УДК 517.977

© *Е. С. Жуковский, Х. М. Т. Тахир*

СРАВНЕНИЕ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматриваются вопросы разрешимости краевых задач для линейных функционально-дифференциальных уравнений. Предлагаются утверждения, позволяющие получать условия существования единственного решения, неотрицательности функции Грина и фундаментального решения однородного уравнения. Для применения этих утверждений требуется задать «эталонную» краевую задачу, обладающую соответствующими свойствами, и определить некоторый оператор по приведенному правилу через операторы, порожденные исследуемой и «эталонной» задачами. Если спектральный радиус этого оператора меньше 1, то рассматриваемая краевая задача однозначно разрешима. Аналогично: для получения условий неотрицательности функции Грина и фундаментального решения требуется определить по приведенному в работе правилу специальный оператор и проверить его положительность. Рассмотрен пример применения полученных утверждений к конкретной краевой задаче с интегральным краевым условием для уравнения, содержащего отклонения в аргументе неизвестной функции и ее производной.

Ключевые слова: линейное функционально-дифференциальное уравнение, краевая задача, функция Грина, фундаментальное решение однородного уравнения, положительный оператор.

DOI: 10.20537/vm180302

Введение

В данной работе рассматриваются краевые задачи для линейных функционально-дифференциальных уравнений. Под функционально-дифференциальным уравнением, следуя определению Н. В. Азбелева [1, 2], мы понимаем операторное уравнение с линейным ограниченным отображением, действующим из пространства абсолютно непрерывных функций в пространство суммируемых функций. Предлагается утверждение о сравнении решений краевых задач. Это утверждение позволяет для конкретных краевых задач получать условия существования решений, неотрицательности функции Грина и нормального фундаментального решения в терминах разности операторов, определяемых исследуемую краевую и некоторую «эталонную», то есть однозначно разрешимую, задачу, имеющую неотрицательные функцию Грина и нормальное фундаментальное решение.

Отметим, что в [3] для получения условий положительной обратимости операторов использовался близкий подход, основанный на их сравнении с некоторым «эталонным» положительным оператором. В цитируемой работе был рассмотрен достаточно широкий класс отображений, в том числе содержащий отображения, возникающие в краевых задачах для функционально-дифференциальных уравнений.

Методы исследования краевых задач, использующие их сравнение с задачами, обладающими требуемыми свойствами, активно развиваются и применяются многими авторами (см., например, [4–7] и библиографию в этих работах). В качестве «эталонных» используются краевые задачи и для обыкновенных дифференциальных уравнений [4, 8], и для функционально-дифференциальных уравнений [5, 7, 9]. Близкие подходы оказываются эффективными при рассмотрении и других вопросов теории функционально-дифференциальных уравнений, в том числе для получения условий устойчивости, изучения задач управления и др. (см. [10, 11]).

Отметим, что в большинстве работ при изучении краевых задач определяется «эталонная» задача так, что она либо содержит более простое уравнение с тем же условием, либо более простое условие для исследуемого уравнения. В предлагаемом здесь утверждении сравниваются решения двух краевых задач, имеющих отличия и в уравнениях, и в краевых условиях.

§ 1. Основные обозначения и определения

Стандартно обозначаем: $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел; L — пространство суммируемых по Лебегу функций $y\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ с нормой $\|y\|_L = \int_0^T |y(t)|\,dt$, AC — пространство абсолютно непрерывных функций $x\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ с нормой $\|x\|_{AC} = \max\bigl\{\|\dot{x}\|_L, |x(0)|\bigr\}$. Считаем, что в рассматриваемых функциональных пространствах задан естественный порядок, то есть для функций $x_1, x_2 \in L$ (или $x_1, x_2 \in AC$) полагаем $x_1 \geqslant x_2$, если функция $x_1 - x_2$ неотрицательна.

Пусть $\mathfrak{L}(E_1, E_2)$ — линейное пространство линейных отображений, действующих из E_1 в E_2, где E_i $(i = 1, 2)$ — любое из пространств L, AC. Отображение $F \in \mathfrak{L}(E_1, E_2)$ называют положительным, если образом произвольной неотрицательной функции $x \in E_1$ является неотрицательная функция $Fx \in E_2$. Для $F_1, F_2 \in \mathfrak{L}(E_1, E_2)$ полагаем, что выполнено неравенство $F_1 \geqslant F_2$, если оператор $F_1 - F_2$ положительный.

