)\pi_k(t) = G(\pi_{k-1}, \pi_{k-1}', \ldots, \pi_0', \pi_0, t), \quad \pi_k(0) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} \pi_k(t) = 0. \tag{18}$$

Как нам известно [1], решения задач (17), (18) существуют, единственны и экспоненциально стремятся к нулю, т. е. имеют вид

$$\pi_0(t) = a e^{-\sqrt{q(0)}t}, \qquad \pi_k(t) = P_{2k}(t) e^{-\sqrt{q(0)}t},$$

где $P_{2k}(t)$ — полиномы степени $2k$, $P_{2k}(0) = 0$.

Нами определены все члены асимптотического разложения (15). Перейдем теперь к оценке остаточного члена этого асимптотического разложения.

Обоснование разложения (15). Рассмотрим остаточную функцию

$$R_{\varepsilon,n}(x) = y_\varepsilon(x) - y_{\varepsilon,n}(x),$$

где $y_{\varepsilon,n}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \varepsilon^k y_k(x) + \sum\limits_{k=0}^{2n} \mu^k \pi_k(t)$.

Тогда, для остаточной функции $R_{\varepsilon,n}(x)$ получим следующую задачу:

$$\varepsilon R''_{\varepsilon,n}(x) + x^2 p(x) R'_{\varepsilon,n}(x) - q(x) R_{\varepsilon,n}(x) = \Phi(t, x, \varepsilon), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$R_{\varepsilon,n}(0) = 0, \quad R_{\varepsilon,n}(1) = O\left(e^{-1/\sqrt{\varepsilon}}\right), \quad \varepsilon \to 0,$$

где $\Phi(t, x, \varepsilon) = -\varepsilon^{n+1} u''_n(x) - \varepsilon^{n+1/2} \pi'_{2n}(t)$.

Нетрудно заметить, что $\Phi(t, x, \varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1/2})$, когда $\varepsilon \to 0$, $t \in [0, \varepsilon^{-1/2}]$, $x \in [0, 1]$. Применяя теорему 26.4 [1], имеем

$$R_{\varepsilon,n}(x) = O\left(\varepsilon^{n+1/2}\right), \quad \varepsilon \to 0, \quad x \in [0, 1].$$

Нами доказана

Теорема 2. *Для решения задачи* (13), (14) *справедливо асимптотическое разложение* (15), *а также предельное соотношение*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} y_\varepsilon(x) = y_0(x), \quad x \in (0, 1].$$

Заключение. Методом пограничных функций построены полные асимптотические разложения решений задач Дирихле для сингулярно возмущенных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, когда соответствующие невозмущенные уравнения имеют нерегулярные особые точки. Построенные разложения решений являются асимптотическими в смысле Эрдей, когда $\varepsilon \to 0$. Получены оценки для остаточных членов, т. е. асимптотические разложения обоснованы.

Финансирование. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке МОиН Кыргызской Республики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильин А.М., Данилин А.Р. Асимптотические методы в анализе. М.: Физматлит, 2009. 248 с.
2. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981.
3. Fruchard A., Schäfke R. Composite asymptotic expansions. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2013. https://doi.org/10.1007/978-3-642-34035-2
4. Nayfeh A.H. Introduction to perturbation techniques. New York, 1993.
5. Бобочко В.Н. Нестабильная дифференциальная точка поворота в теории сингулярных возмущений // Известия вузов. Математика. 2005. Вып. 4. С. 8–17. http://mi.mathnet.ru/ivm32
6. Алымкулов К., Халматов А.А. Метод погранфункций для решения модельного уравнения Лайтхилла с регулярной особой точкой // Математические заметки. 2012. Т. 92. Вып. 6. С. 819–824. http://mi.mathnet.ru/mz10147
7. Алымкулов К., Асылбеков Т.Д., Долбеева С.Ф. Обобщение метода погранфункций для решения краевой задачи для бисингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка // Математические заметки. 2013. Т. 94. Вып. 4. С. 484–487. https://doi.org/10.4213/mzm10317

