УДК 515.122.22, 515.122.252

© ***А. А. Грызлов, К. Н. Цигвинцева***

СХОДЯЩИЕСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВ

В работе рассматриваются вопросы, связанные со сходящимися последовательностями в T_1-пространствах. Свойства T_1-пространств, в том числе и сходимость последовательностей в них, отличаются от аналогичных свойств хаусдорфовых пространств, в частности, предел сходящейся последовательности может быть не единствен. Наиболее ярко эти особенности демонстрирует минимальное T_1-пространство. В работе рассматриваются вопросы, порожденные свойствами минимального T_1-пространства. Рассматриваются свойства пространств, в которых всякая последовательность является сходящейся (теоремы 1 и 2 и пример 1). Одной из основных является проблема связи между сходимостью последовательностей и свойствами подпространств. Хорошо известно, что компактность, счетная компактность и секвенциальная компактность не эквивалентны в общем случае. Однако, доказано (теорема 7), что наследственные секвенциальная компактность, счетная компактность и компактность эквивалентны.

Ключевые слова: сходящаяся последовательность, T_1-пространство, компактность.

DOI: 10.20537/vm180301

Введение

Понятие сходящейся последовательности является одним из центральных в математике. В частности, с его помощью определяется компактность пространства, его полнота и множество других важнейших характеристик пространства.

В топологии, и в математике в целом, как правило, рассматриваются хаусдорфовы пространства и сходящиеся в них последовательности. Однако большой интерес представляют не хаусдорфовы пространства. Различные вопросы теории этих пространств, прежде всего T_1-пространств, рассмотрены в работах [3–5, 7–9].

Переход к рассмотрению T_1-пространств порождает ряд задач, не характерных для хаусдорфовых пространств, однако проявляющих различные существенные свойства пространств.

Одним из этих свойств является связь характера сходимости и наследственности свойств пространства типа компактности. Отметим, что хорошо известные понятия компактности, счетной компактности и секвенциальной компактности в общем случае различны. Однако для пространств, обладающих этими свойствами наследственно, они, как показывает теорема 7, совпадают.

Предварительные сведения

Общие определения и понятия можно найти в [2, 6].
Все пространства, рассматриваемые в работе, предполагаются T_1-пространствами. Напомним, что пространство X называется T_1-пространством, если всякая точка в нем является замкнутым множеством. Случаи «более высокой» аксиомы отделимости указываются отдельно.

Счетным мы называем бесконечное счетное множество.

Мы предполагаем,что в последовательностях, рассматриваемых в работе, нет бесконечных «стационарных» подпоследовательностей.

Напомним, что пространство X называется:

– секвенциально компактным, если из всякой последовательности точек X можно выделить сходящуюся подпоследовательность;

– компактным, если из любого открытого покрытия пространства X можно выделить конечное подпокрытие;

– счетно компактным, если из любого счетного открытого покрытия пространства X можно выделить конечное подпокрытие.

В общем случае эти понятия различны (см. [2,6]).

Пространство обладает некоторым свойством наследственно, если всякое его подмножество обладает этим свойством.

Бесконечное минимальное T_1-пространство мы будем обозначать X_m. Топология X_m состоит из открытых множеств, являющихся дополнениями до конечных подмножеств X_m. В пространстве X_m всякая последовательность сходится ко всякой точке из X_m. Отсюда следует, что X_m является наследственно секвенциально компактными пространством.

Основные результаты

Мы рассматриваем свойства T_1-пространств, связанные со свойствами их сходящихся последовательностей. В качестве первого рассмотрим вопрос, имеющий отношение к пространству X_m.

Определение 1. Скажем, что пространство X обладает свойством (S1), если X удовлетворяет следующему условию:

(S1) в пространстве X всякая последовательность имеет предел.

Следует ли отсюда, что в X есть точка, являющаяся пределом всякой последовательности из X (для X_m это верно). Ответ содержится в теоремах 1, 2 и примере 1.

