ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

МАТЕМАТИКА 2018. Т. 28. Вып. 3

УДК 517.98

© *Д. О. Цветков*

МАЛЫЕ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ, ЧАСТИЧНО ПОКРЫТОЙ УПРУГИМ ЛЬДОМ

Изучается задача о малых движениях идеальной стратифицированной жидкости со свободной поверхностью, частично покрытой упругим льдом. Упругий лед моделируется упругой пластиной. Задача исследуется на основе подхода, связанного с применением так называемой теории операторных матриц. С этой целью вводятся гильбертовы пространства и некоторые их подпространства, а также вспомогательные краевые задачи. Начальная краевая задача сведена к задаче Коши для дифференциального уравнения второго порядка в некотором гильбертовом пространстве. После подробного изучения свойств операторных коэффициентов, отвечающих возникшей системе уравнений, доказывается теорема о сильной разрешимости полученной задачи Коши на конечном интервале времени. На этой основе доказана также теорема о существовании решения и исходной начально-краевой задачи.

Ключевые слова: стратифицированная идеальная жидкость, упругий лед, начально-краевая задача, дифференциальное уравнение в гильбертовом пространстве, задача Коши, сильное решение.

DOI: 10.20537/vm180305

Введение

В связи с новыми потребностями прикладных наук возрос интерес к изучению динамических характеристик жидкостей, обладающих разными специфическими свойствами. К таким жидкостям, в частности, относятся стратифицированные жидкости. Этот интерес обусловлен не только практическими потребностями, но и теоретическим содержанием возникающих здесь проблем. Во многих случаях математические модели таких проблем существенно нелинейны и поддаются исследованию лишь численными методами. Однако ряд интересных и полезных задач можно рассматривать в рамках линейных моделей, приводящих к нетрадиционным начально-краевым задачам. Это, безусловно, определяет самостоятельный математический интерес к таким проблемам.

Отметим, что наличие стратификации жидкости по плотности и гравитационной силы приводит к появлению новых динамических свойств жидкости; так, взаимодействие силы тяжести и архимедовой силы приводит к возникновению квазиупругой силы вдоль направления гравитационного поля. Колебательные свойства жидкости, обусловленные этой квазиупругой силой, характеризуются так называемой частотой Вейсяля–Брента, являющейся основной характеристикой динамических свойств стратифицированной жидкости. Детальный анализ физических основ появления этой квазиупругой силы и связанной с ней частоты Вейсяля–Брента содержится, например, в монографии [1].

Начиная с середины XX века многие начально-краевые задачи математической физики, связанные с проблемой малых движений и собственных (нормальных) колебаний сплошных сред, то есть систем с бесконечным числом степеней свободы, изучаются методами функционального анализа. Так, например, применение операторного подхода к изучению линейных проблем гидродинамики идеальной однородной жидкости изложена в монографии Н. Д. Копачевского, С. Г. Крейна и Нго Зуй Канна [2], а затем в двухтомной монографии Н. Д. Копачевского и С. Г. Крейна [3, 4]. Эти методы позволяют исследовать одномерные и многомерные линейные задачи математической физики, в частности, не остались в стороне и исследования стратифицированной жидкости. Отметим здесь работы [5, 6], а также цикл монографий

С. А. Габова и А. Г. Свешникова [7,8], в которых применялась теория потенциала для доказательства существования обобщенных решений начально-краевых задач для уравнения колебаний стратифицированной жидкости.

Вопросы, связанные с численным анализом колебания плавающей упругой пластины (частным случаем является упругий лед на поверхности жидкости), к настоящему времени сравнительно хорошо разработаны. Подробную библиографию по этому кругу вопросов можно найти в монографиях [9, 10]. При этом исследования «реальной» стратификации с возможностью комбинировать на свободной поверхности разные соприкасающиеся среды и получать условия сильной разрешимости соответствующих эволюционных задач не проводились. Отметим, что изучаемая в работе задача является обобщением более простой задачи о малых движениях и нормальных колебаниях идеальной стратифицированной жидкости со свободной поверхностью, полностью покрытой упругим льдом, подробно исследованной в работах автора [11, 12]. В представленной работе изучается случай, когда на свободной поверхности жидкости имеются две соприкасающиеся среды: участок «чистой воды» и участок «упругого льда». На линии контакта упругого льда с твердой стенкой выполнены условия твердого закрепления льда как упругой пластины, а на границе соприкосновения упругого льда и чистой воды добавляются естественные условия, которые соответствуют тому, что поперечная сила и момент силы на кромке упругого льда должны равняться нулю. Исходная задача сводится к дифференциально-операторному уравнению второго порядка в некотором гильбертовом пространстве, при этом структура операторных коэффициентов имеет более сложную структуру, чем в работе [11], что приводит к усложнению получения итоговой теоремы о разрешимости.

Изложение в работе проведено по следующей схеме. После введения в параграфе 1 дается постановка начально-краевой задачи о малых движениях идеальной стратифицированной жидкости, частично покрытой упругим льдом. Для классического решения задачи введен закон баланса полной энергии. Это позволяет в параграфе 2 осуществить выбор функциональных гильбертовых пространств, в которых естественно изучать поставленную проблему. После этого в параграфе 3 осуществлен операторный подход к исследуемой задаче, позволяющий привести проблему к задаче Коши для дифференциально-операторного уравнения второго порядка в некотором гильбертовом пространстве. После подробного изучения свойств операторных коэффициентов, отвечающих возникшей системе уравнений (параграф 4), в параграфе 6 доказывается теорема о сильной разрешимости полученной задачи Коши на конечном интервале времени. На этой основе доказана также теорема о существовании решения и исходной начально-краевой задачи.

§ 1. Математическая формулировка задачи. Закон баланса полной энергии

Пусть идеальная стратифицированная жидкость, плотность ρ_0 которой в состоянии покоя изменяется вдоль вертикальной оси Ox_3: $\rho_0 = \rho_0(x_3)$, частично заполняет неподвижный сосуд и занимает в состоянии покоя область Ω, ограниченную твердой стенкой S и свободной поверхностью $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где Γ_1 — участок «чистой воды», Γ_2 — участок «упругого льда». Предположим, что начало O декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$ выбрано на свободной равновесной поверхности Γ, которая является плоской и расположена перпендикулярно ускорению силы тяжести $\vec{g} = -g\vec{e}_3$, где $\vec{e}_3$ — орт оси Ox_3. Предполагаем далее, что твердая стенка $S \subset \partial\Omega$ является липшицевой поверхностью, причем $\partial S = \partial\Gamma$ — липшицева кривая.

Будем рассматривать основной случай устойчивой стратификации жидкости по плотности:

$$0 < N^2_{min} \leqslant N^2(x_3) \leqslant N^2_{max} = N^2_0 < \infty, \quad N^2(x_3) = -\frac{g\rho_0'(x_3)}{\rho_0(x_3)}, \quad \rho_0(0) > 0. \tag{1.1}$$

Функцию $N(x_3)$ называют частотой Вяйсяля–Брента, или частотой плавучести.

Рассмотрим малые движения жидкости, близкие к состоянию покоя. Обозначим через $\vec{u} = \vec{u}(t,x)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$, поле скорости в жидкости, $p = p(t,x)$ — отклонение поля давлений от равновесного давления $P_0 = P_0(x_3)$, $\rho = \rho(t,x)$ — отклонение поля плотности от исходного поля $\rho_0(x_3)$, а через $\zeta = \zeta(t,\hat{x})$ ($\hat{x} = (x_1,x_2) \in \Gamma$) — отклонение свободно движущейся поверхности жидкости $\Gamma(t)$ от Γ по нормали $\vec{n}$. Тогда малые движения исходной системы описываются следующей начально-краевой задачей (см., например, [5,6,11,12]):

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \rho_0^{-1}(x_3)\Big(-\nabla p - g\rho\vec{e}_3\Big) + \vec{f}(t,x) \quad (\text{в}\,\Omega),$$
$$\operatorname{div}\vec{u} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\rho_0\cdot\vec{u} = 0 \quad (\text{в}\,\Omega),$$
$$\vec{u}\cdot\vec{n} =: u_n = 0 \quad (\text{на}\,S), \quad u_n = \frac{\partial\zeta}{\partial t} \quad (\text{на}\,\Gamma), \quad \int_\Gamma \zeta\,d\Gamma = 0, \tag{1.2}$$
$$p = g\rho_0(0)\zeta \quad (\text{на}\,\Gamma_1), \qquad p = \rho_1\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} + K\zeta \quad (\text{на}\,\Gamma_2),$$
$$\vec{u}(0,x) = \vec{u}^0(x), \quad \rho(0,x) = \rho^0(x) \quad (x\in\Omega), \quad \zeta(0,\hat{x}) = \zeta_0(\hat{x}) \quad (\hat{x}\in\Gamma).$$

Отметим, что наиболее сложно получается линеаризованное динамическое граничное условие на участке Γ_2 упругого льда. Для его вывода воспользуемся так называемым динамическим уравнением Софи Жермен (для мало прогнутой упругой пластинки)

$$-d\triangle_2^2\zeta - \rho_1\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = q(t,x_1,x_2), \tag{1.3}$$

где $d>0$ — коэффициент жесткости льда, ρ_1 — поверхностная плотность льда, $\triangle_2 = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$ — плоский (двумерный) лапласиан, а $q(t,x_1,x_2)$ — действующая сверху вниз нагрузка на единицу площади поверхности Γ. Эта нагрузка $q(t,x_1,x_2)$ складывается из атмосферного давления и давления в жидкости: $q(t,x_1,x_2) = -P|_\Gamma + p_a = -p_a + \rho_0(0)g\zeta - p + p_a = \rho_0(0)g\zeta - p$. Подставляя полученное выражение в (1.3), получаем динамическое условие на участке упругого льда:

$$\rho_1\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} + d\triangle_2^2\zeta + \rho_0(0)g\zeta - p = 0 \quad (\text{на}\ \Gamma_2). \tag{1.4}$$

Данное условие содержит бигармонический оператор $\triangle_2^2$, поэтому на границе $\partial\Gamma_2$ области Γ_2 необходимо сформулировать дополнительные краевые условия, связанные со способом закрепления участка упругого льда с соприкасающимися границами. Прежде всего, будем считать, что на линии $\gamma_2 := \overline{\Gamma_2}\bigcap\overline{S}$ контакта упругого льда с твердой стенкой S выполнены условия жесткого закрепления льда как упругой пластинки

$$\zeta = 0, \quad \frac{\partial\zeta}{\partial\nu} = 0 \qquad (\text{на}\ \gamma_2), \tag{1.5}$$

где $\vec{\nu}$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Gamma_2$ (расположенный, очевидно, в плоскости Ox_1x_2). Далее, очевидно, что на остальной части границы $\partial\Gamma_2\setminus\gamma_2$ области Γ_2, где упругий лед соприкасается с участком чистой воды, поперечная сила и момент силы на кромке упругого льда должны равняться нулю. Математически эти условия записываются в следующем виде (см. [13, с. 273]):

$$M\zeta = 0, \quad N\zeta = 0 \quad (\text{на}\ \partial\Gamma_2\setminus\gamma_2), \quad M\zeta = \sigma\triangle_2\zeta + (1-\sigma)\,\frac{\partial^2\zeta}{\partial\nu^2}, \tag{1.6}$$
$$N\zeta = -\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\triangle_2\zeta\right) + (1-\sigma)\,\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial {x_1}^2}\nu_1\nu_2 - \frac{\partial^2\zeta}{\partial x_1\partial x_2}\left(\nu_1^2-\nu_2^2\right) - \frac{\partial^2\zeta}{\partial {x_2}^2}\nu_1\nu_2\right), \tag{1.7}$$

ν_i — i-я координата единичного вектора внешней нормали $\vec{\nu}$ к границе $\partial\Gamma_2$, $\vec{s}$ — вектор касательной к $\partial\Gamma_2$, а σ — так называемая постоянная Пуассона, характеризующая упругую пластинку. Константа σ удовлетворяет неравенствам (см. [13, с. 427]): $0\leqslant\sigma<1$.

