ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

МАТЕМАТИКА 2018. Т. 28. Вып. 3

УДК 517.912, 514.1

© *В. А. Кыров, Г. Г. Михайличенко*

ВЛОЖЕНИЕ АДДИТИВНОЙ ДВУМЕТРИЧЕСКОЙ ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОЙ ГЕОМЕТРИИ ДВУХ МНОЖЕСТВ РАНГА $(2,2)$ В ДВУМЕТРИЧЕСКИЕ ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫЕ ГЕОМЕТРИИ ДВУХ МНОЖЕСТВ РАНГА $(3,2)$

В данной работе методом вложения строится классификация двуметрических феноменологически симметричных геометрий двух множеств (ФС ГДМ) ранга $(3,2)$ по ранее известной аддитивной двуметрической ФС ГДМ ранга $(2,2)$, задаваемой парой функций $g^1 = x + \xi$ и $g^2 = y + \eta$. Суть этого метода состоит в нахождении функций, задающих ФС ГДМ ранга $(3,2)$ по функциям $g^1 = x + \xi$ и $g^2 = y + \eta$. При решении этой задачи используем тот факт, что двуметрические ФС ГДМ ранга $(3,2)$ допускают группы преобразований размерности 4, а двуметрические ФС ГДМ ранга $(2,2)$ — размерности 2. Из этого следует, что компоненты операторов алгебры Ли группы преобразований двуметрической ФС ГДМ ранга $(3,2)$ являются решениями системы восьми линейных дифференциальных уравнений первого порядка от двух переменных. Исследуя эту систему уравнений, приходим к возможным выражениям для систем операторов. Затем из систем операторов выделяем операторы, образующие алгебры Ли. Потом, применяя экспоненциальное отображение, по найденным алгебрам Ли восстанавливаем действия групп Ли. Эти действия как раз и задают двуметрические ФС ГДМ ранга $(3,2)$.

Ключевые слова: феноменологически симметричная геометрия двух множеств, система дифференциальных уравнений, алгебра Ли, группа Ли преобразований.

DOI: 10.20537/vm180304

Введение

В конце 60-х годов прошлого века появилась теория физических структур, которая первоначально занималась анализом физических законов [1]. В этой теории выделяются два направления: теория феноменологически симметричных (ФС) геометрий на одном множестве, включающая в себя геометрии локальной максимальной подвижности, а также теория феноменологически симметричных (ФС) геометрий на двух множествах (ГДМ). Основной задачей теории физических структур является классификация как геометрий на одном множестве, так и геометрий на двух множествах. Разработано несколько методов классификации таких геометрий: функциональный, групповой и метод вложения. Первые два метода позволили построить классификации геометрий низких размерностей [1]. При построении классификаций этими методами геометрий высоких размерностей наталкиваемся на большие технические трудности. Метод вложения, разработанный первым соавтором, позволяет преодолеть такие трудности.

В рамках первого направления методом вложения решено несколько задач, среди которых нахождение всех трехмерных ФС геометрий [2], задаваемых функциями вида $f = \kappa\left((x_1 - x_2)^2 \pm (y_1 - y_2)^2, z_1, z_2\right)$, а также нахождение всех трехмерных ФС геометрий с функциями $f = \kappa\left(x_1y_2 - x_2y_1, z_1, z_2\right)$ [3]. Заметим, что первый аргумент функции κ задает ФС геометрию в двумерном многообразии. В первом случае — это либо евклидова, либо псевдоевклидова плоскости, а во втором случае — симплектическая плоскость. Решая первую задачу, получаем функции: $f = (x_1 - x_2)^2 \pm (y_1 - y_2)^2 \pm (z_1 - z_2)^2$; $f = [(x_1 - x_2)^2 \pm (y_1 - y_2)^2]e^{z_1+z_2}$, а решая вторую задачу, имеем: $f = x_1y_2 - x_2y_1 + z_1 - z_2$. Решение поставленных задач сводится к решению функциональных и дифференциальных уравнений.

В рамках второго направления методом вложения также решено несколько задач [4,5]. Так, в работе [4] В. А. Кыровым решена задача о вложении однометрической ФС ГДМ ранга $(2,2)$

в однометрическую ФС ГДМ ранга $(3,2)$. Суть этой задачи состоит в следующем: по известной функции $g = x+\xi$, задающей ФС ГДМ ранга $(2,2)$, находим все функции ФС ГДМ ранга $(3,2)$, имеющие вид $f = f(x+\xi,\eta)$. Доказывается, что существует только одно решение $f = x\xi+\eta$. Далее, по найденной функции методом вложения находим все функции ФС ГДМ ранга $(3,3)$: $f = x\xi + y\eta$ и $f = x\xi + y + \eta$. Аналогичная задача решается также и в работе [5], в которой, например, по первой функции ФС ГДМ ранга $(3,3)$ находится функция, задающая ФС ГДМ ранга $(4,3)$: $f = x\xi + y\eta + \theta$.

В этой статье задача о вложении переносится на случай двуметрических ФС ГДМ. Ставится задача о нахождении по двухкомпонентной функции

$$g^1 = x+\xi, \quad g^2 = y+\eta \tag{0.1}$$

двуметрической ФС ГДМ ранга $(2,2)$ всех двухкомпонентных функций вида

$$f^1 = \chi^1\big(x+\xi, y+\eta, \mu, \nu\big), \quad f^2 = \chi^2\big(x+\xi, y+\eta, \mu, \nu\big), \tag{0.2}$$

задающих двуметрическую ФС ГДМ ранга $(3,2)$. Решение поставленной задачи сводится к решению систем линейных уравнений. Отметим, что (x,y) — локальные координаты произвольной точки первого многообразия, а (ξ,η,μ,ν) — локальные координаты произвольной точки второго многообразия. Двухкомпонентная функция (0.2) локально изотопна действию некоторой группы Ли в первом многообразии [1]. По этой двухкомпонентной функции также можно построить групповую операцию [6].

§ 1. Основные определения

Формулировки и определения в этом параграфе приведены по работе [1]. Пусть имеются два дифференцируемых класса C^2 многообразия M и N_{2n}, причем $\dim M = 2$ и $\dim N_{2n} = 2n$, $n = 1,2$. Точки первого многообразия обозначаются: u, u_1, u_2, …, а второго — v, v_1, v_2, … . Рассматривается также функция $f\colon M\times N_{2n} \to R^2$ класса C^2, сопоставляющая паре точек $\langle u,v\rangle$ из открытой и плотной области определения $S_f \subseteq M\times N_{2n}$ пару чисел $f(u,v) = \big(f^1(u,v), f^2(u,v)\big)$. В отношении функции f предполагается выполнение аксиомы невырожденности.

Аксиома невырожденности при $n=1$. Выполняются неравенства

$$\frac{\partial\big(f^1(u,v), f^2(u,v)\big)}{\partial(x,y)} \neq 0, \quad \frac{\partial\big(f^1(u,v), f^2(u,v)\big)}{\partial(\xi,\eta)} \neq 0,$$

где (x,y) — локальные координаты точки $u\in M$, а (ξ,η) — локальные координаты точки $v\in N_2$, для плотного в $M\times N_2$ множества пар $\langle u,v\rangle$.

Аксиома невырожденности при $n=2$. Выполняются неравенства

$$\frac{\partial\big(f^1(u,v), f^2(u,v)\big)}{\partial(x,y)} \neq 0, \quad \frac{\partial\big(f^1(u_1,v), f^2(u_1,v), f^1(u_2,v), f^2(u_2,v)\big)}{\partial(\xi,\eta,\mu,\nu)} \neq 0,$$

где (x,y) — локальные координаты точки $u\in M$, а (ξ,η,μ,ν) — локальные координаты точки $v\in N_4$, для плотных в $M\times N_4$ и $M^2\times N_4$ множеств пар $\langle u,v\rangle$ и троек $\langle u_1,u_2;v\rangle$.

Определение 1. Пусть $n=1$. Будем говорить, что функция $f\colon M\times N_2\to R^2$ на многообразиях M и N_2 задает *двуметрическую феноменологически симметричную геометрию двух множеств* (*ФС ГДМ*) *ранга* $(2,2)$, если кроме аксиомы невырожденности при $n=1$, дополнительно выполняется аксиома:

Аксиома ФС при $n=1$. Существует плотное множество четверок $\langle u_1,u_2;v_1,v_2\rangle$ в $M^2\times N_2^2$, где $\langle u_i,v_j\rangle\in S_f$, $i,j=1,2$, для каждой из которых найдется функция $\Phi = (\Phi^1,\Phi^2)\colon R^8\to R^2$ класса C^2 такая, что $\operatorname{rang}\Phi = 2$ и выполняется равенство:

$$\Phi(f(u_1,v_1), f(u_2,v_1, f(u_1,v_2), f(u_2,v_2)) = 0.$$

Ниже для удобства функция двуметрической ФС ГДМ ранга $(2, 2)$ обозначается

$$g = \left(g^1, g^2\right) = g(x, y, \xi, \eta). \tag{1.1}$$

Было доказано существование двух решений, одно из которых — аддитивное (0.1) [7].

Определение 2. Пусть $n = 2$. Будем говорить, что функция $f\colon M \times N_4 \to R^2$ на многообразиях M и N_4 задает *двуметрическую ФС ГДМ ранга* $(3, 2)$, если, кроме аксиомы невырожденности при $n = 2$, дополнительно выполняется аксиома:

Аксиома ФС при $n = 2$. Существует плотное множество таких пятерок $\langle u_1, u_2, u_3; v_1, v_2\rangle$ в $M^3 \times N_4^2$, где $\langle u_i; v_j\rangle \in S_f$, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2$, для каждой из которых найдется функция $\Phi = (\Phi^1, \Phi^2)\colon R^{12} \to R^2$ класса C^2 такая, что $\operatorname{rang}\Phi = 2$ и выполняется равенство:

$$\Phi(f(u_1, v_1), f(u_2, v_1), f(u_3, v_1), f(u_1, v_2), f(u_2, v_2), f(u_3, v_2)) = 0.$$

Определения 1 и 2 даны согласно работе [1] и формулируются с точностью до локальной изотопии.

Определение 3. Пусть L^1, L^2, N^1, N^2, D^1, D^2 — многообразия класса C^2. Будем говорить, что функции $\rho_1\colon L^1 \times N^1 \to D^1$ и $\rho_2\colon L^2 \times N^2 \to D^2$ класса C^2 *локально изотопны*, если существуют такие три локальных диффеоморфизма $\lambda_1\colon L^1 \longrightarrow L^2$, $\lambda_2\colon N^1 \longrightarrow N^2$, $\lambda_3\colon D^1 \longrightarrow D^2$ класса C^2, что

$$\lambda_3 \circ \rho_1 = \rho_2 \circ (\lambda_1 \times \lambda_2).$$

Локальная изотопия обозначается так: $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

Согласно построениям в [8], функции f и q, задающие одну двуметрическую ФС ГДМ, локально изотопны, если существуют три локальных диффеоморфизма λ_1, λ_2, λ_3 ($\lambda_1\colon M \longrightarrow M$, $\lambda_2\colon N \longrightarrow N$, $\lambda_3\colon R^2 \longrightarrow R^2$), для которых $\lambda_3 \circ q = f \circ (\lambda_1 \times \lambda_2)$.

Определение 4. Будем говорить, что двуметрическая ФС ГДМ ранга $(2, 2)$ *вкладывается* в двуметрическую ФС ГДМ ранга $(3, 2)$, если для произвольной пары из S_f в некоторых окрестностях $U \subset M$ и $V \subset N_4$ существуют такие локальные системы координат, в которых функция f двуметрической ФС ГДМ ранга $(3, 2)$ представима в виде:

$$f = \chi\bigl(g^1(x, y, \xi, \eta), g^2(x, y, \xi, \eta), \mu, \nu\bigr), \tag{1.2}$$

где $\chi = \left(\chi^1, \chi^2\right) = \chi(u, v, \mu, \nu)$ — функция класса C^2 четырех переменных $u = g^1(x, y, \xi, \eta)$, $v = g^2(x, y, \xi, \eta)$, μ, ν, а $g = \left(g^1, g^2\right)$ — функция двуметрической ФС ГДМ ранга $(2, 2)$.

§ 2. Групповые свойства

Сначала определим локальное действие группы Ли G в многообразии Z класса C^2, которое приводим согласно работе [9].

Определение 5. Дифференцируемое класса C^2 отображение $\pi\colon Z \times G \to Z$ называется *эффективным локальным действием*, если выполняются свойства:

(1) $\pi(z, e) = z$ для всех $z \in W$, где W — область в Z, $e \in G$ — единица;

(2) $\pi(\pi(z, h_1), h_2) = \pi(z, h_1 h_2)$ для всех $z \in W$, где $h_1, h_2 \in G$;

(3) $\pi(z, h) = z$ для всех $z \in W$, где $h \in G$, тогда и только тогда, когда $h = e$;

(4) $\pi_h\colon Z \to Z$ — локальный диффеоморфизм для всякого $h \in G$.

Тройка (Z, G, π) называется *локальной группой Ли преобразований* многообразия Z.

Рассмотрим группу Ли G^2 и ее эффективные локальные действия в многообразиях M и N_2: $\lambda\colon M\times G^2\to M$ и $\sigma\colon N_2\times G^2\to N_2$, причем $\dim G^2=2$. Эти действия задают локальные группы Ли преобразований (M,G^2,λ) и (N_2,G^2,σ). Пусть функция (1.1) двуметрической ФС ГДМ ранга $(2,2)$ сохраняет свой вид относительно этих действий, т. е. $g(u,v)=g(\lambda(u,h),\sigma(v,h))$, где $h\in G^2$. Таким образом, функция g является двухточечным инвариантом действий группы G^2 в многообразиях M и N_2. Локально критерий инвариантности этих действий записывается так: $Xg+\Xi g=0$. Операторы алгебр Ли локальных групп преобразований (M,G^2,λ) и (N_2,G^2,σ) имеют вид: $X=X^1\partial_x+X^2\partial_y$, $\Xi=\Xi^1\partial_\xi+\Xi^2\partial_\eta$, где $X^{1,2}=X^{1,2}(x,y)$ и $\Xi^{1,2}=\Xi^{1,2}(\xi,\eta)$ — функции класса C^1.

Аналогично рассмотрим группу Ли G^4 и ее эффективные локальные действия в многообразиях M и N_4: $\lambda'\colon M\times G^4\to M$ и $\sigma'\colon N_4\times G^4\to N_4$, причем $\dim G^4=4$. Локальные группы Ли преобразований: (M,G^4,λ') и (N_4,G^4,σ'). Пусть функция (1.2) двуметрической ФС ГДМ ранга $(3,2)$ сохраняет свой вид относительно этих действий, т. е. является двухточечным инвариантом действий группы G^4. Локальный критерий инвариантности: $Yf+\Omega f=0$. Операторы алгебр Ли этих групп преобразований: $Y=Y^1\partial_x+Y^2\partial_y$, $\Omega=\Omega^1\partial_\xi+\Omega^2\partial_\eta+\Omega^3\partial_\mu+\Omega^4\partial_\nu$, где $Y^{1,2}=Y^{1,2}(x,y)$, $\Omega^{1,2,3,4}=\Omega^{1,2,3,4}(\xi,\eta,\mu,\nu)$ — функции класса C^1.

В работах [1,7,8] доказана важная теорема.

