МАТЕМАТИКА 2018. Т. 28. Вып. 3

УДК 517.6

© *А. Г. Ченцов, А. А. Ченцов, А. Н. Сесекин*

ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ В ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧЕ «НА УЗКИЕ МЕСТА» И ОПТИМИЗАЦИЯ ТОЧКИ СТАРТА

Рассматривается одна «неаддитивная» задача маршрутизации перемещений, являющаяся обобщением известной задачи «на узкие места». Предполагается заданным параметр в виде положительного числа, степень которого определяет вес соответствующего этапа системы перемещений. Варьированием параметра можно сделать доминирующими начальные или, напротив, финальные этапы перемещения. Вариант агрегирования стоимостей с упомянутыми весами соответствует идейно постановке задачи «на узкие места», но открывает возможности исследования новых постановок задач маршрутизации с ограничениями. Предполагается, однако, что постановка осложнена зависимостью стоимостей от списка заданий и включает ограничения в виде условий предшествования. Кроме того, в интересах оптимизации допускается произвольный выбор начального состояния из заданного априори множества. Для построения решения используется аппарат широко понимаемого динамического программирования. Исследуется возможность реализации глобального экстремума с любой степенью точности в условиях, когда множество возможных начальных состояний не является конечным.

Ключевые слова: маршрутная оптимизация, динамическое программирование, оптимизация точки старта.

DOI: 10.20537/vm180306

Введение

Предметом исследования является задача маршрутизации перемещений с неаддитивным агрегированием затрат, а точнее, обобщенный вариант известной задачи на «узкие места». По постановке допускается выбор начального состояния (базы процесса) в пределах заданного и не обязательно конечного множества. Предполагается, что функции стоимости допускают зависимость от списка заданий, которые не выполнены на текущий момент времени; имеются также условия предшествования. Постановки такого рода могут возникать в самых различных инженерных приложениях. Сейчас отметим только одну возможность.

Имеется в виду задача о дезактивации местности в условиях аварийных ситуаций, подобных Чернобылю и Фукусиме, когда в результате разлета фрагментов радиационного оборудования возникает система излучающих элементов, которые надо демонтировать, т. е. (попросту) выключить. Эту операцию предполагается осуществлять последовательными циклами с применением устройства, оснащенного электронным оборудованием с определенным пороговым уровнем. Этот уровень не должен превышаться на каждом из циклов; при этом по завершению каждого цикла предполагается осуществление дезактивации устройства с тем, чтобы по возможности сбросить накопленную (при выполнении цикла) радиоактивность. Характерной особенностью является зависимость функций стоимости (здесь доз радиации) от списка заданий: «светят» те и только те источники, которые не были демонтированы на текущий момент. Возможны также и условия предшествования (например, один излучающий объект может располагаться на конструкции, также являющейся излучающим элементом; в такой ситуации «верхний» объект следует демонтировать раньше «нижнего», играющего роль опоры).

Прототипом исследуемой постановки является хорошо известная труднорешаемая задача коммивояжера (ЗК или TSP в англоязычной литературе); см. [1–6] и др. Большинство исследований в области решения ЗК относятся к «аддитивной» версии, где стоимости перемещений между «городами» суммируются; отметим, однако, работу [7]. Полезно иметь в виду то, что рассматриваемая ниже постановка содержит существенные отличия от ЗК не только количественного, но и качественного характера.

§ 1. Общие обозначения и определения

Используется стандартная теоретико-множественная символика (кванторы, связки и др.); $\varnothing$ — пустое множество, $\triangleq$ — равенство по определению, def заменяет фразу «по определению». Семейством называется множество, все элементы которого сами являются множествами. Для двух любых объектов p и q через $\{p;q\}$ обозначаем (непустое) множество, содержащее p,q и не содержащее никаких других элементов. Если x — какой-либо объект, то $\{x\} \triangleq \{x;x\}$ есть синглетон, содержащий x. Множества являются объектами, а потому для всяких объектов α и β в виде $(\alpha,\beta) \triangleq \{\{\alpha\};\{\alpha;\beta\}\}$ имеем [8] упорядоченную пару (УП) с первым элементом α и вторым элементом β. Если z есть УП (каких-то объектов), то через $\mathrm{pr}_1(z)$ и $\mathrm{pr}_2(z)$ обозначаем соответственно первый и второй элементы z, однозначно определяемые условием $z = (\mathrm{pr}_1(z), \mathrm{pr}_2(z))$. Если же x, y и z — три объекта, то $(x,y,z) \triangleq ((x,y),z)$ есть триплет с первым элементом x, вторым элементом y и третьим элементом z. В этой связи напомним [9], что для всяких трех множеств A, B и C $A \times B \times C \triangleq (A \times B) \times C$.

Если H — множество, то $\mathcal{P}(H)$ есть def семейство всех подмножеств (п/м) H и $\mathcal{P}'(H) \triangleq \mathcal{P}(H)\setminus\{\varnothing\}$ (семейство всех непустых п/м H), а $\mathrm{Fin}(H)$ есть соответственно семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(H)$, т. е. семейство всех непустых конечных п/м H. Для любых двух непустых множеств A и B полагаем, что B^A есть def множество всех отображений из A в B; при $h \in B^A$ и $a \in A$ в виде $h(a) \in B$ имеем значение h в точке a. Если же (для $h \in B^A$, где A и B — непустые множества) $C \in \mathcal{P}(A)$, то $h^1(C) \triangleq \{h(x) : x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$; ясно, что $(C \neq \varnothing) \Rightarrow (h^1(C) \neq \varnothing)$. Для произвольных непустых множеств A, B, C и D, а также функции $h \in D^{A\times B\times C}$ определены значения $h(\mu,\nu) \in D$ при $\mu \in A \times B$ и $\nu \in C$; при этом также иногда используем обозначение $h(\mu_1,\mu_2,\nu)$ вместо $h(\mu,\nu)$, где $\mu_1 \triangleq \mathrm{pr}_1(\mu)$ и $\mu_2 \triangleq \mathrm{pr}_2(\mu)$.

Как обычно, $\mathbb{R}$ — вещественная прямая, $\mathbb{R}_+ \triangleq \{\xi \in \mathbb{R} \,|\, 0 \leqslant \xi\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R})$ и $\mathbb{N} \triangleq \{1;2;\ldots\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}_+)$ (натуральный ряд); кроме того, полагаем, что $\mathbb{N}_0 \triangleq \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0;1;2;\ldots\}$ и при $p \in \mathbb{N}_0$ и $q \in \mathbb{N}_0$

$$\overline{p,q} \triangleq \{k \in \mathbb{N}_0 \,|\, (p \leqslant k)\&(k \leqslant q)\}$$

(если $q < p$, то $\overline{p,q} = \varnothing$; в частности, $\overline{1,0} = \varnothing$). Непустому конечному множеству K сопоставляется его мощность $|K| \in \mathbb{N}$; это позволяет ввести $\overline{1,|K|} = \{s \in \mathbb{N} \,|\, s \leqslant |K|\}$ и непустое множество $(\mathrm{bi})[K]$ всех биекций [10, с. 87] «промежутка» $\overline{1,|K|}$ на K; в частности, $(\mathrm{bi})[K]$ определено для $K \in \mathrm{Fin}(S)$, где S — множество. Перестановкой непустого множества A называется [10, с. 87] всякая биекция A на себя; если α — перестановка A, то определена перестановка α^{-1} множества A, обратная к α:

$$\alpha(\alpha^{-1}(a)) = \alpha^{-1}(\alpha(a)) = a \quad \forall a \in A.$$

Как обычно, полагаем, что $|\varnothing| \triangleq 0$.

Если S — непустое множество, то через $\mathcal{R}_+[S]$ обозначаем множество всех функций из S в $\mathbb{R}_+$, т. е. $\mathcal{R}_+[S] \triangleq (\mathbb{R}_+)^S$.

