

УДК 532.517.4, 519.632.4

© А. А. Шумихин, М. Р. Королева, С. Ю. Дадикина, А. И. Карпов

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СХЕМЫ WENO ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ  
ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ В КАНАЛЕ С ОБРАТНЫМ УСТУПОМ<sup>1</sup>**

Представлена методика моделирования турбулентного течения вязкого газа, основанная на схеме высокого порядка аппроксимации WENO (взвешенная существенно неосциллирующая схема). Данная схема характеризуется значительной устойчивостью при выполнении расчетов, так как WENO позволяет устранять нефизические осцилляции численного решения, которые могут возникнуть в ходе вычислений. Приведена система определяющих уравнений, описывающая поток вязкого газа, основанная на системе уравнений Навье–Стокса. Разработаны и реализованы алгоритмы 3-го и 5-го порядков точности. Приведено описание численных методик использованных в расчетах потока газа. Моделирование турбулентности производилось с применением метода крупных вихрей. Предложенные алгоритмы были использованы для исследования течения вязкого газа в канале с обратным уступом. Число Рейнольдса потока газа в канале составляло  $Re = 15\,000$ . Проведено сравнение результатов численного моделирования с экспериментальными данными.

*Ключевые слова:* схема WENO, метод крупных вихрей, турбулентность, вычислительная гидродинамика.

DOI: [10.20537/vm170313](https://doi.org/10.20537/vm170313)

Интерес к использованию алгоритмов высокого порядка аппроксимации для решения задач гидрогазодинамики связан с возможностью повышения точности результатов, получаемых при моделировании течений газа или жидкости. Однако при увеличении порядка точности алгоритма происходит потеря монотонности численного решения, что приводит к возникновению осцилляций вычисляемых параметров течения. Схема WENO (Weighted Essentially Non-Oscillatory, взвешенная существенно неосциллирующая схема, [1–4]) является одним из известных алгоритмов, позволяющих устранить осцилляции. Для численного исследования турбулентных течений вязкого газа на основе WENO предложены методики 3-го и 5-го порядков аппроксимации. Моделирование турбулентности производилось с использованием метода крупных вихрей (см. [5–7]). Реализованные методики были апробированы на задаче расчета течения газа в канале с обратным уступом.

**§ 1. Основные уравнения**

Алгоритм моделирования течений газа основан на численном интегрировании системы уравнений Навье–Стокса, дополненной уравнением энергии. В векторном виде система основных уравнений записывается следующим образом:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} = \frac{\partial L_x}{\partial x} + \frac{\partial L_y}{\partial y}, \quad (1)$$

где  $Q$  — вектор переменных;  $F_x, F_y$  — векторы потоков конвективных членов;  $L_x, L_y$  — векторы потоков диффузионных членов;  $x, y$  — координаты;  $t$  — время.

Основой метода крупных вихрей является пространственная фильтрация исходных уравнений. В работе фильтрация выполняется неявно при пространственной дискретизации исходной системы уравнений. С использованием взвешивания по Фавру  $\tilde{f} = \overline{\rho f} / \bar{\rho}$  векторы в системе

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16–08–00110).

уравнений (1) будут иметь вид

$$Q = \begin{bmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\rho}\tilde{u} \\ \bar{\rho}\tilde{v} \\ \bar{\rho}\tilde{e} \end{bmatrix}, \quad F_x = \begin{bmatrix} \bar{\rho}\tilde{u} \\ \bar{\rho}\tilde{u}^2 + \bar{p} \\ \bar{\rho}\tilde{v}\tilde{u} \\ \bar{\rho}\tilde{u}\tilde{h} \end{bmatrix}, \quad F_y = \begin{bmatrix} \bar{\rho}\tilde{v} \\ \bar{\rho}\tilde{u}\tilde{v} \\ \bar{\rho}\tilde{v}^2 + \bar{p} \\ \bar{\rho}\tilde{v}\tilde{h} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$L_x = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{yx} \\ \tilde{u}\tau_{xx} + \tilde{v}\tau_{xy} \end{bmatrix}, \quad L_y = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ \tilde{u}\tau_{yx} + \tilde{v}\tau_{yy} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Здесь  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{v}$  — компоненты вектора скорости,  $\bar{p}$  — давление,  $\bar{\rho}$  — плотность,  $\tilde{e}$  — энергия,  $\tilde{h}$  — энтальпия,  $\tau_{xx}$ ,  $\tau_{yy}$ ,  $\tau_{xy}$  — компоненты тензора напряжений. Используемые для вычисления компонентов тензора напряжений выражения записываются так:

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= 2(\mu + \mu_{sgs}) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - \frac{2}{3}(\mu + \mu_{sgs}) \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right), \\ \tau_{yy} &= 2(\mu + \mu_{sgs}) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} - \frac{2}{3}(\mu + \mu_{sgs}) \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right), \\ \tau_{xy} &= (\mu + \mu_{sgs}) \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\mu$  — динамическая вязкость,  $\mu_{sgs}$  — подсеточная вихревая вязкость.

Давление, температура и полная энтальпия рассчитывались по следующим соотношениям:

$$\bar{p} = \bar{\rho}R\tilde{T}, \quad \tilde{T} = \left( \tilde{e} - \frac{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}{2} \right) / C_v, \quad \tilde{h} = \frac{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}{2} + C_p\tilde{T}. \quad (5)$$

Здесь  $\tilde{T}$  — температура,  $R$  — удельная газовая постоянная,  $C_V$  — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме,  $C_p$  — удельная теплоемкость газа при постоянном давлении.