Теорема 1. *Функция $f\colon M\times N_4\to R^2$ двуметрической ФС ГДМ ранга $(3,2)$ локально изотопна действию $\lambda'\colon M\times G^4\to M$ группы Ли G^4 в многообразии M, причем эта функция является двухточечным инвариантом пары действий $\lambda'\colon M\times G^4\to M$ и $\sigma'\colon N_4\times G^4\to N_4$.*

Таким образом, основной задачей этой работы является нахождение действий групп Ли преобразований. Эти действия находятся с точностью до локального подобия. Локальным подобием действий $\lambda'\colon M\times G^4\to M$ и $\lambda''\colon M\times G^4\to M$ называется локальная изотопия (λ_1,λ_2,id), причем $\lambda_2\colon G^4\to G^4$ — изоморфизм [8].

Из определения 4 и явного выражения для функции (0.1) следует, что базис алгебры Ли группы Ли преобразований (M,G^4,λ') составляют операторы

$$X_1=\partial_x,\quad X_2=\partial_y,\quad Y_1=A\partial_x+C\partial_y,\quad Y_2=B\partial_x+D\partial_y. \tag{2.1}$$

Произвольный оператор Y является линейной комбинацией базисных операторов. По таким операторам с помощью экспоненциального отображения

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\operatorname{Exp}(tY)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+tY\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+(tY)^2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}/2!+\ldots \tag{2.2}$$

находятся однопараметрические группы Ли преобразований многообразия M. Для записи явного вида уравнений такого действия необходимо четыре раза применить экспоненциальное отображение (2.2) (для четырех линейно независимых операторов с новым параметром) и вычислить их композицию. Тогда для локальных действий $\lambda'\colon M\times G^4\to M$ будем иметь:

$$x'=\lambda_1'(x,y,t_1,t_2,t_3,t_4),\quad y'=\lambda_2'(x,y,t_1,t_2,t_3,t_4), \tag{2.3}$$

где λ_1' и λ_2' — отображения класса C^2. Для тождественного преобразования $t_1=t_2=t_3=t_4=0$. В работах [1,8] доказано, что действия (2.3) задают двуметрические ФС ГДМ ранга $(3,2)$ тогда и только тогда, когда они дважды локально транзитивны, т. е. дважды применяемые такие действия просто транзитивны. Тогда уравнения

$$\begin{cases} x_1'=\lambda_1'(x_1,y_1,t_1,t_2,t_3,t_4), & y_1'=\lambda_2'(x_1,y_1,t_1,t_2,t_3,t_4),\\ x_2'=\lambda_1'(x_2,y_2,t_1,t_2,t_3,t_4), & y_2'=\lambda_2'(x_2,y_2,t_1,t_2,t_3,t_4)\end{cases} \tag{2.4}$$

задают просто транзитивную группу Ли преобразований многообразия M^2.

Теорема 2. *Группа Ли преобразований с операторами ее алгебры Ли вида*

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_1 = \Lambda_1(x,y)\partial_x, \quad Y_2 = \Lambda_2(x,y)\partial_x \tag{2.5}$$

не является локально дважды транзитивной.

Доказательство. Как было сказано выше, дважды транзитивная группа Ли преобразований многообразия M с уравнениями (2.3) задает в M^2 локальную просто транзитивную группу преобразований с уравнениями (2.4). Пусть нам дана группа Ли преобразований многообразия M с алгеброй Ли (2.5). Тогда для действия группы преобразований в M^2 алгебра Ли будет задаваться операторами $X_1 = \partial_{x_1} + \partial_{x_2}$, $X_2 = \partial_{y_1} + \partial_{y_2}$, $Y_1 = \Lambda_1(x_1,y_1)\partial_{x_1} + \Lambda_1(x_2,y_2)\partial_{x_2}$, $Y_2 = \Lambda_2(x_1,y_1)\partial_{x_1} + \Lambda_2(x_2,y_2)\partial_{x_2}$. Матрица коэффициентов этих операторов вырождена. Значит, группа Ли преобразований многообразия M с операторами алгебры Ли (2.5) не является локально дважды транзитивной. $\square$

Алгебра Ли обладает важным свойством — замкнутость относительно коммутирования, т. е. коммутаторы $[X_1, Y_1]$, $[X_1, Y_2]$, $[X_2, Y_1]$, $[X_2, Y_2]$ принадлежат этой же алгебре Ли. В координатной записи, с учетом (2.1), это свойство приводит к системе дифференциальных уравнений на коэффициенты A, B, C, D:

$$\begin{cases} A_x = a_1^1 A + a_1^2 B + g_1, & A_y = b_1^1 A + b_1^2 B + q_1, \\ B_x = a_2^1 A + a_2^2 B + g_2, & B_y = b_2^1 A + b_2^2 B + q_2, \\ C_x = a_1^1 C + a_1^2 D + p_1, & C_y = b_1^1 C + b_1^2 D + r_1, \\ D_x = a_2^1 C + a_2^2 D + p_2, & D_y = b_2^1 C + b_2^2 D + r_2, \end{cases} \tag{2.6}$$

причем a_1^1, a_1^2, a_2^1, a_2^2, b_1^1, b_1^2, b_2^1, b_2^2, g_1, g_2, q_1, q_2, p_1, p_2, r_1, r_2 $=$ const. Введем матричные обозначения:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, \quad \vec{C} = \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}, \quad T_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} b_1^1 & b_1^2 \\ b_2^1 & b_2^2 \end{pmatrix},$$

$$\vec{G} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{Q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{R} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда система (2.6) в матричном виде принимает простой вид:

$$\vec{A}_x = T_1\vec{A} + \vec{G}, \quad \vec{A}_y = T_2\vec{A} + \vec{Q}, \quad \vec{C}_x = T_1\vec{C} + \vec{P}, \quad \vec{C}_y = T_2\vec{C} + \vec{R}. \tag{2.7}$$

Теорема 3. *Для алгебры Ли группы Ли преобразований (M, G^4, λ') в подходящем базисе матрица T_1 принимает один из следующих шести видов:*

$$(1)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (3)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (4)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}; \quad (5)\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}; \quad (6)\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \tag{2.8}$$

где λ, λ_1, λ_2, α, β — вещественные постоянные, причем λ, λ_1, λ_2, $\beta \neq 0$. Если матрица T_1 имеет вид 1 или вид 4, где $\lambda_1 = \lambda_2$, то в подходящем базисе матрица T_2 принимает один из шести видов (2.8).

Доказательство. Базис алгебры Ли группы Ли преобразований (M, G^4, λ') задается операторами (2.1). Переходим к новому базису $X_1' = X_1$, $X_2' = X_2$, $Y_1' = \chi_1 Y_1 + \chi_2 Y_2$, $Y_2' = \chi_3 Y_1 + \chi_4 Y_2$, причем матрица коэффициентов $\chi = \begin{pmatrix} \chi_1 & \chi_2 \\ \chi_3 & \chi_4 \end{pmatrix}$ невырождена. Тогда выражения (2.1) принимают следующий вид: $X_1 = \partial_x$, $X_2 = \partial_y$, $Y_1' = A'\partial_x + C'\partial_y$, $Y_2' = B'\partial_x + D'\partial_y$, причем

$$\vec{A'} = \chi\vec{A}, \quad \vec{C'} = \chi\vec{C}. \tag{2.9}$$

Далее вычисляя коммутаторы $[X_1, Y_1']$ и $[X_1, Y_2']$, учитывая их замкнутость и сравнивая коэффициенты перед ∂_x и ∂_y, получаем векторные уравнения $\overrightarrow{A'}_x = T_1'\overrightarrow{A'} + \overrightarrow{G'}$, $\overrightarrow{A'}_y = T_2'\overrightarrow{A'} + \overrightarrow{Q'}$, $\overrightarrow{C'}_x = T_1'\overrightarrow{C'} + \overrightarrow{P'}$, $\overrightarrow{C'}_y = T_2'\overrightarrow{C'} + \overrightarrow{R'}$. В последнюю систему подставляем выражения (2.9) и сравниваем с (2.7), имеем

$$T_1 = \chi^{-1}T_1'\chi, \quad T_2 = \chi^{-1}T_2'\chi.$$

В линейной алгебре доказывается, что подбором невырожденной матрицы χ матрицу T_1 можно привести к жордановому виду [10, с. 482], то есть приходим к утверждению теоремы.

Для доказательства второй части следует заметить, что если матрица T_1 имеет вид 1 или вид 4, где $\lambda_1 = \lambda_2$, то $T_1 = \chi^{-1}T_1\chi$ для любой невырожденной матрицы χ. Тогда предыдущие рассуждения можно применить к матрице T_2. □

§ 3. Решение задачи вложения

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\overrightarrow{x}}{dt} = T\overrightarrow{x} + \overrightarrow{g}, \tag{3.1}$$

где $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\overrightarrow{\xi} + y\overrightarrow{\eta}$, $\overrightarrow{g} = \begin{pmatrix} g \\ p \end{pmatrix} = g\overrightarrow{\xi} + p\overrightarrow{\eta} = \mathrm{const}$, $\overrightarrow{\xi} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\eta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Справедливы утверждения [11, гл. 3, § 5].

Предложение 1. *Система дифференциальных уравнений* (3.1) *при* $\overrightarrow{g} = 0$ *с матрицей коэффициентов* T *вида* (2.8) *имеет следующие решения:*

$$1.\ \overrightarrow{x} = c_1\overrightarrow{\xi} + c_2\overrightarrow{\eta}; \quad 2.\ \overrightarrow{x} = (c_2t + c_1)\overrightarrow{\xi} + c_2\overrightarrow{\eta}; \quad 3.\ \overrightarrow{x} = c_1e^{\lambda_1 t}\overrightarrow{\xi} + c_2\overrightarrow{\eta};$$
$$4.\ \overrightarrow{x} = c_1e^{\lambda_1 t}\overrightarrow{\xi} + c_2e^{\lambda_2 t}\overrightarrow{\eta}; \quad 5.\ \overrightarrow{x} = (c_2t + c_1)e^{\lambda t}\overrightarrow{\xi} + c_2e^{\lambda t}\overrightarrow{\eta};$$
$$6.\ \overrightarrow{x} = e^{\alpha t}(c_1\cos\beta t + c_2\sin\beta t)\overrightarrow{\xi} + e^{\alpha t}(c_2\cos\beta t - c_1\sin\beta t)\overrightarrow{\eta},$$

где $c_1, c_2 = \mathrm{const}$.

Предложение 2. *Система дифференциальных уравнений* (3.1) *при* $\overrightarrow{g} \neq 0$ *с матрицей коэффициентов* T *вида* (2.8) *имеет следующие решения:*

$$1.\ \overrightarrow{x} = (gt + c_1)\overrightarrow{\xi} + (pt + c_2)\overrightarrow{\eta}; \qquad 2.\ \overrightarrow{x} = \left(\frac{pt^2}{2} + gt + c_2t + c_1\right)\overrightarrow{\xi} + (pt + c_2)\overrightarrow{\eta};$$
$$3.\ \overrightarrow{x} = \left(c_1e^{\lambda_1 t} - \frac{g}{\lambda_1}\right)\overrightarrow{\xi} + (pt + c_2)\overrightarrow{\eta}; \qquad 4.\ \overrightarrow{x} = \left(c_1e^{\lambda_1 t} - \frac{g}{\lambda_1}\right)\overrightarrow{\xi} + \left(c_2e^{\lambda_2 t} - \frac{p}{\lambda_2}\right)\overrightarrow{\eta};$$
$$5.\ \overrightarrow{x} = \left((c_2t + c_1)e^{\lambda t} + \frac{p}{\lambda^2} - \frac{g}{\lambda}\right)\overrightarrow{\xi} + \left(c_2e^{\lambda t} - \frac{p}{\lambda}\right)\overrightarrow{\eta};$$
$$6.\ \overrightarrow{x} = \left(e^{\alpha t}(c_1\cos\beta t + c_2\sin\beta t) - \frac{g\alpha - p\beta}{\alpha^2 + \beta^2}\right)\overrightarrow{\xi} + \left(e^{\alpha t}(c_2\cos\beta t - c_1\sin\beta t) - \frac{p\alpha + g\beta}{\alpha^2 + \beta^2}\right)\overrightarrow{\eta},$$

где $c_1, c_2 = \mathrm{const}$.

Далее решаем систему дифференциальных уравнений (2.7). Полагаем $\overrightarrow{G} = g_1\overrightarrow{\xi} + g_2\overrightarrow{\eta}$, $\overrightarrow{Q} = q_1\overrightarrow{\xi} + q_2\overrightarrow{\eta}$, $\overrightarrow{P} = p_1\overrightarrow{\xi} + p_2\overrightarrow{\eta}$, $\overrightarrow{R} = r_1\overrightarrow{\xi} + r_2\overrightarrow{\eta}$ и учитываем предложение 2 и теорему 3. Легко доказывается следующая теорема.

Теорема 4. *Решениями первого и третьего уравнений системы* (2.7) *с матрицей коэффициентов* T_1, *принимающих один из видов* (2.8), *являются следующие функции:*

1. $$\overrightarrow{A} = \overrightarrow{G}x + \overrightarrow{A_1}(y), \quad \overrightarrow{C} = \overrightarrow{P}x + \overrightarrow{C_1}(y);$$

2.
$$\begin{cases} \overrightarrow{A} = \left(\dfrac{g_2}{2}x^2 + g_1 x + c_2(y)x + c_1(y)\right)\overrightarrow{\xi} + (g_2 x + c_2(y))\overrightarrow{\eta}, \\ \overrightarrow{C} = \left(\dfrac{p_2}{2}x^2 + p_1 x + d_2(y)x + d_1(y)\right)\overrightarrow{\xi} + (p_2 x + d_2(y))\overrightarrow{\eta}; \end{cases}$$

3. $\overrightarrow{A} = \left(c_1(y)e^{\lambda_1 x} - \dfrac{g_1}{\lambda_1}\right)\overrightarrow{\xi} + (g_2 x + c_2(y))\overrightarrow{\eta}, \quad \overrightarrow{C} = \left(d_1(y)e^{\lambda_1 x} - \dfrac{p_1}{\lambda_1}\right)\overrightarrow{\xi} + (p_2 x + d_2(y))\overrightarrow{\eta};$

4. $\overrightarrow{A} = \left(c_1(y)e^{\lambda_1 x} - \dfrac{g_1}{\lambda_1}\right)\overrightarrow{\xi} + \left(c_2(y)e^{\lambda_2 x} - \dfrac{g_2}{\lambda_2}\right)\overrightarrow{\eta}, \ \overrightarrow{C} = \left(d_1(y)e^{\lambda_1 x} - \dfrac{p_1}{\lambda_1}\right)\overrightarrow{\xi} + \left(d_2(y)e^{\lambda_2 x} - \dfrac{p_2}{\lambda_2}\right)\overrightarrow{\eta};$

5.
$$\begin{cases} \overrightarrow{A} = \left((c_2(y)x + c_1(y))e^{\lambda x} + \dfrac{g_2}{\lambda^2} - \dfrac{g_1}{\lambda}\right)\overrightarrow{\xi} + \left(c_2(y)e^{\lambda x} - \dfrac{g_2}{\lambda}\right)\overrightarrow{\eta}, \\ \overrightarrow{C} = \left((d_2(y)x + d_1(y))e^{\lambda x} + \dfrac{p_2}{\lambda^2} - \dfrac{p_1}{\lambda}\right)\overrightarrow{\xi} + \left(d_2(y)e^{\lambda x} - \dfrac{p_2}{\lambda}\right)\overrightarrow{\eta}; \end{cases}$$

6.
$$\begin{cases} \overrightarrow{A} = \left(e^{\alpha x}(c_1(y)\cos\beta x + c_2(y)\sin\beta x) - \dfrac{g_1\alpha - g_2\beta}{\alpha^2+\beta^2}\right)\overrightarrow{\xi} + \\ \qquad + \left(e^{\alpha x}(c_2(y)\cos\beta x - c_1(y)\sin\beta x) - \dfrac{g_2\alpha + g_1\beta}{\alpha^2+\beta^2}\right)\overrightarrow{\eta}, \\ \overrightarrow{C} = \left(e^{\alpha x}(d_1(y)\cos\beta x + d_2(y)\sin\beta x) - \dfrac{p_1\alpha - p_2\beta}{\alpha^2+\beta^2}\right)\overrightarrow{\xi} + \\ \qquad + \left(e^{\alpha x}(d_2(y)\cos\beta x - d_1(y)\sin\beta x) - \dfrac{p_2\alpha + p_1\beta}{\alpha^2+\beta^2}\right)\overrightarrow{\eta}. \end{cases}$$

Далее решения из теоремы 4 подставляем во второе и четвертое уравнения системы (2.7), в итоге получим компоненты векторных полей (2.1).