Вначале приведем необходимые сведения (подробнее см. [1]) о линейном функционально-дифференциальном уравнении.

Пусть заданы линейные ограниченные операторы $\mathcal{L}\colon AC \to L$, $l\colon AC \to \mathbb{R}$, функция $y \in L$ и число $\gamma \in \mathbb{R}$. Краевой задачей называют систему уравнений

$$\mathcal{L}x = y, \quad lx = \gamma \tag{1}$$

относительно неизвестной функции $x \in AC$.

Если краевая задача (1) для любых правых частей $y \in L$, $\gamma \in \mathbb{R}$ однозначно разрешима, то существует линейный оператор

$$(G, X) \doteq \begin{pmatrix} \mathcal{L} \\ l \end{pmatrix}^{-1} \colon L \times \mathbb{R} \to AC,$$

который, согласно теореме Банаха об обратном операторе (см. [12, с. 225]), является ограниченным. Оператор $X\colon \mathbb{R} \to AC$ можно отождествить с задающей его функцией $X \in AC$, называемой нормальным фундаментальным решением однородного уравнения, для этой функции выполнено $\mathcal{L}X = 0 \in L$, $lX = 1$. Оператор $G\colon L \to AC$ называют оператором Грина; заметим, что композиция $\mathcal{L}G\colon L \to L$ является тождественным оператором, а композиция $lG\colon L \to \mathbb{R}$ — нулевым функционалом. В силу интегрального представления линейного ограниченного функционала $(G\,\cdot)(t)\colon L \to \mathbb{R}$, $t \in [0,T]$, существует функция $\mathcal{G}\colon [0,T] \times [0,T] \to \mathbb{R}$ такая, что оператор Грина представим в виде

$$(Gy)(t) \doteq \int_0^T \mathcal{G}(t,s)y(s)\,ds.$$

Отметим, что при каждом $t \in [0,T]$ функция $\mathcal{G}(t,\cdot)\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ существенно ограничена. Функция $\mathcal{G}$ называется функцией Грина.

Таким образом, в случае однозначной разрешимости краевой задачи (1) при любых $y \in L$, $\gamma \in \mathbb{R}$ ее решение может быть записано в виде

$$x(t) = X(t)\gamma + \int_0^T \mathcal{G}(t,s)y(s)\,ds.$$

В связи с различными теоретическими и прикладными задачами представляют интерес условия применимости к краевой задаче теоремы Чаплыгина о неравенстве, то есть условия, при которых оператор Грина G является положительным, а нормальное фундаментальное решение X однородного уравнения неотрицательно. Оператор Грина положителен тогда и только тогда, когда функция $\mathcal{G}(t,\cdot)$ неотрицательна для всех $t \in [0,T]$. Далее будут сформулированы условия однозначной разрешимости краевой задачи, неотрицательности ее функции Грина и фундаментального решения соответствующего однородного уравнения.

§ 2. Сравнение решений краевых задач

Здесь, наряду с «эталонной» краевой задачей (1), рассматривается краевая задача

$$\widetilde{\mathcal{L}}x \doteq \mathcal{L}x - \triangle\mathcal{L}x = f, \quad \widetilde{l}x \doteq lx - \triangle lx = \alpha, \tag{2}$$

где $f \in L$, $\alpha \in \mathbb{R}$, линейные операторы $\triangle\mathcal{L}\colon AC \to L$ и $\triangle l\colon AC \to \mathbb{R}$ ограничены. Целью исследования является получение условий на операторы $\triangle\mathcal{L}$, $\triangle l$, при которых:

1) из однозначной разрешимости задачи (1) следует однозначная разрешимость задачи (2);

2) из неотрицательности функции Грина $\mathcal{G}$ и нормального фундаментального решения X задачи (1) следует неотрицательность функции Грина $\widetilde{\mathcal{G}}$ и нормального фундаментального решения $\widetilde{X}$ задачи (2).

Отметим, что в [1, с. 51–53] приведены соотношения, связывающие функции Грина однозначно разрешимых краевых задач, имеющих либо одинаковые краевые условия, либо одинаковые функционально-дифференциальные уравнения. В предлагаемых ниже утверждениях сравниваются краевые задачи, отличающиеся и уравнениями, и краевыми условиями, а целью исследования являются условия однозначной разрешимости и оценки решений.