Одним из перспективных подходов, используемых для моделирования турбулентных течений, является метод крупных вихрей. Различные варианты LES достаточно широко применяются при разработке программ. Например, данный метод использовался в [8, 9]. Для корректного моделирования пристеночных течений в предложенном алгоритме использовалась локальная модель вихревой вязкости (Wall-Adapting Local Eddy-viscosity, WALE; [6]).

## § 2. Вычислительный алгоритм

Для численного интегрирования системы основных уравнений (1) по пространству применялся метод конечных объемов. Дискретизация уравнений сохранения проводилась с использованием схемы высокого порядка аппроксимации WENO. Данная схема относится к классу алгоритмов, использующих подход Годунова (см. [4]). Основной идеей, предложенной Годуновым, является расщепление векторов потоков на две части [2–4]. В вычислительной газодинамике существует много известных схем, основанных на подходе Годунова. Этот подход используется, например, в [10–12]. Однако среди них отсутствуют методики, в которых реализован высокий порядок аппроксимации (см. [3]). Возможность дискретизации уравнений сохранения с высоким порядком реализована в схемах ENO и WENO. Для данного класса алгоритмов расщепление производится следующим образом:

$$F(Q) = F^+(Q) + F^-(Q), \quad (6)$$

где

$$\frac{\partial F^+(Q)}{\partial Q} \geq 0, \quad \frac{\partial F^-(Q)}{\partial Q} \leq 0. \quad (7)$$

С использованием выражений (6) и (7) каждый вектор  $F(Q)$  расщепляется на две части. Исходя из выражений (7), вектор  $F^+(Q)$  формируется из положительных элементов якобиана  $\frac{\partial F(Q)}{\partial Q}$  и, соответственно, вектор  $F^-(Q)$  формируется из отрицательных.

Для расчета векторов потоков  $F_{i-1/2}^-(Q)$  и  $F_{i+1/2}^+(Q)$ , соответственно на левой и правой гранях  $I_i$ -го контрольного объема (см. [2–4]), необходимо определить векторы параметров  $Q_{i-1/2}^-$  и  $Q_{i+1/2}^+$ . На рис. 1 показаны  $I_i$ -й контрольный объем и параметры потока газа на его границах.

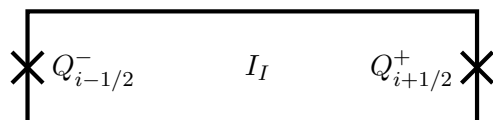


Рис. 1. Параметры потока газа  $Q_{i-1/2}^-$  и  $Q_{i+1/2}^+$  на гранях  $I_i$ -го контрольного объема

Высокий порядок аппроксимации в схемах ENO и WENO достигается путем использования полинома для расчета параметров течения на гранях ячеек. В [1–4] для интерполяции параметров на гранях конечных объемов применялся полином Лагранжа. На рис. 2 показаны шаблоны, используемые в схеме WENO 5-го порядка аппроксимации и схеме ENO 3-го порядка. Для расчета параметров течения  $Q_{i-1/2}^-$  и  $Q_{i+1/2}^+$ , на гранях  $I_i$ -го контрольного объема, в ENO 3-го порядка из трех шаблонов выбирается только один шаблон. В алгоритме WENO для интерполяции параметров используются все три шаблона. Именно за счет использования пяти ячеек в WENO реализуется схема 5-го порядка аппроксимации [2].

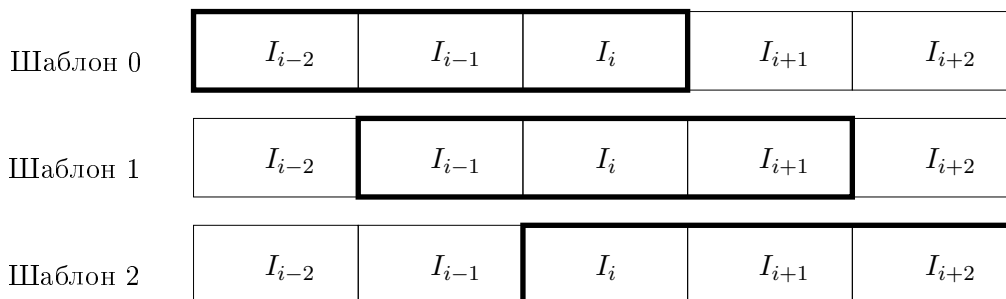


Рис. 2. Шаблоны, использованные для расчета параметров течения  $Q_{i-1/2}^-$  и  $Q_{i+1/2}^+$

На правой грани  $I_i$ -й ячейки значения параметров  $Q_{i+1/2}^+$  вычисляются следующим образом:

$$Q_{i+1/2}^+ = \omega_0 q_0(Q_{i-2}, Q_{i-1}, Q_i) + \omega_1 q_1(Q_{i-1}, Q_i, Q_{i+1}) + \omega_2 q_2(Q_i, Q_{i+1}, Q_{i+2}),$$

где  $q_0, q_1, q_2$  — значения параметров  $Q_{i+1/2}^+$ , вычисленные с использованием соответствующих шаблонов;  $\omega_0, \omega_1, \omega_2$  — весовые коэффициенты. Выражения, применяемые для вычисления данных величин, записываются так (см. [2]):

$$\begin{aligned} q_0 &= \frac{1}{3}Q_{i-2} - \frac{7}{6}Q_{i-1} + \frac{11}{6}Q_i, & q_1 &= -\frac{1}{6}Q_{i-1} + \frac{5}{6}Q_i + \frac{1}{3}Q_{i+1}, & q_2 &= \frac{1}{3}Q_i + \frac{5}{6}Q_{i+1} - \frac{1}{6}Q_{i+2}, \\ \omega_0 &= \frac{\alpha_0}{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2}, & \omega_1 &= \frac{\alpha_1}{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2}, & \omega_2 &= \frac{\alpha_2}{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2} \\ \alpha_0 &= \frac{C_0}{(\varepsilon + IS_0)^2}, & \alpha_1 &= \frac{C_1}{(\varepsilon + IS_1)^2}, & \alpha_2 &= \frac{C_2}{(\varepsilon + IS_2)^2}. \end{aligned}$$