Перепишем кратко граничное условие (1.4) вместе с краевыми условиями (1.5)–(1.7), введя в рассмотрение линейный дифференциальный оператор K, заданный дифференциальным выражением

$$K\zeta := d\triangle_2^2\zeta + \rho_0(0)g\zeta, \tag{1.8}$$

где

$$\mathcal{D}(K) = \left\{\zeta \in C^4\left(\overline{\Gamma_2}\right) \mid \zeta = \partial\zeta/\partial\nu = 0 \quad (\text{на } \gamma_2), \quad M\zeta = N\zeta = 0 \quad (\text{на } \partial\Gamma_2 \setminus \gamma_2)\right\}. \tag{1.9}$$

Тогда динамическое условие на участке упругого льда (вместе с краевыми условиями (1.5), (1.6)) примет следующий вид:

$$p = \rho_1\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} + K\zeta \qquad (\text{на } \Gamma_2).$$

Прежде чем исследовать начально-краевую задачу (1.2), введем для ее решений закон баланса полной энергии. Предположим, что задача (1.2) имеет классическое решение, то есть такие функции $\vec{u}(t,x)$, $p(t,x)$, $\rho(t,x)$ и $\zeta(t,\hat{x})$, для которых непрерывны по всем переменным все слагаемые, входящие в уравнения и краевые условия (1.2), а эти уравнения выполнены для указанных функций.

Далее понадобится формула Грина для бигармонического оператора $\triangle_2^2$, учитывающая наличие постоянной Пуассона σ в (1.6) и (1.7) (см., например, [13, с. 272]): для произвольной функции $u\left(\widehat{x}\right) \in C^4\left(\bar{G}\right)$, $G \subset \mathbb{R}^2$ и $v\left(\widehat{x}\right) \in C^2\left(\bar{G}\right)$ имеет место тождество

$$\begin{gathered}\int_G \left(\triangle_2^2 u\right) v\, dG = -\int_{\partial G} vNu\, ds - \int_{\partial G}\frac{\partial v}{\partial\nu}Mu\, ds + \\ + \int_G \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \sigma\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\right) + 2\left(1-\sigma\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1\partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \sigma\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\right)\right] dG\,. \end{gathered}\tag{1.10}$$

Лемма 1. *Для $u = u\left(\hat{x}\right) \in \mathcal{D}(K)$, $v = v\left(\hat{x}\right) \in \mathcal{D}(K)$ (см. (1.8)) имеет место тождество*

$$\begin{gathered}\int_{\Gamma_2}(Ku)\, v\, d\Gamma_2 = \int_{\Gamma_2} u\,(Kv)\; d\Gamma_2 = (u,v)_K := \rho_0(0)g\int_{\Gamma_2} uv\, d\Gamma_2 + \\ + d\int_{\Gamma_2}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + 2\left(1-\sigma\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1\partial x_2} + \sigma\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\right)\right] d\Gamma_2\,. \end{gathered}\tag{1.11}$$

Доказательство. В силу формулы Грина (1.10) и граничных условий (1.5), (1.6), для любых u и v из области определения оператора K получаем:

$$\begin{gathered}\int_{\Gamma_2}(Ku)\, v\, d\Gamma_2 = d\int_{\Gamma_2}\left(\triangle_2^2 u\right) v\, d\Gamma_2 + \rho_0 g\int_{\Gamma_2} uv\, d\Gamma_2 = \rho_0 g\int_{\Gamma_2} uv\, d\Gamma_2 - \int_{\gamma_2} vNu\, ds + \\ + d\int_{\Gamma_2}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \sigma\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\right) + 2\left(1-\sigma\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1\partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \sigma\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\right)\right] d\Gamma_2 - \\ - \int_{\gamma_2}\frac{\partial v}{\partial\nu}Mu\, ds - \int_{\partial\Gamma_2\setminus\gamma_2} vNu\, ds - \int_{\partial\Gamma_2\setminus\gamma_2}\frac{\partial v}{\partial\nu}Mu\, ds = \rho_0 g\int_{\Gamma_2} uv\, d\Gamma_2 + \\ + d\int_{\Gamma_2}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \sigma\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\right) + 2\left(1-\sigma\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1\partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \sigma\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\right)\right] d\Gamma_2 = \\ = d\int_{\Gamma_2}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + 2\left(1-\sigma\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1\partial x_2} + \sigma\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\right)\right] d\Gamma_2 + \\ + \rho_0 g\int_{\Gamma_2} uv\, d\Gamma_2 = (u,v)_K\,. \end{gathered}$$

Аналогично доказывается, что $\int_{\Gamma_2} u\,(Kv)\; d\Gamma_2 = (u,v)_K\,.$

□

С помощью билинейной формы $(u,v)_K$ закон баланса полной энергии можно записать в удобной форме.

Лемма 2. *Для классического решения задачи* (1.2) *имеет место закон баланса полной энергии гидромеханической системы:*

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dt}\Bigg[\bigg(\int_\Omega \rho_0(x_3)|\vec{u}|^2\,d\Omega+\rho_1\int_{\Gamma_2}\left|\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right|^2 d\Gamma_2\bigg)+$$
$$+\bigg(g^2\int_\Omega\left[\rho_0(x_3)N^2(x_3)\right]^{-1}|\rho|^2\,d\Omega+\rho_0 g\int_{\Gamma_1}|\zeta|^2\,d\Gamma_1+(\zeta,\zeta)_K\bigg)\Bigg]=\int_\Omega\rho_0(x_3)\vec{f}\cdot\vec{u}\,d\Omega. \tag{1.12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Умножим обе части первого (третьего) равенства в (1.2) скалярно на вектор-функцию $\rho_0(x_3)\vec{u}(t,x)$ $\left(g^2\left(\rho_0(x_3)N^2(x_3)\right)^{-1}\rho(t,x)\right)$ и проинтегрируем по Ω. Затем, сложив два полученных равенства, получим

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dt}\left[\int_\Omega\rho_0(x_3)|\vec{u}|^2\,d\Omega+\int_\Omega g^2\left[\rho_0(x_3)N^2(x_3)\right]^{-1}|\rho|^2\,d\Omega\right]+$$
$$+\int_\Omega\nabla p\cdot\vec{u}\,d\Omega+\int_\Omega\left[g^2\left[\rho_0(x_3)N^2(x_3)\right]^{-1}\rho\cdot\nabla\rho_0+g\rho\vec{e}_3\right]\vec{u}\,d\Omega=\int_\Omega\rho_0(x_3)\vec{f}\cdot\vec{u}\,d\Omega\,. \tag{1.13}$$

С учетом условия соленоидальности поля $\vec{u}(t,x)$, а также учитывая граничные условия на S, Γ_1, Γ_2 из (1.13), приходим к (1.12). □

Замечание 1. Левая часть (1.12) представляет собой сумму производной по t полной кинетической энергии системы и ее потенциальной энергии. Полная кинетическая энергия (первая скобка слева) равна сумме кинетической энергии жидкости в области Ω и кинетической энергии упругого льда. Полная потенциальная энергия (вторая скобка) равна сумме потенциальной энергии жидкости, обусловленной наличием сил плавучести, смещением свободной поверхности, и потенциальной энергии упругого льда. Так как потенциальной энергии упругого льда отвечает форма оператора K, то его можно назвать оператором потенциальной энергии (упругой части системы). Правая часть есть мощность внешних сил.

Свяжем с поверхностью Γ гильбертово пространство (скалярных) функций $L_2\,(\Gamma)$ со скалярным произведением

$$(\varphi,\psi)_\Gamma:=\int_\Gamma\varphi\,(\hat{x})\,\psi\,(\hat{x})\;d\Gamma$$

и соответствующей нормой.

Изучим общие свойства оператора K, заданного формулой (1.8). При этом будем считать, что оператора K действует в гильбертовом пространстве $L_2(\Gamma_2)$.

Лемма 3. Оператор $K:\mathcal{D}(K)\subset L_2\,(\Gamma_2)\to L_2\,(\Gamma_2)$ является неограниченным симметричным положительно определенным оператором, действующим в $L_2\,(\Gamma_2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, $\mathcal{D}(K)$ плотна в $L_2\,(\Gamma_2)$, так как в нее входят все финитные (бесконечно дифференцируемые) функции, заданные на Γ_2. Очевидно также (и это будет видно из дальнейшего), что K — неограниченный оператор.

Из тождества (1.11) следует симметрия оператора K. Далее, полагая в (1.11) $u=v$, получим

$$(Ku,v)=$$
$$=\rho_0(0)g\int_{\Gamma_2}|u|^2\,d\Gamma_2+d\int_{\Gamma_2}\left[\left(\frac{\partial^2u}{\partial x_1^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2u}{\partial x_2^2}\right)^2+2\,(1-\sigma)\left(\frac{\partial^2u}{\partial x_1\partial x_2}\right)^2+2\sigma\frac{\partial^2u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2u}{\partial x_2^2}\right]d\Gamma_2\geqslant$$
$$\geqslant d\int_{\Gamma_2}\left[\left(\frac{\partial^2u}{\partial x_1^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2u}{\partial x_2^2}\right)^2+2\sigma\frac{\partial^2u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2u}{\partial x_2^2}\right]d\Gamma_2+\rho_0(0)g\int_{\Gamma_2}|u|^2\,d\Gamma_2\geqslant$$
$$\geqslant d\int_{\Gamma_2}\left[\left(\frac{\partial^2u}{\partial x_1^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2u}{\partial x_2^2}\right)^2-2\left|\frac{\partial^2u}{\partial x_1^2}\right|\left|\frac{\partial^2u}{\partial x_2^2}\right|\right]d\Gamma_2+\rho_0(0)g\int_{\Gamma_2}|u|^2\,d\Gamma_2=$$

$$= d\int_{\Gamma_2}\left(\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right| - \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right|\right)^2 d\Gamma_2 + \rho_0(0)g\int_{\Gamma_2}|u|^2\,d\Gamma_2 \geqslant \rho_0(0)g\int_{\Gamma_2}|u|^2\,d\Gamma_2 = \rho_0(0)g\|u\|^2_{L_2(\Gamma_2)}\,.$$

Отсюда следует, что оператор K положительно определен в $L_2\,(\Gamma)$. □

Замечание 2. Как известно, симметричный положительно определенный оператор, действующий в (вещественном) гильбертовом пространстве и заданный на плотном в этом пространстве множестве, допускает расширение по Фридрихсу до самосопряженного положительно определенного оператора с той же нижней гранью. Поэтому далее будем считать, в силу леммы 3, что оператор K уже расширен по Фридрихсу на более широкое множество, обеспечивающее самосопряженность расширенного оператора, который снова будем обозначать через K. Кроме того, $\mathcal{D}(K) \subset H_K$, где H_K — энергетическое пространство оператора K.