Теорема 5. *Решение системы дифференциальных уравнений* (2.7) *в подходящем базисе принимает один из следующих видов:*

1.1. $\overrightarrow{A} = (g_1 x + q_1 y + c_1)\overrightarrow{\xi} + (g_2 x + q_2 y + c_2)\overrightarrow{\eta}, \quad \overrightarrow{C} = (p_1 x + r_1 y + d_1)\overrightarrow{\xi} + (p_2 x + r_2 y + d_2)\overrightarrow{\eta};$

1.2.
$$\overrightarrow{A} = \left(\frac{q_2}{2}y^2 + q_1 y + c_2 y + c_1 + g_1 x\right)\overrightarrow{\xi} + (q_2 y + c_2)\overrightarrow{\eta},$$
$$\overrightarrow{C} = \left(\frac{r_2}{2}y^2 + r_1 y + d_2 y + d_1 + p_1 x\right)\overrightarrow{\xi} + (r_2 y + d_2)\overrightarrow{\eta};$$

1.3. $\overrightarrow{A} = \left(c_1 e^{\omega_1 y} - \dfrac{q_1}{\omega_1}\right)\overrightarrow{\xi} + (q_2 y + c_2 + g_2 x)\overrightarrow{\eta}, \quad \overrightarrow{C} = \left(d_1 e^{\omega_1 y} - \dfrac{r_1}{\omega_1}\right)\overrightarrow{\xi} + (r_2 y + d_2 + p_2 x)\overrightarrow{\eta};$

1.4. $\overrightarrow{A} = \left(c_1 e^{\omega_1 y} - \dfrac{q_1}{\omega_1}\right)\overrightarrow{\xi} + \left(c_2 e^{\omega_2 y} - \dfrac{q_2}{\omega_2}\right)\overrightarrow{\eta}, \quad \overrightarrow{C} = \left(d_1 e^{\omega_1 y} - \dfrac{r_1}{\omega_1}\right)\overrightarrow{\xi} + \left(d_2 e^{\omega_2 y} - \dfrac{r_2}{\omega_2}\right)\overrightarrow{\eta};$

1.5.
$$\overrightarrow{A} = \left((c_2 y + c_1)e^{\omega y} + \frac{q_2}{\omega^2} - \frac{q_1}{\omega}\right)\overrightarrow{\xi} + \left(c_2 e^{\omega y} - \frac{q_2}{\omega}\right)\overrightarrow{\eta},$$
$$\overrightarrow{C} = \left((d_2 y + d_1)e^{\omega y} + \frac{r_2}{\omega^2} - \frac{r_1}{\omega}\right)\overrightarrow{\xi} + \left(d_2 e^{\omega y} - \frac{r_2}{\omega}\right)\overrightarrow{\eta};$$

1.6.
$$\begin{aligned}\overrightarrow{A} &= \left(e^{\gamma y}(c_1\cos\delta y + c_2\sin\delta y) - \frac{q_1\gamma - q_2\delta}{\gamma^2+\delta^2}\right)\overrightarrow{\xi} + \\ &+ \left(e^{\gamma y}(c_2\cos\delta y - c_1\sin\delta y) - \frac{q_2\gamma + q_1\delta}{\gamma^2+\delta^2}\right)\overrightarrow{\eta}, \\ \overrightarrow{C} &= \left(e^{\gamma y}(d_1\cos\delta y + d_2\sin\delta y) - \frac{r_1\gamma - r_2\delta}{\gamma^2+\delta^2}\right)\overrightarrow{\xi} + \\ &+ \left(e^{\gamma y}(d_2\cos\delta y - d_1\sin\delta y) - \frac{r_2\gamma + r_1\delta}{\gamma^2+\delta^2}\right)\overrightarrow{\eta};\end{aligned}$$

2.1.
$$\begin{aligned}\overrightarrow{A} &= \left(\frac{g_2}{2}x^2 + g_1x + c_2x + q_1y + c_1\right)\overrightarrow{\xi} + (g_2x + c_2)\overrightarrow{\eta}, \qquad q_2 = 0, \\ \overrightarrow{C} &= \left(\frac{p_2}{2}x^2 + p_1x + d_2x + r_1y + d_1\right)\overrightarrow{\xi} + (p_2x + d_2)\overrightarrow{\eta}, \qquad r_2 = 0;\end{aligned}$$

2.2.
$$\begin{aligned}\overrightarrow{A} &= \left(\frac{g_2}{2}x^2 + g_1x + g_2\nu_1xy + c_2x + \frac{g_2}{2}y^2\nu_1^2 + c_2\nu_1y + q_1y + c_1\right)\overrightarrow{\xi} + (g_2x + g_2\nu_1y + c_2)\overrightarrow{\eta}, \\ \overrightarrow{C} &= \left(\frac{p_2}{2}x^2 + p_1x + p_2\nu_1xy + d_2x + \frac{p_2}{2}y^2\nu_1^2 + d_2\nu_1y + r_1y + d_1\right)\overrightarrow{\xi} + (p_2x + p_2\nu_1y + d_2)\overrightarrow{\eta}, \\ &q_2 = g_2\nu_1, \quad r_2 = p_2\nu_1;\end{aligned}$$

2.3.
$$\begin{aligned}\overrightarrow{A} &= (g_1x + c_2x + c_2\nu_1y + q_1y + c_1)\overrightarrow{\xi} + c_2\overrightarrow{\eta}, \qquad g_2 = 0, \qquad q_2 + c_2\nu_2 = 0, \\ \overrightarrow{C} &= (p_1x + d_2x + d_2\nu_1y + r_1y + d_1)\overrightarrow{\xi} + d_2\overrightarrow{\eta}, \qquad p_2 = 0, \qquad r_2 + d_2\nu_2 = 0;\end{aligned}$$

2.4. $\overrightarrow{A} = (g_1\nu_2 - q_2)/\mu_2\overrightarrow{\xi} - g_1\overrightarrow{\eta},\ T_2\overrightarrow{A} + \overrightarrow{Q} = 0,\ \overrightarrow{C} = (p_1\nu_2 - r_2)/\mu_2\overrightarrow{\xi} - p_1\overrightarrow{\eta},\ T_2\overrightarrow{C} + \overrightarrow{R} = 0;$

2.5.
$$\begin{aligned}\overrightarrow{A} &= (g_1x + (c_2e^{\mu_1y} - g_1)x + e^{\mu_1y}(c_2\nu_1y + c_1) + g_1\nu_1/\mu_1 - q_1/\mu_1)\overrightarrow{\xi} + (c_2e^{\mu_1y} - g_1)\overrightarrow{\eta}, \\ \overrightarrow{C} &= (p_1x + (d_2e^{\mu_1y} - p_1)x + e^{\mu_1y}(d_2\nu_1y + d_1) + p_1\nu_1/\mu_1 - r_1/\mu_1)\overrightarrow{\xi} + (d_2e^{\mu_1y} - p_1)\overrightarrow{\eta}, \\ &q_2 = g_1\mu_1, \quad r_2 = p_1\mu_1, \quad \mu_1 = \nu_2 \neq 0;\end{aligned}$$

2.6.
$$\begin{aligned}\overrightarrow{A} &= (c_1e^{\mu_1y} + g_1\nu_1/\mu_1 - q_1/\mu_1)\overrightarrow{\xi} - g_1\overrightarrow{\eta}, \qquad q_2 = g_1\nu_2, \qquad \mu_1 \neq \nu_2, \\ \overrightarrow{C} &= (d_1e^{\mu_1y} + p_1\nu_1/\mu_1 - r_1/\mu_1)\overrightarrow{\xi} - p_1\overrightarrow{\eta}, \qquad r_2 = p_1\nu_2, \qquad \mu_1 \neq 0;\end{aligned}$$

3.1.
$$\begin{aligned}\overrightarrow{A} &= \left(c_1e^{\lambda_1x} - \frac{g_1}{\lambda_1}\right)\overrightarrow{\xi} + (g_2x + q_2y + c_2)\overrightarrow{\eta}, \qquad q_1 = 0, \\ \overrightarrow{C} &= \left(d_1e^{\lambda_1x} - \frac{p_1}{\lambda_1}\right)\overrightarrow{\xi} + (p_2x + r_2y + d_2)\overrightarrow{\eta}, \qquad r_1 = 0;\end{aligned}$$

3.2.
$$\begin{aligned}\overrightarrow{A} &= \left(c_1e^{\lambda_1x} - \frac{g_1}{\lambda_1}\right)\overrightarrow{\xi} + \left(g_2x + q_2y - \frac{g_1}{\lambda_1}\mu_2y + c_2\right)\overrightarrow{\eta}, \qquad c_1\mu_2 = 0, \qquad g_2\nu_1 = 0, \\ \overrightarrow{C} &= \left(d_1e^{\lambda_1x} - \frac{p_1}{\lambda_1}\right)\overrightarrow{\xi} + \left(p_2x + r_2y - \frac{p_1}{\lambda_1}\mu_2y + d_2\right)\overrightarrow{\eta}, \qquad d_1\mu_2 = 0, \qquad p_2\nu_1 = 0, \\ &c_2\nu_1 + q_1 = 0, \quad \nu_1(q_2 - g_1\mu_2/\lambda_1) = 0, \quad d_2\nu_1 + r_1 = 0, \quad \nu_1(r_2 - p_1\mu_2/\lambda_1) = 0;\end{aligned}$$

3.3.
$$\begin{aligned}\overrightarrow{A} &= \left(c_1e^{\lambda_1x} - \frac{g_1}{\lambda_1}\right)\overrightarrow{\xi} + \left(c_2e^{\nu_2y} - \frac{q_2}{\nu_2} + \frac{g_1}{\lambda_1\nu_2}\mu_2\right)\overrightarrow{\eta}, \qquad g_2 = 0, \qquad c_1\mu_2 = 0, \\ \overrightarrow{C} &= \left(d_1e^{\lambda_1x} - \frac{p_1}{\lambda_1}\right)\overrightarrow{\xi} + \left(d_2e^{\nu_2y} - \frac{r_2}{\nu_2} + \frac{p_1}{\lambda_1\nu_2}\mu_2\right)\overrightarrow{\eta}, \qquad p_2 = 0, \qquad d_1\mu_2 = 0, \\ &\nu_1(g_1\mu_2/\lambda_1\nu_2 - q_2/\nu_2) + q_1 = 0, \quad \nu_1(p_1\mu_2/\lambda_1\nu_2 - r_2/\nu_2) + r_1 = 0, \quad \nu_2 \neq 0;\end{aligned}$$

3.4.
$$\overrightarrow{A}=\left(c_1e^{\mu_1y+\lambda_1x}-\frac{g_1}{\lambda_1}\right)\overrightarrow{\xi}+\left(g_2x+q_2y-\frac{g_1}{\lambda_1}\mu_2y+c_2\right)\overrightarrow{\eta},\qquad c_1\mu_2=0,\qquad \nu_1g_2=0,$$
$$\overrightarrow{C}=\left(d_1e^{\mu_1y+\lambda_1x}-\frac{p_1}{\lambda_1}\right)\overrightarrow{\xi}+\left(p_2x+r_2y-\frac{p_1}{\lambda_1}\mu_2y+d_2\right)\overrightarrow{\eta},\qquad d_1\mu_2=0,\qquad \nu_1p_2=0,$$
$$\nu_1(g_1\mu_2/\lambda_1-q_2)=0,\qquad c_2\nu_1-g_1\mu_1/\lambda_1+q_1=0,$$
$$\nu_1(p_1\mu_2/\lambda_1-r_2)=0,\qquad d_2\nu_1-p_1\mu_1/\lambda_1+r_1=0;$$

3.5.
$$\overrightarrow{A}=\left(c_1e^{\mu_1y+\lambda_1x}-\frac{g_1}{\lambda_1}\right)\overrightarrow{\xi}+\left(c_2e^{\nu_2y}-\frac{q_2}{\nu_2}+\frac{g_1}{\lambda_1\nu_2}\mu_2\right)\overrightarrow{\eta},\qquad c_1\mu_2=0,\qquad c_2\nu_1=0,$$
$$\overrightarrow{C}=\left(d_1e^{\mu_1y+\lambda_1x}-\frac{p_1}{\lambda_1}\right)\overrightarrow{\xi}+\left(d_2e^{\nu_2y}-\frac{r_2}{\nu_2}+\frac{p_1}{\lambda_1\nu_2}\mu_2\right)\overrightarrow{\eta},\qquad d_1\mu_2=0,\qquad d_2\nu_1=0,$$
$$\nu_1\left(\frac{g_1\mu_2}{\lambda_1}-q_2\right)=0,\qquad \left(q_1-\frac{g_1\mu_1}{\lambda_1}\right)+\left(\frac{g_1\mu_2}{\lambda_1\nu_2}-\frac{q_2}{\nu_2}\right)\nu_1=0,$$
$$\nu_1\left(\frac{p_1\mu_2}{\lambda_1}-r_2\right)=0,\qquad \left(r_1-\frac{p_1\mu_1}{\lambda_1}\right)+\left(\frac{p_1\mu_2}{\lambda_1\nu_2}-\frac{r_2}{\nu_2}\right)\nu_1=0,\qquad \nu_2\neq 0;$$

4.1.
$$\overrightarrow{A}=\left(c_1e^{\lambda_1x+\mu_1y}-\frac{g_1}{\lambda_1}\right)\overrightarrow{\xi}+\left(c_2e^{\lambda_2x+\nu_2y}-\frac{g_2}{\lambda_2}\right)\overrightarrow{\eta},\quad \lambda_1\neq\lambda_2,$$
$$\overrightarrow{C}=\left(d_1e^{\lambda_1x+\mu_1y}-\frac{p_1}{\lambda_1}\right)\overrightarrow{\xi}+\left(d_2e^{\lambda_2x+\nu_2y}-\frac{p_2}{\lambda_2}\right)\overrightarrow{\eta},$$
$$c_2\nu_1=0,\qquad c_1\mu_2=0,\qquad -q_1=-\frac{g_1}{\lambda_1}\mu_1-\frac{g_2}{\lambda_2}\nu_1,\qquad -q_2=-\frac{g_1}{\lambda_1}\mu_2-\frac{g_2}{\lambda_2}\nu_2,$$
$$d_2\nu_1=0,\qquad d_1\mu_2=0,\qquad -r_1=-\frac{p_1}{\lambda_1}\mu_1-\frac{p_2}{\lambda_2}\nu_1,\qquad -r_2=-\frac{p_1}{\lambda_1}\mu_2-\frac{p_2}{\lambda_2}\nu_2;$$

4.2.
$$\overrightarrow{A}=\left(c_1e^{\lambda x}-\frac{g_1}{\lambda}\right)\overrightarrow{\xi}+\left(c_2e^{\lambda x}-\frac{g_2}{\lambda}\right)\overrightarrow{\eta},\qquad q_1=q_2=0,$$
$$\overrightarrow{C}=\left(d_1e^{\lambda x}-\frac{p_1}{\lambda}\right)\overrightarrow{\xi}+\left(d_2e^{\lambda x}-\frac{p_2}{\lambda}\right)\overrightarrow{\eta},\qquad r_1=r_2=0;$$