§ 2. Постановка задачи

В дальнейшем фиксируем непустое множество X и его п/м $X^0 \in \mathcal{P}'(X)$. Элементы X^0 будут использоваться в роли начальных состояний. Кроме того, фиксируем $N \in \mathbb{N}$ такое, что $N \geqslant 2$, а также (непустые) множества

$$M_1 \in \mathrm{Fin}(X), \quad \ldots, \quad M_N \in \mathrm{Fin}(X), \tag{2.1}$$

относительно которых будут предполагаться выполненными условия

$$(M_p \cap M_q = \varnothing \quad \forall p \in \overline{1,N}\,\forall q \in \overline{1,N}\setminus\{p\})\&(X^0 \cap M_j = \varnothing \quad \forall j \in \overline{1,N}). \tag{2.2}$$

Множества (2.1) будем именовать мегаполисами; условия (2.2) типичны для многих приложений. Наряду с мегаполисами (2.1) фиксируем отношения [8]

$$\mathbb{M}_1 \in \mathcal{P}'(M_1 \times M_1), \quad \ldots, \quad \mathbb{M}_N \in \mathcal{P}'(M_N \times M_N).$$

Если $j \in \overline{1,N}$, то $\mathbb{M}_j$ определяет множество всех допустимых УП $z \in M_j \times M_j$ «городов», которые могут использоваться в виде пункта прибытия $\mathrm{pr}_1(z)$ в мегаполис M_j и пункта отправления $\mathrm{pr}_2(z)$ (из данного мегаполиса). Дело в том, что предметом нашего рассмотрения являются процессы вида

$$\begin{aligned} x^0 \longrightarrow (\mathrm{pr}_1(z_1) \in M_{\alpha(1)} \rightsquigarrow \mathrm{pr}_2(z_1) \in M_{\alpha(1)}) \longrightarrow \ldots \\ \longrightarrow (\mathrm{pr}_1(z_N) \in M_{\alpha(N)} \rightsquigarrow \mathrm{pr}_2(z_N) \in M_{\alpha(N)}), \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$z_1 \in \mathbb{M}_{\alpha(1)}, \ldots, z_N \in \mathbb{M}_{\alpha(N)}, \tag{2.4}$$

где $x^0 \in X^0$, α — перестановка $\overline{1,N}$, выбор которой может быть стеснен условиями предшествования. Итак, согласно (2.3) предметом нашего выбора является УП маршрут–трасса, для которой (2.4) играет роль условий согласования фрагментов (трассы).

Всюду в дальнейшем $\mathbb{P} \triangleq (\mathrm{bi})[\overline{1,N}]$ есть множество маршрутов, среди которых далее будут выделяться допустимые по предшествованию, для определения которых зафиксируем множество $\mathbf{K} \in \mathcal{P}(\overline{1,N} \times \overline{1,N})$. Итак, $\mathbf{K}$ есть заданное множество УП, элементами которых являются индексы из $\overline{1,N}$. Относительно $\mathbf{K}$ будем предполагать, что

$$\forall \mathbf{K}_0 \in \mathcal{P}'(\mathbf{K})\, \exists\, z_0 \in \mathbf{K}_0;\ \mathrm{pr}_1(z_0) \neq \mathrm{pr}_2(z) \quad \forall z \in \mathbf{K}_0.$$

Тогда [11, (3.12),(3.14)] $\mathbf{A} \triangleq \{\alpha \in \mathbb{P} | \alpha^{-1}(\mathrm{pr}_1(z)) < \alpha^{-1}(\mathrm{pr}_2(z)) \quad \forall z \in \mathbf{K}\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{P})$; итак, допустимые по предшествованию маршруты существуют (содержательно, условия предшествования состоят в том, что при $(i,j) \in \mathbf{K}$ посещение M_i должно предшествовать посещению M_j). Наряду с $\mathbf{A}$ введем частичные допустимые маршруты, имея в виду задачи о посещении не всех, вообще говоря, мегаполисов. Для этого прежде всего введем оператор вычеркивания (заданий из списка), полагая, что $\mathfrak{N} \triangleq \mathcal{P}'(\overline{1,N})$ (семейство всех непустых п/м $\overline{1,N}$). Тогда

$$\mathbf{I} : \mathfrak{N} \longrightarrow \mathfrak{N} \tag{2.5}$$

определяется [12, часть 2] условиями: при $K \in \mathfrak{N}$

$$\mathbf{I}(K) \triangleq K \backslash \{\mathrm{pr}_2(z) : z \in \Xi[K]\},$$

где $\Xi[K] \triangleq \{z \in \mathbf{K} \,|\, (\mathrm{pr}_1(z) \in K) \& (\mathrm{pr}_2(z) \in K)\}$. В терминах оператора (2.5) определяем при $K \in \mathfrak{N}$ множество допустимых (по вычеркиванию) маршрутов посещения мегаполисов M_k, $k \in K$; а именно:

$$(\mathbf{I} - \mathrm{bi})[K] \triangleq \{\alpha \in (\mathrm{bi})[K] \,|\, \alpha(l) \in \mathbf{I}(\alpha^1(\overline{l,|K|}))\ \forall l \in \overline{1,|K|}\}.$$

Тогда $\mathbf{A} = (\mathbf{I} - \mathrm{bi})[\overline{1,N}]$. Отметим, однако, что, как видно из (2.3) и (2.4), выбор маршрута (перестановки индексов) не определяет еще течение процесса. В этой связи введем в рассмотрение трассы или траектории, согласованные с маршрутами.

Полагаем, что $\forall j \in \overline{1,N}$

$$(\mathfrak{M}_j \triangleq \{\mathrm{pr}_1(z) : z \in \mathbb{M}_j\}) \& (\mathbf{M}_j \triangleq \{\mathrm{pr}_2(z) : z \in \mathbb{M}_j\}). \tag{2.6}$$

Кроме того, условимся относительно следующего обозначения:

$$\mathfrak{M} \triangleq \bigcup_{s=1}^{N} \mathfrak{M}_s.$$

Разумеется $\mathbf{M}_1 \subset M_1, \ldots, \mathbf{M}_N \subset M_N$. Пусть, кроме того

$$\mathbb{X} \triangleq X^0 \bigcup \mathfrak{M};$$

получили непустое п/м X. Наконец полагаем, что

$$\mathbf{X} \triangleq X^0 \cup (\bigcup_{j=1}^{N} \mathbf{M}_j).$$

Тогда $\mathbf{X} \in \mathcal{P}'(X)$. Через $\mathbf{Z}$ обозначаем далее множество всех кортежей $(z_i)_{i\in\overline{0,N}} : \overline{0,N} \longrightarrow \mathbb{X}\times\mathbf{X}$. Если же $K \in \mathfrak{N}$, то через $\mathbb{Z}_K$ обозначаем множество всех кортежей

$$(z_i)_{i\in\overline{0,|K|}} : \overline{0,|K|} \longrightarrow \mathbb{X} \times \mathbf{X}.$$

Тогда, кстати, $\mathbf{Z} = \mathbb{Z}_{\overline{1,N}}$. Полагаем при $x \in X^0$ и $\alpha \in \mathbb{P}$

$$\mathfrak{Z}_\alpha[x] \triangleq \{(z_i)_{i\in\overline{0,N}} \in \mathbf{Z} \,|\, (z_0 = (x,x))\&(z_t \in \mathbb{M}_{\alpha(t)} \quad \forall t \in \overline{1,N})\}; \tag{2.7}$$

получаем свойство $\mathfrak{Z}_\alpha[x] \in \mathrm{Fin}(\mathbf{Z})$. Аналогичным образом, при $x \in \mathbf{X}$, $K \in \mathfrak{N}$ и $\alpha \in (\mathrm{bi})[K]$

$$Z(x,K,\alpha) \triangleq \{(z_i)_{i\in\overline{0,|K|}} \in \mathbb{Z}_K \,|\, (z_0 = (x,x))\&(z_t \in \mathbb{M}_{\alpha(t)} \quad \forall t \in \overline{1,|K|})\}; \tag{2.8}$$

ясно, что $Z(x,K,\alpha) \in \mathrm{Fin}(\mathbb{Z}_K)$. С учетом (2.7) получаем при $x \in X^0$ в виде

$$\mathbf{D}[x] \triangleq \{(\alpha,\mathbf{z}) \in \mathbf{A} \times \mathbf{Z} \,|\, \mathbf{z} \in \mathfrak{Z}_\alpha[x]\} = \bigcup_{\alpha\in\mathbf{A}} (\{\alpha\} \times \mathfrak{Z}_\alpha[x]). \tag{2.9}$$