Теорема 1. *Оператор* $K\colon \mathcal{D}(K) \subset L_2\,(\Gamma_2) \to L_2\,(\Gamma_2)$ (*после расширения по Фридрихсу*) — *неограниченный самосопряженный положительно определенный оператор с дискретным спектром, то есть его спектр состоит из конечнократных положительных собственных значений* $\{\lambda_k\,(K)\}_{k=1}^{\infty}$ *с предельной точкой* $\lambda = +\infty$, *а собственные функции* $\{u_k\,(K)\}_{k=1}^{\infty}$ *образуют ортогональный базис в* $L_2\,(\Gamma_2)$:

$$(u_k\,(K)\,, u_l\,(K))_{\Gamma_2} = \delta_{kl}, \quad (u_k\,(K)\,, u_l\,(K))_K = \lambda_k\,(K)\,\delta_{kl}.$$

Обратный оператор K^{-1} *является компактным и положительным в* $L_2\,(\Gamma_2)$. *Энергетическое пространство* $H_K \subset L_2\,(\Gamma_2)$ *оператора* K *состоит из тех элементов из* $L_2\,(\Gamma_2)$, *для которых конечна квадратичная форма*

$$\|u\|_K^2 = \rho_0 g\int_{\Gamma_2}|u|^2\,d\Gamma_2 + d\int_{\Gamma_2}\left[\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right|^2 + 2\,(1-\sigma)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\right|^2 + 2\sigma\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right] d\Gamma_2\,, \tag{1.14}$$

причем $\mathcal{D}(K^{1/2}) = H_K$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство основано на положениях общей теории положительно определенных операторов, теоремах вложения функциональных пространств и понятии эквивалентных норм.

Введем в рассмотрение энергетическую норму (1.14) оператора K и покажем, что норма $\|\cdot\|_K$ эквивалентна стандартной норме пространства $H^2\,(\Gamma_2) = W_2^2\,(\Gamma_2)$:

$$\|u\|^2_{W_2^2(\Gamma_2)} = \int_{\Gamma_2}|u|^2\,d\Gamma_2 + \int_{\Gamma_2}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|^2 + \sum_{i,k=1}^{2}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_k}\right|^2\right] d\Gamma_2\,. \tag{1.15}$$

Как известно (см., например, [14, с. 347-350]), норма (1.15) эквивалентна норме $\|\cdot\|_{\widehat{W}_2^2(\Gamma_2)}$, которая задается по следующему закону:

$$\|u\|^2_{\widehat{W}_2^2(\Gamma_2)} = \int_{\Gamma_2}|u|^2\,d\Gamma_2 + \int_{\Gamma_2}\left[\sum_{i,k=1}^{2}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_k}\right|^2\right] d\Gamma_2\,. \tag{1.16}$$

Поэтому достаточно доказать, что нормы (1.14) и (1.16) эквивалентны.

Оценим сверху величину $\|u\|_K^2$; используя очевидное неравенство

$$2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right|\cdot\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right| \leqslant \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right|^2,$$

из (1.14) имеем

$$\|u\|_K^2 \leqslant \rho_0(0)g\int_{\Gamma_2}|u|^2\,d\Gamma + d\int_{\Gamma_2}\left[\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right|^2+\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right|^2+2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\right|^2+2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right|\cdot\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right|\right]d\Gamma_2 \leqslant$$

$$\leqslant \rho_0(0)g\int_{\Gamma_2}|u|^2\,d\Gamma_2 + 2d\int_{\Gamma_2}\left[\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right|^2+\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right|^2+\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\right|^2\right]d\Gamma_2 \leqslant \max\left(\rho_0(0)g; 2d\right)\|u\|^2_{\widehat{W}_2^2(\Gamma_2)}.$$

Проведем теперь оценку снизу величины $\|u\|_K^2$

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right|^2+\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right|^2+2\sigma\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)=\sigma\left[\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right|^2+\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right|^2+2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)\right]+$$

$$+(1-\sigma)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right|^2+(1-\sigma)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right|^2 \geqslant (1-\sigma)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right|^2+(1-\sigma)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right|^2.$$

Тогда для энергетической нормы получаем

$$\|u\|_K^2 \geqslant \rho_0(0)g\int_{\Gamma_2}|u|^2\,d\Gamma_2+$$

$$+d\int_{\Gamma_2}\left[\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right|^2+\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right|^2+2(1-\sigma)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\right|^2-\sigma\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right|^2-\sigma\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right|^2\right]d\Gamma_2=$$

$$=d(1-\sigma)\int_{\Gamma_2}\left(\sum_{i,k=1}^{2}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_k}\right|^2\right)d\Gamma_2+\rho_0(0)g\int_{\Gamma_2}|u|^2\,d\Gamma_2 \geqslant \min\left(d(1-\sigma);\rho_0(0)g\right)\|u\|^2_{\widehat{W}_2^2(\Gamma_2)}.$$

Итак, нормы $\|\cdot\|_K^2$ и $\|\cdot\|^2_{\widehat{W}_2^2(\Gamma_2)}$ эквивалентны, а следовательно, и нормы $\|\cdot\|_K^2$ и $\|\cdot\|^2_{W_2^2(\Gamma_2)}$ эквивалентны. Так как, согласно теореме вложения С. Л. Соболева (см., например, [14, с. 358–362]), пространство $W_2^2(\Gamma_2)$ компактно вложено в $L_2(\Gamma_2)$ (то есть всякое множество элементов, ограниченное в $W_2^2(\Gamma_2)$, компактно в $L_2(\Gamma_2)$, или, иначе, оператор вложения из $W_2^2(\Gamma_2)$ в $L_2(\Gamma_2)$ компактен), то H_K также компактно вложено в $L_2(\Gamma_2)$. Поэтому, по теореме С. Г. Михлина (см., например, [15, с.145]), оператор K имеет дискретный спектр со свойствами, описанными в формулировке данной теоремы, а обратный оператор K^{-1} является компактным положительным оператором: $0 < K^{-1} = \left(K^{-1}\right)^*$. □

Замечание 3. Отметим, что если функция ζ удовлетворяет условиям

$$\zeta \in C^2(\overline{\Gamma}_2), \quad \int_{\Gamma_2}\zeta d\Gamma_2, \quad \zeta=\frac{\partial\zeta}{\partial\nu}=0 \quad (\text{на } \gamma_2), \tag{1.17}$$

то, как следует из доказанной теоремы, $\zeta \in H_k$. Множество элементов, удовлетворяющих условиям (1.17), образуют множество гладких функций, всюду плотное в H_K.

§ 2. Проектирование уравнений движения на ортогональные пространства

В начально-краевой задаче (1.2) можно исключить одну искомую функцию — поле плотности $\rho(t,x)$, если ввести взамен поля скорости $\vec{u}(t,x)$ поле малых смещений частиц жидкости $\vec{v}(t,x)$, связанное с $\vec{u}(t,x)$ соотношениями

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}=\vec{u}, \quad \operatorname{div}\vec{v}=0 \quad (\text{в } \Omega). \tag{2.1}$$

Тогда придем к связи

$$\rho(t,x) = -\nabla\rho_0\cdot\vec{v}(t,x) + f_0(x) = -\rho_0^{'}(x_3)v_3(t,x) + f_0(x), \tag{2.2}$$
$$f_0(x) := \rho(0,x) + \rho_0^{'}(x_3)v_3(0,x), \quad v_3 := \vec{v}\cdot\vec{e}_3,$$

и к уравнениям для $\vec{v}(t,x)$ и $p(t,x)$:

$$\frac{\partial^2\vec{v}}{\partial t^2} = -\rho_0^{-1}(x_3)\nabla p - N^2(x_3)v_3\vec{e}_3 + \psi_0(x), \quad \operatorname{div}\vec{v} = 0 \quad (\text{в}\,\Omega),$$
$$\psi_0(x) = \vec{f}(t,x) - gf_0(x)\vec{e}_3/\rho_0(x_3).$$

С учетом сказанного перепишем исходную задачу (1.2) в виде:

$$\frac{\partial^2\vec{v}}{\partial t^2} = -\rho_0^{-1}(x_3)\nabla p - N^2(x_3)v_3\vec{e}_3 + \psi_0(x), \quad \operatorname{div}\vec{v} = 0 \quad (\text{в}\,\Omega),$$
$$\vec{v}\cdot\vec{n} =: v_n = 0 \quad (\text{на}\,S), \qquad \int_\Gamma v_3\,d\Gamma = 0,$$
$$p = g\rho_0(0)v_3 \quad (\text{на}\,\Gamma_1), \qquad p = \rho_1\frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} + Kv_3 \quad (\text{на}\,\Gamma_2), \tag{2.3}$$
$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}(0,x) = \vec{u}(0,x) = \vec{u}^0(x), \quad \vec{v}(0,x) = \vec{v}^0(x),$$
$$v_3(0,\hat{x}) = \zeta(0,\hat{x}) = \zeta^0(\hat{x}) \quad (\hat{x}\in\Gamma).$$

Начально-краевая задача (2.3) содержит лишь две искомые функции: векторное поле $\vec{v}(t,x)$ и скалярное поле давлений $p(t,x)$. По решению $\vec{v}(t,x)$ задачи (2.3) решения $\vec{u}(t,x)$ и $\rho(t,x)$ задачи (1.2) можно найти по формулам (2.1) и (2.2).

Начально-краевую задачу (2.3) приведем в дальнейшем к дифференциальному уравнению в гильбертовом пространстве. Для этого применим прием проектирования первого уравнения (2.3) на ортогональные подпространства (см. [2]). Свяжем с функцией ρ_0 гильбертово пространство $\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)$ вектор-функций со скалярным произведением

$$(\vec{u},\vec{v}) = \int_\Omega \rho_0(x_3)\vec{u}(x)\overline{\vec{v}(x)}\,d\Omega. \tag{2.4}$$

Как следует из (1.1), для $\rho = \rho_0(x_3)$ справедливы неравенства $0 < m \leqslant \rho_0 \leqslant M < \infty$, обеспечивающие эквивалентность норм, определенных по закону (2.4) и обычным скалярным произведением в $\vec{L}_2(\Omega)$.

Обозначим через $\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)$ подпространство $\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)$, которое получается замыканием в норме $\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)$ множества гладких функций $\{\vec{v}\in\vec{C}^1(\Omega) : \operatorname{div}\vec{v} = 0\ (\text{в}\ \Omega),\ v_n = 0\ (\text{на}\ \partial\Omega)\}$.

В качестве других подпространств возьмем подпространства

$$\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0) = \{\vec{v}\in\vec{L}_2(\Omega,\rho_0) :\ \vec{v} = \rho_0^{-1}\nabla p,\ v_n = 0\ (\text{на}\ S), \quad \nabla\cdot\vec{v} = 0\ (\text{в}\ \Omega),\ \int_\Gamma p\,d\Gamma = 0\}.$$
$$\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega,\rho_0) = \{\vec{w}\in\vec{L}_2(\Omega,\rho_0) :\ \vec{w} = \rho_0^{-1}\nabla\varphi, \quad \varphi = 0\ (\text{на}\,\Gamma)\}.$$

Лемма 4. *Имеет место следующее ортогональное разложение:*

$$\vec{L}_2(\Omega,\rho_0) = \vec{J}_0(\Omega,\rho_0)\oplus\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0)\oplus\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega,\rho_0). \tag{2.5}$$

Доказательство леммы повторяет доказательство аналогичного утверждения для пространства $\vec{L}_2(\Omega)$, когда в (2.5) $\rho_0(x_3) = \text{const}$ (см. [2, с. 106]).