Здесь  $C$  — оптимальные весовые коэффициенты,  $IS$  — индикаторы гладкости:

$$\begin{aligned} C_0 &= 1/10, & C_1 &= 6/10, & C_2 &= 3/10, \\ IS_0 &= \frac{13}{12}(Q_{i-2} - 2Q_{i-1} + Q_i)^2 + \frac{1}{4}(Q_{i-2} - 4Q_{i-1} + 3Q_i)^2, \\ IS_1 &= \frac{13}{12}(Q_{i-1} - 2Q_i + Q_{i+1})^2 + \frac{1}{4}(Q_{i-1} + Q_{i+1})^2, \\ IS_2 &= \frac{13}{12}(Q_i - 2Q_{i+1} + Q_{i+2})^2 + \frac{1}{4}(3Q_i - 4Q_{i+1} + Q_{i+2})^2. \end{aligned}$$

Число  $\varepsilon$  вводится для предотвращения деления на ноль. Обычно оно принимается в диапазоне  $\varepsilon = 10^{-5} \div 10^{-7}$  [2]. Аналогично вычисляются значения параметров  $Q_{i-1/2}^-$  на левой грани  $I_i$ -й ячейки. Выполнив данную процедуру для всех  $i$ , определим значения векторов параметров  $Q_{i+1/2}^-$  и  $Q_{i+1/2}^+$  на левой и правой гранях всех контрольных объемов (см. [3]).

Для расчета потоков  $F_x(Q)$  и  $F_y(Q)$  использовалась схема Стигера–Уорминга ([10], схема расщепления векторов потоков). Уравнение состояния (5) можно записать в виде

$$\bar{p} = \bar{\rho}(\nu - 1) \left( \tilde{\varepsilon} - \frac{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}{2} \right), \quad (8)$$

где  $\nu$  — показатель адиабаты. Тогда, применяя уравнение (8), из выражений для векторов  $F_x(Q)$  и  $F_y(Q)$  (2) можно исключить давление [10]:

$$\begin{aligned} F_x &= \begin{bmatrix} \bar{\rho}\tilde{u} \\ \bar{\rho} \left( (\nu - 1) \tilde{\varepsilon} + \frac{(3 - \nu)\tilde{u}^2 - (\nu - 1)\tilde{v}^2}{2} \right) \\ \bar{\rho}\tilde{u}\tilde{u} \\ \bar{\rho}\tilde{u}\tilde{h} \end{bmatrix}, \\ F_y &= \begin{bmatrix} \bar{\rho}\tilde{v} \\ \bar{\rho}\tilde{v}\tilde{v} \\ \bar{\rho} \left( (\nu - 1) \tilde{\varepsilon} + \frac{(3 - \nu)\tilde{v}^2 - (\nu - 1)\tilde{u}^2}{2} \right) \\ \bar{\rho}\tilde{v}\tilde{h} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (9)$$

Известно, что векторы  $F_x(Q)$  и  $F_y(Q)$  могут быть представлены в виде

$$F_x(Q) = A_x Q, \quad F_y(Q) = A_y Q,$$

где  $A_x = \frac{\partial F_x(Q)}{\partial Q}$  и  $A_y = \frac{\partial F_y(Q)}{\partial Q}$  — матрицы Якоби. Используя выражения (9), матрицы  $A_x$  и  $A_y$  запишем следующим образом (см. [10, 13]):

$$\begin{aligned} A_x &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{(3 - \nu)\tilde{u}^2}{2} + \frac{(\nu - 1)\tilde{v}^2}{2} & (3 - \nu)\tilde{u} & -(\nu - 1)\tilde{v} & \nu - 1 \\ -\tilde{u}\tilde{v} & \tilde{v} & \tilde{u} & 0 \\ 0 & \tilde{h} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ A_y &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\tilde{u}\tilde{v} & \tilde{v} & \tilde{u} & 0 \\ -\frac{(3 - \nu)\tilde{v}^2}{2} + \frac{(\nu - 1)\tilde{u}^2}{2} & -(\nu - 1)\tilde{u} & (3 - \nu)\tilde{v} & \nu - 1 \\ 0 & 0 & \tilde{h} & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (10)$$

Собственные числа матриц  $A_x$  и  $A_y$  определяются выражениями (см. [10])

$$\begin{aligned} \lambda_{x1} &= \tilde{u}, & \lambda_{x2} &= \lambda_{x1}, & \lambda_{x3} &= \tilde{u} + \tilde{c}, & \lambda_{x4} &= \tilde{u} - \tilde{c}, \\ \lambda_{y1} &= \tilde{v}, & \lambda_{y2} &= \lambda_{y1}, & \lambda_{y3} &= \tilde{v} + \tilde{c}, & \lambda_{y4} &= \tilde{v} - \tilde{c}, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\tilde{c} = (\nu\bar{\rho}/\bar{\rho})^{1/2}$  — скорость звука.