Теорема 1. *Пусть X — T_1-счетное пространство, в котором каждая последовательность имеет предел. Тогда в X существует точка x_0, являющаяся пределом всех последовательностей из X.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Σ — семейство всех последовательностей пространства X, и если $\xi \in \Sigma$, то F_ξ — множество пределов последовательности ξ. Пусть $\Phi = \{F_\xi \colon \xi \in \Sigma\}$.

Семейство Φ обладает следующими свойствами:

1) Всякое F_ξ замкнуто.

2) Если $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \Sigma$, то $\bigcap_{i=1}^{n} F_{\xi_i} \neq \emptyset$, то есть семейство $\{F_\xi \colon \xi \in \Sigma\}$ центрировано.

Покажем это. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \Sigma$:

$\xi_1 = \{\xi_1(1), \xi_1(2), \ldots\}$

$\xi_2 = \{\xi_2(1), \xi_2(2), \ldots\}$

$\ldots$

$\xi_n = \{\xi_n(1), \xi_n(2), \ldots\}$.

Предположим, что $\bigcap_{i=1}^{n} F_{\xi_i} = \emptyset$.

Построим последовательность η.

Занумеруем члены последовательности η следующим образом: сначала будут идти первые члены ξ_i $(i = 1, \ldots, n)$, затем все вторые члены всех последовательностей ξ_i и так далее.

$\eta = \{\xi_1(1), \xi_2(1), \ldots, \xi_n(1), \xi_1(2), \xi_2(2), \ldots, \xi_n(2), \ldots\}$.

По условию теоремы последовательность η имеет предел. Пусть точка x — предел этой последовательности, тогда она является и пределом каждой ее подпоследовательности $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Из этого следует, что $x \in \bigcap_{i=1}^{n} F_{\xi_i}$, это противоречит нашему предположению о том, что $\bigcap_{i=1}^{n} F_{\xi_i} = \emptyset$.

Итак, мы показали, что семейство $\{F_\xi \colon \xi \in \sum\}$ центрировано.

Теперь покажем, что $\bigcap \{F_\xi \colon \xi \in \sum\} \neq \emptyset$.

Предположим противное.

X — счетное множество, то есть $X=\{x_i\colon i\in N\}$. В силу нашего предположения для каждой точки $x_i\in X$ существует F_{ξ_i} такое, что $x_i\notin F_{\xi_i}$, а тогда $\bigcap_{i\in\omega}F_{\xi_i}=\emptyset$.

Построим убывающую последовательность замкнутых непустых множеств:

$F_{\xi_1}=\Phi_1$,

$F_{\xi_1}\cap F_{\xi_2}=\Phi_2$,

$F_{\xi_1}\cap F_{\xi_2}\cap F_{\xi_3}=\Phi_3$, и так далее.

Тогда $\bigcap_{i\in\omega}\Phi_i=\emptyset$.

Фиксируем во всяком множестве Φ_i точку z_i. Тогда последовательность $\{z_i\}_{i\in N}$ не имеет предела, так как для любой точки z_i из X существует такое Φ_i, что $z_i\notin\Phi_i$ и $X\setminus\Phi_i=Oz_i$ — окрестность точки z_i, которая содержит только конечное число членов последовательности. Противоречие. $\square$

Изменяя последнюю часть доказательства теоремы 1, получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Если X — компактное T_1-пространство, в котором всякая последовательность имеет предел, то в X существует точка, являющаяся пределом всякой последовательности из X.*

В случае отсутствия условия счетности или компактности пространства X утверждение перестает быть верным, что показывает следующий пример 1.

Пример 1. Существует несчетное не компактное T_1-пространство X, в котором всякая последовательность имеет предел, однако точки, являющейся пределом всех последовательностей в X, нет.

Рассмотрим множество $W(\omega_1)$ (см. [1]), то есть множество всех счетных ординалов. Определим на множестве $W(\omega_1)$ топологию следующим образом.