Будем считать $\vec{v}(t,x)$ и $\rho_0^{-1}\nabla p(t,x)$ функциями переменной t со значениями в $\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)$, тогда в силу уравнений и граничных условий (2.3), ортогонального разложения (2.5) имеем

$$\vec{v}(t,x)\in\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)\oplus\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0) =: \vec{J}_{0,S}(\Omega,\rho_0),$$
$$\rho_0^{-1}\nabla p(t,x)\in\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega,\rho_0)\oplus\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0) =: \vec{G}(\Omega,\rho_0).$$

Поэтому при каждом t будем разыскивать их в виде

$$\begin{gathered}\vec{v}(t,x)=\vec{w}(t,x)+\rho_0^{-1}\nabla\Phi(t,x),\\ \vec{w}(t,x)\in\vec{J}_0(\Omega,\rho_0),\quad \rho_0^{-1}\nabla\Phi(t,x)\in\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0),\\ \rho_0^{-1}\nabla p(t,x)=\rho_0^{-1}\nabla p_1(t,x)+\rho_0^{-1}\nabla p_2(t,x),\\ \rho_0^{-1}\nabla p_1(x,t)\in\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0),\quad \rho_0^{-1}\nabla p_2(t,x)\in\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega,\rho_0).\end{gathered}\tag{2.6}$$

Обозначим через P_0, $P_{h,S}$ и $P_{0,\Gamma}$ ортопроекторы на подпространства $\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)$, $\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0)$, $\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega,\rho_0)$ соответственно. Тогда, подставляя (2.6) в первое уравнение (2.3) и применяя ортопроекторы, получаем

$$\frac{\partial^2\vec{w}}{\partial t^2}+P_0\left[N^2(x_3)\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}+w_3\right)\vec{e}_3\right]=P_0\psi_0,\tag{2.7}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\rho_0^{-1}\nabla\Phi\right)+\rho_0^{-1}\nabla p_1+P_{h,S}\left[N^2(x_3)\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}+w_3\right)\vec{e}_3\right]=P_{h,S}\psi_0,\tag{2.8}$$

$$\rho_0^{-1}\nabla p_2+P_{0,\Gamma}\left[N^2(x_3)\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}+w_3\right)\vec{e}_3\right]=P_{0,\Gamma}\psi_0.\tag{2.9}$$

Из соотношения (2.9) следует, что составляющая поля давлений, обусловленная слагаемым $\rho_0^{-1}\nabla p_2$, определяется лишь полем вертикального смещения v_3 и начальными условиями, следовательно, достаточно ограничиться рассмотрением первых двух соотношений, а также граничного условия с соответствующей заменой $p\to p_1$, так как $p=p_1+p_2$, $p_2=0$ (на Γ).

Для перехода от (2.7), (2.8) к системе уравнений с двумя искомыми функциями введем новые элементы:

$$P_{h,S}\Big[N^2(x_3)w_3\vec{e}_3\Big]:=\rho_0^{-1}\nabla\Psi\,,\qquad P_{h,S}\left[N^2(x_3)\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\vec{e}_3\right]:=\rho_0^{-1}\nabla\eta\,.\tag{2.10}$$

Тогда (2.8) дает интеграл Коши–Лагранжа

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+p_1+\Psi+\eta-F=c(t)\quad(\text{в}\,\Omega\,),\tag{2.11}$$

где $c(t)$ — произвольная функция времени, $P_{h,S}\psi_0=\rho_0^{-1}\nabla F$.

Рассмотрим (2.11) на Γ_2 и воспользуемся равенством

$$p_1=\rho_1\frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2}+Kv_3=\rho_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)+K\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)\quad(\text{на}\,\Gamma_2\,);$$

получим

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+\rho_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)+K\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)+\Psi+\eta=F+c(t)\quad(\text{на}\,\Gamma_2\,).\tag{2.12}$$

Аналогично получаем

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+g\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}+\Psi+\eta=F+c(t)\quad(\text{на}\,\Gamma_1\,).\tag{2.13}$$

Соотношения (2.12) и (2.13) вместе с (2.7) дает два уравнения для определения двух искомых функций $\vec{w}(t,x)$ и $\Phi(t,x)$, при этом учитываются связи (2.10), а также ограничения, следующие из (2.7)–(2.9). Таким образом, начально-краевую задачу (2.3) перепишем в виде:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2} + P_0\left[N^2(x_3)\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + w_3\right)\vec{e}_3\right] = P_0\psi_0 \quad (\text{в}\,\Omega), \\
\operatorname{div}\vec{w} = 0 \quad (\text{в}\,\Omega), \quad \vec{w}\cdot\vec{n} = 0 \quad (\text{на }\partial\Omega), \\
\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + \Psi + \eta = F + c(t) \quad (\text{на}\,\Gamma_1), \\
\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + \rho_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial \Phi}{\partial x_3}\right) + K\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial \Phi}{\partial x_3}\right) + \Psi + \eta = F + c(t) \quad (\text{на}\,\Gamma_2),
\end{gathered} \tag{2.14}
$$

$$
\begin{gathered}
\nabla\cdot(\rho_0^{-1}(x)\nabla\Phi) = 0 \quad (\text{в }\Omega), \quad \rho_0^{-1}(x)\nabla\Phi\cdot\vec{n} = 0 \quad (\text{на }S), \\
\int_\Gamma \Phi\, d\Gamma = 0, \quad \int_\Gamma \frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\, d\Gamma = 0, \\
\frac{\partial}{\partial t}w(0,x) = P_0\vec{u}^0, \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}(0,\hat{x})\right)_\Gamma = \left[\left(P_{h,S}\vec{u}^0(x)\right)\cdot\vec{n}\right]_\Gamma, \\
\vec{w}(0,x) = P_0\vec{v}^0, \quad \left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}(0,\hat{x})\right)_\Gamma = \zeta^0(\hat{x}) \quad (\hat{x}\in\Gamma).
\end{gathered} \tag{2.15}
$$

§ 3. Переход к системе дифференциально операторных уравнений

Напомним, что отклонение $v_3|_\Gamma = \left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3} + w_3\right)_\Gamma$ частиц подвижной поверхности должно удовлетворять условию сохранения объема жидкости при колебаниях:

$$
\int_\Gamma v_3\, d\Gamma = \int_\Gamma \left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3} + w_3\right) d\Gamma = 0 \implies \int_\Gamma \frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\, d\Gamma = 0,
$$

так как $w_3|_\Gamma = 0$, $\rho_0^{-1}|_\Gamma = \text{const}$. Это же условие является необходимым условием разрешимости задачи Неймана

$$
\begin{gathered}
\nabla\cdot(\rho_0^{-1}(x)\nabla\Phi) = 0 \quad (\text{в }\Omega), \quad \rho_0^{-1}(x)\nabla\Phi\cdot\vec{n} = 0 \quad (\text{на }S), \\
\rho_0^{-1}(0)\frac{\partial\Phi}{\partial x_3} = \psi \quad (\text{на }\Gamma), \quad \int_\Gamma \psi\, d\Gamma = 0.
\end{gathered} \tag{3.1}
$$

Функцию $\psi = \rho_0^{-1}(0)(\partial\Phi/\partial x_3)|_\Gamma$ будем рассматривать как элемент пространства $H = L_{2,\Gamma}$, $L_{2,\Gamma} := L_2(\Gamma)\ominus\{1_\Gamma\}$ и искать в виде пары функций $\psi = (\psi_1;\psi_2)$, где $\psi_1 = \psi|_{\Gamma_1}$ и $\psi_2 = \psi|_{\Gamma_2}$, то есть функций, заданных на соответствующих областях Γ_1 и Γ_2.

Рассмотрим следующие подпространства пространства H:

$$
\begin{gathered}
H_1 := \{(\psi_1;\psi_2) \mid \psi_1 \in L_2(\Gamma_1)\ominus\{1_{\Gamma_1}\}, \psi_2 \equiv 0\}, \\
H_2 := \{(\psi_1;\psi_2) \mid \psi_2 \in L_2(\Gamma_2)\ominus\{1_{\Gamma_2}\}, \psi_1 \equiv 0\}.
\end{gathered}
$$

Очевидно, что пространства H_1 и H_2 ортогональны относительно скалярного произведения в $L_2(\Gamma)$. Тогда пространство H можно разложить в ортогональную сумму трех пространств:

$$
H = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3,
$$

где H_3 есть одномерное подпространство пространства H, натянутое на вектор $\widehat{\varphi}$:

$$
H_3 = \{\widehat{v} \mid \widehat{v} = \alpha\widehat{\varphi}, \quad \forall\,\alpha\in\mathbb{C}, \quad \widehat{\varphi} = (\operatorname{mes}\Gamma_2; -\operatorname{mes}\Gamma_1)\}.
$$

Введем действующие в пространстве H ортопроекторы P_1, P_2 и P_3 на подпространства H_1, H_2 и H_3 соответственно. Они будут действовать по следующим правилам:

$$
\begin{gathered}
P_1 u = (u_1 - \tilde{u}_1; 0), \quad P_2 u = (0; u_2 - \tilde{u}_2), \quad \tilde{u}_i = (\operatorname{mes}\Gamma_i)^{-1}\int_{\Gamma_i} u_i\, d\Gamma_i, \quad i = 1,2, \\
P_3 u = (I - P_1 - P_2)\, u = (\tilde{u}_1; \tilde{u}_2).
\end{gathered} \tag{3.2}
$$

Для удобства дальнейших построений введем подпространство $\widehat{H}_2 := H_2 \oplus H_3$, тогда

$$H = H_1 \oplus \widehat{H}_2. \tag{3.3}$$

Отметим, что $\widehat{P}_2$ на подпространство $\widehat{H}_2$ действует по закону $\widehat{P}_2 u = P_2 u + P_3 u = (\widetilde{u}_1; u_2)$.

С учетом сказанного, граничные условия в (2.14) на Γ_1 и Γ_2 можно записать покомпонентно в следующем виде:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + g\rho_0\psi_1 + \Psi + \eta = F + c(t) \quad (\text{на } \Gamma_1\,), \\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + \rho_1\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2} + K\psi_2 + \Psi + \eta = F + c(t) \quad (\text{на } \Gamma_2\,).\end{gathered} \tag{3.4}$$

Спроектируем пару уравнений (3.4) на подпространства ортогонального разложения (3.3). Для этого предварительно выделим явно элемент из подпространства H_1 (для обозначения среднего интегрального значения функции, заданной на Γ или ее части, снова будем использовать знак " $\widetilde{\quad}$ ", см. (3.2)):

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\widetilde{(\Phi|_{\Gamma_1})}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\Phi|_{\Gamma_1} - \widetilde{(\Phi|_{\Gamma_1})}\right] + g\rho_0\widetilde{\psi}_1 + g\rho_0(\psi_1 - \widetilde{\psi}_1) + \\ + \left(\Psi - \widetilde{\Psi}\right) + \widetilde{\Psi} + (\eta - \widetilde{\eta}) + \widetilde{\eta} = \left(F - \widetilde{F}\right) + \widetilde{F} + c(t) \qquad (\text{на } \Gamma_1), \\ \frac{\partial^2\Phi|_{\Gamma_2}}{\partial t^2} + \rho_1\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2} + K\psi_2 + \Psi + \eta = F + c(t) \quad (\text{на } \Gamma_2\,).\end{gathered} \tag{3.5}$$

Отметим, что элемент $\left(\rho g(\psi_1 - \widetilde{\psi}_1); 0\right) \in H_1$. Элемент $\left(0; \rho_1(\partial^2\psi_2/\partial t^2)\right)$ принадлежит подпространству $\widehat{H}_2 \oplus \{1_\Gamma\}$. Значит, проекцию на $\widehat{H}_2$ можно представить в следующем виде:

$$M_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\widetilde{\psi}_1; \psi_2\right) := \widehat{P}_2\left(0; \rho_1\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2}\right) = \left(-c_1; \rho_1\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2} - c_1\right). \tag{3.6}$$