Определим оператор $H\colon L \times \mathbb{R} \to L \times \mathbb{R}$ формулой

$$H \doteq \begin{pmatrix} \triangle\mathcal{L} \\ \triangle l \end{pmatrix} (G, X) = \begin{pmatrix} \triangle\mathcal{L}G & \triangle\mathcal{L}X \\ \triangle lG & \triangle lX \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. *Пусть краевая задача (1) для любых $y \in L$, $\gamma \in \mathbb{R}$ однозначно разрешима и для спектрального радиуса ρ оператора H выполнено $\rho(H) < 1$. Тогда краевая задача (2) при любых $f \in L$, $\alpha \in \mathbb{R}$ однозначно разрешима.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Каждому $x \in AC$ взаимно однозначно соответствует пара $(y, \gamma) \in \in L \times \mathbb{R}$ правых частей в однозначно разрешимой краевой задаче (1), что позволяет в краевой задаче (2) сделать замену

$$x = X\gamma + Gy \tag{3}$$

(называемую подстановкой Азбелева). Таким образом получаем систему уравнений

$$\mathcal{L}X\gamma + \mathcal{L}Gy - \triangle\mathcal{L}X\gamma - \triangle\mathcal{L}Gy = f, \quad lX\gamma + lGy - \triangle lX\gamma - \triangle lGy = \alpha. \tag{4}$$

Однозначная разрешимость краевой задачи (2) равносильна однозначной разрешимости системы (4), а формула (3) позволяет по решению системы (4) определить решение задачи (2).

Так как имеют место соотношения

$$\mathcal{L}X\gamma = 0, \quad \mathcal{L}Gy = y, \quad lX\gamma = \gamma, \quad lGy = 0,$$

то систему (4) можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} y \\ \gamma \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \triangle\mathcal{L}G & \triangle\mathcal{L}X \\ \triangle lG & \triangle lX \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ \alpha \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Остается заметить, что полученное уравнение для каждой правой части однозначно разрешимо вследствие предположения $\rho(H) < 1$. $\square$

Для формулировки следующего утверждения определим оператор

$$V\colon AC \to AC, \quad V \doteq (G, X)\begin{pmatrix} \triangle\mathcal{L} \\ \triangle l \end{pmatrix} = G\triangle\mathcal{L} + X\triangle l.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и оператор $V\colon AC\to AC$ является положительным. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(a) *если оператор Грина $G\colon L\to AC$ краевой задачи (1) положителен, то для оператора Грина $\widetilde{G}$ краевой задачи (2) выполнено неравенство $\widetilde{G}\geqslant G$;*

(b) *если нормальное фундаментальное решение X краевой задачи (1) неотрицательно, то для нормального фундаментального решения $\widetilde{X}$ краевой задачи (2) выполнено неравенство $\widetilde{X}\geqslant X$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Решением уравнения (5) является сумма ряда Неймана

$$\begin{pmatrix} y\\ \gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f\\ \alpha\end{pmatrix}+\sum_{i=1}^{\infty}H^i\begin{pmatrix} f\\ \alpha\end{pmatrix}.$$

Следовательно, для решения x краевой задачи (1) выполнено

$$x=(G,X)\begin{pmatrix} y\\ \gamma\end{pmatrix}=Gf+X\alpha+(G,X)\sum_{i=1}^{\infty}H^i\begin{pmatrix} f\\ \alpha\end{pmatrix}=Gf+X\alpha+\sum_{i=1}^{\infty}(G,X)H^i\begin{pmatrix} f\\ \alpha\end{pmatrix}.$$

Для каждого члена полученного ряда, в силу свойства ассоциативности произведения отображений, имеем

$$(G,X)H^i=(G,X)\begin{pmatrix} \triangle\mathcal{L}\\ \triangle l\end{pmatrix}(G,X)\cdots\begin{pmatrix} \triangle\mathcal{L}\\ \triangle l\end{pmatrix}(G,X)=V^i(G,X).$$

Таким образом, решение краевой задачи (1) определяется соотношением

$$\begin{aligned}x=Gf+X\alpha+\sum_{i=1}^{\infty}V^i(G,X)\begin{pmatrix} f\\ \alpha\end{pmatrix}&=Gf+X\alpha+\sum_{i=1}^{\infty}V^i(Gf+X\alpha)=\\ &=Gf+\sum_{i=1}^{\infty}V^iGf+X\alpha+\sum_{i=1}^{\infty}V^iX\alpha.\end{aligned}$$