Векторы  $F_x(Q)$  и  $F_y(Q)$  могут быть записаны в следующем виде (см. [10]):

$$F_x(Q) = A_x Q = G_x \Lambda_x G_x^{-1} Q, \quad F_y(Q) = A_y Q = G_y \Lambda_y G_y^{-1} Q, \quad (12)$$

где  $G_x, G_y$  — матрицы правых собственных векторов якобианов  $A_x, A_y$ ;  $G_x^{-1}, G_y^{-1}$  — матрицы левых собственных векторов. Собственные числа (11) являются диагональными элементами матриц  $\Lambda_x$  и  $\Lambda_y$ :

$$\Lambda_x = \begin{bmatrix} \tilde{u} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{u} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{u} + \tilde{c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{u} - \tilde{c} \end{bmatrix}, \quad \Lambda_y = \begin{bmatrix} \tilde{v} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{v} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{v} + \tilde{c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{v} - \tilde{c} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Матрицы  $\Lambda_x$  и  $\Lambda_y$  можно разложить аналогично выражению (6):

$$\Lambda_x = \Lambda_x^+ + \Lambda_x^-, \quad \Lambda_y = \Lambda_y^+ + \Lambda_y^-. \quad (14)$$

Все собственные числа  $\lambda^+, \lambda^-$ , являющиеся элементами матриц  $\Lambda_x^+, \Lambda_x^-, \Lambda_y^+, \Lambda_y^-$ , определяются так (см. [10]):

$$\lambda^+ = \frac{\lambda + |\lambda|}{2}, \quad \lambda^- = \frac{\lambda - |\lambda|}{2}. \quad (15)$$

Тогда векторы  $F_x^+(Q), F_x^-(Q), F_y^+(Q), F_y^-(Q)$ , входящие в выражения (6) и (7), примут вид

$$\begin{aligned} F_x^+(Q) &= (G_x^+) \Lambda_x^+ (G_x^+)^{-1} Q^+, & F_x^-(Q) &= (G_x^-) \Lambda_x^- (G_x^-)^{-1} Q^-, \\ F_y^+(Q) &= (G_y^+) \Lambda_y^+ (G_y^+)^{-1} Q^+, & F_y^-(Q) &= (G_y^-) \Lambda_y^- (G_y^-)^{-1} Q^-. \end{aligned} \quad (16)$$

Используя (10), (12), (13), (14), (15), (16), векторы можно записать следующим образом (см. [10]):

$$\begin{aligned} F_x^+ &= \frac{\bar{\rho}}{2\nu} \begin{bmatrix} 2(\nu-1)\lambda_{x1}^+ \tilde{u}^+ + \lambda_{x3}^+ (\tilde{u}^+ + \tilde{c}^+) + \lambda_{x4}^+ (\tilde{u}^+ - \tilde{c}^+) \\ 2(\nu-1)\lambda_{x1}^+ \tilde{v}^+ + \lambda_{x3}^+ \tilde{v}^+ + \lambda_{x4}^+ \tilde{v}^+ \\ 2(\nu-1)\lambda_{x1}^+ \tilde{h}^+ + \lambda_{x3}^+ \tilde{h}^+ + \lambda_{x4}^+ \tilde{h}^+ \end{bmatrix}, \\ F_x^- &= \frac{\bar{\rho}}{2\nu} \begin{bmatrix} 2(\nu-1)\lambda_{x1}^- \tilde{u}^- + \lambda_{x3}^- (\tilde{u}^- + \tilde{c}^-) + \lambda_{x4}^- (\tilde{u}^- - \tilde{c}^-) \\ 2(\nu-1)\lambda_{x1}^- \tilde{v}^- + \lambda_{x3}^- \tilde{v}^- + \lambda_{x4}^- \tilde{v}^- \\ 2(\nu-1)\lambda_{x1}^- \tilde{h}^- + \lambda_{x3}^- \tilde{h}^- + \lambda_{x4}^- \tilde{h}^- \end{bmatrix}, \\ F_y^+ &= \frac{\bar{\rho}}{2\nu} \begin{bmatrix} 2(\nu-1)\lambda_{y1}^+ \tilde{u}^+ + \lambda_{y3}^+ (\tilde{u}^+ + \tilde{c}^+) + \lambda_{y4}^+ (\tilde{u}^+ - \tilde{c}^+) \\ 2(\nu-1)\lambda_{y1}^+ \tilde{v}^+ + \lambda_{y3}^+ \tilde{v}^+ + \lambda_{y4}^+ \tilde{v}^+ \\ 2(\nu-1)\lambda_{y1}^+ \tilde{h}^+ + \lambda_{y3}^+ \tilde{h}^+ + \lambda_{y4}^+ \tilde{h}^+ \end{bmatrix}, \\ F_y^- &= \frac{\bar{\rho}}{2\nu} \begin{bmatrix} 2(\nu-1)\lambda_{y1}^- \tilde{u}^- + \lambda_{y3}^- (\tilde{u}^- + \tilde{c}^-) + \lambda_{y4}^- (\tilde{u}^- - \tilde{c}^-) \\ 2(\nu-1)\lambda_{y1}^- \tilde{v}^- + \lambda_{y3}^- \tilde{v}^- + \lambda_{y4}^- \tilde{v}^- \\ 2(\nu-1)\lambda_{y1}^- \tilde{h}^- + \lambda_{y3}^- \tilde{h}^- + \lambda_{y4}^- \tilde{h}^- \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (17)$$

Используя выражения (6), (17), вычисляем значения векторов потоков  $F_x, F_y$ . Для расчета  $L_x, L_y$  используем выражения (3). Далее рассчитываем элементы вектора переменных  $Q$  и соответственно определяем все параметры потока.