4.3.
$$\overrightarrow{A}=\left((c_2y+c_1)e^{\lambda x}-\frac{g_1}{\lambda}\right)\overrightarrow{\xi}+\left(c_2e^{\lambda x}-\frac{g_2}{\lambda}\right)\overrightarrow{\eta},\qquad q_1\lambda=g_2,\qquad q_2=0,$$
$$\overrightarrow{C}=\left((d_2y+d_1)e^{\lambda x}-\frac{p_1}{\lambda}\right)\overrightarrow{\xi}+\left(d_2e^{\lambda x}-\frac{p_2}{\lambda}\right)\overrightarrow{\eta},\qquad r_1\lambda=p_2,\qquad r_2=0;$$

4.4.
$$\overrightarrow{A}=\left(c_1e^{\lambda x+\omega_1y}-\frac{g_1}{\lambda}\right)\overrightarrow{\xi}+\left(c_2e^{\lambda x}-\frac{g_2}{\lambda}\right)\overrightarrow{\eta},\qquad q_1\lambda=g_1\omega_1,\qquad q_2=0,$$
$$\overrightarrow{C}=\left(d_1e^{\lambda x+\omega_1y}-\frac{p_1}{\lambda}\right)\overrightarrow{\xi}+\left(d_2e^{\lambda x}-\frac{p_2}{\lambda}\right)\overrightarrow{\eta},\qquad r_1\lambda=p_1\omega_1,\qquad r_2=0;$$

4.5.
$$\overrightarrow{A}=\left(c_1e^{\lambda x+\omega_1y}-\frac{g_1}{\lambda}\right)\overrightarrow{\xi}+\left(c_2e^{\lambda x+\omega_2y}-\frac{g_2}{\lambda}\right)\overrightarrow{\eta},\qquad q_1\lambda=g_1\omega_1,\qquad q_2\lambda=g_2\omega_2,$$
$$\overrightarrow{C}=\left(d_1e^{\lambda x+\omega_1y}-\frac{p_1}{\lambda}\right)\overrightarrow{\xi}+\left(d_2e^{\lambda x+\omega_2y}-\frac{p_2}{\lambda}\right)\overrightarrow{\eta},\qquad r_1\lambda=p_1\omega_1,\qquad r_2\lambda=p_2\omega_2;$$

4.6.
$$\overrightarrow{A}=\left((c_2y+c_1)e^{\lambda x+\omega y}-\frac{g_1}{\lambda}\right)\overrightarrow{\xi}+\left(c_2e^{\lambda x+\omega y}-\frac{g_2}{\lambda}\right)\overrightarrow{\eta},\qquad q_1\lambda=g_1\omega+g_2,\qquad q_2\lambda=g_2\omega,$$
$$\overrightarrow{C}=\left((d_2y+d_1)e^{\lambda x+\omega y}-\frac{p_1}{\lambda}\right)\overrightarrow{\xi}+\left(d_2e^{\lambda x+\omega y}-\frac{p_2}{\lambda}\right)\overrightarrow{\eta},\qquad r_1\lambda=p_1\omega+p_2,\qquad r_2\lambda=p_2\omega;$$

4.7.
$$\overrightarrow{A}=\left(e^{\lambda x+\gamma y}(c_1\cos\delta y+c_2\sin\delta y)-\frac{g_1}{\lambda}\right)\overrightarrow{\xi}+\left(e^{\lambda x+\gamma y}(c_2\cos\delta y-c_1\sin\delta y)-\frac{g_2}{\lambda}\right)\overrightarrow{\eta},$$
$$\overrightarrow{C}=\left(e^{\lambda x+\gamma y}(d_1\cos\delta y+d_2\sin\delta y)-\frac{p_1}{\lambda}\right)\overrightarrow{\xi}+\left(e^{\lambda x+\gamma y}(d_2\cos\delta y-d_1\sin\delta y)-\frac{p_2}{\lambda}\right)\overrightarrow{\eta},$$
$$q_1\lambda=g_1\gamma+g_2\delta,\quad q_2\lambda=-g_1\delta+g_2\gamma,\quad r_1\lambda=p_1\gamma+p_2\delta,\quad r_2\lambda=-p_1\delta+p_2\gamma;$$

5.1.
$$\overrightarrow{A}=\left((c_2x+c_1)e^{\lambda x}+\frac{g_2}{\lambda^2}-\frac{g_1}{\lambda}\right)\overrightarrow{\xi}+\left(c_2e^{\lambda x}-\frac{g_2}{\lambda}\right)\overrightarrow{\eta},\qquad q_1=q_2=0,$$
$$\overrightarrow{C}=\left((d_2x+d_1)e^{\lambda x}+\frac{p_2}{\lambda^2}-\frac{p_1}{\lambda}\right)\overrightarrow{\xi}+\left(d_2e^{\lambda x}-\frac{p_2}{\lambda}\right)\overrightarrow{\eta},\qquad r_1=r_2=0;$$

5.2.
$$\overrightarrow{A}=\left(\frac{g_2}{\lambda^2}-\frac{g_1}{\lambda}\right)\overrightarrow{\xi}-\frac{g_2}{\lambda}\overrightarrow{\eta},\quad -q_1=\left(\frac{g_2}{\lambda^2}-\frac{g_1}{\lambda}\right)\mu_1-\frac{g_2}{\lambda}\nu_1,\quad -q_2=\left(\frac{g_2}{\lambda^2}-\frac{g_1}{\lambda}\right)\mu_2-\frac{g_2}{\lambda}\nu_2,$$
$$\overrightarrow{C}=\left(\frac{p_2}{\lambda^2}-\frac{p_1}{\lambda}\right)\overrightarrow{\xi}-\frac{p_2}{\lambda}\overrightarrow{\eta},\quad -r_1=\left(\frac{p_2}{\lambda^2}-\frac{p_1}{\lambda}\right)\mu_1-\frac{p_2}{\lambda}\nu_1,\quad -r_2=\left(\frac{p_2}{\lambda^2}-\frac{p_1}{\lambda}\right)\mu_2-\frac{p_2}{\lambda}\nu_2;$$

5.3.
$$\overrightarrow{A}=\left(c_1e^{\lambda x+\mu_1 y}+\frac{g_2}{\lambda^2}-\frac{g_1}{\lambda}\right)\overrightarrow{\xi}-\frac{g_2}{\lambda}\overrightarrow{\eta},\quad -q_1=\left(\frac{g_2}{\lambda^2}-\frac{g_1}{\lambda}\right)\mu_1-\frac{g_2}{\lambda}\nu_1,\quad -q_2=-\frac{g_2}{\lambda}\nu_2,$$
$$\overrightarrow{C}=\left(d_1e^{\lambda x+\mu_1 y}+\frac{p_2}{\lambda^2}-\frac{p_1}{\lambda}\right)\overrightarrow{\xi}-\frac{p_2}{\lambda}\overrightarrow{\eta},\quad -r_1=\left(\frac{p_2}{\lambda^2}-\frac{p_1}{\lambda}\right)\mu_1-\frac{p_2}{\lambda}\nu_1,\quad -r_2=-\frac{p_2}{\lambda}\nu_2;$$

5.4.
$$\overrightarrow{A}=\left((c_2x+\nu_1c_2y+c_1)e^{\lambda x+\mu_1 y}+\frac{g_2}{\lambda^2}-\frac{g_1}{\lambda}\right)\overrightarrow{\xi}+\left(c_2e^{\lambda x+\mu_1 y}-\frac{g_2}{\lambda}\right)\overrightarrow{\eta},\qquad \mu_1=\nu_2,$$
$$\overrightarrow{C}=\left((d_2x+\nu_1c_2y+d_1)e^{\lambda x+\mu_1 y}+\frac{p_2}{\lambda^2}-\frac{p_1}{\lambda}\right)\overrightarrow{\xi}+\left(d_2e^{\lambda x+\mu_1 y}-\frac{p_2}{\lambda}\right)\overrightarrow{\eta},$$
$$-q_1=\left(\frac{g_2}{\lambda^2}-\frac{g_1}{\lambda}\right)\mu_1-\frac{g_2}{\lambda}\nu_1,\ -q_2=-\frac{g_2}{\lambda}\mu_1,\ -r_1=\left(\frac{p_2}{\lambda^2}-\frac{p_1}{\lambda}\right)\mu_1-\frac{p_2}{\lambda}\nu_1,\ -r_2=-\frac{p_2}{\lambda}\mu_1;$$

6.1.
$$\overrightarrow{A}=\left(e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)-\frac{g_1\alpha-g_2\beta}{\alpha^2+\beta^2}\right)\overrightarrow{\xi}+$$
$$+\left(e^{\alpha x}(c_2\cos\beta x-c_1\sin\beta x)-\frac{g_2\alpha+g_1\beta}{\alpha^2+\beta^2}\right)\overrightarrow{\eta},\qquad q_1=q_2=0,$$
$$\overrightarrow{C}=\left(e^{\alpha x}(d_1\cos\beta x+d_2\sin\beta x)-\frac{p_1\alpha-p_2\beta}{\alpha^2+\beta^2}\right)\overrightarrow{\xi}+$$
$$+\left(e^{\alpha x}(d_2\cos\beta x-d_1\sin\beta x)-\frac{p_2\alpha+p_1\beta}{\alpha^2+\beta^2}\right)\overrightarrow{\eta},\qquad r_1=r_2=0;$$

6.2.
$$\overrightarrow{A}=\left(\rho_1e^{\alpha x+\mu_1 y}\sin(\beta x+\nu_1y+\varphi_1)-\frac{g_1\alpha-g_2\beta}{\alpha^2+\beta^2}\right)\overrightarrow{\xi}+$$
$$+\left(\rho_1e^{\alpha x+\mu_1 y}\cos(\beta x+\nu_1y+\varphi_1)-\frac{g_2\alpha+g_1\beta}{\alpha^2+\beta^2}\right)\overrightarrow{\eta},$$
$$\overrightarrow{C}=\left(\rho_2e^{\alpha x+\mu_1 y}\sin(\beta x+\nu_1y+\varphi_2)-\frac{p_1\alpha-p_2\beta}{\alpha^2+\beta^2}\right)\overrightarrow{\xi}+$$
$$+\left(\rho_2e^{\alpha x+\mu_1 y}\cos(\beta x+\nu_1y+\varphi_2)-\frac{p_2\alpha+p_1\beta}{\alpha^2+\beta^2}\right)\overrightarrow{\eta},\qquad \mu_1^2+\nu_1^2=\mu_2^2+\nu_2^2,$$
$$q_1=\frac{g_1\alpha-g_2\beta}{\alpha^2+\beta^2}\mu_1+\frac{g_2\alpha+g_1\beta}{\alpha^2+\beta^2}\nu_1,\quad q_2=\frac{g_1\alpha-g_2\beta}{\alpha^2+\beta^2}\mu_2+\frac{g_2\alpha+g_1\beta}{\alpha^2+\beta^2}\nu_2,$$
$$r_1=\frac{p_1\alpha-p_2\beta}{\alpha^2+\beta^2}\mu_1+\frac{g_2\alpha+g_1\beta}{\alpha^2+\beta^2}\nu_1,\quad r_2=\frac{p_1\alpha-p_2\beta}{\alpha^2+\beta^2}\mu_2+\frac{g_2\alpha+g_1\beta}{\alpha^2+\beta^2}\nu_2,$$

где $g_1,\ g_2,\ q_1,\ q_2,\ r_1,\ r_2,\ p_1,\ p_2,\ c_1,\ c_2,\ d_1,\ d_2,\ \nu_1,\ \nu_2,\ \mu_1,\ \mu_2,\ \rho_1,\ \rho_2,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta=\mathrm{const}$, $\lambda,\lambda_1,\lambda_2,\omega,\omega_1,\omega_2=\mathrm{const}\neq 0$, $\beta,\gamma>0$.

Доказательство. Везде ниже полагаем $T_2\overrightarrow{\xi} = \mu_1\overrightarrow{\xi} + \mu_2\overrightarrow{\eta}$, $T_2\overrightarrow{\eta} = \nu_1\overrightarrow{\xi} + \nu_2\overrightarrow{\eta}$. Будем подставлять решения первого и третьего векторных уравнений системы (2.7) во второе и четвертое уравнения этой системы.

I. Так как $T_1 = 0$, то применяем теорему 3, в результате чего матрица T_2 совпадает с одной из матриц системы (2.8). Далее подставляем решение 1 из теоремы 4 во второе и четвертое уравнения системы (2.7):

$$\overrightarrow{A_1}_y = T_2\overrightarrow{A_1} + T_2\overrightarrow{G}x + \overrightarrow{Q}, \quad \overrightarrow{C_1}_y = T_2\overrightarrow{C_1} + T_2\overrightarrow{P}x + \overrightarrow{R},$$

откуда следует:

$$T_2\overrightarrow{G} = 0, \quad T_2\overrightarrow{P} = 0, \quad \overrightarrow{A_1}_y = T_2\overrightarrow{A_1} + \overrightarrow{Q}, \quad \overrightarrow{C_1}_y = T_2\overrightarrow{C_1} + \overrightarrow{R}.$$

Последние системы решены в предложении 2. В итоге получаем 1.1–1.6.

II. Подставляем решение 2 из теоремы 4 во второе и четвертое векторные уравнения из (2.7):

$$(c_2'(y)x + c_1'(y) - q_1)\overrightarrow{\xi} + (c_2'(y) - q_2)\overrightarrow{\eta} = \Big(\frac{g_2}{2}x^2 + g_1x + c_2(y)x + c_1(y)\Big)T_2\overrightarrow{\xi} + (g_2x + c_2(y))T_2\overrightarrow{\eta},$$
$$(d_2'(y)x + d_1'(y) - r_1)\overrightarrow{\xi} + (d_2'(y) - r_2)\overrightarrow{\eta} = \Big(\frac{p_2}{2}x^2 + p_1x + d_2(y)x + d_1(y)\Big)T_2\overrightarrow{\xi} + (p_2x + d_2(y))T_2\overrightarrow{\eta}.$$

При $T_2 = 0$ получаем решение 2.1, а при $T_2 \neq 0$ имеем систему на коэффициенты:

$$\begin{aligned}
&g_2\mu_1 = 0, & c_2'(y) &= (c_2(y) + g_1)\mu_1 + g_2\nu_1, & c_1'(y) - q_1 &= c_1(y)\mu_1 + c_2(y)\nu_1,\\
&g_2\mu_2 = 0, & 0 &= (c_2(y) + g_1)\mu_2 + g_2\nu_2, & c_2'(y) - q_2 &= c_1(y)\mu_2 + c_2(y)\nu_2,\\
&p_2\mu_1 = 0, & d_2'(y) &= (d_2(y) + p_1)\mu_1 + p_2\nu_1, & d_1'(y) - r_1 &= d_1(y)\mu_1 + d_2(y)\nu_1,\\
&p_2\mu_2 = 0, & 0 &= (d_2(y) + p_1)\mu_2 + p_2\nu_2, & d_2'(y) - r_2 &= d_1(y)\mu_2 + d_2(y)\nu_2.
\end{aligned}$$

Из полученной системы вытекает: $(g_2^2+p_2^2)(\mu_1^2+\mu_2^2) = 0$. Тогда при $\mu_1^2+\mu_2^2 = 0$ выделяем случаи $\nu_2 = 0$ и $\nu_2 \neq 0$, которые приводят к решениям 2.2 и 2.3 соответственно, а при $\mu_1^2 + \mu_2^2 \neq 0$ имеем $g_2 = p_2 = 0$, поэтому из $\mu_2 \neq 0$ получаем решение 2.4, а из $\mu_2 = 0$ — решение 2.5, если $\mu_1 = \nu_2$, и решение 2.6, если $\mu_1 \neq \nu_2$.