Это соотношение позволяет определить оператор Грина и нормальное фундаментальное решение краевой задачи (2):

$$\widetilde{G}=G+\sum_{i=1}^{\infty}V^iG,\quad \widetilde{X}=X+\sum_{i=1}^{\infty}V^iX. \tag{6}$$

Так как оператор V положительный, то и сумма ряда $\sum_{i=1}^{\infty}V^i$ также положительна. Поэтому из (6) с очевидностью следует доказываемое утверждение: из положительности оператора G следует неравенство $\widetilde{G}\geqslant G$, а из $X\geqslant 0$ следует $\widetilde{X}\geqslant X$. □

Замечание 1. Утверждение (a) теоремы 2 позволяет получать оценки функции Грина, так как оно равносильно следующему утверждению:

(a′) *если функция Грина $\mathcal{G}$ краевой задачи (1) неотрицательна, то есть $\mathcal{G}(t,s)\geqslant 0$ при любом $t\in[0,T]$ и п. в. $s\in[0,T]$, то для функции Грина $\widetilde{\mathcal{G}}$ краевой задачи (2) выполнено неравенство $\widetilde{\mathcal{G}}(t,s)\geqslant\mathcal{G}(t,s)$ при любом $t\in[0,T]$ и п. в. $s\in[0,T]$.*

Приведем частные случаи теорем 1, 2, относящиеся к ситуациям, когда сравниваемые краевые задачи имеют либо одинаковые уравнения, либо одинаковые краевые условия. Наряду с задачей (1) рассмотрим задачи

$$\widetilde{\mathcal{L}}x\doteq\mathcal{L}x-\triangle\mathcal{L}x=f,\qquad lx=\alpha, \tag{7}$$

$$\mathcal{L}x=f,\quad \widetilde{l}x\doteq lx-\triangle lx=\alpha. \tag{8}$$

Следствие 1. *Пусть краевая задача* (1) *для любых $y \in L$, $\gamma \in \mathbb{R}$ однозначно разрешима и для спектрального радиуса ρ оператора $\triangle\mathcal{L}G\colon L \to L$ выполнено $\rho(\triangle\mathcal{L}G) < 1$. Тогда краевая задача* (7) *при любых $f \in L$, $\alpha \in \mathbb{R}$ однозначно разрешима. Пусть, кроме того, оператор $G\,\triangle\mathcal{L}\colon AC \to AC$ является положительным. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если оператор Грина $G\colon L \to AC$ краевой задачи* (1) *положителен, то для оператора Грина $\widetilde{G}$ краевой задачи* (7) *выполнено неравенство $\widetilde{G} \geqslant G$;*

2) *если нормальное фундаментальное решение X краевой задачи* (1) *неотрицательно, то для нормального фундаментального решения $\widetilde{X}$ краевой задачи* (7) *выполнено неравенство $\widetilde{X} \geqslant X$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В рассматриваемой ситуации $\triangle l = 0$, поэтому оператор H здесь равен

$$H = \begin{pmatrix} \triangle\mathcal{L}G & \triangle\mathcal{L}X \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для спектрального радиуса этого оператора выполнено $\rho(H) = \rho(\triangle\mathcal{L}G) < 1$, таким образом, выполнены условия теоремы 1. Для проверки предположений теоремы 2 достаточно заметить, что $V = G\,\triangle\mathcal{L}$. □

Продемонстрируем, как можно использовать следствие 1 в исследовании задачи Коши для функционально-дифференциальных уравнений. Будем предполагать, что задача (1) с функционалом $lx \doteq x(0)$ (то есть задача Коши) однозначно разрешима, а оператор $G\colon L \to AC$ вольтерров (в этом случае его называют оператором Коши). Тогда, если отображение $\triangle\mathcal{L}\colon AC \to L$ вольтеррово и вполне непрерывно, то композиция $\triangle\mathcal{L}G\colon L \to L$ является вольтерровым вполне непрерывным оператором. Поэтому для спектрального радиуса этого оператора выполнено $\rho(\triangle\mathcal{L}G) = 0$, что позволяет применить следствие 1.

Теперь приведем утверждение о сравнении краевых задач, отличающихся лишь краевыми условиями.