8. Sibuya Y. Global theory of a second order linear ordinary differential equation with a polynomial coefficient. Elsevier, 1975.
9. Яковец В.П., Чорнэнька (Головченко) О.В. Построение асимптотических решений сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений с иррегулярной особой точкой в случае кратного спектра предельной матрицы // Нелинейные колебания. 2008. Т. 11. № 1. С. 128–144.
10. Вьюгин И.В. Проблема Римана–Гильберта для скалярных фуксовых уравнений и родственные задачи // Успехи математических наук. 2011. Т. 66. Вып. 1(397). С. 37–64. http://mi.mathnet.ru/umn9405
11. Кориков Д.В., Пламеневский Б.А. Асимптотика решений стационарной и нестационарной систем Максвелла в области с малыми отверстиями // Алгебра и анализ. 2016. Т. 28. № 4. С. 102–170. http://mi.mathnet.ru/aa1504
12. Кузнецов Е.Б., Леонов С.С. Параметризация задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с предельными особыми точками // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017. Т. 57. № 6. С. 934–957. https://doi.org/10.7868/S0044466917060102
13. Алымкулов К., Турсунов Д.А. Об одном методе построения асимптотических разложений бисингулярно возмущенных задач // Известия вузов. Математика. 2016. № 12. С. 3–11. http://mi.mathnet.ru/ivm9180
14. Tursunov D.A. The asymptotic solution of the three-band bisingularly problem // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2017. Vol. 38. Issue 3. P. 542–546. https://doi.org/10.1134/S1995080217030258
15. Турсунов Д.А. Асимптотическое решение линейных бисингулярных задач с дополнительным пограничным слоем // Известия вузов. Математика. 2018. Т. 3. С. 70–78. http://mi.mathnet.ru/ivm9340
16. Турсунов Д.А., Эркебаев У.З., Турсунов Э.А. Асимптотика решения задачи Дирихле для кольца с квадратичными ростами на границах // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2016. Вып. 2 (48). С. 73–81. http://mi.mathnet.ru/iimi335
17. Турсунов Д.А., Эркебаев У.З. Асимптотика решения задачи Дирихле для бисингулярно возмущенного уравнения в кольце // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25. Вып. 4. С. 517–525. https://doi.org/10.20537/vm150408
18. Турсунов Д.А. Асимптотика решения задачи Коши при нарушении устойчивости точки покоя в плоскости «быстрых движений» // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 54. С. 46–57. https://doi.org/10.17223/19988621/54/4

Поступила в редакцию 11.05.2019

Кожобеков Кудайберди Гапаралиевич, к. ф.-м. н., доцент, старший научный сотрудник, Ошский государственный университет, 723500, Кыргызстан, г. Ош, ул. Ленина, 331.
E-mail: kudayberdi.kozhobekov@mail.ru

Турсунов Дилмурат Абдиллажанович, д. ф.-м. н., профессор, Ошский государственный университет, 723500, Кыргызстан, г. Ош, ул. Ленина, 331.
Филиал Российского государственного социального университета в городе Ош, 723506, Кыргызстан, г. Ош, ул. Карасуйская, 161.
E-mail: tdaosh@gmail.com

Цитирование: К. Г. Кожобеков, Д. А. Турсунов. Асимптотика решения краевой задачи, когда предельное уравнение имеет нерегулярную особую точку // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2019. Т. 29. Вып. 3. С. 332–340.

K. G. Kozhobekov, D. A. Tursunov

Asymptotics of the solution to the boundary-value problem when the limit equation has an irregular singular point

Keywords: irregular singular point, singular perturbation, asymptotic behavior, methods of boundary layer functions, Dirichlet problem, boundary function, small parameter.

MSC2010: 34E05, 34E10, 34E20, 34B05

DOI: 10.20537/vm190304

This article studies the asymptotic behavior of the solutions of singularly perturbed two-point boundary value-problems on an interval. The object of the study is a linear inhomogeneous ordinary differential second-order equation with a small parameter with the highest derivative of the unknown function. The special feature of the problem is that the small parameter is found at the highest derivative of the unknown function and the corresponding unperturbed first-order differential equation has an irregular singular point at the left end of the segment. At the ends of the segment, boundary conditions are imposed. Two problems are considered: in one of them the function in front of the first derivative of the unknown function is nonpositive on the segment considered, and in the second it is nonnegative. Asymptotic expansions of the problems are constructed by the classical method of Vishik–Lyusternik–Vasilyeva–Imanaliev boundary functions. However, this method cannot be applied directly, since the external solution has a singularity. We first remove this singularity from the external solution, and then apply the method of boundary functions. The constructed asymptotic expansions are substantiated using the maximum principle, i.e., estimates for the residual functions are obtained.

Funding. The research was funded partially by Ministry of Education and Science of the Kyrgyz Republic.

