

УДК 531.36

© *А. Я. Красинский, А. Н. Ильина, Э. М. Красинская*

О МОДЕЛИРОВАНИИ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ BALL AND BEAM КАК НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАТРОННОЙ СИСТЕМЫ С ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ СВЯЗЬЮ

Рассматривается система Ball and Beam с нелинейной геометрической связью. Из полного уравнения этой связи определяются два возможных положения равновесия системы. Проведен сравнительный анализ структур уравнений возмущенного движения в окрестности обоих положений равновесия, исходя из уравнений без множителей связей в форме М. Ф. Шульгина. На этой основе обсуждается вопрос о допустимости линеаризации геометрических связей. Даны решения задач стабилизации для каждого равновесия при двух вариантах выбора избыточной координаты. Стабилизирующее управление (напряжение на якорной обмотке приводного двигателя) определяется решением методом Н. Н. Красовского линейно-квадратичных задач для соответствующих управляемых подсистем. Показано совпадение управлений как функций времени для одного и того же равновесия при разном выборе избыточной координаты, причем стабилизирующие управления являются при этом линейными функциями разных фазовых переменных. Приведены графики переходных процессов в замкнутых найденными управлениями системах. Асимптотическая устойчивость обоих положений равновесия в полной нелинейной замкнутой системе следует из ранее доказанной теоремы об асимптотической устойчивости при наличии нулевых корней характеристического уравнения, соответствующих избыточным координатам.

Ключевые слова: геометрические связи, избыточные координаты, уравнения М. Ф. Шульгина, Ball and Beam, устойчивость, стабилизация, положение равновесия.

DOI: [10.20537/vm170310](https://doi.org/10.20537/vm170310)

Введение

Системы Ball and Beam часто используются [1–9] для изучения в реальном времени динамики нелинейных управляемых объектов. В составе этих систем имеется механический компонент, включающий шар, движущийся по желобу, наклон которого изменяется электроприводом. Существуют разные конструкции системы Ball and Beam. В работах [1, 8, 9] рассматриваются системы, где желоб непосредственно связан с валом редуктора электропривода. Для них можно применять уравнения Лагранжа второго рода. А в статьях [2–7] изучаются системы другой конструкции, в которых наклон желоба изменяется с помощью стержня постоянной длины, связанного с колесом редуктора электропривода. В таком случае в системе имеется нелинейная геометрическая связь, определяющая зависимость между углами наклона желоба и поворота приводного колеса. Выразить один угол через другой в удобной форме не удастся. Тогда уравнения Лагранжа второго рода в общем случае неприменимы [10–12], потому что используемые координаты не являются независимыми. В большинстве работ [2–6] при моделировании системы вместо нелинейной геометрической связи рассматривается линейная зависимость и совершается переход к модели меньшей размерности, полученной для независимых координат. Такие математические модели являются необоснованными, что имеет принципиальное значение, особенно в задачах устойчивости и стабилизации. Следует рассматривать полное нелинейное уравнение связи, причем можно найти другое, ранее не исследованное, положение равновесия системы — для ненулевого значения угла поворота приводного колеса.

Таким образом, система Ball and Beam с нелинейной геометрической связью требует дальнейшего рассмотрения с целью повышения строгости моделирования ее механического компонента и проведения на этой основе более полного исследования ее динамики. Ball and Beam, как и любую систему со сложными геометрическими связями (которые не дают возможности

исключения зависимых координат), предлагается рассматривать как систему с избыточными координатами. Для описания динамики таких систем следует использовать уравнения с множителями связей (что увеличивает размерность задачи) или свободные от этих множителей уравнения в форме М. Ф. Шульгина [13] в избыточных координатах.

Системы с избыточными координатами (как и неголономные системы) отличаются от систем с независимыми координатами тем, что некоторые из линейных коэффициентов разложения потенциальной энергии (в окрестности положения равновесия) в общем случае отличны от нуля. Кроме того, могут быть не равны нулю и неконсервативные позиционные силы, которые нужно приложить для существования положения равновесия. Первое приближение уравнений возмущенного движения в окрестности положения равновесия [11, 12] таких систем может содержать произведения постоянных позиционных сил и квадратичных членов разложения геометрических связей (или линейных членов разложения коэффициентов соответствующих кинематических связей).

Заметим, что еще Раус [14, с. 57–60], применяя уравнения с множителями Лагранжа для систем с геометрическими связями, подчеркивал, что в случае зависимых координат линейные члены разложения потенциальной энергии могут не обращаться в нуль для положения равновесия. Поэтому в окрестностях такого равновесия характеристическое уравнение (системы уравнений с множителями связей) может зависеть от квадратичных членов в разложении уравнений геометрических связей.

В настоящей работе для построения модели механической части Ball and Beam используются уравнения в форме М. Ф. Шульгина [13] в избыточных координатах. Применение такой формы уравнений — один из способов, позволяющих получать нелинейные математические модели динамики систем с геометрическими связями [10–12, 15–18].

В многочисленных актуальных технических задачах, в частности управления многозвенными манипуляторами и другими мехатронными системами [10–13, 19, 20], конфигурацию механической системы целесообразно задавать параметрами q_1, \dots, q_{n+m} , взятыми в числе, большем n — числа степеней свободы системы.

Пусть существующие между параметрами q_1, \dots, q_{n+m} связи описываются m независимыми соотношениями

$$F_k(q_1, \dots, q_{n+m}) = 0, \quad k = \overline{1, m}; \quad \text{rank} \frac{\partial(F_1, \dots, F_m)}{\partial(q_1, \dots, q_{n+m})} = m. \quad (0.1)$$

Для удобства дальнейшего изложения обозначим $q' = (q_1, \dots, q_{n+m})$, $r' = (q_1, \dots, q_n)$ — вектор независимых координат, $s' = (q_{n+1}, \dots, q_{n+m})$ — вектор зависимых координат и $F' = (F_1, \dots, F_m)$. Из геометрических связей (0.1) вытекают кинематические (голономные) связи вида

$$\left(\frac{\partial F}{\partial r} \right) \cdot \dot{r} + \left(\frac{\partial F}{\partial s} \right) \cdot \dot{s} = 0. \quad (0.2)$$

Если $\det \left[\frac{\partial F}{\partial s} \right] \neq 0$, можно представить связи (0.2) в форме

$$\dot{s} = B(q)\dot{r}, \quad B(q) = - \left(\frac{\partial F}{\partial s} \right)^{-1} \left(\frac{\partial F}{\partial r} \right). \quad (0.3)$$

Уравнения движения системы в избыточных координатах в форме М. Ф. Шульгина (см. [13]) имеют вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L^*}{\partial r} = Q_r^* + B'(q) \left(\frac{\partial L^*}{\partial s} + Q_s^* \right), \quad (0.4)$$

где $L^* = T^*(q, \dot{r}) - \Pi(q)$ — функция Лагранжа, $T^*(q, \dot{r})$, Q_r^* и Q_s^* — выражения для кинетической энергии системы и неконсервативных сил после исключения зависимых скоростей. Уравнения (0.4) не содержат множителей связей, их число равно числу степеней свободы системы.

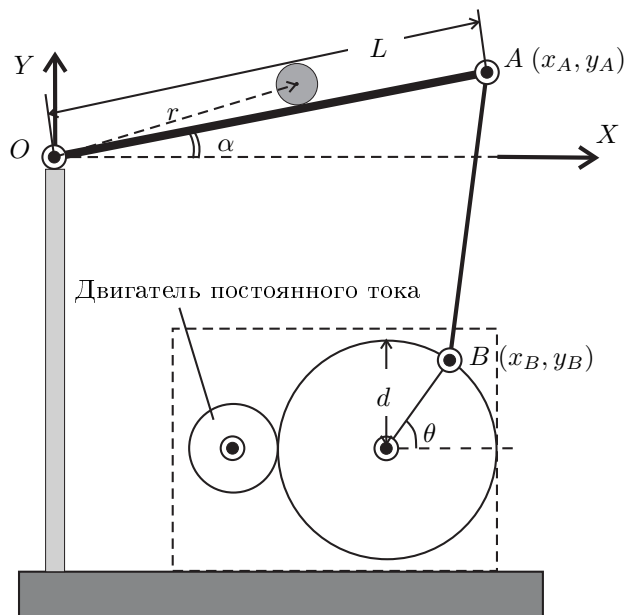


Рис. 1. Схема системы Ball and Beam

Замечание 1. Уравнения (0.4) могут рассматриваться как частный случай уравнений движения неголономных систем с однородными связями в форме Воронца, при интегрируемости кинематических связей (0.3). Но кроме более простой структуры эти уравнения имеют и другие особенности, которые требуют детального изучения. В отличие от неголономных систем, кроме связей в продифференцированной форме (0.3) нужно учитывать и конечные соотношения (0.1), связывающие начальные возмущения зависимых и независимых координат.