Следствие 2. *Пусть краевая задача* (1) *для любых $y \in L$, $\gamma \in \mathbb{R}$ однозначно разрешима и $|\triangle lX| < 1$. Тогда краевая задача* (8) *при любых $f \in L$, $\alpha \in \mathbb{R}$ однозначно разрешима. Пусть, кроме того, оператор $X\triangle l\colon AC \to AC$ является положительным. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если оператор Грина $G\colon L \to AC$ краевой задачи* (1) *положителен, то для оператора Грина $\widetilde{G}$ краевой задачи* (8) *выполнено неравенство $\widetilde{G} \geqslant G$;*

2) *если нормальное фундаментальное решение X краевой задачи* (1) *неотрицательно, то для нормального фундаментального решения $\widetilde{X}$ краевой задачи* (8) *выполнено неравенство $\widetilde{X} \geqslant X$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В рассматриваемой ситуации $\triangle\mathcal{L} = 0$, и поэтому участвующие в формулировках теорем 1, 2 отображения H, V определяются соотношениями

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \triangle lG & \triangle lX \end{pmatrix}, \qquad V = X\triangle l.$$

Так как $\rho(H) = |\triangle lX| < 1$, выполнены все предположения теорем 1, 2. □

§ 3. Применение теорем сравнения к исследованию краевых задач

Чтобы продемонстрировать применение теорем 1, 2, рассмотрим краевую задачу для функционально-дифференциального уравнения, содержащего отклонения в аргументе неизвестной функции и ее производной.

Положим

$$h(t) = \begin{cases} 2t, & t \in [0, 1/3], \\ (t+1)/2, & t \in (1/3, 1]. \end{cases}$$

Рассмотрим краевую задачу

$$\dot{x}\big(h(t)\big) - p(t)x\big(g(t)\big) = f(t), \quad t \in [0,1], \tag{9}$$

$$x(0) - \int_0^1 \varphi(s)\dot{x}(s)\,ds = \alpha. \tag{10}$$

Покажем, что, если параметры $p, \varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $g\colon [0,1] \to [0,1]$ — измеримые по Лебегу функции и выполнены условия

$$\operatorname*{vrai\ sup}_{t\in[0,1/3]} |\varphi(t)| < 1/2, \quad \operatorname*{vrai\ sup}_{t\in[1/3,1]} |\varphi(t)| < 2, \quad \int_0^1 |p(t)|\,dt < 1/3, \tag{11}$$

то при любых правых частях $f \in L$, $\alpha \in \mathbb{R}$ краевая задача (9), (10) имеет единственное решение. Для этого потребуется задать «эталонную» краевую задачу. Использовать в качестве «эталонной» задачу Коши или какую-либо краевую задачу для уравнения (9) сложно, так как ее однозначная разрешимость потребует дополнительного изучения (осложненного отклоняющимся аргументом производной). Проще будет воспользоваться краевой задачей

$$\dot{x}\big(h(t)\big) = y(t), \quad t \in [0,1], \tag{12}$$

$$x(0) = \gamma. \tag{13}$$

Задача (12), (13), очевидно, однозначно разрешима:

$$\dot{x}(t) = y\big(h^{-1}(t)\big), \quad x(t) = \alpha + \int_0^t f(h^{-1}(s))ds = \gamma + \int_0^1 \chi_{[0,\,h^{-1}(t)]}(s)\dot{h}(s)y(s)ds,$$

здесь и ниже $\chi_{[\tau_1,\tau_2]}(\cdot)$ — характеристическая функция отрезка $[\tau_1,\tau_2]$. Таким образом, операторы $G\colon L \to AC$, $X\colon \mathbb{R} \to AC$ в данном случае определяются соотношениями

$$(Gy)(t) = \int_0^1 \chi_{[0,\,h^{-1}(t)]}(s)\dot{h}(s)y(s)ds, \quad (X\gamma)(t) = \gamma, \quad t \in [0,1].$$

Для рассматриваемых краевых задач отображения $\triangle\mathcal{L}\colon AC \to L$, $\triangle l\colon AC \to \mathbb{R}$ определяются равенствами

$$\triangle\mathcal{L}x = p(t)x\big(g(t)\big), \quad \triangle l x = \int_0^1 \varphi(s)\dot{x}(s)\,ds.$$