REFERENCES

1. Il'in A.M., Danilin A.R. *Asimptoticheskie metody v analize* (Asymptotic methods in analysis), Moscow: Fizmatlit, 2009, 248 p.
2. Lomov S.A. *Introduction to the general theory of singular perturbations*, Providence, Rhode Island: AMS, 1992.
3. Fruchard A., Schäfke R. *Composite asymptotic expansions*, Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2013. https://doi.org/10.1007/978-3-642-34035-2
4. Nayfeh A.H. *Introduction to perturbation techniques*, New York, 1993.
5. Bobochko V.N. An unstable differential turning point in the theory of singular perturbations, *Russian Mathematics*, 2005, vol. 49, no. 4, pp. 6–14. https://zbmath.org/?q=an:1134.34034
6. Alymkulov K., Khalmatov A.A. A boundary function method for solving the model lighthill equation with a regular singular point, *Mathematical Notes*, 2012, vol. 92, issue 5-6, pp. 751–755. https://doi.org/10.1134/S0001434612110193
7. Alymkulov K., Asylbekov T.D., Dolbeeva S.F. Generalization of the boundary function method for solving boundary-value problems for bisingularly perturbed second-order differential equations, *Mathematical Notes*, 2013, vol. 94, issue 3-4, pp. 451–454. https://doi.org/10.1134/S0001434613090162
8. Sibuya Y. *Global theory of a second order linear ordinary differential equation with a polynomial coefficient*, Elsevier, 1975.
9. Yakovets V.P., Chornenka (Golovchenko) O.V. The construction of asymptotic solutions of a singularly perturbed linear system of differential equations with an irregular singular point in the case where the main matrix has multiple spectrum, *Neliniini kolyvannya*, 2008, vol. 11, no. 1, pp. 128–144 (in Ukrainian).
10. Vyugin I.V. Riemann–Hilbert problem for scalar Fuchsian equations and related problems, *Russian Mathematical Surveys*, 2011, vol. 66, no. 1, pp. 35–62. https://doi.org/10.1070/RM2011v066n01ABEH004727

11. Korikov D.V., Plamenevskii B.A. Asymptotics of solutions of the stationary and nonstationary Maxwell systems in a domain with small cavities, *St. Petersburg Math. J.*, 2017, vol. 28, no. 4, pp. 507–554. https://doi.org/10.1090/spmj/1462
12. Kuznetsov E.B., Leonov S.S. Parametrization of the Cauchy problem for systems of ordinary differential equations with limiting singular points, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2017, vol. 57, issue 6, pp. 931–952. https://doi.org/10.1134/S0965542517060094
13. Alymkulov K., Tursunov D.A. A method for constructing asymptotic expansions of bisingularly perturbed problems, *Russian Mathematics*, 2016, vol. 60, issue 12, pp. 1–8. https://doi.org/10.3103/S1066369X1612001X
14. Tursunov D.A. The asymptotic solution of the three-band bisingularly problem, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2017, vol. 38, issue 3, pp. 542–546. https://doi.org/10.1134/S1995080217030258
15. Tursunov D.A. Asymptotic solution of linear bisingular problems with additional boundary layer, *Russian Mathematics*, 2018, vol. 62, issue 3, pp. 60–67. https://doi.org/10.3103/S1066369X18030088
16. Tursunov D.A., Erkebaev U.Z., Tursunov E.A. Asymptotics of the Dirichlet problem solution for a ring with quadratic growths on the boundaries, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2016, issue 2 (48), pp. 73–81 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/iimi335
17. Tursunov D.A., Erkebaev U.Z. Asymptotics of the Dirichlet problem solution for a bisingular perturbed equation in the ring, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2015, vol. 25, issue 4, pp. 517–525 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm150408
18. Tursunov D.A. Asymptotics of the Cauchy problem solution in the case of instability of a stationary point in the plane of "rapid motions", *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Matematika i Mekhanika*, 2018, no. 54, pp. 46–57 (in Russian). https://doi.org/10.17223/19988621/54/4

Received 11.05.2019

Kozhobekov Kudayberdi Gaparalievich, Senior Researcher, Osh State University, ul. Lenina, 331, Osh, 723500, Kyrgyzstan.
E-mail: kudayberdi.kozhobekov@mail.ru

Tursunov Dilmurat Abdillajanovich, Professor, Osh State University, ul. Lenina, 331, Osh, 723500, Kyrgyzstan.
Osh Branch of the Russian State Social University, ul. Karasuiskaya, 161, Osh, 723506, Kyrgyzstan.
E-mail: tdaosh@gmail.com

Citation: K. G. Kozhobekov, D. A. Tursunov. Asymptotics of the solution to the boundary-value problem when the limit equation has an irregular singular point, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, issue 3, pp. 332–340.