Система уравнений (0.1), (0.3), (0.4) является точной нелинейной математической моделью динамики механических систем с геометрическими связями, которая будет использована для моделирования Ball and Beam.

§ 1. Постановка задачи. Описание предлагаемого подхода

Устройство Ball and Beam (рис. 1) состоит из механической части и управляемого электропривода. Положение шарика $r(t)$ регулируется за счет угла $\alpha(t)$ наклона желоба и стабилизируется в некотором наперед заданном положении r_0 . Угол поворота колеса привода обозначим как $\theta(t)$. Управление приводом реализуется изменением напряжения на якоре двигателя.

Как видно из рисунка, на систему наложена геометрическая связь: расстояние между точками $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$ постоянно. Уравнение нелинейной связи [10–12] имеет вид

$$(L(\cos \alpha - 1) + d(1 - \cos \theta))^2 + (L \sin \alpha + l - d \sin \theta)^2 = l^2, \quad (1.1)$$

где $L = OA$ — длина желоба, $l = AB$ — длина рычага, d — радиус колеса. За избыточную координату можно принимать как угол наклона желоба $\alpha(t)$, так и угол поворота колеса $\theta(t)$.

Замечание 2. В большинстве работ по исследованию динамики стенда Ball and Beam с геометрической связью при построении математической модели сразу осуществляется переход к линейной зависимости $\alpha = \frac{d}{l}\theta$ [2–6]. Связь в виде (1.1) учтена только в работе [7].

Очевидно, положение равновесия возможно только при $\alpha = 0$, когда желоб расположен горизонтально. Положив $\alpha = \alpha_0 = 0$ и полагая, что $0 \leq \theta \leq 2\pi$, получим значения угла θ ,

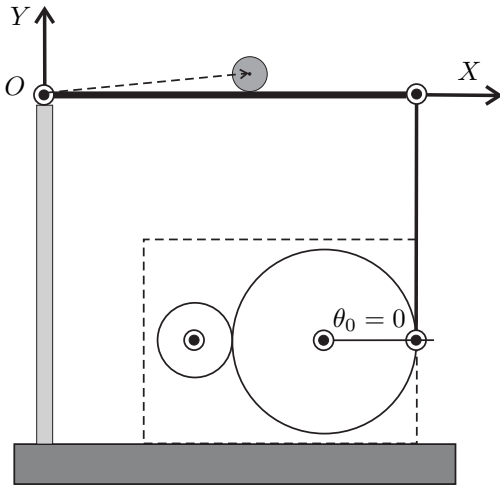


Рис. 2. Нулевое положение равновесия системы Ball and Beam

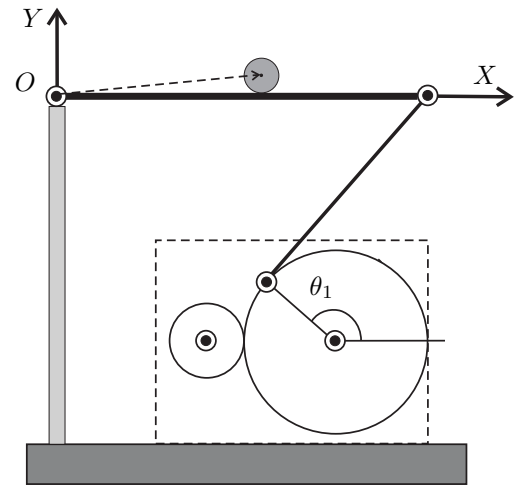


Рис. 3. Ненулевое положение равновесия системы Ball and Beam

соответствующие всем положениям равновесия системы:

$$\theta_0 = 0, \quad \theta_1 = 2 \arcsin \left(\frac{l}{\sqrt{l^2 + d^2}} \right).$$

Соответствующие конфигурации представлены на рис. 2 и рис. 3.

Отметим, что без приложения постоянного момента, создаваемого приводным двигателем, в рассматриваемой здесь конструкции Ball and Beam равновесия не существует. Постоянный момент для заданного положения равновесия является отличной от нуля неконсервативной позиционной силой, причем ненулевая постоянная содержится и в потенциальной силе. Следовательно, в уравнениях в форме М. Ф. Шульгина следует выделить компоненты, зависящие от линейных членов разложения коэффициента кинематической связи, и сравнить их для двух разных положений равновесия. Указанные компоненты обращаются в нуль для известного положения равновесия, когда угол поворота приводного колеса равен нулю. Тогда можно пользоваться (см. [10, с. 179–183], более подробно [15, 16]) уравнениями Лагранжа второго рода, исключая зависимые координату и скорость с помощью линеаризованной связи. Необходимо теперь установить значения этих компонентов для ранее не известного положения равновесия системы Ball and Beam и показать некорректность линеаризации связи для исследования этого положения равновесия. Для разных положений равновесия структура уравнений возмущенного движения будет разной.

Кроме того, для систем с геометрическими связями, как и в системе Ball and Beam, зависимые координаты можно выбрать различными способами. Модели системы при этом будут различаться. В системе Ball and Beam избыточную координату можно выбрать двумя способами, и при этом уравнения Шульгина будут иметь разный вид. Для получения одного и того же начального возмущенного состояния при разном выборе зависимой координаты и сравнения результатов управления (для одного и того же равновесия) необходимо согласование начальных возмущений угловых переменных из-за наличия связи (1.1).

Цель настоящей работы — построение нелинейной модели системы Ball and Beam, проведение сравнительного анализа структуры уравнений первого приближения для двух положений равновесия и двух вариантов выбора избыточной координаты и решение, исходя из этого, задач стабилизации и сравнение управляющих воздействий как функций времени для обоих положений равновесия.

Для построения полной модели Ball and Beam как мехатронной системы необходимо добавить уравнение управляемого электропривода с исполнительным коллекторным двигателем

постоянного тока с независимым возбуждением. Управляющим воздействием является дополнительное напряжение на якорной обмотке приводного двигателя. При выбранном способе реализации управляющих воздействий математическая модель объекта представляет собой систему непрямого управления, что, как известно [21], значительно расширяет возможности системы управления. В предлагаемом методе стабилизации характеристическое уравнение для возмущенного движения обязательно имеет нулевые корни в числе, равном числу геометрических связей. Если действительные части остальных его корней отрицательны, то для любого способа управления имеет место критический случай. Тогда, согласно теории критических случаев [22, 23], в уравнениях возмущенного движения необходимо выполнить линейную замену [11, 12], выделяющую переменные — избыточные координаты, которым соответствуют эти нулевые корни. Это преобразование в общем случае изменяет структуру линейных позиционных сил в первом приближении уравнений возмущенного движения.