Таким образом, имеем

$$\triangle\mathcal{L}Gy = p(t)\int_0^1 \chi_{[0,\,h^{-1}(g(t))]}(s)\dot{h}(s)y(s)ds, \quad \triangle\mathcal{L}X\gamma = p(t)\gamma,$$

$$\triangle l G y = \int_0^1 \varphi(s)\dot{h}(s)y(s)ds, \quad \triangle l X\gamma = 0.$$

При определении в произведении $L \times \mathbb{R}$ нормы формулой $\|(y,\gamma)\|_{L\times\mathbb{R}} = \max\big\{\|y\|_L, \|\gamma\|_{\mathbb{R}}\big\}$ норма оператора $H\colon L\times\mathbb{R} \to L\times\mathbb{R}$ оценивается неравенством

$$\|H\|_{L\times\mathbb{R}\to L\times\mathbb{R}} \leqslant \max\big\{\|\triangle\mathcal{L}G\|_{L\to L} + \|\triangle\mathcal{L}X\|_{\mathbb{R}\to L},\ \|\triangle l G\|_{L\to\mathbb{R}} + \|\triangle l X\|_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}\big\}.$$

В силу предположений (11) получаем $\|H\|_{L\times\mathbb{R}\to L\times\mathbb{R}} < 1$.

Таким образом, согласно теореме 1 краевая задача (9), (10) имеет единственное решение.

Потребуем теперь (кроме принятых предположений), чтобы функции p, φ были неотрицательными. Тогда оператор $V\colon AC \to AC$, для рассматриваемых краевых задач равный

$$Vx = G\triangle\mathcal{L}x + X\triangle l x = \int_0^1 \chi_{[0,\,h^{-1}(t)]}(s)\dot{h}(s)p(s)x\big(g(s)\big)ds + \int_0^1 \varphi(s)\dot{x}(s)\,ds,$$

является положительным. Следовательно, согласно теореме 2 для оператора Грина $\widetilde{G}$ краевой задачи (9), (10) выполнено $\widetilde{G} \geqslant G$. Соответственно, для функции Грина этой задачи при любом $t \in [0,1]$ и почти всех $s \in [0,1]$ справедливо неравенство

$$\widetilde{\mathcal{G}}(t,s) \geqslant \chi_{[0,\,h^{-1}(t)]}(s)\dot{h}(s) \geqslant 0.$$

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 17–41–680975, 16–01–00386), Минобрнауки России (Задание № 3.8515.2017/БЧ).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 280 с.
2. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 384 с.
3. Терентьев А.Г. Об одном классе линейных отображений и их положительной обратимости // УМН. 1996. Т. 51. Вып. 6 (312). С. 223–224. DOI: 10.4213/rm1038
4. Jiang D., Nieto J.J., Zuo W. On monotone method for first and second order periodic boundary value problems and periodic solutions of functional differential equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2004. Vol. 289. No. 2. P. 691–699. DOI: 10.1016/j.jmaa.2003.09.020
5. Бравый Е.И. О положительных периодических решениях функционально-дифференциальных уравнений первого порядка // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2015. Вып. 2 (46). С. 21–28. http://mi.mathnet.ru/iimi298
6. Bravyi E. On periods of non-constant solutions to functional differential equations // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. 2017. No. 14. P. 1–10. DOI: 10.14232/ejqtde.2017.1.14
7. Жуковский Е.С., Тахир Х.М.Т. Вопросы теории краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений. Тамбов: Изд-во ТГУ, 2017. 97 с.
8. Li Q., Li Y. Existence and multiplicity of positive periodic solutions for second-order functional differential equations with infinite delay // Electronic Journal of Differential Equation. 2014. Vol. 2014. No. 93. P. 1–14. https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2014/93/li.pdf
9. Nieto J.J., Rodríguez-López R. Remarks on periodic boundary value problems for functional differential equations // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2003. Vol. 158. No. 2. P. 339–353. DOI: 10.1016/S0377-0427(03)00452-7
10. Быкова Т.С., Тонков Е.Л. Асимптотическая теория линейных систем с последействием // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2006. Вып. 2 (36). С. 21–26. http://mi.mathnet.ru/iimi106
11. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Симонов П.М. Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. Вып. 1. С. 3–23. DOI: 10.20537/vm090101
12. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981.