Аналогичным образом полагаем при $x \in \mathbf{X}$ и $K \in \mathfrak{N}$

$$\mathbf{D}_K[x] \triangleq \{(\alpha,\mathbf{z}) \in (\mathbf{I}-\mathrm{bi})[K] \times \mathbb{Z}_K \,|\, \mathbf{z} \in Z(x,K,\alpha)\} = \bigcup_{\alpha\in(\mathbf{I}-\mathrm{bi})[K]} (\{\alpha\} \times Z(x,K,\alpha)). \tag{2.10}$$

Из (2.9) имеем, конечно, что при $x \in X^0$ $\mathbf{D}[x]$ есть непустое конечное множество, а точнее $\mathbf{D}[x] \in \mathrm{Fin}(\mathbf{A} \times \mathbf{Z})$. В свою очередь, из (2.10) следует при $x \in \mathbf{X}$ и $K \in \mathfrak{N}$, что $\mathbf{D}_K[x] \in$ $\in \mathrm{Fin}((\mathbf{I}-\mathrm{bi})[K] \times \mathbb{Z}_K)$. В виде (2.9) и (2.10) введены соответствующие множества допустимых решений (ДР) в задачах с фиксированным начальным состоянием.

Полагаем в дальнейшем заданными функции

$$\mathbf{c} \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X} \times \mathbb{X} \times \mathfrak{N}], \quad \mathbf{c}_1 \in \mathcal{R}_+[\mathbb{X} \times \mathbf{X} \times \mathfrak{N}], \quad \ldots, \quad \mathbf{c}_N \in \mathcal{R}_+[\mathbb{X} \times \mathbf{X} \times \mathfrak{N}],$$

а также числовой параметр $\mathbf{a} \in \mathbb{R}_+\backslash\{0\}$. Если $\alpha \in \mathbb{P}$ и $\mathbf{z} \in \mathbf{Z}$, то полагаем, что

$$\mathfrak{B}_\alpha[\mathbf{z}|\mathbf{a}] \triangleq \max_{t\in\overline{0,N-1}} \mathbf{a}^t[\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}(t)),\mathrm{pr}_1(\mathbf{z}(t+1)),\alpha^1(\overline{t+1,N}))+c_{\alpha(t+1)}(\mathbf{z}(t+1),\alpha^1(\overline{t+1,N}))], \tag{2.11}$$

получая неотрицательное число. Если $x \in X^0$, то в текущих терминах (2.11) получаем задачу

$$\mathfrak{B}_\alpha[\mathbf{z}|\mathbf{a}] \longrightarrow \min, \quad (\alpha,\mathbf{z}) \in \mathbf{D}[x], \tag{2.12}$$

которой сопоставляется конечное значение

$$V[x] \triangleq \min_{(\alpha,\mathbf{z})\in\mathbf{D}[x]} \mathfrak{B}_\alpha[\mathbf{z}|\mathbf{a}] = \min_{\alpha\in\mathbf{A}} \min_{\mathbf{z}\in\mathfrak{Z}_\alpha[x]} \mathfrak{B}_\alpha[\mathbf{z}|\mathbf{a}] \in \mathbb{R}_+ \tag{2.13}$$

и (в силу конечности $\mathbf{D}[x]$) непустое множество

$$(\mathrm{SOL})[x] \triangleq \{(\alpha,\mathbf{z}) \in \mathbf{D}[x] \,|\, \mathfrak{B}_\alpha[\mathbf{z}|\mathbf{a}] = V[x]\}.$$

Наряду с (2.12) возникает следующая задача оптимизации точки старта:

$$V[x] \longrightarrow \inf, \quad x \in X^0. \tag{2.14}$$

Тогда
$$\mathbb{V} \triangleq \inf_{x \in X^0} V[x] \in \mathbb{R}_+ \tag{2.15}$$
(см. (2.13)). Задачам (2.12), (2.14) можно сопоставить их локальные аналоги. При $x \in \mathbf{X}$, $K \in \mathfrak{N}$, $\alpha \in (\mathrm{bi})[K]$ и $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}_K$ полагаем, что
$$\mathfrak{B}_K^{(\alpha)}[\mathbf{z}|\mathbf{a}] \triangleq \max_{t \in \overline{0, |K|-1}} \mathbf{a}^t[\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}(t)), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}(t+1)), \alpha^1(\overline{t+1, |K|})) + \\ + c_{\alpha(t+1)}(\mathbf{z}(t+1), \alpha^1(\overline{t+1, |K|}))]. \tag{2.16}$$
При $x \in \mathbf{X}$ и $K \in \mathfrak{N}$ рассматриваем (частичную) задачу
$$\mathfrak{B}_K^{(\alpha)}[\mathbf{z}|\mathbf{a}] \longrightarrow \min, \quad (\alpha, \mathbf{z}) \in \mathbf{D}_K[x];$$
данной задаче сопоставляется значение (экстремум)
$$v(x, K) \triangleq \min_{(\alpha, \mathbf{z}) \in \mathbf{D}_K[x]} \mathfrak{B}_K^{(\alpha)}[\mathbf{z}|\mathbf{a}] = \min_{\alpha \in (\mathbf{I}-\mathbf{bi})[K]} \min_{\mathbf{z} \in Z(x, K, \alpha)} \mathfrak{B}_K^{(\alpha)}[\mathbf{z}|\mathbf{a}] \in \mathbb{R}_+. \tag{2.17}$$
Мы полагаем также, что
$$v(x, \varnothing) \triangleq 0 \quad \forall x \in \mathbf{X}. \tag{2.18}$$
Таким образом, в (2.17), (2.18) определена функция оптимального результата
$$v : \mathbf{X} \times \mathcal{P}(\overline{1, N}) \longrightarrow \mathbb{R}_+. \tag{2.19}$$
Заметим, что, в частности, определены значения $v(x, \overline{1, N}) \in \mathbb{R}_+$, $x \in X^0$. При этом согласно (2.8) имеем по определению $\mathbf{Z}$, что, при $x \in X^0$ и $\alpha \in (\mathrm{bi})[\overline{1, N}]$, $\alpha \in \mathbb{P}$ и (см. (2.7), (2.8))
$$\mathfrak{Z}_\alpha[x] = Z(x, \overline{1, N}, \alpha), \tag{2.20}$$
а тогда (см. (2.7), (2.8)) получаем равенство $\mathbf{D}[x] = \mathbf{D}_{\overline{1, N}}[x]$. В свою очередь, из (2.11), (2.16) и (2.20) следует, что при $x \in X^0$, $\alpha \in \mathbb{P}$ и $\mathbf{z} \in \mathfrak{Z}_\alpha$ имеет место $\alpha \in (\mathrm{bi})[\overline{1, N}]$, $\mathbf{z} \in Z(x, \overline{1, N}, \alpha)$ и
$$\mathfrak{B}_\alpha[\mathbf{z}|\mathbf{a}] = \mathfrak{B}_{\overline{1, N}}^{(\alpha)}[\mathbf{z}|\mathbf{a}]. \tag{2.21}$$
Сравним теперь (2.13) и (2.17) при $x \in X^0$ и $K = \overline{1, N}$. Тогда (см. (2.13), (2.17), (2.20), (2.21))
$$V[x] = v(x, \overline{1, N}) \quad \forall x \in X^0. \tag{2.22}$$

§ 3. Динамическое программирование

Прежде всего отметим положение, определяющее уравнение Беллмана (имеется ввиду представление для функции v (2.19) с краевыми условиями (2.18)).

Теорема 1. *Если $x \in \mathbf{X}$ и $K \in \mathfrak{N}$, то*
$$v(x, K) = \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in \mathbb{M}_j} \sup(\{\mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(z), K) + c_j(z, K); \mathbf{a} v(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\})\}).$$
Доказательство теоремы подобно аналогичному обоснованию в [13] и по этой причине опущено в настоящем изложении.