Линейная управляемая подсистема (см. [17]) не включает критическую переменную и существенно зависит от выбора избыточной координаты. Управляющее воздействие как линейная функция фазовых переменных зависит от переменных выбранной подсистемы. Его коэффициенты будут определяться решением методом Н. Н. Красовского [23, с. 475–515] соответствующих линейно-квадратичных задач. Достаточным условием разрешимости задачи стабилизации для выделенной линейной управляемой подсистемы является условие управляемости (в силу теоремы Н. Н. Красовского о стабилизации по первому приближению [23, с. 509]). В полной нелинейной системе, замкнутой линейным управлением, найденным для выделенной управляемой подсистемы, будет обеспечена асимптотическая стабилизация по всем переменным, включая избыточную координату, которой соответствует нулевой корень (согласно теореме 1 в [11, 17]). Численное решение проводится с применением процедуры Репина–Третьякова [23, с. 475–515]. Для этого необходимо написать программу, в которой (в отличие от [24]) вводится дополнительный модуль, учитывающий согласование начальных возмущений зависимых и независимых координат из-за наличия уравнения геометрической связи в виде (0.1), а также предполагающий различный выбор избыточной координаты. В программном продукте [24] не рассматривались системы с избыточными координатами. При написании программы в настоящей работе предусматривается построение графиков переходных процессов для двух случаев выбора избыточной координаты и сравнение управляющих воздействий как функций времени для обоих положений равновесия.

§ 2. Построение математической модели системы Ball and Beam

Кинетическую и потенциальную энергию механической части системы, включающей шар и ротор двигателя с редуктором, возьмем в виде (см. [12]):

$$T = \frac{1}{2} \left(m(r\dot{\alpha})^2 + m \frac{(r\dot{r})^2}{r^2 - R^2} - 2mR \frac{r\dot{r}\dot{\alpha}}{\sqrt{r^2 - R^2}} + J \left(\frac{r\dot{r}}{R\sqrt{r^2 - R^2}} - \dot{\alpha} \right)^2 + J_0\dot{\theta}^2 \right), \quad (2.1)$$

$$\Pi = mg \left(\sqrt{r^2 - R^2} \sin \alpha + R \cos \alpha \right),$$

где R — радиус шара, m — его масса, J — его момент инерции, J_0 — момент инерции всей системы, приведенный к двигателю. Выражения кинетической и потенциальной энергий составлены с учетом размеров шара, который необходим, если рассматривать равновесие и движение вблизи начала координат. Динамику коллекторного двигателя постоянного тока с независимым возбуждением описывает уравнение Кирхгофа (см. [20]):

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + k_3 \frac{d\theta}{dt} = k_1 e_\nu, \quad e_b = k_3 \frac{d\theta}{dt}, \quad (2.2)$$

где e_ν — напряжение на выходе усилителя, подающего питание на якорную обмотку двигателя, e_b — напряжение противо-ЭДС, k_1 — коэффициент преобразователя питания, k_3 — постоянная двигателя, L_a — индуктивность обмотки якоря, R_a — его сопротивление, i_a — ток в цепи якоря.

По координатам α и r на систему действуют только потенциальные силы:

$$Q_r = -\frac{mgr}{\sqrt{r^2 - R^2}} \sin \alpha, \quad Q_\alpha = -mg \left(\sqrt{r^2 - R^2} \cos \alpha - R \sin \alpha \right).$$

А по координате θ приложена только непотенциальная сила (см. [12]) $Q_\theta = k_2 \dot{i}_a - b_0 \dot{\theta}$, где b_0 — коэффициент сопротивления вращению, приведенный к двигателю, k_2 — электромеханическая постоянная двигателя.

Продифференцировав уравнение связи (1.1) по времени, мы получаем уравнения кинематической связи. Из этого уравнения можно выразить скорость $\dot{\alpha}$ или $\dot{\theta}$, в зависимости от того, какой вариант зависимой координаты мы рассматриваем. Уравнение связи будем брать в виде

$$\dot{\alpha} = B^I(\alpha, \theta) \cdot \dot{\theta}, \quad B^I(\alpha, \theta) = \frac{d(L \sin(\alpha - \theta) + (L - d) \sin \theta + l \cos \theta)}{L(d \sin(\alpha - \theta) + (L - d) \sin \alpha + l \cos \alpha)} \quad (2.3)$$

или

$$\dot{\theta} = B^{II}(\alpha, \theta) \cdot \dot{\alpha}, \quad B^{II}(\alpha, \theta) = 1/B^I(\alpha, \theta). \quad (2.4)$$

Запишем уравнения Шульгина для системы Ball and Beam в двух случаях. В первом будем считать зависимой координатой угол наклона желоба α . Во втором случае зависимой координатой будет угол θ поворота колеса. Уравнения возмущенного движения в разных случаях будут различаться.

Замечание 3. Далее будем называть нулевым положение равновесия, которому соответствуют значения координат $r = r_0 = \text{const}$, $\alpha = \alpha_0 = 0$, $\theta = \theta_0 = 0$. Второе положение ($r = r_0 = \text{const}$, $\alpha = \alpha_0 = 0$, $\theta = \theta_1$) назовем ненулевым. Из постановки задачи следует, что $0 < r_0 < L$.

Замечание 4. Если использовать упрощенный подход и вместо нелинейного уравнения (1.1) использовать линеаризованное уравнение $\alpha = \frac{d}{L}\theta$, то второе (ненулевое) положение равновесия теряется.

Замечание 5. Коэффициенты управлений для одного и того же положения равновесия при разном выборе избыточной координаты будут различны, поскольку, соответственно введенной избыточной координате, наборы компонент фазового вектора, входящие в управляемые подсистемы, являются разными. Таким образом, всего получаем четыре различные задачи стабилизации: для двух равновесий по два варианта введения избыточной координаты.

Случай I. Зависимая координата α

Используем (2.3) для исключения зависимой скорости $\dot{\alpha}$ из кинетической энергии (2.1). Уравнения Шульгина, с учетом действующих на систему сил, в этом случае запишутся в виде

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L^{I*}}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L^{I*}}{\partial r} = 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L^{I*}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L^{I*}}{\partial \theta} = Q_\theta^* + B^I(\alpha, \theta) \frac{\partial L^{I*}}{\partial \alpha}. \end{cases}$$

К этим уравнениям необходимо добавить еще уравнение двигателя (2.2), а также учесть продифференцированное уравнение связи (2.3). Получим систему

$$\left\{ \begin{array}{l}
\left(m + \frac{J}{R^2} \right) \left(\frac{r^2}{r^2 - R^2} \ddot{r} - R \frac{r B^I}{\sqrt{r^2 - R^2}} \ddot{\theta} - \frac{R^2 r}{(r^2 - R^2)^2} \dot{r}^2 \right) - \\
- \left(R \left(m + \frac{J}{R^2} \right) \frac{r \left(\frac{\partial B^I}{\partial \alpha} B^I + \frac{\partial B^I}{\partial \theta} \right)}{\sqrt{r^2 - R^2}} + m r B^{I^2} \right) \dot{\theta}^2 = - \frac{m g r \sin \alpha}{\sqrt{r^2 - R^2}}, \\
\left((m r^2 + J) B^{I^2} + J_0 \right) \ddot{\theta} - R \left(m + \frac{J}{R^2} \right) \frac{r B^I}{\sqrt{r^2 - R^2}} \ddot{r} + 2 m r B^{I^2} \dot{r} \dot{\theta} + \\
+ (m r^2 + J) B^I \left(\frac{\partial B^I}{\partial \alpha} B^I + \frac{\partial B^I}{\partial \theta} \right) \dot{\theta}^2 + R^3 \left(m + \frac{J}{R^2} \right) \frac{B^I}{(r^2 - R^2)^{3/2}} \dot{r}^2 = \\
= k_2 i_a - b_0 \dot{\theta} - m g B^I \left(\sqrt{r^2 - R^2} \cos \alpha - R \sin \alpha \right), \\
L_a \frac{d i_a}{d t} + R_a i_a + k_3 \dot{\theta} = k_1 e_\nu, \\
\dot{\alpha} = B^I (\alpha, \theta).
\end{array} \right. \quad (2.5)$$

Значение параметров системы (2.5) в положении равновесия $(r_0, \alpha = 0, \theta = \theta_i)$:

$$i_a^0 = \frac{m g B^I(0, \theta_i) \sqrt{r_0^2 - R^2}}{k_2}, \quad e_\nu^0 = \frac{R_a i_a^0}{k_1} = \frac{m g R_a B^I(0, \theta_i) \sqrt{r_0^2 - R^2}}{k_1 k_2}.$$

Введем возмущения:

$$r = r_0 + x_1, \quad \dot{r} = x_2, \quad \theta = \theta_i + x_3^I, \quad \dot{\theta} = x_4^I, \quad i_a = i_a^0 + x_5, \quad \alpha = x_6^I, \quad e_\nu = e_\nu^0 + u_i^I.$$

Здесь u_i^I — управление. Нижний индекс при θ и u обозначает положение равновесия, верхний — вариант выбора зависимой координаты.