III. Теперь подставляем решение 3 теоремы 4 во второе и четвертое уравнения из (2.7), получим:

$$(c_1'(y)e^{\lambda_1x} - q_1)\overrightarrow{\xi} + (c_2'(y) - q_2)\overrightarrow{\eta} = \Big(c_1(y)e^{\lambda_1x} - \frac{g_1}{\lambda_1}\Big)T_2\overrightarrow{\xi} + (g_2x + c_2(y))T_2\overrightarrow{\eta},$$
$$(d_1'(y)e^{\lambda_1x} - r_1)\overrightarrow{\xi} + (d_2'(y) - r_2)\overrightarrow{\eta} = \Big(d_1(y)e^{\lambda_1x} - \frac{p_1}{\lambda_1}\Big)T_2\overrightarrow{\xi} + (p_2x + d_2(y))T_2\overrightarrow{\eta}.$$

При $T_2 = 0$ получаем решение 3.1. При $T_2 \neq 0$ имеем систему:

$$\begin{aligned}
c_1'(y) &= c_1(y)\mu_1, & 0 &= g_2\nu_1, & -q_1 &= -\frac{g_1}{\lambda_1}\mu_1 + c_2(y)\nu_1,\\
0 &= c_1(y)\mu_2, & 0 &= g_2\nu_2, & c_2'(y) - q_2 &= -\frac{g_1}{\lambda_1}\mu_2 + c_2(y)\nu_2,\\
d_1'(y) &= d_1(y)\mu_1, & 0 &= p_2\nu_1, & -r_1 &= -\frac{p_1}{\lambda_1}\mu_1 + d_2(y)\nu_1,\\
0 &= d_1(y)\mu_2, & 0 &= p_2\nu_2, & d_2'(y) - r_2 &= -\frac{p_1}{\lambda_1}\mu_2 + d_2(y)\nu_2.
\end{aligned}$$

Из полученной системы выделяем следующие случаи: (a) $\mu_1 = \nu_2 = 0$ — этот случай приводит к решению 3.2; (b) $\mu_1 = 0$, $\nu_2 \neq 0$ приводит к 3.3; (c) $\mu_1 \neq 0$, $\nu_2 = 0$ приводит к 3.4; (d) $\mu_1 \neq 0$, $\nu_2 \neq 0$ приводит к 3.5.

IV. Подставляем решение 4 из теоремы 4 во второе и четвертое векторные уравнения системы (2.7):

$$(c_1'(y)e^{\lambda_1x} - q_1)\overrightarrow{\xi} + (c_2'(y)e^{\lambda_2x} - q_2)\overrightarrow{\eta} = \Big(c_1(y)e^{\lambda_1x} - \frac{g_1}{\lambda_1}\Big)T_2\overrightarrow{\xi} + \Big(c_2(y)e^{\lambda_2x} - \frac{g_2}{\lambda_2}\Big)T_2\overrightarrow{\eta},$$
$$(d_1'(y)e^{\lambda_1x} - r_1)\overrightarrow{\xi} + (d_2'(y)e^{\lambda_2x} - r_2)\overrightarrow{\eta} = \Big(d_1(y)e^{\lambda_1x} - \frac{p_1}{\lambda_1}\Big)T_2\overrightarrow{\xi} + \Big(d_2(y)e^{\lambda_2x} - \frac{p_2}{\lambda_2}\Big)T_2\overrightarrow{\eta}.$$

Тогда при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ получаем систему на коэффициенты:

$$\begin{array}{llll} c_1'(y) = c_1(y)\mu_1, & 0 = c_2(y)\nu_1, & c_2'(y) = c_2(y)\nu_2, & 0 = c_1(y)\mu_2, \\ d_1'(y) = d_1(y)\mu_1, & 0 = d_2(y)\nu_1, & d_2'(y) = d_2(y)\nu_2, & 0 = d_1(y)\mu_2, \end{array}$$

где $-q_1 = -\dfrac{g_1}{\lambda_1}\mu_1 - \dfrac{g_2}{\lambda_2}\nu_1$, $-q_2 = -\dfrac{g_1}{\lambda_1}\mu_2 - \dfrac{g_2}{\lambda_2}\nu_2$, $-r_1 = -\dfrac{p_1}{\lambda_1}\mu_1 - \dfrac{p_2}{\lambda_2}\nu_1$, $-r_2 = -\dfrac{p_1}{\lambda_1}\mu_2 - \dfrac{p_2}{\lambda_2}\nu_2$. Решая данную систему, приходим к 4.1.

Пусть теперь $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$, тогда, применяя теорему 3, будем иметь решения 4.2–4.7.

V. Теперь подставляем решение 5 из теоремы 4 во второе и четвертое уравнения в (2.7):

$$\begin{aligned} &\Big((c_2'(y)x + c_1'(y))e^{\lambda x} - q_1\Big)\overrightarrow{\xi} + (c_2'(y)e^{\lambda x} - q_2)\overrightarrow{\eta} = \\ =&\Big((c_2(y)x + c_1(y))e^{\lambda x} + \frac{g_2}{\lambda^2} - \frac{g_1}{\lambda}\Big)T_2\overrightarrow{\xi} + \Big(c_2(y)e^{\lambda x} - \frac{g_2}{\lambda}\Big)T_2\overrightarrow{\eta}, \\ &\Big((d_2'(y)x + d_1'(y))e^{\lambda x} - r_1\Big)\overrightarrow{\xi} + (d_2'(y)e^{\lambda x} - r_2)\overrightarrow{\eta} = \\ =&\Big((d_2(y)x + d_1(y))e^{\lambda x} + \frac{p_2}{\lambda^2} - \frac{p_1}{\lambda}\Big)T_2\overrightarrow{\xi} + \Big(d_2(y)e^{\lambda x} - \frac{p_2}{\lambda}\Big)T_2\overrightarrow{\eta}. \end{aligned}$$

При $T_2 = 0$ получаем решение 5.1. При $T_2 \neq 0$ имеем систему на коэффициенты:

$$\begin{array}{lll} c_2'(y) = c_2(y)\mu_1, & c_1'(y) = c_1(y)\mu_1 + c_2(y)\nu_1, & -q_1 = \Big(\dfrac{g_2}{\lambda^2} - \dfrac{g_1}{\lambda}\Big)\mu_1 - \dfrac{g_2}{\lambda}\nu_1, \\ 0 = c_2(y)\mu_2, & c_2'(y) = c_1(y)\mu_2 + c_2(y)\nu_2, & -q_2 = \Big(\dfrac{g_2}{\lambda^2} - \dfrac{g_1}{\lambda}\Big)\mu_2 - \dfrac{g_2}{\lambda}\nu_2, \\ d_2'(y) = d_2(y)\mu_1, & d_1'(y) = d_1(y)\mu_1 + d_2(y)\nu_1, & -r_1 = \Big(\dfrac{p_2}{\lambda^2} - \dfrac{p_1}{\lambda}\Big)\mu_1 - \dfrac{p_2}{\lambda}\nu_1, \\ 0 = d_2(y)\mu_2, & d_2'(y) = d_1(y)\mu_2 + d_2(y)\nu_2, & -r_2 = \Big(\dfrac{p_2}{\lambda^2} - \dfrac{p_1}{\lambda}\Big)\mu_2 - \dfrac{p_2}{\lambda}\nu_2. \end{array}$$

Из системы следует, что при $\mu_2 \neq 0$ получается решение 5.2. Пусть теперь $\mu_2 = 0$, тогда при $c_2 = 0$ имеем решение 5.3, а при $c_2 \neq 0$ — решение 5.4.

VI. И, наконец, подставляем решение 6 из теоремы 4 во второе и четвертое векторные уравнения системы (2.7):

$$\begin{aligned} &(e^{\alpha x}(c_1'(y)\cos\beta x + c_2'(y)\sin\beta x) - q_1)\overrightarrow{\xi} + (e^{\alpha x}(c_2'(y)\cos\beta x - c_1'(y)\sin\beta x) - q_2)\overrightarrow{\eta} = \\ &= \Big(e^{\alpha x}(c_1(y)\cos\beta x + c_2(y)\sin\beta x) - \frac{g_1\alpha - g_2\beta}{\alpha^2 + \beta^2}\Big)T_2\overrightarrow{\xi} + \\ &+ \Big(e^{\alpha x}(c_2(y)\cos\beta x - c_1(y)\sin\beta x) - \frac{g_2\alpha + g_1\beta}{\alpha^2 + \beta^2}\Big)T_2\overrightarrow{\eta}, \\ &(e^{\alpha x}(d_1'(y)\cos\beta x + d_2'(y)\sin\beta x) - r_1)\overrightarrow{\xi} + (e^{\alpha x}(d_2'(y)\cos\beta x - d_1'(y)\sin\beta x) - r_2)\overrightarrow{\eta} = \\ &= \Big(e^{\alpha x}(d_1(y)\cos\beta x + d_2(y)\sin\beta x) - \frac{p_1\alpha - p_2\beta}{\alpha^2 + \beta^2}\Big)T_2\overrightarrow{\xi} + \\ &+ \Big(e^{\alpha x}(d_2(y)\cos\beta x - d_1(y)\sin\beta x) - \frac{p_2\alpha + p_1\beta}{\alpha^2 + \beta^2}\Big)T_2\overrightarrow{\eta}. \end{aligned}$$

При $T_2 = 0$ получаем решение 6.1. При $T_2 \neq 0$ имеем систему на коэффициенты:

$$\begin{array}{lll} c_1'(y) = c_1(y)\mu_1 + c_2(y)\nu_1, & c_2'(y) = c_2(y)\mu_1 - c_1(y)\nu_1, & q_1 = \dfrac{g_1\alpha - g_2\beta}{\alpha^2 + \beta^2}\mu_1 + \dfrac{g_2\alpha + g_1\beta}{\alpha^2 + \beta^2}\nu_1, \\ c_2'(y) = c_1(y)\mu_2 + c_2(y)\nu_2, & -c_1'(y) = c_2(y)\mu_2 - c_1(y)\nu_2, & q_2 = \dfrac{g_1\alpha - g_2\beta}{\alpha^2 + \beta^2}\mu_2 + \dfrac{g_2\alpha + g_1\beta}{\alpha^2 + \beta^2}\nu_2, \\ d_1'(y) = d_1(y)\mu_1 + d_2(y)\nu_1, & d_2'(y) = d_2(y)\mu_1 - d_1(y)\nu_1, & r_1 = \dfrac{p_1\alpha - p_2\beta}{\alpha^2 + \beta^2}\mu_1 + \dfrac{p_2\alpha + p_1\beta}{\alpha^2 + \beta^2}\nu_1, \\ d_2'(y) = d_1(y)\mu_2 + d_2(y)\nu_2, & -d_1'(y) = d_2(y)\mu_2 - d_1(y)\nu_2, & r_2 = \dfrac{p_1\alpha - p_2\beta}{\alpha^2 + \beta^2}\mu_2 + \dfrac{p_2\alpha + p_1\beta}{\alpha^2 + \beta^2}\nu_2. \end{array}$$

Решая эти уравнения, приходим к 6.2. □

Далее группируем решения, полученные в теореме 5, и записываем их в новых обозначениях для коэффициентов и с точностью до переобозначения переменных $x \leftrightarrow y$:

1.
$$\overrightarrow{A} = (g_1x^2 + g_2xy + g_3y^2 + g_4x + g_5y + g_6)\overrightarrow{\xi} + (q_1x + q_2y + q_3)\overrightarrow{\eta},$$
$$\overrightarrow{C} = (p_1x^2 + p_2xy + p_3y^2 + p_4x + p_5y + p_6)\overrightarrow{\xi} + (r_1x + r_2y + r_3)\overrightarrow{\eta};$$

2.
$$\overrightarrow{A} = ((g_1x + g_2y + g_3)e^{\omega_1 y} + g_4x + g_5)\overrightarrow{\xi} + (q_1e^{\omega_1 y} + q_2)\overrightarrow{\eta},$$
$$\overrightarrow{C} = ((p_1x + p_2y + p_3)e^{\omega_1 y} + p_4x + p_5)\overrightarrow{\xi} + (r_1e^{\omega_1 y} + r_2)\overrightarrow{\eta}, \quad \omega_1 \neq 0;$$

3. $\overrightarrow{A} = (g_1e^{\lambda_1 x+\omega_1 y} + g_2)\overrightarrow{\xi} + (q_1x + q_2y + q_3)\overrightarrow{\eta}$, $\overrightarrow{C} = (p_1e^{\lambda_1 x+\omega_1 y} + p_2)\overrightarrow{\xi} + (r_1x + r_2y + r_3)\overrightarrow{\eta}$;

4. $\overrightarrow{A} = (g_1e^{\lambda_1 x+\omega_1 y} + g_2)\overrightarrow{\xi} + (q_1e^{\lambda_2 x+\omega_2 y} + q_2)\overrightarrow{\eta}$, $\overrightarrow{C} = (p_1e^{\lambda_1 x+\omega_1 y} + p_2)\overrightarrow{\xi} + (r_1e^{\lambda_2 x+\omega_2 y} + r_2)\overrightarrow{\eta}$;

5.
$$\overrightarrow{A} = \Big((g_1x + g_2y + g_3)e^{\lambda x+\omega y} + g_4\Big)\overrightarrow{\xi} + \Big((q_1y + q_2)e^{\lambda x+\omega y} + q_3\Big)\overrightarrow{\eta},$$
$$\overrightarrow{C} = \Big((p_1x + p_2y + p_3)e^{\lambda x+\omega y} + p_4\Big)\overrightarrow{\xi} + \Big((r_1y + r_2)e^{\lambda x+\omega y} + r_3\Big)\overrightarrow{\eta};$$

6.
$$\overrightarrow{A} = \big(g_1e^{\alpha x+\omega y}\sin(\beta_1x + \beta_2y + g_2) + g_3\big)\overrightarrow{\xi} + \big(g_1e^{\alpha x+\omega y}\cos(\beta_1x + \beta_2y + g_2) + g_4\big)\overrightarrow{\eta},$$
$$\overrightarrow{C} = \big(p_1e^{\alpha x+\omega y}\sin(\beta_1x + \beta_2y + p_2) + p_3\big)\overrightarrow{\xi} + \big(p_1e^{\alpha x+\omega y}\cos(\beta_1x + \beta_2y + p_2) + p_4\big)\overrightarrow{\eta},$$

где $g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, q_1, q_2, q_3, r_1, r_2, r_3 = \mathrm{const}$, $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 = \mathrm{const} \neq 0$, $\omega, \omega_1, \omega_2$, $\alpha, \beta_1, \beta_2 = \mathrm{const}$, $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$.