Типичной окрестностью точки α из $W(\omega_1)$ является множество $O(\alpha)=\{[0,\alpha]\setminus K\}$, где K — конечное множество из $W(\omega_1)$, $K\subseteq[0,\alpha)\}$.

Обозначим это пространство $TW'(\omega_1)$.

Из свойств счетных ординалов следует, что всякая последовательность в этом пространстве является сходящейся. Поскольку для любого $\alpha\in W(\omega_1)$ можно построить последовательность $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, $x_i>\alpha$, получаем, что точки, являющейся пределом любой последовательности в $W(\omega_1)$, не существует.

Для хаусдорфовых пространств справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Если в хаусдорфовом бесконечном пространстве X любая последовательность имеет предел, то X представимо в виде $X=\{a\}\cup X'$, где X' — дискретное подпространство, а $O(a)=\{a\}\cup(X\setminus K)$, где K — конечно, то есть X есть одноточечная компактификация дискретного пространства.*

Доказательство. В X существует одна неизолированная точка.

Сначала покажем, что такая точка есть. Предположим, любая точка $x\in X$ изолированная. Тогда всякая последовательность попарно различных точек в X не имеет предела, что противоречит условию теоремы.

Теперь покажем, что в X есть не более одной неизолированной точки. Так как X — T_2-пространство, найдутся окрестности Ox, Oy, такие что $Ox\cap Oy=\emptyset$ и Ox и Oy — бесконечные множества.

Построим последовательность $\{x_n\colon n=1,2,\ldots\}$ по следующему правилу.

$x_1\in Ox$,

$x_2\in Oy$,

$x_3\in Ox$ и $x_3\neq x_1$,

$x_4\in Oy$ и $x_4\neq x_2$ и так далее.

Подпоследовательности $\{x_{2k}\}_{k\in N}$ и $\{x_{2k+1}\}_{k\in N}$ сходятся к разным точкам, следовательно, последовательность $\{x_n\}_{n\in N}$ не имеет предела. Таким образом, в X не более одной неизолированной точки.

Покажем, что $X=\{a\}\cup X'$, где X' — дискретное подпространство, а $O(a)=\{a\}\cup(X\setminus K)$, где K — конечно. Действительно, если $X\setminus Oa$ бесконечно, рассмотрим последовательность $\{y_n\}_{n\in N}\subseteq X\setminus Oa$. В $X\setminus Oa$ все точки изолированные, эта последовательность не имеет предела, что противоречит нашему условию. □

Из этой теоремы следует, что если в хаусдорфовом пространстве X любая последовательность сходится, то в нем есть точка, являющаяся пределом любой последовательности из X.

Следующие свойства сходящихся последовательностей тесно связаны с вопросами наследственности свойств типа компактности.

Определение 2. Скажем, что пространство обладает свойством (S2), если оно удовлетворяет следующему условию:

(S2) всякая последовательность точек $\{x_n\colon n\in\omega\}$ из X содержит подпоследовательность, сходящуюся к точке из $\{x_n\colon n\in\omega\}$.

Из определения 2 непосредственно вытекает следующая теорема.

Теорема 4. *Пространство X обладает свойством* (S2) *тогда и только тогда, когда X наследственно секвенциально компактно.*

Рассмотрим соотношение свойств (S1) и (S2).

Пример 1 является примером пространства, удовлетворяющего (S1), но не удовлетворяющего условию (S2). Действительно, последовательность $\{n\colon n\in\omega\}$ сходится, например, к точке ω, но не сходится ни к одной точке самой последовательности.

Следующий пример 2 — это пример пространства, обладающего свойствами (S1) и (S2), более того, всякая последовательность в этом пространстве сходится ко всякой точке этой последовательности, но это пространство не является минимальным T_1-пространством.