Замечание 6. При разном выборе избыточной координаты будут различными не только уравнения движения, но и некоторые компоненты фазовых векторов. Для зависимой координаты α будем обозначать приращения этих координат верхним индексом I, а в случае зависимой координаты θ — индексом II. Выделив в системе уравнений (2.5) первое приближение, запишем ее в нормальном виде:

$$\dot{x}^I = H_i^I x^I + S u_i^I + X^{I(2)}, \quad (2.6)$$

где $x^I = (x_1, x_2, x_3^I, x_4^I, x_5, x_6^I)'$ — фазовый вектор, H_i^I — матрица, ненулевые элементы которой рассчитываются по формулам

$$\begin{aligned}
h_{21} &= -m g \frac{R B^{I^2}}{m (r_0^2 - R^2) B^{I^2} + J_0}, \quad h_{23} = -\frac{m g}{r_0} \frac{R B^I (r_0^2 - R^2)}{(m (r_0^2 - R^2) B^{I^2} + J_0)} \frac{\partial B^I}{\partial \theta}, \\
h_{24} &= -\frac{b_0 R B^I \sqrt{r_0^2 - R^2}}{r_0 (m (r_0^2 - R^2) B^{I^2} + J_0)}, \quad h_{25} = \frac{k_2 R B^I \sqrt{r_0^2 - R^2}}{r_0 (m (r_0^2 - R^2) B^{I^2} + J_0)}, \\
h_{26} &= -m g \frac{\sqrt{r_0^2 - R^2} \left(m (r_0^2 - R^2) B^{I^2} + J_0 + R B^I \sqrt{r_0^2 - R^2} \left(m + \frac{J}{R^2} \right) \frac{\partial B^I}{\partial \alpha} \right)}{\left(m + \frac{J}{R^2} \right) r_0 (m (r_0^2 - R^2) B^{I^2} + J_0)}; \quad h_{12} = h_{34} = 1; \\
h_{41} &= \frac{-m g}{\sqrt{r_0^2 - R^2}} \frac{B^I r_0}{(m (r_0^2 - R^2) B^{I^2} + J_0)}, \quad h_{43} = \frac{-m g \sqrt{r_0^2 - R^2}}{(m (r_0^2 - R^2) B^{I^2} + J_0)} \frac{\partial B^I}{\partial \theta},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h_{44} &= \frac{-b_0}{\left(m(r_0^2 - R^2)B^{I^2} + J_0\right)}, & h_{45} &= \frac{k_2}{\left(m(r_0^2 - R^2)B^{I^2} + J_0\right)}, \\
 h_{46} &= \frac{-mg\sqrt{r_0^2 - R^2}}{\left(m(r_0^2 - R^2)B^{I^2} + J_0\right)} \frac{\partial B^I}{\partial \alpha}, & h_{54} &= -\frac{k_3}{L_a}, & h_{55} &= -\frac{R_a}{L_a}, & h_{64} &= B^I. \\
 B^I &= B^I(0, \theta_i), & \frac{\partial B^I}{\partial \alpha} &= \left. \frac{\partial B^I}{\partial \alpha} \right|_{(0, \theta_i)}, & \frac{\partial B^I}{\partial \theta} &= \left. \frac{\partial B^I}{\partial \theta} \right|_{(0, \theta_i)}, \\
 S &= (0, 0, 0, 0, s, 0)', & s &= \frac{k_1}{L_a}.
 \end{aligned}$$

$X^{I(2)}$ — вектор, содержащий члены второго порядка и выше.

В системе (2.6) элементы матриц зависят от производных коэффициентов кинематических связей (2.3), вычисленных для разных положений равновесия.

Для выделения переменных, которым соответствуют нулевые корни характеристического уравнения, применим (согласно теории критических случаев) линейную замену [11, 12]:

$$x_6^I = B^I x_3^I + z^I. \tag{2.7}$$

Тогда продифференцированное уравнение связи (2.3), входящее в систему (2.5), в первом приближении примет вид $\dot{z}^I = 0$, а коэффициенты при переменной x_3^I изменятся следующим образом:

$$\begin{aligned}
 h'_{23} &= h_{23} + h_{26}B^I = \\
 &= -\frac{mg}{r_0} \frac{B^I \sqrt{r_0^2 - R^2} \left(m(r_0^2 - R^2)B^{I^2} + J_0 + R\sqrt{r_0^2 - R^2} \left(m + \frac{J}{R^2}\right) \left(\frac{\partial B^I}{\partial \alpha} B^I + \frac{\partial B^I}{\partial \theta}\right)\right)}{\left(m + \frac{J}{R^2}\right) \left(m(r_0^2 - R^2)B^{I^2} + J_0\right)}; \\
 h'_{43} &= h_{43} + h_{46}B^I = -\frac{mg\sqrt{r_0^2 - R^2}}{m(r_0^2 - R^2)B^{I^2} + J_0} \left(\frac{\partial B^I}{\partial \alpha} B^I + \frac{\partial B^I}{\partial \theta}\right).
 \end{aligned}$$

Теперь за управляемую подсистему, согласно [17], можно выбрать подсистему

$$\dot{w}^I = M_i^I w^I + N u_i^I, \tag{2.8}$$

$$M_i^I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ h_{21} & 0 & h'_{23} & h_{24} & h_{25} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ h_{41} & 0 & h'_{43} & h_{44} & h_{45} \\ 0 & 0 & 0 & h_{54} & h_{55} \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ s \end{pmatrix},$$

не содержащую критическую переменную z^I , где $w^I = (x_1, x_2, x_3^I, x_4^I, x_5)$ — фазовый вектор. Условие управляемости (см. [23, с. 475–515]) для системы (2.8)

$$\text{rank} \left(N \ M_i^I \cdot N \ (M_i^I)^2 \cdot N \ (M_i^I)^3 \cdot N \ (M_i^I)^4 \cdot N \right) = 5$$

выполнено. По методу Н. Н. Красовского (см. [23, с. 475–515]) коэффициенты стабилизирующего управления $u_i^I = K_i^I w^I$ находятся посредством решения линейно-квадратичной задачи стабилизации, причем подынтегральная функция критерия качества выбирается в виде

$$\omega^I = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3^I)^2 + (x_4^I)^2 + (x_5)^2 + (u_i^I)^2. \tag{2.9}$$

Замечание 7. Первое приближение уравнений (2.6) зависит от квадратичных членов разложения уравнения геометрической связи (или линейных членов разложения кинематической связи), которые могут оказывать влияние на устойчивость положения равновесия. Условием допустимости перехода к линеаризованным связям является обращение в нуль в рассматриваемом положении равновесия указанных членов. Для системы Ball and Beam, частные производные $\frac{\partial B^I}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial B^I}{\partial \theta}$, $\frac{\partial B^{II}}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial B^{II}}{\partial \theta}$ имеют значения, представленные в таблице.