По векторным полям **1–6**, с точностью до переобозначения $x \leftrightarrow y$, запишем базисные операторы (2.1) *четырехмерных линейных пространств*, при этом операторы Y_1 и Y_2 комбинируем с операторами X_1 и X_2 так, чтобы исчезли свободные члены:

$$\begin{cases} X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_1 = (q_1x + q_2y)\partial_x + (r_1x + r_2y)\partial_y, \\ Y_2 = (g_1x^2 + g_2xy + g_3y^2 + g_4x + g_5y)\partial_x + (p_1x^2 + p_2xy + p_3y^2 + p_4x + p_5y)\partial_y; \end{cases} \tag{3.2}$$

$$\begin{cases} X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_1 = q_1e^{\omega_1 y}\partial_x + r_1e^{\omega_1 y}\partial_y, \quad \omega_1 \neq 0, \\ Y_2 = \big((g_1x + g_2y + g_3)e^{\omega_1 y} + g_4x\big)\partial_x + \big((p_1x + p_2y + p_3)e^{\omega_1 y} + p_4x\big)\partial_y; \end{cases} \tag{3.3}$$

$$X_1 = \partial_x,\ X_2 = \partial_y,\ Y_1 = g_1e^{\lambda_1 x+\omega_1 y}\partial_x + p_1e^{\lambda_1 x+\omega_1 y}\partial_y,\ Y_2 = (q_1x + q_2y)\partial_x + (r_1x + r_2y)\partial_y; \tag{3.4}$$

$$X_1 = \partial_x,\ X_2 = \partial_y,\ Y_1 = g_1e^{\lambda_1 x+\omega_1 y}\partial_x + p_1e^{\lambda_1 x+\omega_1 y}\partial_y,\ Y_2 = q_1e^{\lambda_2 x+\omega_2 y}\partial_x + r_1e^{\lambda_2 x+\omega_2 y}\partial_y; \tag{3.5}$$

$$\begin{cases} X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_1 = (g_1x + g_2y + g_3)e^{\lambda x+\omega y}\partial_x + (p_1x + p_2y + p_3)e^{\lambda x+\omega y}\partial_y, \\ Y_2 = (q_1y + q_2)e^{\lambda x+\omega y}\partial_x + (r_1y + r_2)e^{\lambda x+\omega y}\partial_y; \end{cases} \tag{3.6}$$

$$\begin{cases} X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \\ Y_1 = g_1e^{\alpha x+\omega y}\sin(\beta_1x + \beta_2y + g_2)\partial_x + p_1e^{\alpha x+\omega y}\sin(\beta_1x + \beta_2y + p_2)\partial_y, \\ Y_2 = g_1e^{\alpha x+\omega y}\cos(\beta_1x + \beta_2y + g_2)\partial_x + p_1e^{\alpha x+\omega y}\cos(\beta_1x + \beta_2y + p_2)\partial_y, \end{cases} \tag{3.7}$$

где $g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 = \mathrm{const}$, $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 = \mathrm{const}$, $q_1, q_2 = \mathrm{const}$, $r_1, r_2 = \mathrm{const}$, $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 = \mathrm{const} \neq 0$, $\omega, \omega_1, \omega_2, \alpha, \beta_1, \beta_2 = \mathrm{const}$, $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$. Далее выясним, при каких условиях на коэффициенты в операторах (3.2)–(3.7) они становятся базисными операторами четырехмерных алгебр Ли.

§ 4. Выделение алгебр Ли

Необходимо из линейных пространств с базисными операторами (3.2)–(3.7) выделить алгебры Ли. Для этого пользуемся возможностью перехода к новому базису, заменой координат (следствие локальной изотопии действий), а также проверкой замкнутости их коммутаторов

$$[X_1, X_2], \quad [X_1, Y_1], \quad [X_1, Y_2], \quad [X_2, Y_1], \quad [X_2, Y_2], \quad [Y_1, Y_2].$$

Последнее означает, что сам коммутатор должен принадлежать алгебре Ли [12, § 13]. Также учитывается теорема 2.

Вначале исследуем систему операторов (3.2) при условии $g_1 = g_2 = g_3 = p_1 = p_2 = p_3 = 0$.

Предложение 3. *Из системы* (3.2) *при условии* $g_1 = g_2 = g_3 = p_1 = p_2 = p_3 = 0$, *с точностью до линейной замены координат и перехода к новому базису, выделяются операторы*

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_1 = x\partial_x, \quad Y_2 = x\partial_y, \tag{4.1}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_1 = x\partial_x, \quad Y_2 = y\partial_y, \tag{4.2}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_1 = x\partial_x + ry\partial_y, \quad Y_2 = y\partial_x, \quad r \neq 0, \tag{4.3}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_1 = x\partial_x + y\partial_y, \quad Y_2 = y\partial_x - x\partial_y, \tag{4.4}$$

образующие базисы четырехмерных алгебр Ли локально дважды транзитивных групп Ли преобразований двумерного многообразия M.

Доказательство. В операторах (3.2) при условии $g_1 = g_2 = g_3 = p_1 = p_2 = p_3 = 0$ произведем линейную замену координат: $\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}^T = A \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}^T$, причем матрица коэффициентов $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ произвольная и невырожденная. Тогда для операторов дифференцирования относительно старых и новых координат получим связь $\begin{pmatrix} \partial_x & \partial_y \end{pmatrix}^T = A^T \begin{pmatrix} \partial_{x'} & \partial_{y'} \end{pmatrix}^T$. В матричном виде операторы Y_1 и Y_2 записываются так:

$$Y_1 = \left\langle U \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} \right\rangle, \; Y_2 = \left\langle V \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} \right\rangle,$$

где $\langle , \rangle$ — скалярное произведение векторов, а $U = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} g_4 & g_5 \\ p_4 & p_5 \end{pmatrix}$ — матрицы коэффициентов. В новых координатах операторы X_1, X_2, Y_1 и Y_2 принимают вид:

$$X_1 = a\partial_{x'} + c\partial_{y'}, \; X_2 = b\partial_{x'} + d\partial_{y'}, \; Y_1 = \left\langle AUA^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_{x'} \\ \partial_{y'} \end{pmatrix} \right\rangle, \; Y_2 = \left\langle AVA^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_{x'} \\ \partial_{y'} \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Линейной комбинацией от операторов X_1, X_2 в новом базисе переходим к операторам $X_1' = \partial_{x'}$, $X_2' = \partial_{y'}$. Тогда, возвращаясь к прежним обозначениям координат и базисных операторов, получим:

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_1 = \left\langle AUA^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} \right\rangle, \quad Y_2 = \left\langle AVA^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Рассмотрим выражение $U' = AUA^{-1}$, где U — фиксированная ненулевая матрица, а A — произвольная невырожденная матрица. В линейной алгебре доказывается, что тогда матрица U' приводится к жордановой форме ([10, с. 482]):

$$I. \; U' = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad II. \; U' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad III. \; U' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad IV. \; U' = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \; \beta \neq 0.$$

I. С точностью до переобозначения переменных $x \leftrightarrow y$ сначала полагаем $\lambda \neq 0$, $\mu = 0$. Тогда с помощью подходящей линейной комбинации операторов Y_1 и Y_2 приходим к базису линейного пространства:

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_1 = x\partial_x, \quad Y_2 = q_2 y\partial_x + (p_2 x + r_2 y)\partial_y.$$

Далее проверяем на замкнутость эту систему операторов, для чего вычисляем коммутаторы. Первые пять коммутаторов, очевидно, замкнуты, шестой коммутатор равен: $[Y_1, Y_2] = p_2 x\partial_y - q_2 y\partial_x = sY_1 + lY_2$. Приравнивая покомпонентно, получаем систему линейных уравнений: $s = 0$, $lq_2 = -q_2$, $lp_2 = p_2$, $lr_2 = 0$. При исследовании этой системы, выделяем два случая: $q_2^2 + p_2^2 = 0$ и $q_2^2 + p_2^2 \neq 0$. В первом случае $l = 0$, $r_2 \neq 0$, поэтому приходим к операторам (4.2). Во втором случае при $q_2 \neq 0$ имеем $l = -1$, $p_2 = r_2 = 0$, в результате получаем операторы вида (2.5), которые не являются образующими дважды транзитивной группы Ли преобразований плоскости (теорема 2), а при $p_2 \neq 0$, имеем $l = 1$, $r_2 = 0$, $q_2 = 0$, что с точностью до перестановки координат $x \leftrightarrow y$ дает операторы (4.1).

Пусть теперь $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$. Тогда линейной комбинацией операторов Y_1 и Y_2 добиваемся перехода к базису:

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_1 = x\partial_x + r_1 y\partial_y, \quad Y_2 = q_2 y\partial_x + (p_2 x + r_2 y)\partial_y.$$

Далее, как и выше, проверяем на замкнутость эту систему операторов. Если $r_2 = 0$ и $q_2 = 0$ или $p_2 = 0$, то с точностью до подходящей замены координат и линейной комбинации операторов, получим базис (4.3), а если же $r_2 = 0$ и $q_2 \neq 0$, $p_2 \neq 0$, то из замкнутости коммутатора $[Y_1, Y_2] = 0$ следует $r_1 = 1$, т. е. приходим к базису

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_1 = x\partial_x + y\partial_y, \quad Y_2 = q_2 y\partial_x + p_2 x\partial_y. \tag{4.5}$$

Пусть теперь $r_2 \neq 0$ и $q_2^2 + p_2^2 = 0$, тогда с точностью до подходящей замены координат и линейной комбинации операторов, будем иметь (4.2). Если же $r_2 \neq 0$ и $q_2^2 + p_2^2 \neq 0$, то $r_1 = 1$, следовательно имеем базисные операторы

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_1 = x\partial_x + y\partial_y, \quad Y_2 = q_2 y\partial_x + (p_2 x + r_2 y)\partial_y, \ r_2 \neq 0.$$

Эти операторы объединяем с операторами (4.5)

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_1 = x\partial_x + y\partial_y, \quad Y_2 = q_2 y\partial_x + (p_2 x + r_2 y)\partial_y. \tag{4.6}$$

Так как матрица коэффициентов оператора Y_1 единична, $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, то для линейной замены координат имеем соотношение $U' = AUA^{-1} = U$. Оператор Y_1 инвариантен относительно этой замены. Поэтому в операторах (4.6) осуществляем линейную замену координат и матрицу коэффициентов оператора Y_2 берем в жордановой форме. Затем линейно комбинируем операторы X_1 и X_2 и переходим к прежним обозначениям:

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_1 = x\partial_x + y\partial_y, \quad Y_2 = \lambda x\partial_x + \mu y\partial_y,$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_1 = x\partial_x + y\partial_y, \quad Y_2 = y\partial_x,$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_1 = x\partial_x + y\partial_y, \quad Y_2 = (\lambda x + y)\partial_x + \lambda y\partial_y,$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_1 = x\partial_x + y\partial_y, \quad Y_2 = (\alpha x + \beta y)\partial_x + (-\beta x + \alpha y)\partial_y.$$

Очевидно, с помощью линейной комбинации первая система сводится к операторам (4.2), вторая и третья системы — к (4.3), а четвертая система — к (4.4).

II. В этом случае с помощью подходящей линейной комбинации операторов приходим к базису линейного пространства:

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_1 = y\partial_x, \quad Y_2 = g_2 x\partial_x + (p_2 x + r_2 y)\partial_y.$$

Далее, как и выше, проверяем на замкнутость их коммутаторы и применяем теорему 2, после чего приходим к базисам: (4.3) и (4.2).

III. Здесь, рассуждая как и выше, приходим к (4.3) при $r = 1$.

IV. Тогда имеем базис линейного пространства:

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_1 = (\alpha x + \beta y)\partial_x + (-\beta x + \alpha y)\partial_y, \quad Y_2 = (g_2 x + q_2 y)\partial_x + (p_2 x + r_2 y)\partial_y.$$

Далее проверяем замкнутость коммутаторов этих операторов. Замкнутость первых пяти коммутаторов очевидна. Шестой коммутатор равен $[Y_1, Y_2] = [-\beta(q_2 + p_2)x + \beta(q_2 - r_2)y]\partial_x + +[\beta(g_2 - r_2)x + \beta(g_2 + p_2)y]\partial_y = sY_1 + lY_2$. Приравнивая покомпонентно, получаем систему линейных уравнений $s\alpha + lg_2 = -\beta(q_2 + p_2)$, $s\beta + lq_2 = \beta(g_2 - r_2)$, $-s\beta + lp_2 = \beta(g_2 - r_2)$, $s\alpha + lr_2 = \beta(q_2 + p_2)$. Из первого уравнения вычтем четвертое, а третье сложим со вторым: $l(g_2 - r_2) = -2\beta(q_2 + p_2)$, $l(q_2 + p_2) = 2\beta(g_2 - r_2)$, откуда, учитывая, что $\beta \neq 0$, получим: $(l^2 + 4\beta^2)(g_2 - r_2) = 0$, $(l^2 + 4\beta^2)(q_2 + p_2) = 0$, т.е. $g_2 = r_2$, $q_2 = -p_2$. Далее линейной комбинацией операторов Y_1, Y_2 добиваемся перехода к базису (4.4). □

Пусть теперь в системе операторов (3.2) выполняется условие $g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 \neq 0$. Замкнутость коммутаторов этой системы операторов означает: $[X_1, Y_2] = \alpha Y_1 + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2$, $[X_2, Y_2] = \beta Y_1 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2$. Расписывая последние коммутаторы и приравнивая коэффициенты перед операторами дифференцирования, получаем $2g_1 = \alpha q_1$, $g_2 = \alpha q_2$, $2p_1 = \alpha r_1$, $p_2 = \alpha r_2$, $g_2 = \beta q_1$, $2g_3 = \beta q_2$, $p_2 = \beta r_1$, $2p_3 = \beta r_2$. Очевидно, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, поскольку иначе $g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 0$. Из последней системы следует, что если $\alpha = 0$ или $\beta = 0$, то с точностью до переобозначения координат и коэффициентов, (3.2) принимает вид:

$$\begin{cases} X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_1 = (q_1 x + q_2 y)\partial_x + (r_1 x + r_2 y)\partial_y, \\ Y_2 = (g_4 x + g_5 y + g_3 y^2)\partial_x + (p_4 x + p_5 y + p_3 y^2)\partial_y. \end{cases} \tag{4.7}$$

Если же $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$, то $\alpha q_2 = \beta q_1$, $\alpha r_2 = \beta r_1$, т. е. $q_2 = \delta q_1$, $r_2 = \delta r_1$, $\delta = \beta/\alpha$. Тогда $Y_1 = q_1(x + \delta y)\partial_x + r_1(x + \delta y)\partial_y$, $q_1^2 + r_1^2 \neq 0$. Далее, при $q_1 \neq 0$ вводим замену координат $x' = x + \delta y$, $y' = r_1 x - q_1 y$, $\partial_x = \partial_{x'} + r_1\partial_{y'}$, $\partial_y = \delta\partial_{x'} - q_1\partial_{y'}$, а при $q_1 = 0$ и $\delta \neq 0$ — $x' = x$, $y' = x + \delta y$, $\partial_x = \partial_{x'} + \partial_{y'}$, $\partial_y = \delta\partial_{y'}$. Затем линейно комбинируем базисные операторы и возвращаемся к прежним обозначениям координат и коэффициентов; с точностью до переобозначения $x \leftrightarrow y$, получаем в итоге два случая:

$$\begin{cases} X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_1 = y\partial_x, \\ Y_2 = (g_1 x^2 + g_2 xy + g_3 y^2 + g_4 x + g_5 y)\partial_x + (p_1 x^2 + p_2 xy + p_3 y^2 + p_4 x + p_5 y)\partial_y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_1 = y\partial_y, \\ Y_2 = (g_1 x^2 + g_2 xy + g_3 y^2 + g_4 x + g_5 y)\partial_x + (p_1 x^2 + p_2 xy + p_3 y^2 + p_4 x + p_5 y)\partial_y. \end{cases}$$

В полученных системах снова исследуем замкнутость коммутаторов $[X_1, Y_2]$ и $[X_2, Y_2]$, в результате имеем операторы, которые включаются в (4.7).