Из (2.22) и теоремы 1 следует, в частности, что
$$V[x] = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1, N})} \min_{z \in \mathbb{M}_j} \sup(\{\mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(z), \overline{1, N}) + c_j(z, \overline{1, N}); \mathbf{a}\, v(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1, N} \setminus \{j\})\}).$$

Заметим здесь, что из теоремы 1 следует в случае $x \in \mathbf{X}$ и $n \in \overline{1,N}$, что

$$v(x,\{n\}) = \min_{z \in \mathbb{M}_n} \sup(\{\mathbf{c}(x,\mathrm{pr}_1(z),\{n\}) + c_n(z,\{n\}); \mathbf{a}\, v(\mathrm{pr}_2(z),\varnothing)\}) = \\ = \min_{z \in \mathbb{M}_n} [\mathbf{c}(x,\mathrm{pr}_1(z),\{n\}) + c_n(z,\{n\})] \tag{3.1}$$

(учитываем в (3.1) свойство, отмеченное в [11, замечание 3.2]).

Рассмотрим, следуя [13], схему построения слоев функции v, в рамках которой не предусматривается (при ограничениях в виде условий предшествования) насчитывание всего массива значений функции v. Сначала введем т. н. существенные списки заданий. Итак, пусть

$$\mathfrak{G} \triangleq \{K \in \mathfrak{N} \,|\, \forall z \in \mathbf{K} \ \ (\mathrm{pr}_1(z) \in K) \Rightarrow (\mathrm{pr}_2(z) \in K)\}; \tag{3.2}$$

множества — элементы (3.2) — играют роль упомянутых существенных списков. Полагаем также, что $\mathfrak{G}_s \triangleq \{K \in \mathfrak{G} \,|\, s = |K|\} \ \forall s \in \overline{1,N}$. В виде $\mathfrak{G}_k$, $k \in \overline{1,N}$, имеем разбиение $\mathfrak{G}$ (3.2). При этом $\mathfrak{G}_N = \{\overline{1,N}\}$ и $\mathfrak{G}_1 = \{\{t\} \ : \ t \in \overline{1,N} \setminus \mathbf{K}_1\}$, где $\mathbf{K}_1 \triangleq \{\mathrm{pr}_1(z) \ : \ z \in \mathbf{K}\}$. Кроме того (см. [14])

$$\mathfrak{G}_{s-1} = \{K \setminus \{t\} \ : \ K \in \mathfrak{G}_s, \ t \in \mathbf{I}(K)\} \quad \forall s \in \overline{2,N}.$$

Получили рекуррентную процедуру $\mathfrak{G}_N \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathfrak{G}_1$. Далее, конструируются множества D_0, $D_1, \ldots, D_N$, именуемые слоями пространства позиций. Полагаем, что $D_0 \triangleq \widetilde{\mathcal{M}} \times \{\varnothing\}$, где

$$\widetilde{\mathcal{M}} \triangleq \bigcup_{j \in \overline{1,N} \setminus \mathbf{K}_1} \mathbf{M}_j,$$

а также $D_N \triangleq X^0 \times \{\overline{1,N}\}$. Тем самым определены крайние слои пространства позиций. Для построения промежуточных слоев полагаем сначала при $s \in \overline{1,N-1}$ и $K \in \mathfrak{G}_s$, что

$$J_s(K) \triangleq \{j \in \overline{1,N} \setminus K \,|\, \{j\} \cup K \in \mathfrak{G}_{s+1}\}, \quad \mathcal{M}_s[K] \triangleq \bigcup_{j \in J_s(K)} \mathbf{M}_j, \quad \mathbb{D}_s[K] \triangleq \mathcal{M}_s[K] \times \{K\}. \tag{3.3}$$

В терминах (3.3) определяем при $s \in \overline{1,N-1}$ множество D_s:

$$D_s \triangleq \bigcup_{K \in \mathfrak{G}_s} \mathbb{D}_s[K].$$

Тогда [14] $D_0 \neq \varnothing$, $D_1 \neq \varnothing, \ldots, D_N \neq \varnothing$. При этом $D_s \subset \mathbf{X} \times \mathfrak{G}_s \ \forall s \in \overline{1,N}$. Как следствие получаем, что

$$D_s \subset \mathbf{X} \times \mathcal{P}(\overline{1,N}) \quad \forall s \in \overline{0,N}.$$

С учетом этого и определяем систему сужений функции Беллмана: если $s \in \overline{0,N}$, то

$$v_s \ : \ D_s \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

определяем условиями: $v_s(x,K) \triangleq v(x,K) \ \forall (x,K) \in D_s$. Тогда из (2.18) имеем, в частности, что $v_0(x,K) = 0 \ \forall x \in \widetilde{\mathcal{M}}$. Итак, функция v_0 тождественно равна нулю на множестве D_0. Далее из (2.22) имеем по определению D_N, что

$$V[x] = v_N(x,\overline{1,N}) \quad \forall x \in X^0. \tag{3.4}$$

Заметим, кроме того, что [11, (6.11)]

$$(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) \in D_{s-1} \quad \forall s \in \overline{1,N} \ \forall (x,K) \in D_s \ \forall j \in \mathbf{I}(K) \ \forall z \in \mathbb{M}_j. \tag{3.5}$$

Из теоремы 1 и (3.5) вытекает, что при $s \in \overline{1, N}$ преобразование функции v_{s-1} в v_s определяется условиями

$$v_s(x, K) = \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in \mathbb{M}_j} \sup(\{\mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(z), K) + c_j(z, K);\ \mathbf{a} v_{s-1}(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\})\}) \qquad \forall (x, K) \in D_s. \tag{3.6}$$

Посредством (3.6) определена рекуррентная процедура

$$v_0 \longrightarrow v_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow v_N. \tag{3.7}$$

В частности, из (3.4) и (3.6) следует, что

$$V[x] = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1,N})} \min_{z \in \mathbb{M}_j} \sup(\{\mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(z), \overline{1, N}) + c_j(z, \overline{1, N});\ \mathbf{a} v_{N-1}(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1, N} \setminus \{j\})\}) \qquad \forall x \in X^0. \tag{3.8}$$

Таким образом, задача (2.14) сводится к минимизации значений (3.8). Иными словами, после нахождения функции v_N задача (2.14) сводится к следующей:

$$v_N(x, \overline{1, N}) \longrightarrow \inf, \quad x \in X^0. \tag{3.9}$$

Исходный экстремум $\mathbb{V}$ в (2.15) определяется выражением

$$\mathbb{V} = \inf_{x \in X^0} v_N(x, \overline{1, N}).$$

Если X^0 конечное множество, то $\mathbb{V}$ получается непосредственным перебором $v_N(x, \overline{1, N})$, $x \in X^0$, в виде наименьшего из упомянутых значений. Итак, в случае конечного множества X^0 мы получаем на основе (3.7), (3.9) алгоритм определения глобального экстремума $\mathbb{V}$. Данная процедура может использоваться в следующих двух случаях.

1) На основе информации о значении $\mathbb{V}$ можно организовать тестирование эвристик. Имеется в виду ситуация, когда в случае конечного множества X^0 наряду с $\mathbb{V}$ определяется точка $x^0 \in X^0$ со свойством $v_N(x^0, \overline{1, N}) = \mathbb{V}$. Предлагается организовать «соревнование» эвристических решений из $\mathbf{D}[x^0]$ с выявлением наиболее близкого по результату к $\mathbb{V}$. Данное построение имеет смысл в случае, когда N достаточно велико в том смысле, что «полная» процедура решения по методу ДП (см., например, [13, § 4]) не может быть реализована в силу недостаточности ресурсов памяти компьютера, в то время как процедура определения экстремума [13, (4.17)–(4.19)] с перезаписью слоев функции Беллмана уже «работает» при данном N. Такая возможность была отмечена в [15]; имеется в виду некоторая экономия памяти компьютера при осуществлении вышеупомянутой перезаписи слоев.

2) Построение при найденных $\mathbb{V}$ и $x^0 \in X^0$ со свойством $V[x^0] = v_N(x^0, \overline{1, N}) = \mathbb{V}$ (оптимального) ДП $(\alpha_0, \mathbf{z}_0) \in (\mathrm{SOL})[x^0]$ по «обычной», для ДП, схеме, подобной [13, (4.20)–(4.27)].