### § 3. Результаты расчетов

Схема расчетной области и ее геометрические размеры приведены на рис. 3 (см. [14]). Перед обратным уступом расположен микsturбулизатор. На входе в канал задавались скорость  $U_0$ , нормальное атмосферное давление и температура. На выходе из канала для всех параметров использовалось граничное условие нормального нулевого градиента.

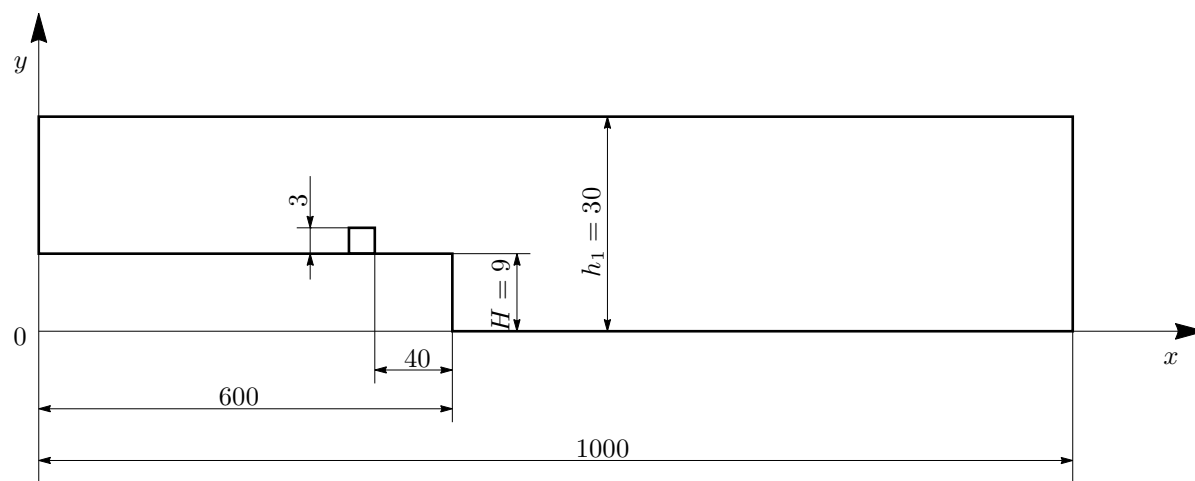


Рис. 3. Схема расчетной области

Верификация разработанного алгоритма осуществлялась с использованием экспериментальных данных по течению воздуха в канале, представленных в работе [14]. Скорость на входе в канал равнялась  $U_0 = 30$  м/с, число Рейнольдса  $Re = 15\,000$ . Расчетная сетка имела размерность  $300 \times 120$  ячеек.

На рис. 4 приведены линии тока течения для трех различных моментов времени. Моделирование было проведено с использованием схемы 5-го порядка. На рис. 5 представлены профили средней продольной скорости и величины среднеквадратичных пульсаций продольной скорости для обеих схем.