Зависимая координата α	Зависимая координата θ
$B^I(0,0) = \frac{d}{L},$ $\left. \frac{\partial B^I}{\partial \alpha} \right _{(0,0)} = \left. \frac{\partial B^I}{\partial \theta} \right _{(0,0)} = 0$	$B^{II}(0,0) = \frac{L}{d},$ $\left. \frac{\partial B^{II}}{\partial \alpha} \right _{(0,0)} = \left. \frac{\partial B^{II}}{\partial \theta} \right _{(0,0)} = 0$
$B^I(0,\theta_1) = \frac{d}{L} \cdot \frac{l^2 + d^2}{d^2 - l^2},$ $\left. \frac{\partial B^I}{\partial \alpha} \right _{(0,\theta_1)} = \frac{2d^2 l}{L} \cdot \frac{(2dL - d^2 - l^2)}{(l^2 - d^2)^2},$ $\left. \frac{\partial B^I}{\partial \theta} \right _{(0,\theta_1)} = 0$	$B^{II}(\alpha_1,\theta_1) = \frac{L}{d} \cdot \frac{d^2 - l^2}{l^2 + d^2},$ $\left. \frac{\partial B^{II}}{\partial \alpha} \right _{(0,\theta_1)} = -2Ll \cdot \frac{(2dl - d^2 - l^2)}{(l^2 + d^2)^2},$ $\left. \frac{\partial B^{II}}{\partial \theta} \right _{(0,\theta_1)} = 0$

Следовательно, линеаризация уравнений геометрических связей допустима только при исследовании нулевого положения равновесия, а при исследовании устойчивости системы в ненулевом положении необходим учет квадратичных членов.

Результаты численных расчетов приведены ниже.

Случай II. Зависимая координата θ

В этом случае все выкладки проводятся аналогично, поэтому приведем только основные формулы и результаты.

Уравнения Шульгина запишутся в виде

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L^{II*}}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L^{II*}}{\partial r} = 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L^{II*}}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial L^{II*}}{\partial \alpha} = B^{II}(\alpha, \theta) \left(\frac{\partial L^{II*}}{\partial \theta} + Q_\theta^* \right). \end{cases}$$

В полной математической модели учитываются уравнение связей (2.4) и уравнение (2.2), описывающее динамику электропривода.

Значение параметров в положении равновесия (r_0 , $\alpha = 0$, $\theta = \theta_i$):

$$i_a^0 = \frac{mg\sqrt{r_0^2 - R^2}}{k_2 B^{II}(0, \theta_i)}, \quad e_\nu^0 = \frac{mgR_a\sqrt{r_0^2 - R^2}}{k_1 k_2 B^{II}(0, \theta_i)}.$$

Введем возмущения:

$$r = r_0 + x_1, \quad \dot{r} = x_2, \quad \alpha = x_3^{II}, \quad \dot{\alpha} = x_4^{II}, \quad i_a = i_a^0 + x_5, \quad \theta = \theta_i + x_6^{II}, \quad e_\nu = e_\nu^0 + u_i^{II}.$$

Вид первого приближения системы в нормальной форме аналогичен (2.6):

$$\dot{x}^{II} = H_i^{II} x^{II} + S u_i^{II} + X^{II(2)}.$$

Обратим внимание, что здесь, в отличие от (2.6), часть компонент фазового вектора $x^{II} = (x_1, x_2, x_3^{II}, x_4^{II}, x_5, x_6^{II})'$ соответствует другим координатам. При этом коэффициенты матрицы H_i^{II} следующие:

$$\begin{aligned}
 h_{21} &= \frac{-mgR}{\left(m(r_0^2 - R^2) + J_0 B^{II^2}\right)}, & h_{24} &= \frac{-b_0 R B^{II^2} \sqrt{r_0^2 - R^2}}{r_0 \left(m(r_0^2 - R^2) + J_0 B^{II^2}\right)}, \\
 h_{23} &= -mg \sqrt{r_0^2 - R^2} \frac{m(r_0^2 - R^2) + J_0 B^{II^2} - R \sqrt{r_0^2 - R^2} \left(m + \frac{J}{R^2}\right) \frac{\partial B^{II}}{\partial \alpha} \frac{1}{B^{II}}}{r_0 \left(m + \frac{J}{R^2}\right) \left(m(r_0^2 - R^2) + J_0 B^{II^2}\right)}, \\
 h_{25} &= \frac{k_2 R B^{II} \sqrt{r_0^2 - R^2}}{r_0 \left(m(r_0^2 - R^2) + J_0 B^{II^2}\right)}; & h_{26} &= \frac{mgR(r_0^2 - R^2)}{r_0 \left(m(r_0^2 - R^2) + J_0 B^{II^2}\right)} \frac{1}{B^{II}} \frac{\partial B^{II}}{\partial \theta}, \\
 h_{41} &= \frac{-m g r_0}{\sqrt{r_0^2 - R^2} \left(m(r_0^2 - R^2) + J_0 B^{II^2}\right)}, & h_{44} &= \frac{-b_0 B^{II}}{m(r_0^2 - R^2) + J_0 B^{II^2}}, & h_{12} &= h_{34} = 1, \\
 h_{43} &= \frac{mg \sqrt{r_0^2 - R^2}}{\left(m(r_0^2 - R^2) + J_0 B^{II^2}\right)} \frac{1}{B^{II}} \frac{\partial B^{II}}{\partial \alpha}, & h_{45} &= \frac{B^{II} k_2}{m(r_0^2 - R^2) + J_0 B^{II^2}}, \\
 h_{46} &= \frac{mg \sqrt{r_0^2 - R^2}}{\left(m(r_0^2 - R^2) + J_0 B^{II^2}\right)} \frac{\partial B^{II}}{\partial \theta}, & h_{54} &= -k_3 \frac{B^{II}}{L_a}, & h_{55} &= -\frac{R_a}{L_a}.
 \end{aligned}$$

После линейной замены, аналогичной (2.7) (для выделения критической переменной), изменятся коэффициенты при x_3^{II} :

$$\begin{aligned}
 h'_{23} &= h_{23} + h_{26} B^{II} = -mg \sqrt{r_0^2 - R^2} \times \\
 &\times \frac{m(r_0^2 - R^2) + J_0 B^{II^2} - R \left(m + \frac{J}{R^2}\right) \sqrt{r_0^2 - R^2} \left(\frac{1}{B^{II}} \frac{\partial B^{II}}{\partial \alpha} + \frac{\partial B^{II}}{\partial \theta}\right)}{r_0 \left(m + \frac{J}{R^2}\right) \left(m(r_0^2 - R^2) + J_0 B^{II^2}\right)}, \\
 h'_{43} &= h_{43} + h_{46} B^{II} = \frac{mg \sqrt{r_0^2 - R^2}}{\left(m(r_0^2 - R^2) + J_0 B^{II^2}\right)} \cdot \left(\frac{1}{B^{II}} \frac{\partial B^{II}}{\partial \alpha} + \frac{\partial B^{II}}{\partial \theta}\right).
 \end{aligned}$$

Управляемую подсистему можно записать в виде, аналогичном (2.8):

$$\dot{w}^{II} = M_i^{II} w^{II} + N u_i^{II}. \tag{2.10}$$

Отличными оказываются компоненты вектора $w^{II} = (x_1, x_2, x_3^{II}, x_4^{II}, x_5)$ и компоненты матрицы M_i^{II} . Для (2.10) также будет выполнено условие управляемости [23, с. 475–515]:

$$\text{rank} \left(N \quad M_i^{II} \cdot N \quad (M_i^{II})^2 \cdot N \quad (M_i^{II})^3 \cdot N \quad (M_i^{II})^4 \cdot N \right) = 5.$$

Коэффициенты стабилизирующего управления $u_i^{II} = K_i^{II} w^{II}$ определяются посредством решения линейно-квадратичной задачи стабилизации, причем подынтегральная функция в критерии качества аналогична (2.9):

$$w^{II} = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3^{II})^2 + (x_4^{II})^2 + (x_5)^2 + (u_i^{II})^2.$$

§ 3. Численное нахождение законов управления

Для численных расчетов возьмем следующие значения параметров:

$m = 0.064$ кг ... масса шарика;	$R = 0.0254$ м радиус шарика;
$L = 0.425$ м ... длина желоба;	$l = 0.34$ м длина плеча;
$d = 0.12$ м радиус колеса привода.	

Коэффициенты стабилизирующего управления вычисляются методом Н.Н. Красовского [23, с. 475–515] для каждого положения равновесия при двух выборах зависимой координаты. Для получения графиков переходных процессов решается система дифференциальных уравнений, описывающих движение системы, замкнутой найденным управлением.