Пример 2. Пусть $W(\omega_1)$ — множество всех счетных ординалов. Типичной окрестностью точки α из $W(\omega_1)$ назовем $O(\alpha)=\{[\alpha;\omega_1)\setminus K$, где K — конечное множество из $W(\omega_1)$, $K\subseteq(\alpha;\omega_1)\}$. Обозначим пространство с этой топологией $T''W(\omega_1)$. Из определения топологии следует, что $T''W(\omega_1)$ является T_1-пространством, и всякая последовательность в нем является сходящейся к любой точке этой последовательности. Но пространство не является минимальным T_1-пространством.

Следующий пример 3 — это пример пространства, обладающего свойством (S2), но не обладающего свойством (S1).

Пример 3. Рассмотрим пространство $X=X_m^1\cup X_m^2$, где X_m^1 и X_m^2 — копии минимального T_1-пространства. Очевидно, X обладает свойством (S2), однако последовательность $\{x_n\colon n\in\omega\}$, определенная по правилу $x_{2n+1}\in X_1$ и $x_{2n}\in X_2$, $n\in\omega$, не имеет предела в X.

Рассмотрим несколько другой подход к рассмотренным понятиям.

Определение 3. Скажем, что пространство X *конечно дискретно*, если всякое дискретное подмножество X конечно.

Теорема 5. *T_1-пространство X конечно дискретно тогда и только тогда, когда X удовлетворяет условию* (S2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть пространство X обладает свойством конечной дискретности, и $A = \{x_i \colon i \in \omega\}$ — последовательность в X.

Предположим, что никакая подпоследовательность из A этой последовательности не сходится ни к какой точке из A.

Построим последовательность $\{x_{i_k} \colon k \in \omega\}$ следующим образом.

Положим $x_{i_0} = x_0$.

Так как x_0 не является пределом никакой подпоследовательности из A, следует, что существует окрестность Ox_0 такая, что $|A \setminus Ox_0| = \omega$.

Пусть x_{i_1} есть точка множества $A \setminus Ox_0$ с наименьшим номером.

По предположению, x_{i_1} не является пределом последовательности $A \setminus Ox_0$, следовательно найдется окрестность Ox_{i_1} точки x_{i_1} такая, что $A \setminus (Ox_0 \cap Ox_1)$ бесконечно.

И так далее — мы построим последовательность $\{x_{i_k} \colon k \in \omega\}$ такую, что

$$\cup\{Ox_{i_j} \colon j \leqslant n\} \cap \{x_{i_j} \colon j > n\} = \emptyset.$$

Следовательно, $\{x_{i_k} \colon k \in \omega\}$ — бесконечное дискретное множество. Противоречие. $\square$

Из этой теоремы следует

Следствие 1. *Пространство X конечно дискретно тогда и только тогда, когда X наследственно секвенциально компактно.*

Отметим, что для хаусдорфовых пространств справедливо следующее утверждение.

Теорема 6. *Хаусдорфово конечно дискретное пространство X конечно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное. Обозначим A множество изолированных точек пространства X. В силу условия теоремы, A конечно. Рассмотрим $X' = X \setminus A$.

Построим последовательность точек $\{x_k \colon k \in \omega\}$ по следующему правилу.

Пусть $x_1 \in X$ — некоторая точка и Ox_1 — ее окрестность. По построению, множество $Ox_1 \cap X'$ бесконечно.

Пусть $x_2 \in Ox_1 \cap X'$, $x_2 \neq x_1$ и Ox_2 — ее окрестность такая, что $[Ox_2] \not\ni x_1$. Множество $Ox_2 \cap Ox_1$ бесконечно, поскольку в противном случае точка x_2 была бы изолированной.

Выберем точку $x_3 \in Ox_1 \cap Ox_2$ и ее окрестность Ox_3 такую, что $[Ox_3]$ не содержит x_1 и x_2.

Множество $Ox_3 \cap Ox \cap Ox_1$ бесконечно, и так далее.