§ 4. Случай метрического пространства

Полагаем в настоящем параграфе, что X^0 оснащено метрикой ρ;

$$\rho : X^0 \times X^0 \longrightarrow \mathbb{R}_+.$$

Итак, (X^0, ρ) есть метрическое пространство. Если $x \in X^0$ и $\varepsilon \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, то полагаем, что

$$B^0_\rho(x, \varepsilon) \triangleq \{y \in X^0 \mid \rho(x, y) < \varepsilon\}.$$

Итак, введены открытые шары в X^0.

Замечание 1. Отметим один естественный вариант конструкции: на X определена метрика d, т. е. (X, d) — метрическое пространство, а ρ есть сужение d на $X^0 \times X^0$, т. е.

$$\rho(x_1, x_2) = d(x_1, x_2) \quad \forall x_1 \in X^0\ \forall x_2 \in X^0.$$

Тогда (X^0, ρ) реализуется в виде подпространства (X, d).

Будем полагать в дальнейшем, что (X^0, ρ) вполне ограничено, т. е.

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \; \exists K \in \mathrm{Fin}(X^0) : X^0 = \bigcup_{x \in K} B^0_\rho(x, \varepsilon). \tag{4.1}$$

Всюду в дальнейшем предполагается выполненным (наряду с (4.1)) следующее

Условие 1. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \; \exists \delta \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \forall x_1 \in X^0 \; \forall x_2 \in X^0$

$$(\rho(x_1, x_2) < \delta) \Rightarrow (|\mathbf{c}(x_1, y, \overline{1,N}) - \mathbf{c}(x_2, y, \overline{1,N})| < \varepsilon \quad \forall y \in \mathfrak{M}).$$

Предложение 1. *Пусть* $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$. *Пусть, кроме того,* $\delta_0 \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ *таково, что* $\forall x_1 \in X^0 \; \forall x_2 \in X^0$

$$(\rho(x_1, x_2) < \delta_0) \Rightarrow (|\mathbf{c}(x_1, y, \overline{1,N}) - \mathbf{c}(x_2, y, \overline{1,N})| < \varepsilon_0 \quad \forall y \in \mathfrak{M}). \tag{4.2}$$

Пусть, наконец, $\mathbb{K} \in \mathrm{Fin}(X^0)$ *обладает свойством*

$$X^0 = \bigcup_{x \in \mathbb{K}} B^0_\rho(x, \delta_0). \tag{4.3}$$

Тогда справедливо неравенство

$$\mathbb{V} \leqslant \min_{x \in \mathbb{K}} v_N(x, \overline{1,N}) \leqslant \mathbb{V} + \varepsilon_0. \tag{4.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\bar{x} \in X^0$. С учетом (4.3) подберем $x^0 \in \mathbb{K}$ такое, что

$$\bar{x} \in B^0_\rho(x^0, \delta_0). \tag{4.5}$$

Тогда в силу (4.2) получаем, что (см. (4.5))

$$|\mathbf{c}(\bar{x}, y, \overline{1,N}) - \mathbf{c}(x^0, y, \overline{1,N})| < \varepsilon_0 \quad \forall y \in \mathfrak{M}. \tag{4.6}$$

Учтем далее (3.4), (3.8). Заметим прежде всего, что

$$\begin{gathered}\sup(\{\mathbf{c}(x^0, \mathrm{pr}_1(z), \overline{1,N}) + c_j(z, \overline{1,N}); \mathbf{a}v_{N-1}(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1,N} \setminus \{j\})\}) < \\ < \sup(\{\mathbf{c}(\bar{x}, \mathrm{pr}_1(z), \overline{1,N}) + c_j(z, \overline{1,N}); \mathbf{a}v_{N-1}(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1,N} \setminus \{j\})\}) + \varepsilon_0 \quad \forall j \in \mathbf{I}(\overline{1,N}) \; \forall z \in \mathbb{M}_j.\end{gathered} \tag{4.7}$$

В самом деле, в силу (4.6) при $j \in \mathbf{I}(\overline{1,N})$ и $z \in \mathbb{M}_j$

$$\mathbf{c}(x^0, \mathrm{pr}_1(z), \overline{1,N}) + c_j(z, \overline{1,N}) < \mathbf{c}(\bar{x}, \mathrm{pr}_1(z), \overline{1,N}) + c_j(z, \overline{1,N}) + \varepsilon_0 \tag{4.8}$$

(учитываем то, что согласно (2.6) $\mathrm{pr}_1(z) \in \mathfrak{M}_j$, где $\mathfrak{M}_j \subset \mathfrak{M}$), тем более

$$\mathbf{c}(x^0, \mathrm{pr}_1(z), \overline{1,N}) + c_j(z, \overline{1,N}) < \sup(\{\mathbf{c}(\bar{x}, \mathrm{pr}_1(z), \overline{1,N}) + c_j(z, \overline{1,N}); \mathbf{a}v_{N-1}(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1,N} \setminus \{j\})\}) + \varepsilon_0;$$

из этого неравенства вытекает

$$\begin{gathered}\sup(\{\mathbf{c}(x^0, \mathrm{pr}_1(z), \overline{1,N}) + c_j(z, \overline{1,N}); \mathbf{a}v_{N-1}(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1,N} \setminus \{j\})\}) < \\ < \sup(\{\mathbf{c}(\bar{x}, \mathrm{pr}_1(z), \overline{1,N}) + c_j(z, \overline{1,N}); \mathbf{a}v_{N-1}(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1,N} \setminus \{j\})\}) + \varepsilon_0.\end{gathered} \tag{4.9}$$

Поскольку j и z в (4.8), (4.9) выбирались произвольно, (4.7) установлено. Из (3.4), (3.8) и (4.9) получаем, что при $l \in \mathbf{I}(\overline{1,N})$ и $\bar{z} \in \mathbb{M}_l$ имеем, что

$$v_N(x^0, \overline{1,N}) < \sup(\{\mathbf{c}(\bar{x}, \mathrm{pr}_1(\bar{z}), \overline{1,N}) + c_l(\bar{z}, \overline{1,N}); \mathbf{a}v_{N-1}(\mathrm{pr}_2(\bar{z}), \overline{1,N} \setminus \{l\})\}) + \varepsilon_0.$$

Поскольку l и $\bar{z}$ выбирались произвольно, то

$$v_N(x^0, \overline{1,N}) < \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1,N})} \min_{z \in \mathbb{M}_j} \sup(\{\mathbf{c}(\bar{x}, \mathrm{pr}_1(z), \overline{1,N}) + c_j(z, \overline{1,N}); \mathbf{a}v_{N-1}(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1,N} \setminus \{j\})\}) + \varepsilon_0.$$

С учетом (3.4) и (3.6) получаем теперь неравенство

$$v_N(x^0, \overline{1,N}) < v_N(\bar{x}, \overline{1,N}) + \varepsilon_0.$$

В связи с тем, что выбор $\bar{x}$ был произвольным, установлено, что

$$\min_{y\in\mathbb{K}} v_N(y, \overline{1,N}) < v_N(x, \overline{1,N}) + \varepsilon_0 \quad \forall x \in X^0.$$

Как следствие получаем с учетом (3.4), что при $\tilde{x} \in X^0$

$$\min_{x\in\mathbb{K}} v_N(x, \overline{1,N}) - \varepsilon_0 < V[\tilde{x}].$$

Из этого неравенства вытекает с учетом (2.15), что

$$\min_{x\in\mathbb{K}} v_N(x, \overline{1,N}) - \varepsilon_0 \leqslant \mathbb{V}. \tag{4.10}$$

В свою очередь, из (4.10) следует, что

$$\min_{x\in\mathbb{K}} v_N(x, \overline{1,N}) \leqslant \mathbb{V} + \varepsilon_0. \tag{4.11}$$

Кроме того, поскольку $\mathbb{K} \subset X^0$, имеем из (2.15), что

$$\mathbb{V} \leqslant \min_{x\in\mathbb{K}} v_N(x, \overline{1,N}).$$

Тогда из (4.11) вытекает требуемое свойство (4.4).

Аппроксимирующие задачи. Рассматриваем при $K \in \mathrm{Fin}(X^0)$ задачу

$$V[x] \longrightarrow \min, \ \ x \in K, \tag{4.12}$$

для которой

$$(\mathbf{sol})[K] \triangleq \{x^0 \in K|\ V[x^0] = \min_{x\in K} V[x]\} \neq \varnothing;$$

требуется найти $x_0 \in (\mathbf{sol})[K]$ и $(\alpha_0, \mathbf{z}_0) \in (\mathrm{SOL})[x_0]$.