Замечание 8. Начальные возмущения углов α и θ , вообще говоря, не являются свободными и должны удовлетворять геометрической связи (1.1). Чтобы в разных математических моделях построить графики одного и того же процесса стабилизации, необходимо учитывать связь начальных возмущений. Начальные возмущения остальных координат были выбраны произвольно и использовались для всех графиков.

Замечание 9. В силу того, что моделируется процесс стабилизации для одной и той же мехатронной системы при соответствующих начальных возмущениях, графики изменений координат положения шарика, его скорости и тока оказываются идентичными для одного и того же положения равновесия и не зависят от выбора зависимой координаты. В то же время управление, как функция времени, также не зависит от выбора избыточной координаты и изменяется только в зависимости от положения равновесия.

Случай нулевого положения равновесия

1. Зависимая координата — угол α .

Рассчитанное оптимальное управление:

$$u_0^I = -1435 \cdot x_1 - 720 \cdot x_2 + 708 \cdot x_3^I + 22 \cdot x_4^I + 84.5 \cdot x_5.$$

Графики нескольких переходных процессов представлены на рис. 4–8.

2. Зависимой координатой выбран угол θ .

Рассчитанное оптимальное управление:

$$u_0^{II} = -1434.4 \cdot x_1 - 720 \cdot x_2 + 2508.3 \cdot x_3^{II} + 79.2 \cdot x_4^{II} + 84.5 \cdot x_5.$$

Графики переходных процессов по 3-й и 4-й координатам (изменение угла α и его скорости) представлены на рис. 9–10. Графики переходных процессов по другим координатам идентичны для обеих математических моделей.

Случай ненулевого положения равновесия

1. Зависимой координатой выбран угол α .

Рассчитанное оптимальное управление:

$$u_1^I = 1993 \cdot x_1 + 817 \cdot x_2 + 898 \cdot x_3^I + 32 \cdot x_4^I + 99 \cdot x_5.$$

Графики переходных процессов представлены на рис. 11–15.

2. Зависимой координатой выбран угол θ .

Рассчитанное оптимальное управление:

$$u_1^{II} = 1986 \cdot x_1 + 857 \cdot x_2 - 2451.5 \cdot x_3^{II} - 88.4 \cdot x_4^{II} + 98 \cdot x_5.$$

Графики переходных процессов по 3-й и 4-й координатам (изменение угла α и его скорости) представлены на рис. 16–17.

§ 4. Заключение

(1) На основе уравнений движения в форме М. Ф. Шульгина построена полная модель системы Ball and Beam как системы с избыточными координатами с учетом нелинейного уравнения геометрической связи. Полученные результаты демонстрируют важность учета квадратичных членов в разложении уравнений геометрических связей при построении математической модели