Из условия ортогональности функции 1_Γ следует формула для константы c_1:

$$c_1 = \frac{\operatorname{mes}\Gamma_2}{\operatorname{mes}\Gamma_1 + \operatorname{mes}\Gamma_2}\left(\rho_1\frac{\partial^2\widetilde{\psi}_2}{\partial t^2}\right) = \alpha_2\left(\rho_1\frac{\partial^2\widetilde{\psi}_2}{\partial t^2}\right), \quad \alpha_2 := \frac{\operatorname{mes}\Gamma_2}{\operatorname{mes}\Gamma_1 + \operatorname{mes}\Gamma_2}.$$

Аналогично поступаем с элементом $(g\rho_0\widetilde{\psi}_1; K\psi_2)$:

$$\begin{gathered}M_2\left(\widetilde{\psi}_1; \psi_2\right) := \widehat{P}_2\left(g\rho_0\widetilde{\psi}_1; K\psi_2\right) = \left(g\rho_0\widetilde{\psi}_1 - c_2; K\psi_2 - c_2\right), \\ c_2 = \frac{\operatorname{mes}\Gamma_1}{\operatorname{mes}\Gamma_1 + \operatorname{mes}\Gamma_2}\; g\rho_0\widetilde{\psi}_1 + \frac{\operatorname{mes}\Gamma_2}{\operatorname{mes}\Gamma_1 + \operatorname{mes}\Gamma_2}\;\left(\widetilde{K\psi_2}\right)_2 =: \\ =: \alpha_1\left(g\rho_0\widetilde{\psi}_1\right) + \alpha_2\left(\widetilde{K\psi_2}\right)_2, \quad \alpha_1 = 1 - \alpha_2 = \frac{\operatorname{mes}\Gamma_1}{\operatorname{mes}\Gamma_1 + \operatorname{mes}\Gamma_2}.\end{gathered} \tag{3.7}$$

Введем обозначения:

$$\begin{gathered}P_H\left(F|_{\Gamma_1}; F|_{\Gamma_2}\right) = \left(F|_{\Gamma_1}; F|_{\Gamma_2}\right) = P_1\left(F|_{\Gamma_1}; F|_{\Gamma_2}\right) + \widehat{P}_2\left(F|_{\Gamma_1}; F|_{\Gamma_2}\right) = \\ = \left(F|_{\Gamma_1} - \widetilde{(F|_{\Gamma_1})}; 0\right) + \left(\widetilde{(F|_{\Gamma_1})}; F|_{\Gamma_2}\right) =: f_1 + \widehat{f}_2. \\ P_H\left(\Psi|_{\Gamma_1}; \Psi|_{\Gamma_2}\right) = \left(\Psi|_{\Gamma_1}; \Psi|_{\Gamma_2}\right) = P_1\left(\Psi|_{\Gamma_1}; \Psi|_{\Gamma_2}\right) + \widehat{P}_2\left(\Psi|_{\Gamma_1}; \Psi|_{\Gamma_2}\right) = \\ = \left(\Psi|_{\Gamma_1} - \widetilde{(\Psi|_{\Gamma_1})}; 0\right) + \left(\widetilde{(\Psi|_{\Gamma_1})}; \Psi|_{\Gamma_2}\right) =: \Psi_1 + \widehat{\Psi}_2. \\ P_H\left(\eta|_{\Gamma_1}; \eta|_{\Gamma_2}\right) = \left(\eta|_{\Gamma_1}; \eta|_{\Gamma_2}\right) = P_1\left(\eta|_{\Gamma_1}; \eta|_{\Gamma_2}\right) + \widehat{P}_2\left(\eta|_{\Gamma_1}; \eta|_{\Gamma_2}\right) = \\ = \left(\eta|_{\Gamma_1} - \widetilde{(\eta|_{\Gamma_1})}; 0\right) + \left(\widetilde{(\eta|_{\Gamma_1})}; \eta|_{\Gamma_2}\right) =: \eta_1 + \widehat{\eta}_2.\end{gathered}$$

Будем считаем слагаемые функциями t со значениями в соответствующем гильбертовом пространстве. Поэтому, заменяя производные $\partial/\partial t$ на d/dt, окончательно после проектирования системы (3.5) получаем:

$$g\rho_0\left(\psi_1-\widetilde{\psi}_1;0\right)+\frac{d^2}{dt^2}\left(\Phi|_{\Gamma_1}-\widetilde{(\Phi|_{\Gamma_1})};0\right)+\left(\Psi|_{\Gamma_1}-\widetilde{(\Psi|_{\Gamma_1})};0\right)+ \\ +\left(\eta|_{\Gamma_1}-\widetilde{(\eta|_{\Gamma_1})};0\right)=\left(F|_{\Gamma_1}-\widetilde{(F|_{\Gamma_1})};0\right), \tag{3.8}$$

$$M_1\frac{d^2}{dt^2}\left(\widetilde{\psi}_1;\psi_2\right)+M_2\left(\widetilde{\psi}_1;\psi_2\right)+\frac{d^2}{dt^2}\left(\widetilde{(\Phi|_{\Gamma_1})};\Phi|_{\Gamma_2}\right)+ \\ +\left(\widetilde{(\Psi|_{\Gamma_1})};\Psi|_{\Gamma_2}\right)+\left(\widetilde{(\eta|_{\Gamma_1})};\eta|_{\Gamma_2}\right)=\left(\widetilde{(F|_{\Gamma_1})};F|_{\Gamma_2}\right). \tag{3.9}$$

Пусть $u_1(t):=\left(\psi_1-\widetilde{\psi}_1;0\right)\in H_1$ и $\widehat{u}_2(t):=\left(\widetilde{\psi}_1;\psi_2\right)\in\widehat{H}_2$, с учетом обозначений перепишем (3.8), (3.9) в виде

$$g\rho_0u_1+\frac{d^2}{dt^2}\left(\Phi|_{\Gamma_1}-\widetilde{(\Phi|_{\Gamma_1})};0\right)+\Psi_1+\eta_1=f_1, \tag{3.10}$$

$$M_1\frac{d^2\widehat{u}_2}{dt^2}+M_2\widehat{u}_2+\frac{d^2}{dt^2}\left(\widetilde{(\Phi|_{\Gamma_1})};\Phi|_{\Gamma_2}\right)+\widehat{\Psi}_2+\widehat{\eta}_2=\widehat{f}_2. \tag{3.11}$$

Представим в (3.10), (3.11) слагаемые, содержащие элемент Φ, в виде операторной матрицы, действующей на вектор-столбец $(u_1;\widehat{u}_2)^t$. Для этого рассмотрим $\Phi|_\Omega$ в виде

$$\Phi=\Phi_1+\Phi_2,$$

где $\Phi_1|_\Omega$ — решение (первой) вспомогательной задачи

$$\nabla\cdot(\rho_0^{-1}(x)\nabla\Phi_1)=0\quad(\text{в }\Omega),\qquad \rho_0^{-1}(x)\nabla\Phi_1\cdot\vec{n}=0\quad(\text{на }S),\qquad \int_\Gamma\Phi_1\,d\Gamma=0, \\ \rho_0^{-1}(0)\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_3}=\psi_1-\widetilde{\psi}_1\quad(\text{на }\Gamma_1),\qquad \rho_0^{-1}(0)\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_3}=0\quad(\text{на }\Gamma_2), \tag{3.12}$$

а $\Phi_2|_\Omega$ — решение (второй) вспомогательной задачи

$$\nabla\cdot(\rho_0^{-1}(x)\nabla\Phi_2)=0\quad(\text{в }\Omega),\qquad \rho_0^{-1}(x)\nabla\Phi_2\cdot\vec{n}=0\quad(\text{на }S),\qquad \int_\Gamma\Phi_2\,d\Gamma=0, \\ \rho_0^{-1}(0)\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_3}=\widetilde{\psi}_1\quad(\text{на }\Gamma_1),\qquad \rho_0^{-1}(0)\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_3}=\psi_2\quad(\text{на }\Gamma_2). \tag{3.13}$$

Граничные условия на $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$ в задачах (3.12) и (3.13) соответствуют условиям

$$\rho_0^{-1}(0)\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_3}=u_1\ (\text{на }\Gamma),\qquad \rho_0^{-1}(0)\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_3}=\widehat{u}_2\ (\text{на }\Gamma),$$

причем выполнены необходимые условия разрешимости этих задач (см., например, [2, с. 46]).

Введем оператор T_1, который ставит в соответствие функции $u_1=P_1\psi\in H_1$ решение задачи (3.12): $\Phi_1=\Phi_1|_\Omega=T_1(\psi_1-\widetilde{\psi}_1;0)=T_1P_1\psi=T_1u_1$.

Рассмотрим теперь значения функции Φ_1 на границе Γ. Введем оператор следа на границе Γ: $\gamma(\Phi_1|_\Omega):=\Phi_1|_\Gamma$ и представим функцию $\Phi_1|_\Gamma$ в виде суммы ее проекций на подпространства H_1 и $\widehat{H}_2$: $\Phi_1|_\Gamma=P_1\gamma T_1P_1\psi+\widehat{P}_2\gamma T_1P_1\psi=:C_{11}u_1+C_{21}u_1$.

Введем оператор T_2, который ставит в соответствие функции $\widehat{u}_2=\widehat{P}_2\psi\in\widehat{H}_2$ решение задачи (3.13): $\Phi_2=\Phi_2|_\Omega=T_2(\widetilde{\psi}_1;\psi_2)=T_2\widehat{P}_2\psi=T_2\widehat{u}_2$.

Снова рассмотрим значения функции Φ_2 на границе Γ и представим функцию $\Phi_2|_\Gamma$ в виде суммы проекций этой функции на подпространства H_1 и $\widehat{H}_2$:

$$\Phi_2|_\Gamma=P_1\gamma T_2\widehat{P}_2\psi+\widehat{P}_2\gamma T_2\widehat{P}_2\psi=:C_{12}\widehat{u}_2+C_{22}\widehat{u}_2.$$

С учетом сказанного, имеем

$$\left(\begin{array}{c}\left(\Phi|_{\Gamma_1}-\widetilde{(\Phi|_{\Gamma_1})};0\right)\\ \left(\widetilde{(\Phi|_{\Gamma_1})};\Phi|_{\Gamma_2}\right)\end{array}\right)=\begin{pmatrix}C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ \widehat{u}_2\end{pmatrix}.$$

Введем ряд обозначений

$$\Psi_1 =: B_{21}u_1, \quad \widetilde{\Psi}_2 =: B_{31}\widehat{u}_2, \quad \rho_0^{-1}\nabla\Psi_1 = \rho_0^{-1}\nabla\widehat{\Psi}_2 = P_{h,S}\Big[N^2(x_3)w_3\vec{e}_3\Big],$$

$$\eta_1 =: B_{22}u_1, \qquad \rho_0^{-1}\nabla\eta_1 = P_{h,S}\Big[N^2(x_3)\left((U_1u_1)\vec{e}_3\right)\vec{e}_3\Big],$$

$$\widehat{\eta}_2 =: B_{33}\widehat{u}_2, \qquad \rho_0^{-1}\nabla\widehat{\eta}_2 = P_{h,S}\Big[N^2(x_3)\left((U_2\widehat{u}_2)\vec{e}_3\right)\vec{e}_3\Big],$$

$$B_{11}\vec{w} := P_0\Big[N^2(x_3)w_3\vec{e}_3\Big], \quad B_{12}u_1 := P_0\Big[N^2(x_3)\left((U_1u_1)\vec{e}_3\right)\vec{e}_3\Big].$$

$$B_{13}\widehat{u}_2 := P_0\Big[N^2(x_3)\left((U_2\widehat{u}_2)\vec{e}_3\right)\vec{e}_3\Big].$$

Здесь через U_i $(i=1,2)$ обозначен оператор, который посредством решения вспомогательной задачи (см. (3.12), (3.13)) ставит в соответствие элементам u_1, $\widehat{u}_2$ функцию $\rho_0^{-1}\nabla\Phi_i \in \in \vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0)$, $i=1,2$.