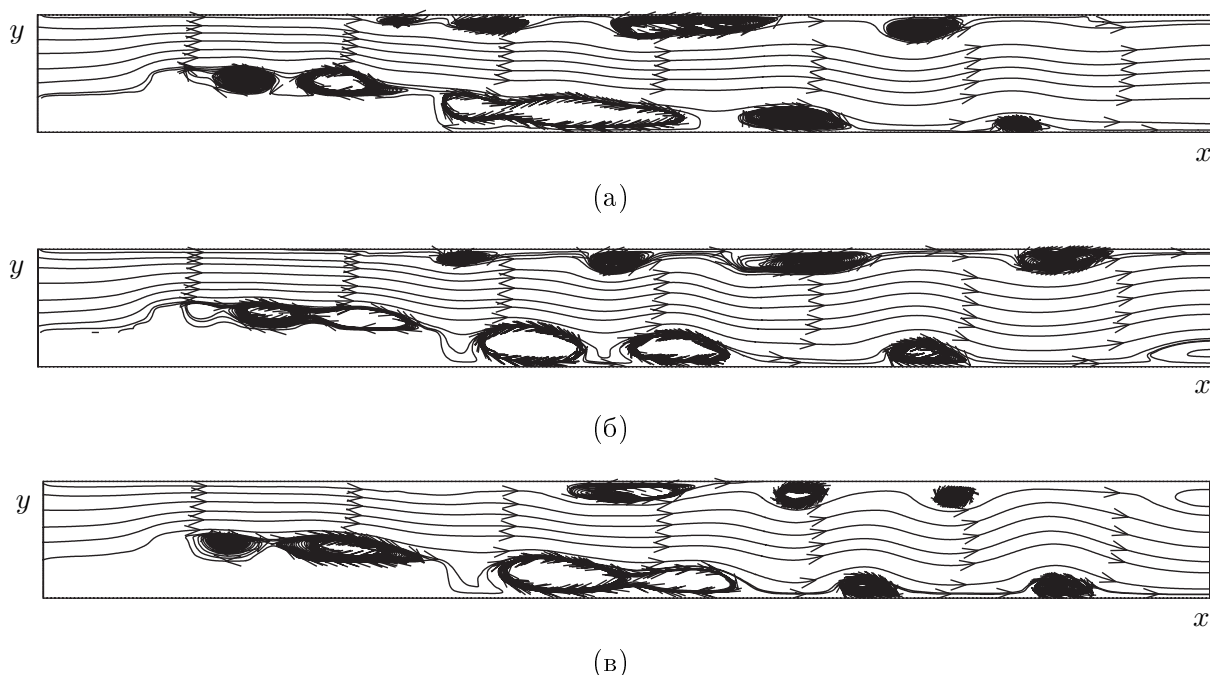
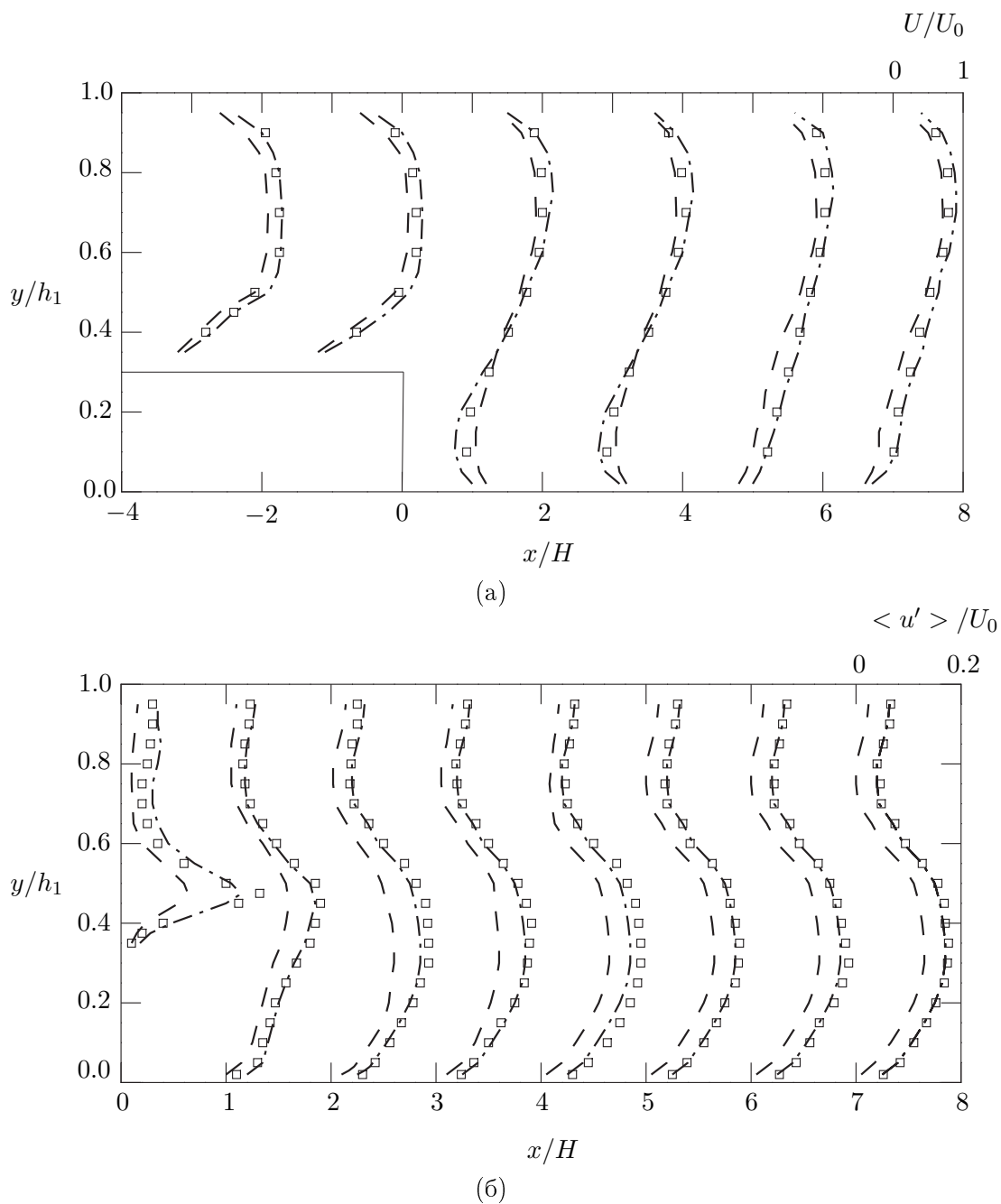


Рис. 4. Линии тока для моментов времени: (а)  $t = 1.150$  с, (б)  $t = 1.151$  с, (в)  $t = 1.152$  с



**Рис. 5.** Профили средней продольной скорости (а), среднеквадратичных пульсаций продольной скорости (б). Линии: пунктирная — WENO 3-го порядка точности; пунктирная с точками — WENO 5-го порядка точности; квадраты — эксперимент (см. [14])

#### § 4. Заключение

На основе схемы высокого порядка точности WENO предложена и реализована методика моделирования турбулентного потока газа. Проведены численные исследования течения газа в канале с обратным уступом. Исследования проводились с использованием схем 3-го и 5-го порядков точности. Из графика среднеквадратичных пульсаций продольной скорости видно, что схема 3-го порядка дает заниженную величину пульсаций по сравнению со схемой 5-го порядка. Это объясняется большей схемной вязкостью алгоритма 3-го порядка. Таким образом, для моделирования турбулентных течений более предпочтительным является использование схемы 5-го порядка.