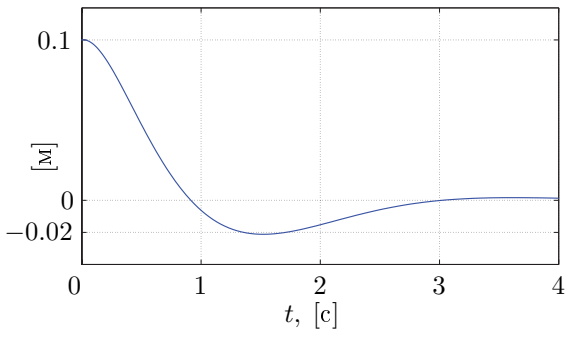


Рис. 4. График $x_1(t)$

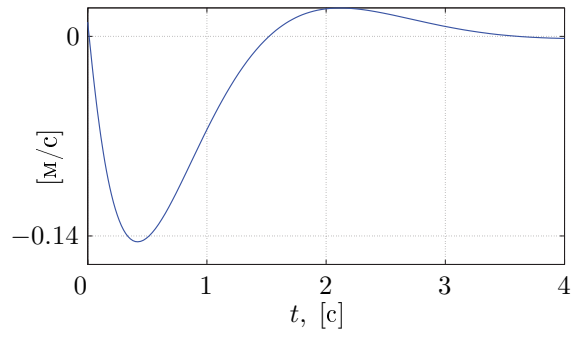


Рис. 5. График $x_2(t)$

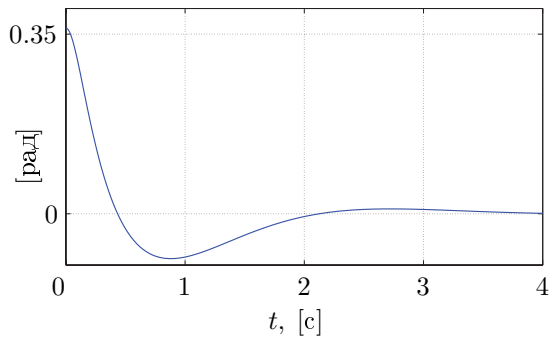


Рис. 6. График $x_3^I(t)$

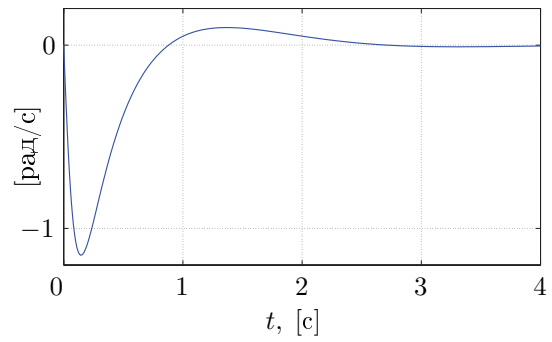


Рис. 7. График $x_4^I(t)$

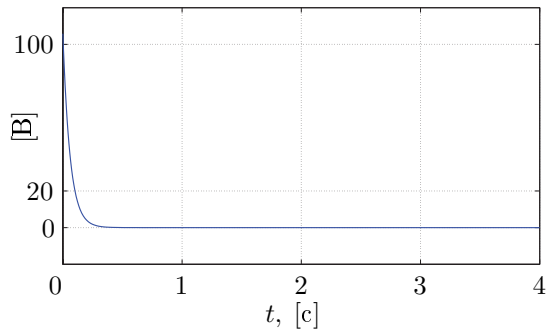


Рис. 8. График $u_0^I(t)$

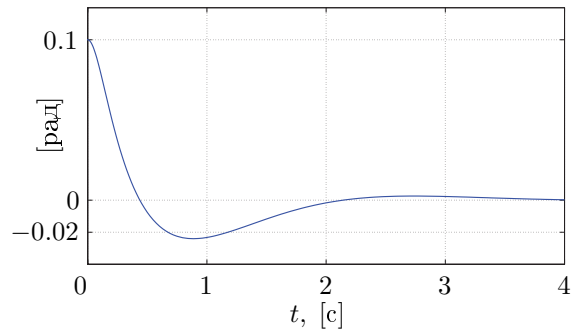


Рис. 9. График $x_3^{II}(t)$

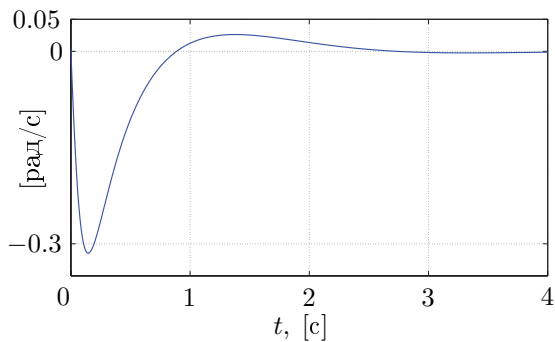


Рис. 10. График $x_4^{II}(t)$

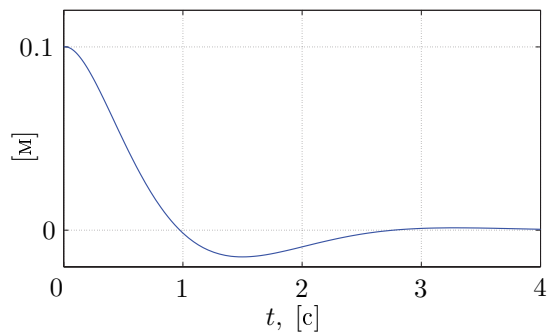
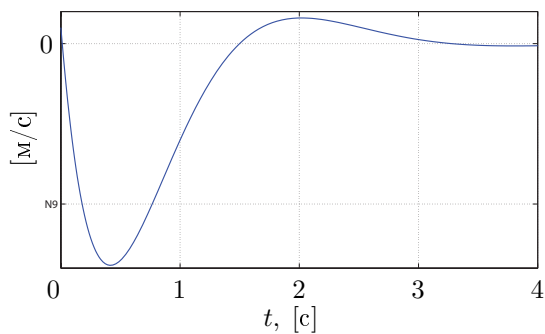
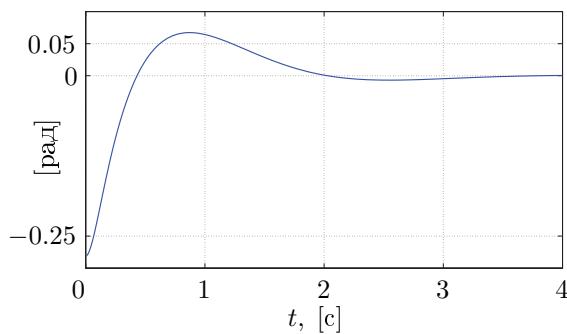
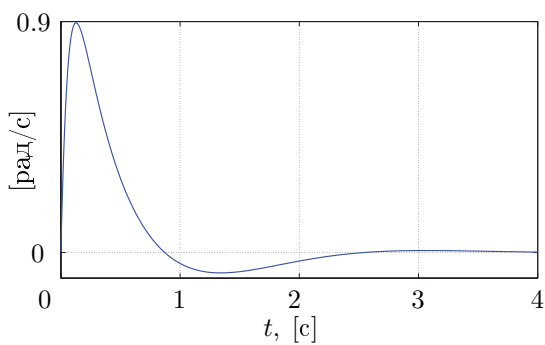
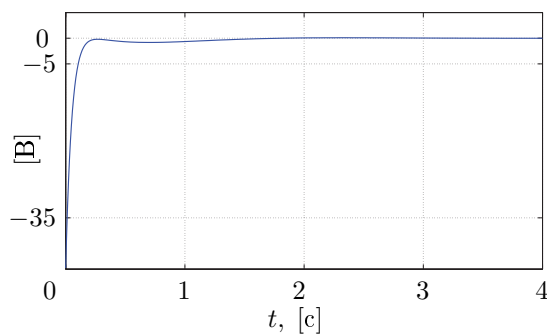
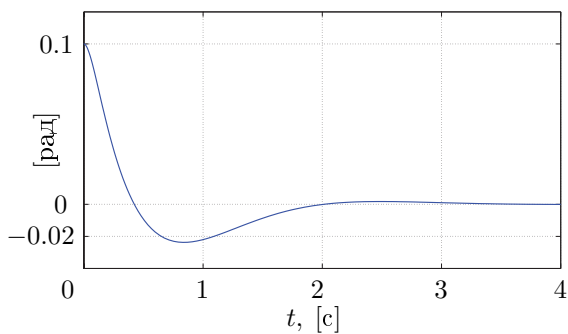
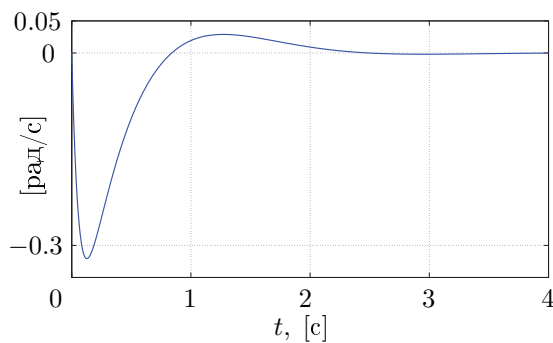


Рис. 11. График $x_1(t)$

Рис. 12. График $x_2(t)$ Рис. 13. График $x_3^I(t)$ Рис. 14. График $x_4^I(t)$ Рис. 15. График $u_1^I(t)$ Рис. 16. График $x_3^{II}(t)$ Рис. 17. График $x_4^{II}(t)$

систем с избыточными координатами. Указаны условия, при которых допустима линеаризация связей.

(2) Показано принципиальное отличие уравнений первого приближения возмущенного движения в окрестности известного и нового, ранее неисследованного, положений равновесия. Для обоих положений равновесия в двух случаях выбора избыточной координаты методом Н. Н. Красовского (см. [23, с. 475–515]) решена задача стабилизации.

(3) Составлена программа для получения законов управления и графиков переходных процессов в соответствующих замкнутых системах. В программе учитывается согласование начальных возмущений координат из-за наличия геометрической связи и разного выбора избыточной координаты.

(4) Показано, что управление, как функция времени, не зависит от избыточной переменной, хотя для разных зависимых координат управление является функцией разных фазовых переменных.

Некоторые результаты работы докладывались на конференциях (см. [16–19]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Aguilar-Ibañez C., Suarez-Castanon M.S., de Jesús Rubio J. Stabilization of the ball on the beam system by means of the inverse Lyapunov approach // *Math. Probl. Eng.* 2012. Vol. 2012. 13 p. DOI: [10.1155/2012/810597](https://doi.org/10.1155/2012/810597)
2. Koo M.-S., Choi H.-L., Lim J.-T. Adaptive nonlinear control of a ball and beam system using the centrifugal force term // *International Journal of Innovative Computing, Information and Control.* 2012. Vol. 8. No. 9. P. 5999–6009. <http://www.ijcic.org/ijcic-11-05068.pdf>
3. Keshmiri M., Jahromi A.F., Mohebbi A., Amoozgar M.H., Xie W.-F. Modeling and control of ball and beam system using model based and non-model based control approaches // *International Journal on Smart Sensing and Intelligent Systems.* 2012. Vol. 5. No. 1. P. 14–35. <http://s2is.org/Issues/v5/n1/papers/paper2.pdf>
4. Yu W., Ortiz F. Stability analysis of PD regulation for ball and beam system // *Proceedings of the 2005 IEEE Conference on Control Applications.* 2005. P. 517–522. DOI: [10.1109/CCA.2005.1507178](https://doi.org/10.1109/CCA.2005.1507178)
5. Yu W. Nonlinear PD regulation for ball and beam system // *International Journal of Electrical Engineering Education.* 2009. Vol. 46. Issue 1. P. 59–73. DOI: [10.7227/IJEEE.46.1.5](https://doi.org/10.7227/IJEEE.46.1.5)
6. Rahmat M.F., Wahid H., Wahab N.A. Application of intelligent controller in a ball and beam control system // *International Journal on Smart Sensing and Intelligent Systems.* 2010. Vol. 3. No. 1. P. 45–60. <http://s2is.org/Issues/v3/n1/papers/Paper4.pdf>
7. Andreev F., Auckly D., Gosavi S., Kapitanski L., Kelkar A., White W. Matching, linear systems, and the ball and beam // *Automatica.* 2002. Vol. 38. Issue 12. P. 2147–2152. DOI: [10.1016/S0005-1098\(02\)00145-0](https://doi.org/10.1016/S0005-1098(02)00145-0)
8. Aoustin Y., Formal'skii A.M. Beam-and-ball system under limited control: stabilization with large basin of attraction // *2009 American Control Conference.* 2009. P. 555–560. DOI: [10.1109/ACC.2009.5159859](https://doi.org/10.1109/ACC.2009.5159859)
9. Named B. Application of a LabVIEW for real-time control of ball and beam system // *International Journal of Engineering and Technology.* 2010. Vol. 2. No. 4. P. 401–407. DOI: [10.7763/IJET.2010.V2.155](https://doi.org/10.7763/IJET.2010.V2.155)
10. Красинская Э.М., Красинский А.Я., Обносов К.Б. О развитии научных методов школы М. Ф. Шульгина в применении к задачам устойчивости и стабилизации равновесий мехатронных систем с избыточными координатами // *Теоретическая механика: Сб. научно-методических статей.* МГУ. Москва, 2012. Вып. 28. С. 169–184.
11. Красинская Э.М., Красинский А.Я. Об устойчивости и стабилизации равновесия механических систем с избыточными координатами // *Наука и образование.* 2013. Т. 13. № 3. С. 347–376.
12. Красинский А.Я., Красинская Э.М. Моделирование динамики стенда GBV 1005 Ball and Beam как управляемой механической системы с избыточной координатой // *Наука и образование.* 2014. Т. 14. № 1. С. 282–297. DOI: [10.7463/0114.0646446](https://doi.org/10.7463/0114.0646446)
13. Шульгин М.Ф. О некоторых дифференциальных уравнениях аналитической динамики и их интегрировании. Ташкент: Издательство САГУ, 1958. 183 с.
14. Раус Э.Дж. Динамика системы твердых тел. Т. 2. М.: Наука, 1983. 544 с.
15. Красинский А.Я., Красинская Э.М. О допустимости линеаризации уравнений геометрических связей в задачах устойчивости и стабилизации равновесий // *Теоретическая механика: Сб. научно-методических статей.* МГУ. Москва, 2015. Вып. 29. С. 54–65.