Перепишем первое уравнение (2.14) и систему уравнений (3.10), (3.11), с учетом обозначений, в виде системы уравнений, которая в векторно-матричной форме принимает вид:

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix}I_0 & 0\\ 0 & A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{w}\\ u\end{pmatrix}+\left[\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \mathcal{N}_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\widehat{B}_{11} & \widehat{B}_{12}\\ \widehat{B}_{21} & \widehat{B}_{22}\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\vec{w}\\ u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_0\psi_0\\ f\end{pmatrix}, \tag{3.14}$$

$$A=\mathcal{N}_1+\mathcal{C}:=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & M_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\end{pmatrix}, \quad \mathcal{N}_2=\operatorname{diag}(\rho_0 gI_1;M_2), \tag{3.15}$$

$$\widehat{B}_{11}=B_{11}, \quad \widehat{B}_{12}=\begin{pmatrix}B_{12} & B_{13}\end{pmatrix}, \quad \widehat{B}_{21}=\begin{pmatrix}B_{21}\\ B_{31}\end{pmatrix}, \quad \widehat{B}_{22}=\begin{pmatrix}B_{22} & 0\\ 0 & B_{33}\end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B}:=\begin{pmatrix}\widehat{B}_{11} & \widehat{B}_{12}\\ \widehat{B}_{21} & \widehat{B}_{22}\end{pmatrix}, \quad u=(u_1;\widehat{u}_2)^t, \quad f=(f_1;\widehat{f}_2)^t, \tag{3.16}$$

I_0, I_1 — единичные операторы в $\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)$ и H_1 соответственно. Начальные условия задачи (2.14), (2.15) порождают начальные условия для уравнения (3.14):

$$\left(\vec{w}^0;u^0\right)^t=\left(\vec{w}(0);u(0)\right)^t, \quad \vec{w}(0)=P_0\vec{v}^0, \quad u(0)=(P_1\zeta^0;\widehat{P}_2\zeta^0)^t, \tag{3.17}$$

$$\left(\vec{w}^1;u^1\right)^t=\left(\vec{w}^{'}(0);u^{'}(0)\right)^t, \quad \vec{w}^1(0)=P_0\vec{u}^0, \quad u^1(0)=\left(P_1\left(\left(P_{h,S}\vec{u}^0\right)\cdot\vec{n}\right);\widehat{P}_2\left(\left(P_{h,S}\vec{u}^0\right)\cdot\vec{n}\right)\right)^t.$$

Итогом рассмотрения задачи (2.14), (2.15) в этом параграфе является теорема 2.

Теорема 2. *Начально-краевая задача* (2.14), (2.15) *равносильна задаче Коши* (3.14)–(3.17) *для дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве* $\mathcal{H}=\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)\oplus H$.

§ 4. Свойства операторных коэффициентов

Лемма 5. *Оператор* $\mathcal{C}$ (*см.* (3.15)) *самосопряженный компактный и положительный оператор, действующий в пространстве* $H=H_1\oplus\widehat{H}_2$.

Доказательство. Все операторы C_{ij} $(i,j=1,2)$, из которых состоит оператор C, являются произведением ограниченных операторов ортогонального проектирования на компактный оператор γT_j (см., например, [11]). Следовательно, все C_{ij} $(i,j=1,2)$ являются компактными операторами, а значит, и оператор C является компактным.

Докажем, что оператор C является самосопряженным. Обозначим через Φ решение задачи (3.1) при $\psi=u=(u_1;\widehat{u}_2)^t$. Для $\forall\ u,\, v\in H$ имеем:

$$(Cu,v)_H=\left(\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1\\ \widehat{u}_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix} v_1\\ \widehat{v}_2\end{pmatrix}\right)=\Big[(C_{11}u_1,P_1v)+\Big(C_{21}u_1,\widehat{P}_2v\Big)\Big]+$$
$$+\Big[(C_{12}\widehat{u}_2,P_1v)+\Big(C_{22}\widehat{u}_2,\widehat{P}_2v\Big)\Big]=\left(\Phi_1|_\Gamma\,,v\right)_H+\left(\Phi_2|_\Gamma\,,v\right)_H.$$

Обозначим через Υ решение задачи (3.1) при $\psi=v=(v_1;\widehat{v}_2)^t$, тогда

$$(Cu,v)_H=\int_\Gamma\Phi_1{\cdot}v\,d\Gamma+\int_\Gamma\Phi_2{\cdot}v\,d\Gamma=\int_\Gamma\Phi\cdot v\,d\Gamma=\int_\Gamma\Phi\cdot\rho_0^{-1}\frac{\partial\Upsilon}{\partial x_3}\,d\Gamma=$$
$$=\int_\Gamma\Phi\cdot\rho_0^{-1}\frac{\partial\Upsilon}{\partial x_3}\,d\Gamma+\int_S\Phi\cdot\rho_0^{-1}\frac{\partial\Upsilon}{\partial x_3}\,dS=\int_{\partial\Omega}\Phi\cdot\rho_0^{-1}\frac{\partial\Upsilon}{\partial x_3}\,dS=$$
$$=\int_\Omega\Phi\cdot\nabla\left(\rho_0^{-1}\nabla\Upsilon\right)\,d\,\Omega+\int_\Omega\rho_0(x_3)\cdot\rho_0^{-1}\nabla\Phi\cdot\rho_0^{-1}\nabla\Upsilon\,d\,\Omega=$$
$$=\int_\Omega\rho_0(x_3)\cdot\rho_0^{-1}\nabla\Phi\cdot\rho_0^{-1}\nabla\Upsilon\,d\,\Omega=\ldots=(u,Cv)_H.$$

Так как оператор C является ограниченным, то из полученного выражения следует, что оператор C — самосопряженный.

Рассмотрим теперь форму оператора C: $(Cu,u)_H=\displaystyle\int_\Omega\rho_0(x_3)\cdot\rho_0^{-1}\nabla\Phi\cdot\rho_0^{-1}\nabla\Phi\,d\Omega\geqslant 0$. Если $(Cu,u)_H=0$, то $\Phi=\mathrm{const}$. Тогда из условия нормировки функции Φ получаем, что $\Phi\equiv 0$, а следовательно, и $u=0$. Отсюда приходим к выводу, что оператор C положительный. Лемма доказана. □

Лемма 6. *Оператор $\mathcal{B}$ (см. (3.16)) — самосопряженный ограниченный и неотрицательный оператор, действующий в пространстве в $\mathcal{H}=\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)\oplus H$.*

Доказательство леммы следует из равенства (см. подробнее [11])

$$\left(\begin{pmatrix} \widehat{B}_{11} & \widehat{B}_{12}\\ \widehat{B}_{21} & \widehat{B}_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{w}\\ u\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\vec{w}\\ u\end{pmatrix}\right)_{\mathcal{H}}=\int_\Omega N^2(x_3)\rho_0(x_3)\left|w_3+\left(\rho_0^{-1}\nabla\Phi\cdot\vec{e}_3\right)\right|^2\,d\Omega.$$

Лемма 7. *Оператор $\mathcal{N}_2$ (см. (3.15)) на области определения*

$$\mathcal{D}(N_2)=H_1\oplus\mathcal{D}(M_2),\quad \mathcal{D}(M_2)=\{(\widetilde{\psi}_1;\psi_2)\in\widehat{H}_2\,|\,\psi_2\in\mathcal{D}(K)\},$$

является неограниченным самосопряженным положительно определенным оператором.

Доказательство. Исследуем оператор M_2 введенный в (3.7). Для $\forall\, u,v\in\mathcal{D}(\widehat{M}_2)\subset\widehat{H}_2$, $u=(\widetilde{u}_1;u_2)$, $v=(\widetilde{v}_1;v_2)$, в силу самосопряженности оператора ортогонального проектирования $\widehat{P}_2$ и оператора K, имеем:

$$(M_2u,v)=\Big(\widehat{P}_2\left(\rho_0g\widetilde{u}_1;Ku_2\right);\left(\widetilde{v}_1;v_2\right)\Big)=\Big(\left(\rho_0g\widetilde{u}_1;Ku_2\right);\widehat{P}_2\left(\widetilde{v}_1;v_2\right)\Big)=\left(\left(\rho_0g\widetilde{u}_1;Ku_2\right);\left(\widetilde{v}_1;v_2\right)\right)=$$
$$=\left(\rho_0g\widetilde{u}_1;\widetilde{v}_1\right)_{H_3}+\left(Ku_2;v_2\right)_{H_2}=\left(\widetilde{u}_1;\rho_0g\widetilde{v}_1\right)_{H_3}+\left(u_2;Kv_2\right)_{H_2}=\left(\left(\widetilde{u}_1;u_2\right);\left(\rho_0g\widetilde{v}_1;Kv_2\right)\right)=$$
$$=\Big(\widehat{P}_2\left(\widetilde{u}_1;u_2\right);\left(\rho_0g\widetilde{v}_1;Kv_2\right)\Big)=\Big(\left(\widetilde{u}_1;u_2\right);\widehat{P}_2\left(\rho_0g\widetilde{v}_1;Kv_2\right)\Big)=(u;M_2v),$$

откуда следует, что оператор M_2 — самосопряженный.