Предложение 1 показывает, что (для вполне ограниченного множества X^0 и при условии 1) среди аппроксимирующих задач (4.12) есть сколько угодно близкие по результату к задаче (2.14). Ключевую роль в подборе нужных аппроксимирующих задач (4.12) играют (4.2), (4.3). В этой связи рассмотрим следующий

Алгоритм на функциональном уровне. Пусть $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}_+\setminus\{0\}$ — заданный параметр точности. Требуется указать $K \in \mathrm{Fin}(x^0)$ со свойством

$$|\min_{x\in K} V[x] - \mathbb{V}| \leqslant \varepsilon_0 \tag{4.13}$$

и отыскать $x_0 \in (\mathbf{sol})[K]$, после чего решить задачу (2.12) при $x = x_0$.

Предлагается следующая последовательность действий.

1') По заданному значению ε_0 подбираем $\delta_0 \in \mathbb{R}_+\setminus\{0\}$ со свойством (4.2) (фактически анализируются значения модуля непрерывности функций $\mathbf{c}(\cdot, y, \overline{1,N})$, $y \in \mathfrak{M}$, и δ_0 определяется из условия строгого непревышения ε_0 для всех вышеупомянутых экземпляров модуля непрерывности).

2') По найденному δ_0 отыскиваем $\mathbb{K} \in \mathrm{Fin}(X^0)$ со свойством (4.3). Данное $\mathbb{K}$ используем в качестве K в (4.13).

3') Находим $x_0 \in (\mathbf{sol})[\mathbb{K}]$, после чего рассматриваем задачу (2.12) при $x = x_0$. Мы располагаем при этом значением

$$V_0 \triangleq \min_{x\in\mathbb{K}} V[x] = \min_{x\in\mathbb{K}} v_N(x, \overline{1,N}) \in \mathbb{R}_+.$$

Данное значение может использоваться для тестирования эвристик в духе пункта 1 параграфа 3. Это тестирование требуется при условии, если надо решить задачу, в которой N достаточно велико с точки зрения построения оптимального решения задачи (2.12), но допускает определение $v_N(x_0, \overline{1,N})$ в понятной процедуре ДП с перезаписью слоев функции Беллмана.

Другой вариант алгоритма соответствует пункту 2 параграфа 3 и состоит в определении оптимального ДР.

§ 5. Вычислительный эксперимент

Задача с выделением точек входа и выхода. Алгоритм реализован в виде программы для ПЭВМ на языке программирования C++, работающей в 64-х разрядной операционной системе семейства Windows, начиная с Windows 7. Вычислительная часть программы реализована в отдельном от интерфейса пользователя потоке. Для случая решения задачи на плоскости имеется возможность графического представления маршрута и трассы и увеличения отдельных участков графика; изображение может быть сохранено в файл графического формата bmp. Исходные данные и результаты счета программы хранятся в текстовом файле специальной структуры.

Вычислительный эксперимент проводился на компьютере с центральным процессором Intel Core i7, объемом ОЗУ 64 ГБ с установленной операционной системой Windows 7 Максимальная SP1.

Заданы 33 конечных множества в виде равномерных сеток по 12 точек на окружностях. Количество адресных пар равно 33.

Множество X^0 возможных начальных позиций представлено следующими точками (4 точки): $(25, -35)$; $(95, -100)$; $(0, 0)$; $(100, 30)$. Перемещения оцениваются евклидовой нормой. Внутренние работы связаны с решением ЗК (с евклидовой матрицей расстояний) по обходу всех точек мегаполиса при выделенных пунктах прибытия и отправления.

Случай $\mathbf{a} = 1$. Общие затраты: 154.81, x_0: $(25, -35)$. Финальный пункт: УП $(-50, 80; -50, 80)$. Время вычисления: 4 час. 48 мин. 37 сек. График маршрута и трассы приведен на рис. 1.

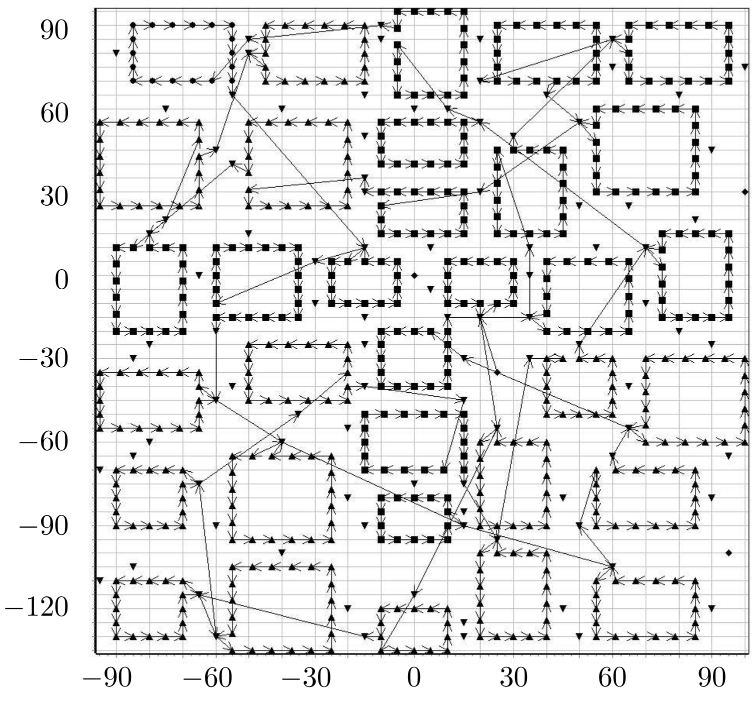

Рис. 1. Оптимальные маршрут и трасса при $\mathbf{a} = 1$

Случай $\mathbf{a} = 0.8$. Общие затраты: 84.142, x_0: $(0, 0)$. Финальный пункт: УП $(-15, 65; -15, 65)$. Время вычисления: 4 час. 7 мин. 7 сек. График маршрута и трассы приведен на рис. 2.

Случай $\mathbf{a} = 1.2$. Общие затраты: 36 599.281, x_0: $(25, -35)$. Финальный пункт: УП $(15, -30; 10, -15)$. Время вычисления: 4 час. 7 мин. 57 сек. График маршрута и трассы приведен на рис. 3.

Разные внутренние работы. Множество X^0 начальных позиций представлено следующими точками (4 точки): $(-20, 80)$; $(-90, -110)$; $(0, 0)$; $(100, 40)$. Перемещения оцениваются