Предложение 4. *В системе (4.7), с точностью до линейной замены координат и перехода к новому базису, выделяются только следующие алгебры Ли дважды транзитивных групп Ли преобразований:*

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_1 = y\partial_x, \quad Y_2 = (rx + y^2)\partial_x + y\partial_y, \quad r = \text{const} \neq 0, \tag{4.8}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_1 = y\partial_y, \quad Y_2 = y\partial_x + y^2\partial_y. \tag{4.9}$$

С помощью нелинейной замены координат $x' = e^{-x}$, $y' = ye^{-x}$ и подходящей линейной комбинации операторов система (4.9) в прежних обозначениях для координат имеет вид:

$$X_1 = x\partial_x, \quad X_2 = y\partial_y, \quad Y_1 = y\partial_x, \quad Y_2 = x\partial_y. \tag{4.10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство первой части продемонстрировано выше и сводится к исследованию замкнутости коммутаторов системы операторов (4.7), переходу к другому базису и подходящей замене координат, а также учету теоремы 2.

Доказательство второй части. Из формул замены координат имеем $\partial_x = -e^{-x}\partial_{x'} - ye^{-x}\partial_{y'}$, $\partial_y = e^{-x}\partial_{y'}$, поэтому $X_1 = \partial_x = -x'\partial_{x'} - y'\partial y'$, $X_2 = \partial_y = x'\partial_{y'}$, $Y_1 = y\partial_y = y'\partial_{y'}$, $Y_2 = y(\partial_x + y\partial_y) = -y'\partial_{x'}$. Переходим к новому базису: $X_1' = -(X_1 + Y_1)$, $X_2' = Y_1$, $Y_1' = -Y_2$, $Y_2' = X_2$. Далее возвращаясь к прежним обозначениям координат и операторов, имеем (4.10). $\square$

Исследуем теперь систему операторов (3.3). Если $r_1 = 0$, то заменой координат $x' = x$, $y' = \omega_1 y$ и линейной комбинацией операторов, приходим к базисной системе операторов, которую записываем в прежних обозначениях координат и коэффициентов:

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_1 = e^y\partial_x, \quad Y_2 = ((g_1x + g_2y)e^y + g_4x)\partial_x + ((p_1x + p_2y + p_3)e^y + p_4x)\partial_y.$$

Если же $r_1 \neq 0$, то заменой координат $x' = r_1x - q_1y$, $y' = \omega_1 y$ и линейной комбинацией операторов, приходим к системе, которую записываем в прежних обозначениях:

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_1 = e^y\partial_y,$$
$$Y_2 = ((g_1x + g_2y + g_3)e^y + g_4x + g_5y)\partial_x + ((p_1x + p_2y)e^y + p_4x + p_5y)\partial_y.$$

Накладывая условие замкнутости коммутаторов $[X_1, Y_2]$, $[X_2, Y_2]$ и $[Y_1, Y_2]$, из полученных систем операторов выделяем алгебры Ли:

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_1 = e^y\partial_x, \quad Y_2 = g_4x\partial_x,$$
$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_1 = e^y\partial_x, \quad Y_2 = (p_3x + g_2y)e^y\partial_x + p_3e^y\partial_y,$$
$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_1 = e^y\partial_y, \quad Y_2 = x\partial_x,$$
$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_1 = e^y\partial_y, \quad Y_2 = xe^y\partial_y.$$

Легко заметить, что первая и четвертая алгебры попадают в условия теоремы 2, а вторая алгебра, с точностью до переобозначения переменных $x \leftrightarrow y$ и линейной комбинации операторов, включается в систему (3.6). Для третьей алгебры нелинейной заменой координат $x' = x$, $y' = e^{-y}$ и подходящей линейной комбинацией операторов переходим к базису (4.2).

Исследуем теперь системы операторов (3.4) и (3.5), в которых $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$.

Предложение 5. *В системе* (3.4)*, с точностью до линейной замены координат и перехода к новому базису, операторы*

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_1 = y\partial_y, \quad Y_2 = e^x\partial_x, \tag{4.11}$$

а в системе (3.5) *операторы*

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_1 = e^{\alpha x+\gamma y}\partial_x, \quad Y_2 = e^{-\alpha x-\gamma y}\partial_y, \tag{4.12}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_1 = e^x\partial_x, \quad Y_2 = e^y\partial_y, \tag{4.13}$$

где $\alpha^2 + \gamma^2 \neq 0$*, и только они образуют базисы четырехмерных алгебр Ли локально дважды транзитивных групп Ли преобразований. В алгебре Ли* (4.11) *заменой координат* $x' = e^{-x}$, $y' = y$ *и последующей комбинацией операторов базис приводится к виду* (4.2)*; в алгебре Ли* (4.12) *заменой координат* $x' = e^{-\alpha x}$, $y' = e^{\gamma y}$ *базис приводится к виду* (4.10)*, и, наконец, в алгебре Ли* (4.13) *заменой координат* $x' = e^{-x}$, $y' = e^{-y}$ *базис приводится к виду* (4.2).

Доказательство. Метод доказательства приведен выше и сводится к исследованию на замкнутость коммутаторов. Кратко проиллюстрируем вывод систем (4.12) и (4.13). Вначале заметим, что в операторах (3.5) $g_1^2 + p_1^2 \neq 0$, $q_1^2 + r_1^2 \neq 0$.

Пусть сначала $g_1r_1 - p_1q_1 \neq 0$. Тогда вводится замена координат: $x = g_1x' + p_1y'$, $y = q_1x' + r_1y'$. Затем линейно комбинируем операторы и возвращаемся к прежним обозначениям для коэффициентов и координат:

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_1 = e^{\alpha x+\gamma y}\partial_x, \quad Y_2 = e^{\beta x+\delta y}\partial_y,$$

причем $\alpha^2+\gamma^2\neq 0$ и $\beta^2+\delta^2\neq 0$. Замкнутость первых пяти коммутаторов очевидна. Шестой коммутатор $[Y_1,Y_2]$ замкнут в двух случаях: когда $(\alpha+\beta)x+(\gamma+\delta)y=0$, тогда приходим к (4.12); и когда $(\alpha+\beta)x+(\gamma+\delta)y\neq 0$, следовательно, $\beta=\gamma=0$, т. е. получаем операторы (4.13).

Пусть теперь $g_1r_1-p_1q_1=0$, тогда можно считать $r_1\neq 0$. Введем замену координат $x=x'+p_1y'$, $y=r_1y$. Подставляя найденное в (3.5), получим: $X_1=\partial_x$, $X_2=\partial_y$, $Y_1=e^{\alpha x+\gamma y}\partial_y$, $Y_2=e^{\beta x+\delta y}\partial_y$, т. е. попадаем в условия теоремы 2. Доказательство второй части этого предложения аналогично доказательству второй части предложения 4. □

Исследуем теперь систему (3.6). Вводим замену координат: $x'=\lambda x+\omega y$, $y'=y$. Тогда подходящей линейной комбинацией базисных операторов переходим к новому базису, который записываем в прежних обозначениях:

$$\begin{cases} X_1=\partial_x, \quad X_2=\partial_y, \quad Y_1=(g_1x+g_2y+g_3)e^x\partial_x+(p_1x+p_2y+p_3)e^x\partial_y, \\ Y_2=(q_1y+q_2)e^x\partial_x+(r_1y+r_2)e^x\partial_y. \end{cases} \tag{4.14}$$

Справедливо следующее утверждение, которое доказывается так же, как предложение 4:

Предложение 6. *В системе (4.14), с точностью до линейной замены координат и перехода к новому базису, операторы*

$$X_1=\partial_x, \quad X_2=\partial_y, \quad Y_1=e^x(\partial_x+y\partial_y), \quad Y_2=e^x\partial_y, \tag{4.15}$$

и только они образуют базис четырехмерной алгебры Ли локально дважды транзитивной группы Ли преобразований. В алгебре Ли (4.15) заменой координат $x'=e^{-x}$, $y'=ye^{-x}$ и последующей линейной комбинацией операторов базис приводится к виду (4.3) при $r=1$.

И, наконец, исследуем систему (3.7).

Предложение 7. *С точностью до подходящей линейной замены координат и перехода к новому базису, система (3.7) приводится к виду:*

$$X_1=\partial_x, \quad X_2=\partial_y, \quad Y_1=e^{\alpha x+\omega y}(\sin x\partial_x+\cos x\partial_y), \quad Y_2=e^{\alpha x+\omega y}(\cos x\partial_x-\sin x\partial_y), \tag{4.16}$$

где $\alpha,\omega=\mathrm{const}$.

Доказательство. Сначала заметим, что в системе (3.7) $g_1\neq 0$ и $p_1\neq 0$. Если $\beta_1=\beta_2=0$, то из замкнутости коммутатора операторов Y_1 и Y_2 вытекает либо их линейная зависимость, либо выполнение условий теоремы 2. Оба эти варианта недопустимы. Поэтому $\beta_1^2+\beta_2^2\neq 0$. В (3.7), с точностью до переобозначения координат $x\leftrightarrow y$, можно считать $\beta_1\neq 0$. Тогда вводим новую замену координат $x'=\beta_1x+\beta_2y+p_2$, $y'=g_1y/p_1$. Затем линейно комбинируем первые два оператора и переходим к прежним обозначениям коэффициентов, координат и операторов:

$$\begin{cases} X_1=\partial_x, \quad X_2=\partial_y, \quad Y_1=e^{\alpha x+\omega y}(\beta_1\sin(x+g_2)+\beta_2\sin x)\partial_x+e^{\alpha x+\omega y}\sin x\partial_y, \\ Y_2=e^{\alpha x+\omega y}(\beta_1\cos(x+g_2)+\beta_2\cos x)\partial_x+e^{\alpha x+\omega y}\cos x\partial_y. \end{cases}$$

Нетрудно заметить, что в записанной выше системе операторов $\sin g_2\neq 0$, поскольку иначе приходим к теореме 2. Тогда можно ввести замену координат $x=x'\beta_1\sin g_2+y'(\beta_1\cos g_2+\beta_2)$, $y=y'$. Подставляя в предыдущую систему, линейно комбинируем первые два оператора и переходим к прежним обозначениям коэффициентов, координат и операторов:

$$\begin{cases} X_1=\partial_x, \quad X_2=\partial_y, \quad Y_1=e^{\alpha x+\omega y}\cos(\beta_1x+\beta_2y)\partial_x+e^{\alpha x+\omega y}\sin(\beta_1x+\beta_2y)\partial_y, \\ Y_2=e^{\alpha x+\omega y}\sin(\beta_1x+\beta_2y)\partial_x-e^{\alpha x+\omega y}\cos(\beta_1x+\beta_2y)\partial_y, \quad \beta_1\neq 0. \end{cases}$$

Далее в найденной системе вводим замену координат $x'=\beta_1x+\beta_2y$, $y'=\beta_2x-\beta_1y$, $\beta_1=\beta\cos\psi$, $\beta_2=\beta\sin\psi$. Тогда последняя система, с точностью до замены $x'+\psi=x''$, $y'=y''$ и линейной комбинации оператора, в прежних обозначениях совпадает с (4.16). □

Предложение 8. *Система (4.16) содержит две неизоморфные четырехмерной алгебре Ли локально дважды транзитивные группы Ли преобразований. С точностью до линейной замены координат и перехода к новому базису эти алгебры совпадают с (4.10) и с (4.4).*

Доказательство. Вычисляем коммутатор в системе (4.16): $[Y_1, Y_2] = e^{2\alpha x + 2\omega y} \times [(\omega - 1)\partial_x - \alpha\partial_y]$. Из его замкнутости следует $\alpha = 0$, $\omega = 0, 1$. Тогда система (4.16) принимает вид:

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad Y_1 = e^{\omega y}(\sin x\partial_x + \cos x\partial_y), \quad Y_2 = e^{\omega y}(\cos x\partial_x - \sin x\partial_y), \quad \omega = 0, 1. \quad (4.17)$$

В случае $\omega = 0$ вводим координаты: $x = \operatorname{arctg}\dfrac{2x'}{1 - x'^2}$, $y = \ln\dfrac{y'^2}{1 + x'^2}$. Тогда (4.17) с точностью до линейной комбинации операторов и в прежних обозначениях координат примет вид:

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = x\partial_x, \quad Y_1 = y\partial_y, \quad Y_2 = x^2\partial_x + xy\partial_y.$$

Замена координат $x = x'/y'$, $y = 1/y'$ сводит последнюю систему к (4.10).

Пусть теперь в (4.17) $\omega = 1$. Вводим замену $x' = e^{-y}\sin x$, $y' = e^{-y}\cos x$. Тогда линейно комбинируя операторы и возвращаясь к прежним обозначениям, приходим к (4.4). □

Формулируем итоговую теорему.

Теорема 6. *В четырехмерных линейных пространствах с базисами (3.2)–(3.7) выделяются четырехмерные алгебры Ли локально дважды транзитивных групп Ли преобразований, подобные алгебрам Ли с базисными операторами:*

$$(4.1),\ (4.2),\ (4.3),\ (4.4),\ (4.8),\ (4.10). \quad (4.18)$$

Далее к найденным операторам применяется экспоненциальное отображение (2.2).

Теорема 7. *Локальные группы Ли преобразований многообразия M с операторами ее алгебр Ли (4.1)–(4.4), (4.8), (4.10), задающие локально дважды транзитивные действия, в подходящих обозначениях параметров и координат принимают вид:*

$$x' = ax + c, \quad y' = bx + y + d, \quad (4.19)$$
$$x' = ax + c, \quad y' = by + d, \quad (4.20)$$
$$x' = ax + by + c, \quad y' = ya^r + d, \quad (4.21)$$
$$x' = ax + by + c, \quad y' = -bx + ay + d, \quad (4.22)$$
$$x' = a^r x + by + y^2(a^r - a^2)/(r-2) + c, \quad y' = ay + d, \quad (4.23)$$
$$x' = ax + by, \quad y' = cx + dy, \quad (4.24)$$

где $r \neq 0$.