Далее имеем:

$$(M_2 u, u) = (\rho_0 g \widetilde{u}_1; \widetilde{u}_1)_{H_3} + (K u_2; u_2)_{H_2} \geqslant \min(c; \rho g) \|u\|^2_{\widehat{H}_2},$$

где $(K u_2, u_2)_{H_2} \geqslant c \|u_2\|^2_{H_2}$ (см. замечание 2), а значит, M_2 — положительно определенный оператор в $\widehat{H}_2$. Тогда и для оператора $N_2 = \operatorname{diag}(\rho_0 g I_1; M_2)$ эти свойства сохранятся, то есть оператор N_2 — неограниченный самосопряженный положительно определенный оператор, и следовательно, ограниченно обратим. Обратный $\mathcal{N}_2^{-1}$ при этом является положительным оператором. □

Изучим свойства оператора N_1, который имеет вид (см. (3.14)):

$$N_1 = \operatorname{diag}(0, M_1), \quad M_1 \widehat{u}_2 = (-c_1; \rho_1 \psi_2 - c_1), \tag{4.1}$$

где (см. подробнее (3.6)) $c_1 = \alpha_2 \left(\rho_1 \widetilde{\psi}_2\right)$. Опираясь на представления оператора M_1, учитывая связь между $\widetilde{\psi}_1$ и $\widetilde{\psi}_2$: $\widetilde{\psi_1} \operatorname{mes} \Gamma_1 + \widetilde{\psi_2} \operatorname{mes} \Gamma_2 = 0$, имеем:

$$\begin{aligned}
(M_1 \widehat{u}_2, \widehat{u}_2)_{\widehat{H}_2} &= \left((-c_1; \rho_1 \psi_2 - c_1); (\widetilde{\psi_1}; \psi_2)\right)_{\widehat{H}_2} = \\
&= \left(-c_1; \widetilde{\psi_1}\right)_{H_3} + (\rho_1 \psi_2 - c_1; \psi_2)_{H_2} = \\
&= -c_1 \widetilde{\psi_1} \operatorname{mes} \Gamma_1 + \rho_1 \int_{\Gamma_2} |\psi_2|^2 d\Gamma_2 - c_1 \widetilde{\psi_2} \operatorname{mes} \Gamma_2 = \\
&= -\alpha_2 \rho_1 \widetilde{\psi}_2 \widetilde{\psi_1} \operatorname{mes} \Gamma_1 + \rho_1 \int_{\Gamma_2} |\psi_2|^2 d\Gamma_2 - \alpha_2 \rho_1 \widetilde{\psi}_2 \widetilde{\psi_2} \operatorname{mes} \Gamma_2 = \\
&= \rho_1 \int_{\Gamma_2} |\psi_2|^2 d\Gamma_2 - \alpha_2 \rho_1 \widetilde{\psi}_2 \left(\widetilde{\psi_1} \operatorname{mes} \Gamma_1 + \widetilde{\psi_2} \operatorname{mes} \Gamma_2\right) = \\
&= \rho_1 \int_{\Gamma_2} |\psi_2|^2 d\Gamma_2.
\end{aligned}$$

Из полученного результата следует

Лемма 8. *Для M_1 и N_1 из (4.1) справедливы оценки: $0 \leqslant M_1 \leqslant \rho_1 \widehat{I}$, $0 \leqslant N_1 \leqslant \rho_1 I$, где $\widehat{I}$ и I — единичные операторы в $\widehat{H}_2$ и H соответственно.*

§ 5. Вспомогательное утверждение

Пусть $\mathcal{H} = H_1 \oplus H_2$ — произвольное комплексное гильбертово пространство. Рассмотрим в $\mathcal{H}$ задачу Коши для дифференциального уравнения следующего вида:

$$\begin{gathered}
\frac{d^2 v}{dt^2} + \mathcal{A} v = f + R v, \quad v(0) = (u_1(0); u_2(0))^t, \quad v'(0) = (u_1'(0); u_2'(0))^t, \qquad (5.1)\\
\mathcal{A} := I_B F, \quad R = \operatorname{diag}(I_1; 0), \quad F = \operatorname{diag}(I_1; A^{-1}) \quad f = (f_1; f_2)^t, \quad v = (u_1; u_2)^t,\\
\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}(I_B F) = \mathcal{D}(F). \quad 0 \ll I_B = I_B^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \quad 0 < A = A^* \in \mathcal{L}(H_2).
\end{gathered}$$

Введем эквивалентную норму в пространстве $\mathcal{H} = H_1 \oplus H_2$: $[v_1; v_2] := (I_B^{-1} v_1; v_2)$, тогда

$$[I_B F v_1; v_2] = (F v_1; v_2) = (v_1; F v_2) = (v_1; I_B^{-1} I_B F v_2) = [v_1; I_B F v_2],$$

следовательно, $\mathcal{A} = I_B F$ — самосопряженный оператор, более того, он является неограниченным и положительно определенным оператором.

Определение 1. *Сильным (по переменной t) решением задачи (5.1) на отрезке* $[0, T]$ *назовем такую функцию $v(t)$ со значениями в $\mathcal{H}$, для которой выполнены следующие условия:*

1) $v(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ при любом $t \in [0; T]$ и $\mathcal{A} v(t) \in C([0; T]; \mathcal{H})$;

2) $v'(t) \in C^1\left([0; T]; \mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2})\right)$; $v''(t) \in C([0; T]; \mathcal{H})$;

3) выполнено уравнение (5.1), где все слагаемые — функции из $C([0; T]; \mathcal{H})$, и начальные условия.

Теорема 3. *Если выполнены условия*

$$v(0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}(I_B F) = \mathcal{D}(F), \quad v'(0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2}) = \mathcal{D}((I_B F)^{1/2}) = \mathcal{D}(F^{1/2}), \tag{5.2}$$

$$f(t) \in C^1\left([0;T];\mathcal{H}\right), \quad \mathcal{H} = H_1 \oplus H_2, \tag{5.3}$$

тогда задача (5.1) *имеет единственное сильное решение на отрезке* $[0;T]$.

Доказательство. Теорему существования сильного решения задачи Коши (5.1) докажем, опираясь на преобразования, изложенные в [16, с. 291–293].

Введем новые искомые функции $F^{1/2}v =: u$, $u' = F^{1/2}v' = F^{1/2}w$, $v' = w$, и перейдем к системе уравнений первого порядка:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -I_B F^{1/2} \\ F^{1/2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f + RF^{-1/2}u \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} I_B & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -F^{1/2} \\ F^{1/2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{w} \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f + RF^{-1/2}u \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь оператор $\operatorname{diag}(I_B; I_2)$ ограничен и положительно определен, а оператор

$$\begin{pmatrix} 0 & -F^{1/2} \\ F^{1/2} & 0 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} 0 & iF^{1/2} \\ -iF^{1/2} & 0 \end{pmatrix}$$

является генератором унитарной группы операторов, действующей в пространстве $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. Поэтому произведение таких операторов обладает таким же свойством в пространстве с эквивалентной нормой, определяемой оператором $\operatorname{diag}(I_B^{-1}; I_2)$.

Далее, дополнительное слагаемое, определяемое выражением $(RF^{-1/2}u; 0)^t$, соответствует ограниченному возмущению генератора унитарной и потому сильно непрерывной группы операторов. Поэтому операторный коэффициент в полученной задаче Коши является генератором сильно непрерывной группы операторов. Значит, если выполнены условия

$$F^{1/2}v^0 = u^0 \in \mathcal{D}(F^{1/2}) \iff v^0 \in \mathcal{D}(F), \; v^1 = w^0 \in \mathcal{D}(F^{1/2}), \quad f(t) \in C^1\left([0,T]; H\right),$$

то задача (5.1) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0, T]$. □

Замечание 4. Теорему 3 можно доказать также, опираясь на тот факт, что оператор $I_B F$ является самосопряженным и положительно определенным в пространстве с эквивалентной нормой. Поэтому он является генератором семейства косинус-функций, действующих в этом пространстве (см. [17, с. 175–177]). Далее, так как оператор R из (5.1) ограничен, то возмущенный оператор $I_B F - R$, согласно теореме 8.5 из [17, с. 177], также является генератором семейства косинус-функций. Отсюда снова следует, что при выполнении условий (5.2), (5.3) задача (5.1) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0, T]$.

§ 6. Теорема существования сильного решения

Перепишем уравнение (3.14) в следующем виде

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} \vec{w} \\ Au \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_0 + \widehat{B}_{11} & \widehat{B}_{12} \\ \widehat{B}_{21} & \mathcal{N}_2 + \widehat{B}_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{w} \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0\psi_0 \\ f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{w} \\ u \end{pmatrix}. \tag{6.1}$$

Осуществим замену $\mathcal{N}_2^{1/2}u = z$ в (6.1) и применим оператор $\operatorname{diag}\left(I_0; \mathcal{N}_2^{-1/2}\right)$ к обеим частям уравнения, в результате приходим к задаче

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} \vec{w} \\ \mathcal{N}_2^{-1/2}A\mathcal{N}_2^{-1/2}z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_0 + \widehat{B}_{11} & \widehat{B}_{12}\mathcal{N}_2^{-1/2} \\ \mathcal{N}_2^{-1/2}\widehat{B}_{21} & I_2 + \mathcal{N}_2^{-1/2}\widehat{B}_{22}\mathcal{N}_2^{-1/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{w} \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} P_0\psi_0 \\ \mathcal{N}_2^{-1/2}f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{w} \\ z \end{pmatrix}.$$

Пусть теперь $\mathcal{N}_2^{-1/2}A\mathcal{N}_2^{-1/2}z = y$, что равносильно

$$\mathcal{A}_N z := \mathcal{N}_2^{-1/2}A\mathcal{N}_2^{-1/2}z = \mathcal{N}_2^{-1/2}A\mathcal{N}_2^{-1/2}(\mathcal{N}_2^{1/2}u) = \mathcal{N}_2^{-1/2}Au = y. \tag{6.2}$$

С учетом сказанного приходим к следующей задаче Коши:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \mathcal{A}v = f + Rv, \quad v(0) = (\vec{w}(0); y(0))^t, \quad v^{'}(0) = (\vec{w}^{'}(0); y^{'}(0))^t, \tag{6.3}$$
$$\mathcal{A} := I_B F, \quad R = \begin{pmatrix} I_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = (P_0\psi_0; \mathcal{N}_2^{-1/2}f)^t, \quad v = (\vec{w}; y)^t,$$
$$I_B = \begin{pmatrix} I_0 + \widehat{B}_{11} & \widehat{B}_{12}\mathcal{N}_2^{-1/2} \\ \mathcal{N}_2^{-1/2}\widehat{B}_{21} & I_2 + \mathcal{N}_2^{-1/2}\widehat{B}_{22}\mathcal{N}_2^{-1/2} \end{pmatrix}, \; F = \begin{pmatrix} I_0 & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_N^{-1} \end{pmatrix}.$$

Теорема 4. *Если выполнены условия*

$$(\vec{w}^0; u^0) \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus \mathcal{D}(\mathcal{N}_2), \quad (\vec{w}^1; u^1) \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus \mathcal{D}(\mathcal{N}_2^{1/2}), \quad f(t) \in C^1\left([0, T]; \mathcal{H}\right),$$

то существует единственное сильное решение задачи (3.14).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполнены условия

$$v(0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \quad v'(0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2}), \quad f(t) \in C^1\left([0; T]; \mathcal{H}\right),$$

тогда задачи Коши (6.3), согласно теореме 3, имеет единственное сильное решение на отрезке $[0; T]$. С учетом замены (6.2) имеем

$$\Big(\ v^0 = (\vec{w}^0; y^0)^t \in \mathcal{D}(\mathcal{A})\ \Big) \quad \Leftrightarrow \quad \Big(\ \vec{w}^0 \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0), \quad y^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_N^{-1})\ \Big) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \Big(\ \vec{w}^0 \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0), \quad \mathcal{A}_N^{-1}y^0 \in H\ \Big) \Leftrightarrow \Big(\ \vec{w}^0 \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0), \quad u^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{N}_2)\ \Big).$$

Далее,

$$\Big(\ v^1 = (\vec{w}^1; y^1)^t \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2})\ \Big) \quad \Leftrightarrow \quad \Big(\ \vec{w}^1 \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0), \quad y^1 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_N^{-1/2})\ \Big) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \Big(\ \vec{w}^1 \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0), \quad A_N^{-1/2}y_2^1 = \mathcal{A}_N^{1/2}\mathcal{N}_2^{1/2}u^1 \in H\ \Big) \Leftrightarrow \Big(\ \vec{w}^1 \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0), \quad u^1 \in \mathcal{D}(\mathcal{N}_2^{1/2})\ \Big).$$
$$f(t) \in C^1\left([0; T]; \mathcal{H}\right) \;\Leftrightarrow\; \Big(\ P_0\psi_0 \in C^1\left([0; T]; \vec{J}_0(\Omega, \rho_0)\right), \; \mathcal{N}_2^{-1/2}f \in C^1\left([0; T]; H\right)\ \Big) \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \Big(\ P_0\psi_0 \in C^1\left([0; T]; \vec{J}_0(\Omega, \rho_0)\right), \quad f \in C^1\left([0; T]; H\right)\ \Big).$$