Поступила в редакцию 27.04.2018

Жуковский Евгений Семенович, д. ф.-м. н., профессор, научно-исследовательский институт математики, физики и информатики, Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина, 392000, Россия, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33.
E-mail: zukovskys@mail.ru

Тахир Халид Мизхир Тахир, аспирант, кафедра функционального анализа, Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина, 392000, Россия, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33.
E-mail: khalidtahir89@yahoo.com

МАТЕМАТИКА 2018. Т. 28. Вып. 3

E. S. Zhukovskiy, Kh. M. T. Takhir

Comparison of solutions to boundary-value problems for linear functional-differential equations

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 3, pp. 284–292 (in Russian).

Keywords: linear functional-differential equation, boundary value problem, Green's function, fundamental solution of a homogeneous equation, positive operator.

MSC2010: 34K10, 34K06

DOI: 10.20537/vm180302

We consider the issues of solvability of boundary value problems for linear functional-differential equations. Statements allowing one to obtain conditions for the existence of a unique solution and for non-negativity of the Green's function, and to obtain a fundamental solution to the homogeneous equation are suggested. In order to apply these statements, one needs to define a "reference" boundary value problem that possesses the corresponding properties and to define an operator by means of the operators generated by the problem under study and the "reference" problem according to the given rule. If the spectral radius of this operator is less than 1, then the boundary value problem under consideration is uniquely solvable. Similarly, in order to obtain conditions for the nonnegativity of the Green's function and the fundamental solution, it is required to determine a special operator by the rule given in the paper and to verify its positivity. An example of application of the statements obtained to a particular boundary value problem with an integral boundary condition for the equation containing argument deviations to the unknown function and to its derivative is considered.

Funding. This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 16–01–00386, no. 17–41–680975) and by the Ministry of Education and Science of the RF (project no. 3.8515.2017).

REFERENCES

1. Azbelev N., Maksimov V., Rakhmatullina L. *Introduction to the theory of linear functional differential equations*, Atlanta, Georgia: World Federation Publishers Company, 1995, ii+172 p.
2. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. *Introduction to the theory of functional differential equations. Methods and applications*, New York: Hindawi Publishing Corporation, 2007, ix+314 p.
3. Terent'ev A.G. On a class of linear maps and their positive invertibility, *Russian Mathematical Surveys*, 1996, vol. 51, no. 6, pp. 1225–1226. DOI: 10.1070/RM1996v051n06ABEH003018
4. Jiang D., Nieto J.J., Zuo W. On monotone method for first and second order periodic boundary value problems and periodic solutions of functional differential equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2004, vol. 289, no. 2, pp. 691–699. DOI: 10.1016/j.jmaa.2003.09.020
5. Bravyi E.I. On positive periodic solutions of first order functional differential equations, *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2015, no. 2 (46), p. 21–28 (in Russian). `http://mi.mathnet.ru/eng/iimi298`
6. Bravyi E. On periods of non-constant solutions to functional differential equations, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 2017, no. 14, p. 1–10. DOI: 10.14232/ejqtde.2017.1.14
7. Zhukovskiy E.S., Takhir Kh.M.T. *Voprosy teorii kraevykh zadach dlya funktsional'no-differentsial'nykh uravnenii* (Questions of the theory of boundary value problems for functional differential equations), Tambov: Tambov State University, 2017, 97 p.
8. Li Q., Li Y. Existence and multiplicity of positive periodic solutions for second-order functional differential equations with infinite delay, *Electronic Journal of Differential Equations*, 2014, vol. 2014, no. 93, pp. 1–14. `https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2014/93/li.pdf`
9. Nieto J.J., Rodríguez-López R. Remarks on periodic boundary value problems for functional differential equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2003, vol. 158, no. 2, pp. 339–353. DOI: 10.1016/S0377-0427(03)00452-7
10. Bykova T.S., Tonkov E.L. Asymptotical theory of linear systems with delays, *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2006, no. 2 (36), pp. 21–26 (in Russian). `http://mi.mathnet.ru/eng/iimi106`
11. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Simonov P.M. Functional differential equations and their applications, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2009, issue 1, pp. 3–23 (in Russian). DOI: 10.20537/vm090101

12. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza* (Elements of functions theory and functional analysis), Moscow: Nauka, 1981.

Received 27.04.2018

Zhukovskiy Evgeny Semenovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, ul. Internatsional'naya, 33, Tambov, 392000 Russia.
E-mail: zukovskys@mail.ru

Takhir Khalid Mizkhir Takhir, Post-Graduate Student, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, ul. Internatsional'naya, 33, Tambov, 392000, Russia.
E-mail: khalidtahir89@yahoo.com