В целом сравнение результатов расчетов, полученных с применением обеих схем, показало достаточно хорошее совпадение с экспериментальными данными.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Liu X.-D., Osher S., Chan T. Weighted essentially non-oscillatory schemes // J. Comput. Phys. 1994. Vol. 115. Issue 1. P. 200–212. DOI: [10.1006/jcph.1994.1187](https://doi.org/10.1006/jcph.1994.1187)
2. Jiang G.-S., Shu C.-W. Efficient implementation of weighted ENO schemes // J. Comput. Phys. 1996. Vol. 126. Issue 1. P. 202–228. DOI: [10.1006/jcph.1996.0130](https://doi.org/10.1006/jcph.1996.0130)
3. Shu C.-W. Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws // ICASE Report No. 97–65., NASA-CR/97-206253. 1997. 83 p. <https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19980007543.pdf>
4. Balsara D.S., Shu C.-W. Monotonicity preserving weighted essentially non-oscillatory schemes with increasingly high order of accuracy // J. Comput. Phys. 2000. Vol. 160. Issue 2. P. 405–452. DOI: [10.1006/jcph.2000.6443](https://doi.org/10.1006/jcph.2000.6443)
5. Smagorinsky J. General circulation experiments with the primitive equations. I. The basic experiment // Monthly Weather Review. 1963. Vol. 91. No. 3. P. 99–164. DOI: [10.1175/1520-0493\(1963\)091<0099:GCEWTP>2.3.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0493(1963)091<0099:GCEWTP>2.3.CO;2)
6. Ducros F., Nicoud F., Poinsot T. Wall-adapting local eddy-viscosity models for simulations in complex geometries // Proceeding of the 6th ICFD Conference on Numerical Methods for Fluid Dynamic. Oxford, United Kingdom, 1998. P. 293–299.
7. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Моделирование крупных вихрей в расчетах турбулентных течений. М.: Физматлит, 2008. 368 с.
8. Карпов А.И., Шумихин А.А. Параметрическое исследование внутренних турбулентных течений методом крупных вихрей // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. Вып. 4. С. 62–70. DOI: [10.20537/vm090406](https://doi.org/10.20537/vm090406)
9. Шумихин А.А., Карпов А.И. Численное моделирование турбулентного диффузионного пламени на основе метода крупных вихрей // Вычислительная механика сплошных сред. 2012. Т. 5. № 2. С. 199–207. DOI: [10.7242/1999-6691/2012.5.2.24](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2012.5.2.24)
10. Steger J.L., Warming R.F. Flux vector splitting of the inviscid gasdynamic equations with application to finite difference methods // J. Comput. Phys. 1981. Vol. 40. Issue 2. P. 263–293. DOI: [10.1016/0021-9991\(81\)90210-2](https://doi.org/10.1016/0021-9991(81)90210-2)
11. van Leer B. Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method // J. Comput. Phys. 1979. Vol. 32. Issue 1. P. 101–136. DOI: [10.1016/0021-9991\(79\)90145-1](https://doi.org/10.1016/0021-9991(79)90145-1)
12. Osher S., Chakravarthy S. Upwind schemes and boundary conditions with applications to Euler equations in general geometries // J. Comput. Phys. 1983. Vol. 50. Issue 3. P. 447–481. DOI: [10.1016/0021-9991\(83\)90106-7](https://doi.org/10.1016/0021-9991(83)90106-7)
13. Anderson W.K., Thomas J.L., van Leer B. Comparison of finite volume flux vector splittings for the Euler equations // AIAA Journal. 1986. Vol. 24. No. 9. P. 1453–1460. DOI: [10.2514/3.9465](https://doi.org/10.2514/3.9465)
14. Терехов В.И., Смутьский Я.И., Шаров К.А. Интерференция отрывных потоков за обратным уступом при наличии пассивного управления // Письма в ЖТФ. 2012. Т. 38. Вып. 3. С. 46–53. <http://journals.ioffe.ru/articles/12632>

Поступила в редакцию 01.08.2017

Шумихин Андрей Александрович, к.ф.-м.н., научный сотрудник, Институт механики УрО РАН, 426067, Россия, г. Ижевск, ул. Т. Барамзиной, 34.  
E-mail: [shumihin@udman.ru](mailto:shumihin@udman.ru)

Королева Мария Равилевна, к.ф.-м.н., старший научный сотрудник, Институт механики УрО РАН, 426067, Россия, г. Ижевск, ул. Т. Барамзиной, 34.  
E-mail: [koroleva-ipm@yandex.ru](mailto:koroleva-ipm@yandex.ru)

Дадикина Светлана Юрьевна, младший научный сотрудник, Институт механики УрО РАН, 426067, Россия, г. Ижевск, ул. Т. Барамзиной, 34.  
E-mail: [sveta-dadikina@yandex.ru](mailto:sveta-dadikina@yandex.ru)

Карпов Александр Иванович, д.ф.-м.н., зав. лаб. физико-химической механики, Институт механики УрО РАН, 426067, Россия, г. Ижевск, ул. Т. Барамзиной, 34;



заведующий кафедрой вычислительной механики, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.

E-mail: [karpov@udman.ru](mailto:karpov@udman.ru)

*A. A. Shumikhin, M. R. Koroleva, S. Yu. Dadikina, A. I. Karpov*

**Application of WENO scheme for simulation of turbulent flow in a channel with backward-facing step**

**Citation:** *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 3, pp. 460–469 (in Russian).

*Keywords:* WENO scheme, method of large vortices, turbulence, Computational Fluid Dynamics.

MSC2010: 76F65, 65N08

DOI: [10.20537/vm170313](https://doi.org/10.20537/vm170313)

The technique of viscous gas turbulent flow simulation based on high-order approximation WENO scheme (Weighted Essentially Non-oscillatory scheme) is described. This scheme is characterized by significant stability when calculations are performed, because WENO allows to eliminate nonphysical oscillations of a numerical solution which can occur during calculations. The system of governing equations describing the flow of viscous gas based on the Navier–Stokes equations is presented. The algorithms of 3-rd and 5-th accuracy orders are developed and implemented. The numerical methods used in the calculations of gas flow are described. Turbulence modeling is carried out using the method of large vortices. The proposed algorithms have been used to study the flow of viscous gas in a channel with backward-facing step. Reynolds number of the flow in the channel was  $Re = 15\,000$ . Comparison of simulation results with experimental data has been made.