Здесь оператор $\mathcal{N}_2^{-1/2}$ является ограниченным. □

Определение 2. *Сильным (по переменной t) решением задачи* (1.2) *на промежутке* $[0, T]$ назовем набор функций $\vec{u}\,(t, x)$, $p\,(t, x)$, $\rho\,(t, x)$, $\zeta\,(t, \hat{x})$, для которых выполнены следующие условия:
(1) $\vec{u}\,(t) \in C^1\left([0, T]\,; \vec{J}_{0,S}\,(\Omega, \rho_0)\right)$, $\rho_0^{-1}\nabla p \in C\left([0, T]\,; \vec{G}\,(\Omega, \rho_0)\right)$, $\rho\,(t) \in C^1\left([0, T]\,; \mathfrak{L}\,(\Omega)\right)$, где $\mathfrak{L}_2(\Omega)$ — гильбертово пространство скалярных функций со скалярным произведением (см. подробнее (1.12))

$$(\varphi, \psi)_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} := g^2 \int_\Omega \left[\rho_0(x_3)N^2(x_3)\right]^{-1} \varphi(x)\overline{\psi(x)}\, d\Omega,$$

и при любом $t \in [0, T]$ справедливо первое уравнение (1.2);
(2) $u_n = \partial\zeta/\partial t \in C\left([0, T]\,; H\right)$; выполнено граничное условие на Γ_1 и Γ_2:

$$p = g\rho_0(0)\zeta \in C\left([0, T]\,; L_2(\Gamma_1)\right), \quad p = \rho_1\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} + K\zeta \in C\left([0, T]\,; L_2(\Gamma_2)\right),$$

где все слагаемые являются непрерывными по t функциями со значениями в $L_2(\Gamma_1)$ и $L_2(\Gamma_2)$ соответственно; выполнены начальные условия (1.2).

Возвращаясь от задачи (3.14) по всем преобразованиям назад, приходим к условиям существования сильного (по переменной t) решения исходной начально-краевой задачи (1.2).

Теорема 5. *Пусть выполнены условия*

$$\vec{u}^0 \in \vec{J}_{0,S}\left(\Omega, \rho_0\right), \quad \rho^0 \in \mathfrak{L}_2(\Omega), \quad f(t) \in C^1\left([0,T]; \vec{L}_2(\Omega, \rho_0)\right),$$
$$\zeta^0 \in L_2\left(\Gamma\right), \quad \int_\Gamma \zeta^0 d\Gamma = 0, \quad \zeta^0|_{\Gamma_2} \in \mathcal{D}(K),$$
$$\zeta^1 := \left[\left(P_{h,S}\vec{u}^0(x)\right) \cdot \vec{n}\right]_\Gamma \in L_2\left(\Gamma\right), \quad \int_\Gamma \zeta^1 d\Gamma = 0, \quad \zeta^1|_{\Gamma_2} \in \mathcal{D}(K^{1/2}).$$

Тогда задача (1.2) *имеет единственное сильное по t решение.*

Замечание 5. Вспоминая вид оператора K (см. (1.8)) и его область определения до расширения (см. (1.9)), можно записать в теореме 5 более простые достаточные условия на функцию ζ^0:

$$\zeta^0 \in C^1\left(\overline{\Gamma}\right), \quad \zeta^0 \in C^4\left(\overline{\Gamma}_2\right), \quad \int_\Gamma \zeta^0 \, d\Gamma = 0,$$
$$\zeta^0 = \frac{\partial \zeta^0}{\partial \nu} = 0 \ (\text{на } \gamma_2), \quad M\zeta^0 = N\zeta^0 = 0 \ (\text{на } \partial\Gamma_2 \setminus \gamma_2).$$

Для функции ζ^1 накладывается условие принадлежности области определения оператора $K^{1/2}$. В этом случае главные условия сохраняются (1.5), а естественные условия (1.6) снимаются (см. замечание 3), и потому достаточно потребовать, чтобы

$$\zeta^1 \in C^2\left(\overline{\Gamma}\right), \quad \int_\Gamma \zeta^1 \, d\Gamma = 0, \quad \zeta^1 = \frac{\partial \zeta^1}{\partial \nu} = 0 \ (\text{на } \gamma_2).$$

Автор приносит благодарность Н. Д. Копачевскому за обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Краусс В.К. Внутренние волны. Л.: Гидрометеоиздат, 1968. 272 с.
2. Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. М.: Наука, 1989. 416 с.
3. Kopachevsky N.D., Krein S.G. Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 1. Self-adjoint problems for an ideal fluid. Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 2001. 384 p.
4. Kopachevsky N.D., Krein S.G. Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 2. Nonself-adjoint problems for viscous fluids. Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 2003. 444 p.
5. Копачевский Н.Д., Темнов А.Н. Колебания стратифицированной жидкости в бассейне произвольной формы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1986. Т. 26. № 5. С. 734–755.
6. Копачевский Н.Д., Цветков Д.О. Колебания стратифицированной жидкости // Современная математика. Фундаментальные направления. 2008. Т. 29. С. 103–130.
7. Габов С.А., Свешников А.Г. Задачи динамики стратифицированных жидкостей. М.: Наука, 1986. 288 с.
8. Габов С.А., Свешников А.Г. Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. М.: Наука, 1990. 344 с.
9. Козин В.М., Жесткая В.Д., Погорелова А.В., Чижиумов С.Д., Джабраилов М.Р., Морозов В.С., Кустов А.Н. Прикладные задачи динамики ледяного покрова. М.: Академия естествознания, 2008. 329 с.
10. Букатов А.Е. Волны в море с плавающим ледяным покровом. Севастополь: Морской гидрофизический институт РАН, 2017. 360 с.
11. Цветков Д.О. Малые движения идеальной стратифицированной жидкости со свободной поверхностью, полностью покрытой упругим льдом // Сибирские электронные математические известия. 2018. Т. 15. С. 422–435.

12. Цветков Д.О. Нормальные колебания идеальной стратифицированной жидкости со свободной поверхностью, полностью покрытой упругим льдом // Таврический вестник информатики и математики. 2017. Вып. 3 (36). С. 79–93.
13. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. М.: Мир, 1985. 416 с.
14. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Том V. М.: Наука, 1960. 656 с.
15. Михлин С.Г. Курс математической физики. М.: Наука, 1968. 576 с.
16. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. 464 с.
17. Голдстейн Дж. Полугруппы линейных операторов и их приложения. Киев: Выща школа, 1989. 347 с.

Поступила в редакцию 13.05.2018

Цветков Денис Олегович, к. ф.-м. н., доцент, кафедра математического анализа, Крымский федеральный университет, Таврическая академия, 295007, Россия, Крым, г. Симферополь, пр. Вернадского, 4.
E-mail: tsvetdo@gmail.com

D. O. Tsvetkov

Small motions of an ideal stratified fluid partially covered with elastic ice

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 3, pp. 328–347 (in Russian).

Keywords: stratification effect in ideal fluids, initial boundary value problem, differential equation in Hilbert space, Cauchy problem, strong solution.

MSC2010: 35D35, 47D03

DOI: 10.20537/vm180305

We study the problem of small motions of an ideal stratified fluid with a free surface, partially covered with elastic ice. Elastic ice is modeled by an elastic plate. The problem is studied on the basis of an approach connected with application of the so-called operator matrices theory. To this end we introduce Hilbert spaces and some of their subspaces as well as auxiliary boundary value problems. The initial boundary value problem is reduced to the Cauchy problem for the differential second-order equation in Hilbert space. After a detailed study of the properties of the operator coefficients corresponding to the resulting system of equations, we prove a theorem on the strong solvability of the Cauchy problem obtained on a finite time interval. On this basis, we find sufficient conditions for the existence of a strong (with respect to the time variable) solution of the initial-boundary value problem describing the evolution of the hydrosystem.

REFERENCES

1. Krauss V.K. *Vnutrennie volny* (Internal waves), Leningrad: Gidrometeoizdat, 1968, 272 p.
2. Kopachevskii N.D., Krein S.G., Ngo Zui Kan. *Operatornye metody v lineinoi gidrodinamike: evolyutsionnye i spektral'nye zadachi* (Operator methods in linear hydrodynamics: evolution and spectral problems), Moscow: Nauka, 1989, 416 p.
3. Kopachevsky N.D., Krein S.G. *Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 1. Self-adjoint problems for an ideal fluid*, Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 2001, 384 p.
4. Kopachevsky N.D., Krein S.G. *Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 2. Nonself-adjoint problems for viscous fluids*, Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 2003, 444 p.
5. Kopachevskii N.D., Temnov A.N. Vibrations of a stratified liquid in a basin of arbitrary shape, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1986, vol. 26, issue 3, pp. 58–72.
DOI: 10.1016/0041-5553(86)90113-8
6. Kopachevskii N.D., Tsvetkov D.O. Oscillations of stratified fluids, *Journal of Mathematical Sciences*, 2010, vol. 164, no. 4, pp. 574–602. DOI: 10.1007/s10958-010-9764-9
7. Gabov S.A., Sveshnikov A.G. *Zadachi dinamiki stratifitsirovannykh zhidkostei* (Problems of dynamics of stratified fluids), Moscow: Nauka, 1986, 288 p.

8. Gabov S.A., Sveshnikov A.G. *Lineinye zadachi teorii nestatsionarnykh vnutrennikh voln* (Linear problems in the theory of nonstationary internal waves), Moscow: Nauka, 1990, 344 p.
9. Kozin V.M., Zhestkaya V.D., Pogorelova A.V., Chizhiumov S.D., Dzhabrailov M.R., Morozov V.S., Kustov A.N. *Prikladnye zadachi dinamiki ledyanogo pokrova* (Applied problems of ice cover dynamics), Moscow: Akademiya estestvoznaniya, 2008, 329 p.
http://www.monographies.ru/ru/book/view?id=14
10. Bukatov A.E. *Volny v more s plavayushchim ledyanym pokrovom* (Waves in the sea with a floating ice cover), Sevastopol: Marine Hydrophysical Institute of the Russian Academy of Sciences, 2017, 360 p.
11. Tsvetkov D.O. Small motions of an ideal stratified fluid with a free surface completely covered with the elastic ice, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2018, vol. 15, pp. 422–435.
DOI: 10.17377/semi.2018.15.038
12. Tsvetkov D.O. Normal oscillations of ideal stratified fluid with a free surface completely covered with the elastic ice, *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*, 2017, issue 3, pp. 79–93 (in Russian).
13. Rektorys K. *Variationsmethoden in Mathematik, Physik und Technik*, München–Wien: Hanser-Verlag, 1984.
14. Smirnov V.I. *Kurs vysshei matematiki. Tom V* (Course of higher mathematics. Vol. V), Moscow: Nauka, 1960, 656 p.
15. Mikhlin S.G. *Kurs matematicheskoi fiziki* (Course of mathematical physics), Moscow: Nauka, 1968, 576 p.
16. Krein S.G. *Linear equations in Banach spaces*, Boston–Basel–Stuttgart: Birkhäuser, 1982.
DOI: 10.1007/978-1-4684-8068-9
17. Goldstein J.A. Semigroups of linear operators and applications, Oxford University Press, 1985, 245 p.

Received 13.05.2018

Tsvetkov Denis Olegovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Mathematical Analysis, Crimean Federal University, pr. Vernadskogo, 4, Simferopol, Crimea, 295007, Russia.
E-mail: tsvetdo@gmail.com