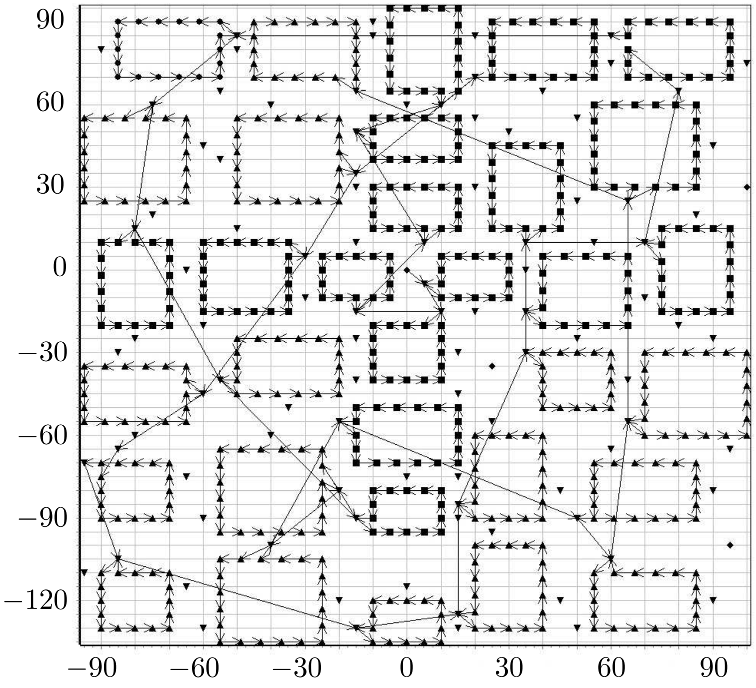

Рис. 2. Оптимальные маршрут и трасса при $\mathbf{a} = 0.8$

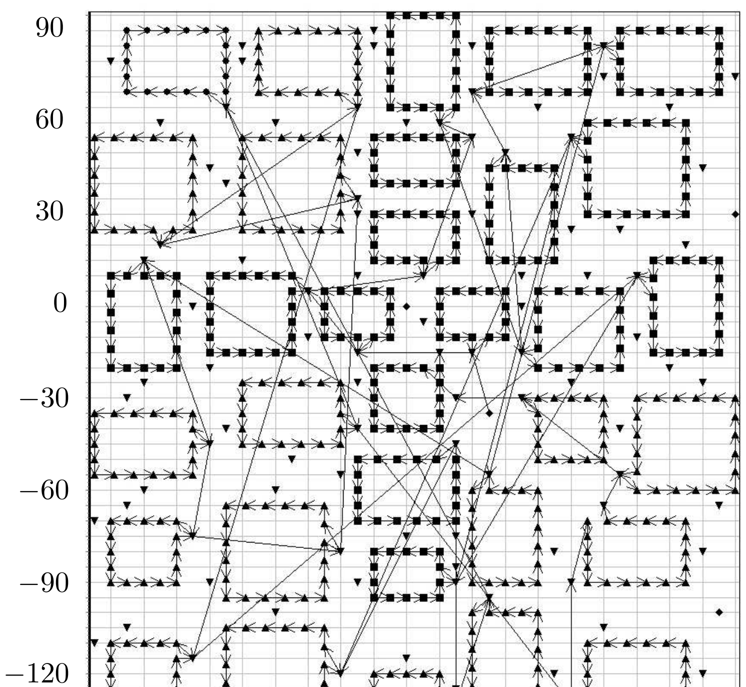

Рис. 3. Оптимальные маршрут и трасса при $\mathbf{a} = 1.2$

евклидовой нормой. Рассматриваются различные варианты внутренних работ:

1) работы, связанные с перемещением от пункта прибытия к заданной точке и от этой точки до пункта отправления (расстояния суммируются),

2) решение ЗК по обходу всех точек мегаполиса,

3) задача курьера при выделенных пунктах прибытия и отправления в каждый из мегаполисов.

Случай $\mathbf{a} = 1$. Общие затраты: 214.529, x_0: $(-20, 80)$. Финальный пункт: УП $(60, -95; 60, -95)$. Время вычисления: 16 час. 56 мин. 35 сек. График маршрута и трассы приведен на рис. 4.

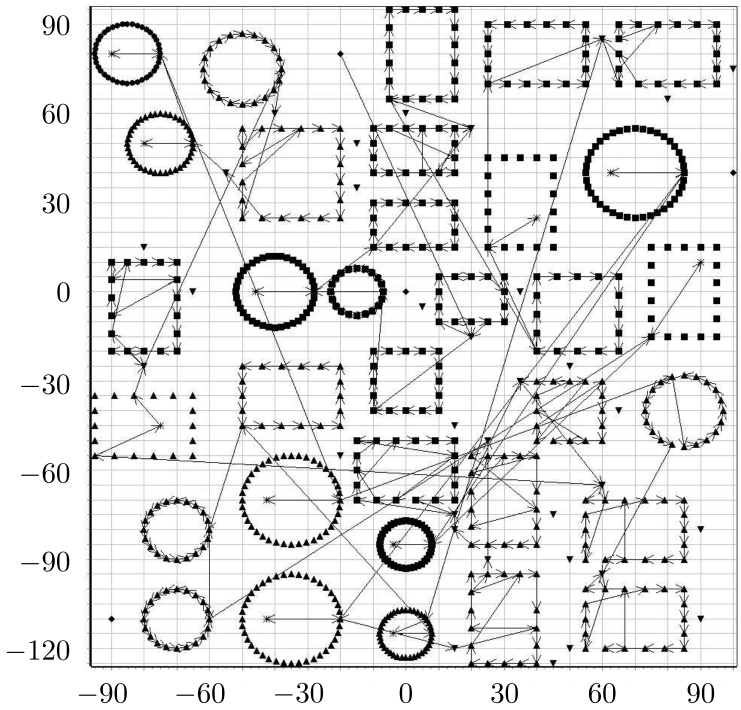

Рис. 4. Оптимальные маршрут и трасса при $\mathbf{a} = 1$

Случай $\mathbf{a} = 0.8$. Общие затраты: 46, x_0: $(0, 0)$. Финальный пункт: УП $(60, -95; 60, -95)$. Время вычисления: 16 час. 56 мин. 10 сек. График маршрута и трассы приведен на рис. 5.

Случай $\mathbf{a} = 1.2$. Общие затраты: 21 215.713, x_0: $(-20, 80)$. Финальный пункт: УП $(-50, -70; -50, -70)$. Время вычисления: 16 час. 53 мин. 57 сек. График маршрута и трассы приведен на рис. 6.

Финансирование. Работа подготовлена при поддержке программы президиума РАН № 30 «Теория и технологии многоуровневого децентрализованного группового управления в условиях конфликта и кооперации».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gutin G., Punnen A. (Eds.) The traveling salesman problem and its variations. Boston: Springer, 2007. DOI: 10.1007/b101971
2. Cook W.J. In pursuit of traveling salesman. Mathematics at the limits of computation. New Jersey: Princeton University Press, 2012. 248 p.
3. Гимади Э.Х., Хачай М.Ю. Экстремальные задачи на множествах перестановок. Екатеринбург: Изд-во УМЦ УПИ, 2016. 220 с.
4. Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х. Задача коммивояжера. Вопросы теории // Автоматика и телемеханика. 1989. Вып. 9. С. 3–33.