## REFERENCES

1. Liu X.-D., Osher S., Chan T. Weighted essentially non-oscillatory schemes, *J. Comput. Phys.*, 1994, vol. 115, issue 1, pp. 200–212. DOI: [10.1006/jcph.1994.1187](https://doi.org/10.1006/jcph.1994.1187)
2. Jiang G.-S., Shu C.-W. Efficient implementation of weighted ENO schemes, *J. Comput. Phys.*, 1996, vol. 126, issue 1, pp. 202–228. DOI: [10.1006/jcph.1996.0130](https://doi.org/10.1006/jcph.1996.0130)
3. Shu C.-W. Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws, ICASE Report No. 97-65., NASA-CR/97-206253, 1997, 83 p.  
<https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19980007543.pdf>
4. Balsara D., Shu C.-W. Monotonicity preserving weighted essentially non-oscillatory schemes with increasingly high order of accuracy, *J. Comput. Phys.*, 2000, vol. 160, issue 2, pp. 405–452.  
DOI: [10.1006/jcph.2000.6443](https://doi.org/10.1006/jcph.2000.6443)
5. Smagorinsky J. General circulation experiments with the primitive equations. I. The basic experiment, *Monthly Weather Review*, 1963, vol. 91, no. 3, pp. 99–164.  
DOI: [10.1175/1520-0493\(1963\)091<0099:GCEWTP>2.3.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0493(1963)091<0099:GCEWTP>2.3.CO;2)
6. Ducros F., Nicoud F., Poinsot T. Wall-adapting local eddy-viscosity models for simulations in complex geometries, *Proceeding of the 6th ICFD Conference on Numerical Methods for Fluid Dynamic*. Oxford, United Kingdom, 1998, pp. 293–299.
7. Volkov K.N., Emel'yanov V.N. *Modelirovanie krupnykh vikhrei v raschetakh turbulentnykh techenii* (Large Eddy Simulation in predicting of turbulent flows), Moscow: Fizmatlit, 2008, 368 p.
8. Karpov A.I., Shumikhin A.A. A parametric study of internal turbulent flows by the Large Eddy Simulation, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mech. Komp'yut. Nauki*, 2009, no. 4, pp. 62–70 (in Russian).  
DOI: [10.20537/vm090406](https://doi.org/10.20537/vm090406)
9. Shumikhin A.A., Karpov A.I. Large-Eddy Simulation of the turbulent diffusion flame, *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred*, 2012, vol. 5, no. 2, pp. 199–207 (in Russian).  
DOI: [10.7242/1999-6691/2012.5.2.24](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2012.5.2.24)
10. Steger J.L., Warming R.F. Flux vector splitting of the inviscid gasdynamic equations with application to finite difference methods, *J. Comput. Phys.*, 1981, vol. 40, issue 2, pp. 263–293.  
DOI: [10.1016/0021-9991\(81\)90210-2](https://doi.org/10.1016/0021-9991(81)90210-2)

11. van Leer B. Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method, *J. Comput. Phys.*, 1979, vol. 32, issue 1, pp. 101–136. DOI: [10.1016/0021-9991\(79\)90145-1](https://doi.org/10.1016/0021-9991(79)90145-1)
12. Osher S., Chakravarthy S. Upwind schemes and boundary conditions with applications to Euler equations in general geometries, *J. Comput. Phys.*, 1983, vol. 50, issue 3, pp. 447–481. DOI: [10.1016/0021-9991\(83\)90106-7](https://doi.org/10.1016/0021-9991(83)90106-7)
13. Anderson W.K., Thomas J.L., van Leer B. Comparison of finite volume flux vector splittings for the Euler equations, *AIAA Journal*, 1986, vol. 24, no. 9, pp. 1453–1460. DOI: [10.2514/3.9465](https://doi.org/10.2514/3.9465)
14. Terekhov V.I., Smul'skii Ya.I., Sharov K.A. Interference of separated flows behind backward-facing step in the presence of passive control, *Technical Physics Letters*, 2012, vol. 38, issue 2, pp. 125–128. DOI: [10.1134/S1063785012020149](https://doi.org/10.1134/S1063785012020149)

Received 01.08.2017

Shumikhin Andrei Aleksandrovich, Candidate of Physics and Mathematics, Researcher, Institute of Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. T. Baramzinoi, 34, Izhevsk, 426067, Russia.  
E-mail: [shumihin@udman.ru](mailto:shumihin@udman.ru)

Koroleva Mariya Ravilevna, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Institute of Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. T. Baramzinoi, 34, Izhevsk, 426067, Russia.  
E-mail: [koroleva-ipm@yandex.ru](mailto:koroleva-ipm@yandex.ru)

Dadikina Svetlana Yur'evna, Junior Researcher, Institute of Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. T. Baramzinoi, 34, Izhevsk, 426067, Russia.  
E-mail: [sveta-dadikina@yandex.ru](mailto:sveta-dadikina@yandex.ru)

Karpov Aleksandr Ivanovich, Doctor of Physics and Mathematics, Head of the Laboratory of Physical and Chemical Mechanics, Institute of Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. T. Baramzinoi, 34, Izhevsk, 426067, Russia;  
Head of the Department of Computational Mechanics, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.  
E-mail: [karpov@udman.ru](mailto:karpov@udman.ru)