В результате мы получим последовательность точек $\{x_k \colon k \in \omega\}$ и семейство их окрестностей $\{Ox_k \colon k \in \omega\}$ такие, что $x_k \in \cap\{Ox_i \colon i < k\}$ и $[Ox_k]$ не содержит точек x_i, $i < k$. Таким образом, $\{x_k : k \in \omega\}$ — бесконечное дискретное множество. Противоречие. $\square$

Напомним, что система множеств $\{F_\alpha \colon \alpha \in A\}$ называется существенно убывающей, если $F_{\alpha+1} \setminus F_\alpha \neq \emptyset$ для всякого $\alpha \in A$.

Лемма 1. *Пространство X является конечно дискретным тогда и только тогда, когда всякая существенно убывающая система замкнутых множеств в X конечна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть пространство X удовлетворяет условию конечной дискретности и $\{F_\alpha \colon \alpha \in A\}$ — бесконечная существенно убывающая система замкнутых множеств.

Выделим счетную подсистему $\{F\alpha_i \colon i \in \omega\}$. Зафиксируем по точке $x_i \in F_{\alpha_{i+1}} \setminus F_{\alpha_i}$, $i \in \omega$.

Тогда множество $\{x_i \colon i \in \omega\}$ является бесконечным дискретным множеством, что противоречит условию теоремы.

Обратно, пусть выполняется условие теоремы. Покажем, что X конечно дискретно. Действительно, пусть в X есть счетное дискретное подмножество $D = \{x_i \colon i \in \omega\}$. Положим $F_k = [\{x_i \colon i > k\}]$. Тогда $\{F_k \colon k \in \omega\}$ является бесконечной существенной убывающей системой замкнутых в X множеств. Противоречие. $\square$

Лемма 2. *Конечно дискретное T_1-пространство наследственно компактно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть X конечно дискретно. Предположим, что в X есть подпространство X', не являющееся компактным. Тогда в X' есть система замкнутых в X' непустых множеств с пустым пересечением. Из нее можно выделить существенно убывающую систему замкнутых в X' подмножеств $\{F_i : i \in \omega\}$. Тогда $\{[F_i] : i \in \omega\}$ будет существенно убывающей системой замкнутых в X множеств,что противоречит конечной дискретности X. □

Лемма 3. *Наследственно счетно компактное пространство конечно дискретно.*

Действительно, если в пространстве X есть счетное дискретное множество X', то подпространство X' не счетно компактно.

Как известно, понятия компактности, счетной компактности и секвенциальной компактности не совпадают в общем случае. Однако для пространств, обладающих этими свойствами наследственно, эти понятия совпадают,что и утверждает теорема 7, вытекающая из теорем 4 и 5 и лемм 1–3.

Теорема 7. *Для T_1-пространства X следующие условия эквивалентны:*

(1) *X удовлетворяет условию конечной дискретности;*

(2) *X наследственно компактно;*

(3) *X наследственно счетно компактно;*

(4) *X наследственно секвенциально компактно.*

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках базовой части госзадания в сфере науки (проект 1.5211.2017/8.9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Наука, 1977. 368 с.
2. Архангельский А.В., Пономарев В.И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1974. 423 с.
3. Архангельский А.В. Отображения и пространства // Успехи математических наук. 1966. Т. 21. Вып. 4 (130). С. 133–184.
4. Bonanzinga M., Stavrova D., Staynova P. Combinatorial separation axioms and cardinal invariants // Topology and its Applications. 2016. Vol. 201. P. 441–451. DOI: 10.1016/j.topol.2015.12.053
5. Воронов М.Е. О компактных T_1-пространствах // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 3. С. 20–27. DOI: 10.20537/vm130302
6. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986. 752 с.
7. Грызлов А.А. Две теоремы о мощности топологических пространств // Докл. АН СССР. 1980. Т. 251. № 4. С. 780–783.
8. Gryzlov A. On some cardinal invariants of compact and H-closed spaces // ItEs–2007: Abstracts of Sixth Italian–Spanish conf. on General Topology and Applications. Bressanone, Italia, 2007. P. 47.
9. Reilly I.L. On non-Hausdorff spaces // Topology and its Applications. 1992. Vol. 44. Issues 1–3. P. 331–340. DOI: 10.1016/0166-8641(92)90106-A