Доказательство. Вначале заметим, что базисные операторы алгебр Ли из списка (4.18) с точностью до переобозначения переменных $x \leftrightarrow y$ и переобозначения коэффициентов можно записать в виде:

$$X = \partial_x, \quad X = x\partial_x, \quad X = y\partial_x, \quad X = x\partial_x + ry\partial_y, \quad X = y\partial_x - x\partial_y, \quad X = (rx + y^2)\partial_x + y\partial_y.$$

Затем по экспоненциальному отображению (2.2) восстанавливаем однопараметрические подгруппы, соответствующие этим операторам. Потом, вычисляя композиции однопараметрических подгрупп, соответствующих базисным операторам алгебр Ли (4.18), получим группы Ли преобразований:

$$x' = xe^{t_1} + t_3, \quad y' = y + xt_2e^{t_1} + t_4,$$
$$x' = xe^{t_1} + t_3, \quad y' = ye^{t_2} + t_4,$$

$$x' = xe^{t_1} + yt_2e^{rt_1} + t_3, \quad y' = ye^{rt_1} + t_4,$$
$$x' = xe^{t_2}\cos t_1 + ye^{t_2}\sin t_1 + t_3, \quad y' = -xe^{t_2}\sin t_1 + ye^{t_2}\cos t_1 + t_4,$$
$$x' = xe^{rt_1} + yt_2e^{rt_1} + y^2(e^{rt_1} - e^{2t_1})/(r-2) + t_3, \quad y' = ye^{t_1} + t_4,$$
$$x' = xe^{t_1} + yt_3e^{t_2}, \quad y' = xt_4e^{t_1} + ye^{t_2}.$$

Переобозначая параметры, приходим к выражениям (4.19)–(4.24). □

§ 5. Сопоставление

Итак, в теореме 7 найдены выражения для локальных дважды транзитивных действий $\lambda' \colon M \times G^4 \to M$ группы Ли G^4 в многообразии M. Как сказано выше в теореме 1, эти действия локально изотопны функциям $f \colon M \times N_4 \to R^2$ двуметрической ФС ГДМ ранга $(3,2)$. Локальные изотопии, по определению 3, строятся с помощью трех локальных диффеоморфизмов: $\lambda_1 \colon M \to M$, $\lambda_2 \colon G^4 \to N_4$, $\lambda_3 \colon M \to R^2$. Далее, через локальные координаты, записываем эти изотопии и канонические формы двуметрических ФС ГДМ ранга $(3,2)$. Напомним, что локальные координаты в многообразии M обозначаются через (x,y), локальные координаты в N_4 — через (ξ,η,μ,ν), а в G^4 — через (a,b,c,d). Имеем следующий результат:

для действия (4.19)

$$\begin{cases} \lambda_1 = (x,y) \mapsto (x,y), \quad \lambda_2 \colon (a,b,c,d) \mapsto (\xi,\eta,\mu,\nu), \quad \lambda_3 \colon (x',y') \mapsto (f^1,f^2), \\ f^1 = x\xi + \mu, \quad f^2 = x\eta + y + \nu; \end{cases} \tag{5.1}$$

для (4.20)

$$\begin{cases} \lambda_1 = (x+y, x-y) \mapsto (x,y), \quad \lambda_2 \colon ((a+b)/2, (a-b)/, c+d, c-d) \mapsto (\xi,\eta,\mu,\nu), \\ \lambda_3 \colon (x'+y', x'-y') \mapsto (f^1,f^2), \quad f^1 = x\xi + y\eta + \mu,\ f^2 = x\eta + y\xi + \nu; \end{cases} \tag{5.2}$$

для (4.21)

$$\begin{cases} \lambda_1 \colon (x,y) \mapsto (y,x), \quad \lambda_2 \colon (a^r,b,c,d) \mapsto (\xi,\eta,\nu,\mu), \quad \lambda_3 \colon (x',y') \mapsto (f^2,f^1), \\ f^1 = x\xi + \mu, \quad f^2 = x\eta + y\xi^e + \nu, \quad e = 1/r, \quad r \neq 0; \end{cases} \tag{5.3}$$

для действия (4.22)

$$\begin{cases} \lambda_1 = (x,y) \mapsto (x,y), \quad \lambda_2 \colon (a,b,c,d) \mapsto (\xi,-\eta,\mu,\nu), \quad \lambda_3 \colon (x',y') \mapsto (f^1,f^2), \\ f^1 = x\xi - y\eta + \mu, \quad f^2 = x\eta + y\xi + \nu; \end{cases} \tag{5.4}$$

для (4.23) при $r \neq 2$:

$$\begin{cases} \lambda_1 \colon (x(r-2) + y^2, y) \mapsto (y,x), \quad \lambda_2 \colon (a, b(r-2) + 2ac, c, d(r-2) + c^2) \mapsto (\xi,\eta,\mu,\nu), \\ \lambda_3 \colon (x'(r-2) + (y')^2, y') \mapsto (f^2,f^1), \end{cases}$$

приходим к канонической форме (5.3), а при $r = 2$:

$$\begin{cases} \lambda_1 \colon (x,y) \mapsto (y,x), \quad \lambda_2 \colon (a,b,c,d) \mapsto (\xi,\eta,\nu,\mu), \quad \lambda_3 \colon (x',y') \mapsto (f^2,f^1), \\ f^1 = x\xi + \mu, \quad f^2 = x\eta + y\xi^2 + x^2\xi^2 \ln\xi + \nu; \end{cases} \tag{5.5}$$

и наконец, для действия (4.24)

$$\begin{cases} \lambda_1 = id, \quad \lambda_2 \colon (a,b,c,d) \mapsto (\xi,\eta,\mu,\nu), \quad \lambda_3 \colon (x',y') \mapsto (f^1,f^2), \\ f^1 = x\xi + y\eta, \quad f^2 = x\mu + y\nu. \end{cases} \tag{5.6}$$

Следует отметить, что канонические формы (5.1)–(5.6) ранее были получены вторым соавтором групповым методом [1, 7], основанном на работе С. Ли [13] по группам преобразований плоскости. Так, (5.1) совпадает с (7.12) из [1] при $c = 0$, (5.3) при $e \neq 1$ — с (7.12) при $c \neq 1$, (5.2) — с (7.11) при $\varepsilon = 1$, (5.3) с $e = 1$ — с (7.11) из [1] при $\varepsilon = 0$, (5.4) — с (7.11) при $\varepsilon = -1$, (5.5) — с (7.13), а (5.6) — с (7.14).

В конце запишем локальные изотопии $\lambda_1\colon M \to M$, $\lambda_2\colon N_4 \to N_4$, $\lambda_3\colon R^2 \to R^2$, приводящие канонические формы (5.1)–(5.6) двуметрических ФС ГДМ ранга $(3, 2)$ к виду (0.2), а также и сами функции, которые запишем в прежних обозначениях координат:

для (5.1): $\lambda_1 = id, \quad \lambda_2\colon (\xi, \eta, \mu, \nu) \mapsto (\mu, \nu, \xi\mu, \xi\nu + \eta), \quad \lambda_3 = id;$
$f^1 = (x + \xi)\mu, \quad f^2 = (x + \xi)\nu + y + \eta;$

для (5.2): $\lambda_1 = id, \quad \lambda_2\colon (\xi, \eta, \mu, \nu) \mapsto (\mu, \nu, \xi\mu, \eta\nu), \quad \lambda_3 = id;$
$f^1 = (x + \xi)\mu, \quad f^2 = (y + \eta)\nu;$

для (5.3): $\lambda_1 = id, \quad \lambda_2\colon (\xi, \eta, \mu, \nu) \mapsto (\mu, \nu, \xi\mu, \xi\nu + \eta\mu^e), \quad \lambda_3 = id;$
$f^1 = (x + \xi)\mu, \quad f^2 = (x + \xi)\nu + (y + \eta)\mu^e;$

для (5.4): $\lambda_1 = id, \quad \lambda_2\colon (\xi, \eta, \mu, \nu) \mapsto (\mu, \nu, \xi\mu - \eta\nu, \xi\nu + \eta\mu), \quad \lambda_3 = id;$
$f^1 = (x + \xi)\mu - (y + \eta)\nu, \quad f^2 = (x + \xi)\nu + (y + \eta)\mu;$

для (5.5): $\lambda_1 = id, \quad \lambda_2\colon (\xi, \eta, \mu, \nu) \mapsto (\mu, \nu + 2\xi\mu^2 \ln \mu, \xi\mu, \xi\nu + \eta\mu^2 + \xi^2\mu^2 \ln \mu), \quad \lambda_3 = id;$
$f^1 = (x + \xi)\mu, \quad f^2 = (x + \xi)\nu + (y + \eta)\mu^2 + (x + \xi)^2\mu^2 \ln \mu;$

для (5.6): $\lambda_1\colon (x, y) \mapsto (e^x, e^y), \quad \lambda_2\colon (\xi, \eta, \mu, \nu) \mapsto (\mu e^\xi, \nu e^\eta, \mu^2 e^\xi, \nu^2 e^\eta), \quad \lambda_3 = id;$
$f^1 = \mu e^{x+\xi} + \nu e^{y+\eta}\nu, \quad f^2 = \mu^2 e^{x+\xi} + \nu^2 e^{y+\eta}.$

Таким образом, найдены все функции $f\colon M \times N_4 \longrightarrow R^2$, задающие двуметрические ФС ГДМ ранга $(3, 2)$ при вложении аддитивной двуметрической ФС ГДМ ранга $(2, 2)$ в соответствии с формулой (0.2).

Заключение

Итак, задача о вложении аддитивной двуметрической ФС ГДМ ранга $(2, 2)$ в двуметрическую ФС ГДМ ранга $(3, 2)$ полностью решена. Отметим, что ранее была решена задача аддитивного вложении однометрической ФС ГДМ ранга $(2, 2)$ в однометрическую ФС ГДМ ранга $(3, 2)$ [4]. Данная задача естественно обобщается и на s-метрический случай, когда ищем с точностью до локальной изотопии все дифференцируемые функции $f\colon M \times N \longrightarrow R^s$ (где M, N — дифференцируемые многообразия, причем $\dim M = s$, $\dim N = 2s$) вида

$$f(x^1 + \xi^1, \ldots, x^s + \xi^s, \eta^1, \ldots, \eta^s),$$

задающие s-метрические ФС ГДМ ранга $(3, 2)$.

Также отметим, что, с точностью до локальной изотопии, существуют две двуметрические ФС ГДМ ранга $(2, 2)$. Первая задается функцией (0.1), а вторая — неаддитивной функцией $g^1 = (x + \xi)y$, $g^2 = (x + \xi)\eta$. Для неаддитивной двуметрической ФС ГДМ ранга $(2, 2)$ также ставится задача о вложении, которая до конца пока еще не решена.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Михайличенко Г.Г. Математические основы и результаты теории физических структур. Горно-Алтайск: Изд-во Горно-Алт. гос. ун-та, 2016. 297 с.
2. Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения евклидовой и псевдоевклидовой геометрий // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23. № 2. С. 167–181. DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-167-181
3. Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия. 2017. Т. 14. С. 657–672. DOI: 10.17377/semi.2017.14.057

4. Кыров В.А. Вложение феноменологически симметричных геометрий двух множеств ранга $(N, 2)$ в феноменологически симметричные геометрии двух множеств ранга $(N+1, 2)$ // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 3. С. 312–323. DOI: 10.20537/vm160302
5. Кыров В.А. Вложение феноменологически симметричных геометрий двух множеств ранга (N, M) в феноменологически симметричные геометрии двух множеств ранга $(N+1, M)$ // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27. Вып. 1. С. 42–53. DOI: 10.20537/vm170104
6. Симонов А.А. Псевдоматричные группы и физические структуры // Сибирский математический журнал. 2015. Т. 56. № 1. С. 211–226.
7. Михайличенко Г.Г. Двуметрические физические структуры ранга $(n+1, 2)$ // Сибирский математический журнал. 1993. Т. 34. № 3. С. 132–143.
8. Кыров В.А. Феноменологически симметричные локальные группы Ли преобразований пространства R^s // Известия вузов. Математика. 2009. № 7. С. 10–21.
9. Бредон Г. Введение в теорию компактных групп преобразований. М.: Наука, 1980. 440 с.
10. Кострикин А.И. Введение в алгебру. М.: Наука, 1977. 496 с.
11. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424 с.
12. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.
13. Lie S., Engel F. Theorie der transformationsgruppen. Bd 3. Leipzig: B. G. Teubner, 1893. 324 p.

Поступила в редакцию 07.06.2018

Кыров Владимир Александрович, к. ф.-м. н., доцент, Горно-Алтайский государственный университет, 649000, Россия, г. Горно-Алтайск, ул. Ленкина, 1.
E-mail: kyrovVA@yandex.ru

Михайличенко Геннадий Григорьевич, д. ф.-м. н., профессор, Горно-Алтайский государственный университет, 649000, Россия, г. Горно-Алтайск, ул. Ленкина, 1.
E-mail: mikhailichenko@gasu.ru

V. A. Kyrov, G. G. Mikhailichenko

Embedding of an additive two-dimensional phenomenologically symmetric geometry of two sets of rank $(2, 2)$ into two-dimensional phenomenologically symmetric geometries of two sets of rank $(3, 2)$

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 3, pp. 305–327 (in Russian).

Keywords: phenomenologically symmetric geometry of two sets, system of differential equations, Lie algebra, Lie transformation group.

MSC2010: 39A05, 39B05

DOI: 10.20537/vm180304

In this paper, the method of embedding is used to construct the classification of two-dimensional phenomenologically symmetric geometries of two sets (PS GTS) of rank $(3, 2)$ from the previously known additive two-dimensional PS GTS of rank $(2, 2)$ defined by a pair of functions $g^1 = x + \xi$ and $g^2 = y + \eta$. The essence of this method consists in finding the functions defining the PS GTS of rank $(3, 2)$ with respect to the functions $g^1 = x + \xi$ and $g^2 = y + \eta$. In solving this problem, we use the fact that the two-dimensional PS GTS of rank $(3, 2)$ admit groups of transformations of dimension 4, and the two-dimensional PS GTS of rank $(2, 2)$ is of dimension 2. It follows that the components of the operators of the Lie algebra of the transformation group of the two-dimensional PS GTS of rank $(3, 2)$ are solutions of a system of eight linear differential equations of the first order in two variables. Investigating this system of equations, we arrive at possible expressions for systems of operators. Then, from the systems of operators, we select the operators that form Lie algebras. Then, applying the exponential mapping, we recover the actions of the Lie groups from the Lie algebras found. It is precisely these actions that specify the two-dimensional PS GTS of rank $(3, 2)$.

REFERENCES

1. Mikhailichenko G.G. *Matematicheskie osnovy i rezul'taty teorii fizicheskikh struktur* (The mathemetical basics and results of the theory of physical structures), Gorno-Altaisk: Gorno-Altaisk State University, 2016, 297 p.
2. Kyrov V.A., Mikhailichenko G.G. An analytic method for the embedding of the Euclidean and pseudo-Euclidean geometries, *Trudy Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2017, vol. 23, no. 2, pp. 167–181 (in Russian). DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-167-181
3. Kyrov V.A., Mikhailichenko G.G. An analytic method for the embedding of the symplectic geometry, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2017, vol. 14, pp. 657–672 (in Russian). DOI: 10.17377/semi.2017.14.057
4. Kyrov V.A. Embedding of phenomenologically symmetric geometries of two sets of the rank $(N, 2)$ into phenomenologically symmetric geometries of two sets of the rank $(N + 1, 2)$, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, issue 3, pp. 312–323 (in Russian). DOI: 10.20537/vm160302
5. Kyrov V.A. Embedding of phenomenologically symmetric geometries of two sets of the rank (N, M) into phenomenologically symmetric geometries of two sets of the rank $(N + 1, M)$, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 1, pp. 42–53 (in Russian). DOI: 10.20537/vm170104
6. Simonov A.A. Pseudomatrix groups and physical structures, *Siberian Mathematical Journal*, 2015, vol. 56, no. 1, pp. 177–190. DOI: 10.1134/S0037446615010176
7. Mikhailichenko G.G. Bimetric physical structures of rank $(n+1, 2)$, *Siberian Mathematical Journal*, 1993, vol. 34, no. 3, pp. 513–522. DOI: 10.1007/BF00971227
8. Kyrov V.A. Phenomenologically symmetric local Lie groups of transformations of the space R^s, *Russian Mathematics*, 2009, vol. 53, no. 7, pp. 7–16. DOI: 10.3103/S1066369X09070020
9. Bredon G. Introduction of compact transformation groups, New York–London: Academic Press, 1972. xiii+459 p.
10. Kostrikin A.I. *Vvedenie v algebru* (Introduction to Algebra), Moscow: Nauka, 1977, 496 p.
11. El'sgol'ts L.E. *Differentsial'nye uravneniya i variatsionnoe ischislenie* (Differential equations and the calculus of variations), Moscow: Nauka, 1969, 424 p.
12. Ovsyannikov L.V. *Gruppovoi analiz differentsial'nykh uravnenii* (Group analysis of differential equations), Moscow: Nauka, 1978, 400 p.
13. Lie S., Engel F. *Theorie der transformationsgruppen. Bd. 3*, Leipzig: B. G. Teubner, 1893. 324 p.

Received 07.06.2018

Kyrov Vladimir Aleksandrovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Gorno-Altaisk State University, ul. Lenkina, 1, Gorno-Altaisk, 649000, Russia.
E-mail: kyrovVA@yandex.ru

Mikhailichenko Gennadii Grigor'evich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Gorno-Altaisk State University, ul. Lenkina, 1, Gorno-Altaisk, 649000, Russia.
E-mail: mikhailichenko@gasu.ru