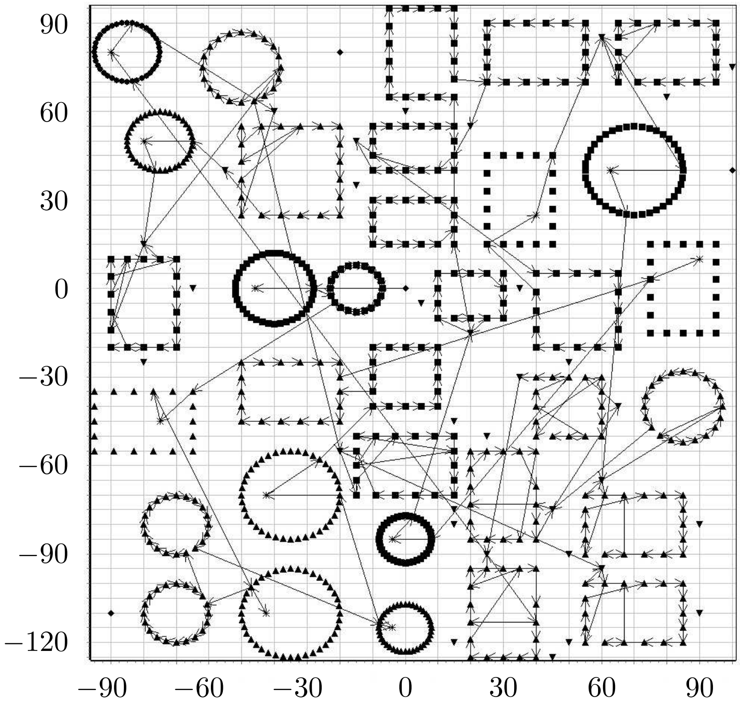

Рис. 5. Оптимальные маршрут и трасса при $\mathbf{a} = 0.8$

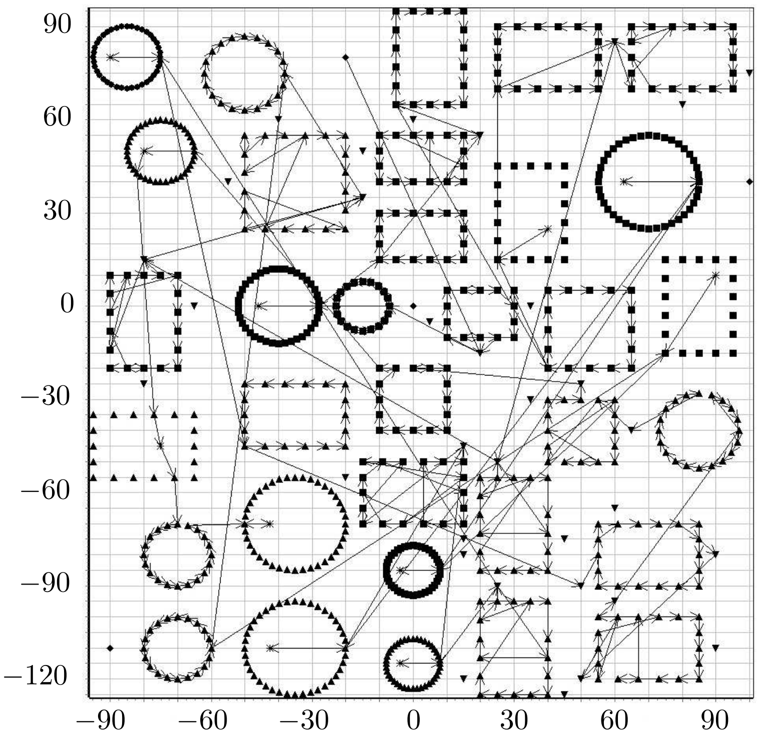

Рис. 6. Оптимальные маршрут и трасса при $\mathbf{a} = 1.2$

5. Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х. Задача коммивояжера.Точные методы // Автоматика и телемеханика. 1989. Вып. 10. С. 3–29.
6. Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х. Задача коммивояжера. Приближенные алгоритмы // Автоматика и телемеханика. 1989. Вып. 11. С. 3–26.
7. Сергеев С.И. Алгоритмы решения минимаксной задачи коммивояжера. I. Подход на основе динамического программирования // Автоматика и телемеханика. 1995. Вып. 7. С. 144–150.
8. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
9. Дьедонне Ж. Основы современного анализа. М.: Мир, 1964. 430 с.
10. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы: построение и анализ. М.: МЦНМО, 2000. 960 с.
11. Ченцов А.Г. К вопросу о маршрутизации комплексов работ // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 1. С. 59–82. DOI: 10.20537/vm130107
12. Ченцов А.Г. Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. 240 с.
13. Ченцов А.А., Ченцов А.Г. Маршрутизация перемещений при динамических ограничениях: задача на «узкие места» // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 1. С. 121–140. DOI: 10.20537/vm160110
14. Ченцов А.Г. Одна параллельная процедура построения функции Беллмана в обобщенной задаче курьера с внутренними работами // Автоматика и телемеханика. 2012. Вып. 3. С. 134–149.
15. Ченцов А.Г., Ченцов А.А. К вопросу о нахождении значения маршрутной задачи с ограничениями // Проблемы управления и информатики. 2016. № 1. С. 41–54.

Поступила в редакцию 06.06.2018

Ченцов Александр Георгиевич, д. ф.-м. н., член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
профессор, Уральский федеральный университет, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Ченцов Алексей Александрович, к. ф.-м. н., научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: chentsov.a@binsys.ru

Сесекин Александр Николаевич, д. ф.-м. н., профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и механики, Уральский федеральный университет, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19;
ведущий научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: a.n.sesekin@urfu.ru

A. G. Chentsov, A. A. Chentsov, A. N. Sesekin

Dynamic programming in the generalized bottleneck problem and the start point optimization

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 3, pp. 348–363 (in Russian).

Keywords: route optimization, dynamic programming, start point optimization.

MSC2010: 49L20, 90C39

DOI: 10.20537/vm180306

We consider one non-additive routing problem, which is a generalization of the well-known “bottleneck problem”. The parameter is assumed to be a positive number, the degree of which determines the weight of the corresponding stage of the displacement system. By varying the parameter, it is possible to make the initial or, on the contrary, the final stages of displacement dominant. The variant of aggregation of values with the above-mentioned weights corresponds to the ideological formulation of the “bottleneck problem”, but opens the possibility of investigating new versions of routing problems with constraints. It is assumed, however, that the statement of the problem is complicated by the dependence of values on the list of tasks and includes restrictions in the form of precedence conditions. In addition, in the interest of optimization, an arbitrary choice of the initial state from a given a priori set is allowed. For the construction, the apparatus of widely understood dynamic programming is used. The possibility of realizing a global extremum with any degree of accuracy under conditions when the set of possible initial states is not finite is investigated.

Funding. The work was supported by the Presidium of the Russian Academy of Sciences, project no. 30 "Theory and Technology of Multilevel Decentralized Group Control in Conditions of Conflict and Cooperation".

REFERENCES

1. Gutin G., Punnen A. (Eds.) *The traveling salesman problem and its variations*, Boston: Springer, 2007. DOI: 10.1007/b101971
2. Cook W.J. *In pursuit of traveling salesman. Mathematics at the limits of computation*, New Jersey: Princeton University Press, 2012, 248 p.
3. Gimadi E.Kh., Khachai M.Yu. *Ekstremal'nye zadachi na mnozhestvakh perestanovok* (Extremal problems on sets of permutations), Yekaterinburg: UMC UPI, 2016, 220 p.
4. Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I.Kh. The traveling salesman problem. I: Theoretical issues, *Automation and Remote Control*, 1989, vol. 50, no. 9, pp. 1147–1173.
5. Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I.Kh. The traveling salesman problem. II: Exact methods, *Automation and Remote Control*, 1989, vol. 50, no. 10, pp. 1303–1324.
6. Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I.Kh. The traveling salesman problem. Approximate algorithms, *Automation and Remote Control*, 1989, vol. 50, no. 11, pp. 1459–1479.
7. Sergeev S.I. Algorithms for the minimax problem of the traveling salesman. I: An approach based on dynamic programming, *Automation and Remote Control*, 1995, vol. 56, no. 7, part 2, pp. 1027–1032.
8. Kuratowski K., Mostowski A. *Set Theory*, Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1967, VII+417 p. Translated under the title *Teoriya mnozhestv*, Moscow: Mir, 1970, 416 p.
9. Dieudonné J. *Foundations of modern analysis*, New York: Academic Press Inc., 1960, XIV+361 p. Translated under the title *Osnovy sovremennogo analiza*, Moscow: Mir, 1964, 430 p.
10. Cormen T.H., Leizerson C.E., Rivest R.L. Introduction to algorithms, Cambridge: MIT Press, 1990. Translated under the title *Algoritmy: postroenie i analiz*, Moscow: Moscow Center for Continuous Mathematical Education, 2000, 960 p.
11. Chentsov A.G. To question of routing of works complexes, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2013, issue 1, pp. 59–82 (in Russian). DOI: 10.20537/vm130107
12. Chentsov A.G. *Ekstremal'nye zadachi marshrutizatsii i raspredeleniya zadanii: voprosy teorii* (Extremal problems of routing and assignment of tasks: questions of theory). Moscow–Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics, Institute of Computer Science, 2008, 240 p.
13. Chentsov A.G., Chentsov A.A. Routing of displacements with dynamic constraints: "bottleneck problem", *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, issue 1, pp. 121–140 (in Russian). DOI: 10.20537/vm160110
14. Chentsov A.G. On a parallel procedure for constructing the bellman function in the generalized problem of courier with internal jobs, *Automation and Remote Control*, 2012, vol. 73, issue 3, pp. 532–546. DOI: 10.1134/S0005117912030113
15. Chentsov A.G., Chentsov A.A. To the question of finding the value of a constrained route task, *Problemy Upravlenia i Informatiki*, 2016, issue 1, pp. 41–54 (in Russian).

Received 06.06.2018

Chentsov Aleksandr Georgievich, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member of the Russian Academy of Science, Chief Researcher, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia;
Professor, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Chentsov Aleksei Aleksandrovich, Candidate of Physics and Mathematics, Researcher, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia.
E-mail: chentsov.a@binsys.ru

Sesekin Aleksandr Nikolaevich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Department of Applied Mathematics and Mechanics, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia;
Leading Researcher, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia.
E-mail: a.n.sesekin@urfu.ru