Поступила в редакцию 25.07.2018

Грызлов Анатолий Александрович, д. ф.-м. н., профессор, зав. кафедрой алгебры и топологии, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: gryzlov@udsu.ru

Цигвинцева Кристина Николаевна, студент, кафедра алгебры и топологии, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: kristie@ya.ru

МАТЕМАТИКА 2018. Т. 28. Вып. 3

A. A. Gryzlov, K. N. Tsigvintseva

On convergent sequences and properties of subspaces

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 3, pp. 277–283 (in Russian).

Keywords: convergent sequence, T_1-compactness, compactness.

MSC2010: 54D10, 54D30

DOI: 10.20537/vm180301

We consider problems connected with the notion of convergent sequences in T_1-spaces. The properties of T_1-spaces and convergent sequences in these spaces considerably differ from the same properties of Hausdorff spaces. We consider problems connected with the properties of the minimal T_1-space. We consider properties of spaces where every sequence is a convergent sequence (Theorems 1 and 2 and Example 1). One of the main problems is the connection between convergent sequences and the properties of subspaces of the space. It is well known that the compactness, countable compactness and sequential compactness are not equivalent in general. We prove (Theorem 7) that hereditary sequential compactness, compactness and countable compactness are equivalent.

Funding. This work was supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation in the framework of the basic part (project no. 1.5211.2017/8.9).

REFERENCES

1. Aleksandrov P.S. *Vvedenie v teoriyu mnozhestv i obshchuyu topologiyu* (Introduction to set theory and general topology), Moscow: Nauka, 1977, 368 p.
2. Arkhangel'skii A.V., Ponomarev V.I. *Osnovy obshchei topologii v uprazhneniyakh i zadachakh* (Fundamentals of general topology through problems and exercises), Moscow: Nauka, 1974, 423 p.
3. Arkhangel'skii A.V. Mappings and spaces, *Russian Math. Surveys*, 1966, vol. 21, no. 4, pp. 115–162. DOI: 10.1070/RM1966v021n04ABEH004169
4. Bonanzinga M., Stavrova D., Staynova P. Combinatorial separation axioms and cardinal invariants, *Topology and its Applications*, 2016, vol. 201, pp. 441–451. DOI: 10.1016/j.topol.2015.12.053
5. Voronov M.E. On compact T_1-space, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2013, issue 3, pp. 20–27 (in Russian). DOI: 10.20537/vm130302
6. Engelking R. *General topology*, Warszawa: PWN — Polish Scientific Publishers, 1977, 626 p. Translated under the title *Obshchaya topologia*, Moscow: Nauka, 1986, 752 p.
7. Gryzlov A.A. Two theorems on the cardinality of topological spaces, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1980, vol. 251, no. 4, pp. 780–783 (in Russian).
8. Gryzlov A. On some cardinal invariants of compact and H-closed spaces, *ItEs–2007: Abstracts of Sixth Italian–Spanish conf. on General Topology and Applications*, Bressanone, Italia, 2007, p. 47.
9. Reilly I.L. On non-Hausdorff spaces, *Topology and its Applications*, 1992, vol. 44, issues 1–3, pp. 331–340. DOI: 10.1016/0166-8641(92)90106-A

Received 25.07.2018

Gryzlov Anatolii Aleksandrovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Department of Algebra and Topology, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: gryzlov@udsu.ru

Tsigvintseva Kristina Nikolaevna, Student, Department of Algebra and Topology, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: kristie@ya.ru