16. Ильина А.Н. Об исследовании структуры линеаризованных уравнений возмущенного движения механической системы с геометрическими связями в избыточных координатах // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: Сб. докладов. Казань: КФУ, 2015. С. 1602–1604. <https://elibrary.ru/item.asp?id=24824015>
17. Красинская Э.М., Красинский А.Я. Об одном методе исследования устойчивости и стабилизации установившихся движений механических систем с избыточными координатами // Труды XII Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ-2014). М.: ИПУ РАН, 2014. С. 1766–1778. <https://elibrary.ru/item.asp?id=22224064>
18. Красинский А.Я., Красинская Э.М., Ильина А.Н. О моделировании динамики мехатронных систем с геометрическими связями как систем с избыточными координатами // Проблемы управления: Материалы VIII Всероссийской мультikonференции. ИПУ РАН. Геленджик, Дивноморское, 2015. Т. 2. С. 37–39.
19. Красинский А.Я., Ильина А.Н., Красинская Э.М. Об управлении и стабилизации мехатронных систем с геометрическими связями на примере стенда G 1005 Ball and Beam // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: Материалы XIII Международной конференции. ИПУ РАН. Москва, 2016. С. 211–214. <https://elibrary.ru/item.asp?id=28299614>
20. Зенкевич С.Л., Ющенко А.С. Основы управления манипуляционными роботами. М.: Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. 400 с.
21. Кунцевич В.М., Лычак М.М. Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова. М.: Наука, 1977. 400 с.
22. Ляпунов А.М. Собрание сочинений. Т. 2. М.–Л.: Издательство АН СССР, 1956. 472 с.
23. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
24. Красинский А.Я., Иофе В.В., Каюмова Д.Р., Халиков А.А. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2011615362. «Программное составление уравнений движения и исследование стабилизации механических движений». Зарегистрировано 23.05.2011.

Поступила в редакцию 16.08.2017

Красинский Александр Яковлевич, д. ф.-м. н., профессор, кафедра физико-математических дисциплин, Московский государственный университет пищевых производств, 125080, Россия, г. Москва, Волоколамское шоссе, 11.

E-mail: krasinsk@mail.ru

Ильина Анастасия Николаевна, старший преподаватель, кафедра теории вероятностей, Московский авиационный институт, 125993, Россия, г. Москва, Волоколамское шоссе, 4.

E-mail: happyday@list.ru

Красинская Эсфира Мустафовна, к. ф.-м. н., доцент, кафедра теоретической механики, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, 105005, Россия, г. Москва, 2-я Бауманская ул., 5.

E-mail: krasinsk@mail.ru

A. Ya. Krasinskiy, A. N. Il'ina, E. M. Krasinskaya

Modeling of the Ball and Beam system dynamics as a nonlinear mechatronic system with geometric constraint

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 3, pp. 414–430 (in Russian).

Keywords: geometric constraints, redundant coordinate, M. F. Shul'gin's equations of motion, Ball and Beam, stability, stabilization, equilibrium.

MSC2010: 70Q05, 70E50, 70H14

DOI: [10.20537/vm170310](https://doi.org/10.20537/vm170310)

The Ball and Beam system with a nonlinear geometric constraint is considered. Two possible equilibrium positions of this system are found from the complete constraint equation. The structures of the equations

of disturbed motion are analyzed in a neighborhood of the equilibrium positions, using equations without Lagrange multipliers in the form of M. F. Shul'gin. The possibility of linearization of the constraint equation is discussed. The stabilization problem is solved for every equilibrium position and two possible variants of the redundant coordinate. Stabilizing control (voltage at the armature of the drive motor) is calculated via solving linear-quadratic problems by N. N. Krasovskiy's method for corresponding control subsystems. The coincidence of controls as time functions for the same equilibrium is shown for different choices of the redundant coordinate, and the stabilizing controls are linear functions of different phase variables. The graphs of transient processes in systems closed by the obtained controls are given. The asymptotic stability of both equilibrium positions in a complete nonlinear closed system follows from the previously proved theorem on asymptotic stability in the presence of zero roots of the characteristic equation corresponding to redundant coordinates.

REFERENCES

1. Aguilar-Ibañez C., Suarez-Castanon M.S., de Jesús Rubio J. Stabilization of the ball on the beam system by means of the inverse Lyapunov approach, *Math. Probl. Eng.*, 2012, vol. 2012, 13 p. DOI: [10.1155/2012/810597](https://doi.org/10.1155/2012/810597)
2. Koo M.-S., Choi H.-L., Lim J.-T. Adaptive nonlinear control of a ball and beam system using the centrifugal force term, *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, 2012, vol. 8, no. 9, pp. 5999–6009. <http://www.ijicic.org/ijicic-11-05068.pdf>
3. Keshmiri M., Jahromi A.F., Mohebbi A., Amoozgar M.H., Xie W.-F. Modeling and control of ball and beam system using model based and non-model based control approaches, *International Journal on Smart Sensing and Intelligent Systems*, 2012, vol. 5, no. 1, pp. 14–35. <http://s2is.org/Issues/v5/n1/papers/paper2.pdf>
4. Yu W., Ortiz F. Stability analysis of PD regulation for ball and beam system, *Proceedings of 2005 IEEE Conference on Control Applications (CCA 2005)*, 2005, pp. 517–522. DOI: [10.1109/CCA.2005.1507178](https://doi.org/10.1109/CCA.2005.1507178)
5. Yu W. Nonlinear PD regulation for ball and beam system, *International Journal of Electrical Engineering Education*, 2009, vol. 46, issue 1, pp. 59–73. DOI: [10.7227/IJEEE.46.1.5](https://doi.org/10.7227/IJEEE.46.1.5)
6. Rahmat M.F., Wahid H., Wahab N.A. Application of intelligent controller in a ball and beam control system, *International Journal on Smart Sensing and Intelligent Systems*, 2010, vol. 3, no. 1, pp. 45–60. <http://s2is.org/Issues/v3/n1/papers/Paper4.pdf>
7. Andreev F., Auckly D., Gosavi S., Kapitanski L., Kelkar A., White W. Matching, linear systems, and the ball and beam, *Automatica*, 2002, vol. 38, issue 12, pp. 2147–2152. DOI: [10.1016/S0005-1098\(02\)00145-0](https://doi.org/10.1016/S0005-1098(02)00145-0)
8. Aoustin Y., Formal'skii A.M. Beam-and-ball system under limited control: stabilization with large basin of attraction, *2009 American Control Conference*, 2009, pp. 555–560. DOI: [10.1109/ACC.2009.5159859](https://doi.org/10.1109/ACC.2009.5159859)
9. Hamed B. Application of a LabVIEW for real-time control of ball and beam system, *International Journal of Engineering and Technology*, 2010, vol. 2, no. 4, pp. 401–407. DOI: [10.7763/IJET.2010.V2.155](https://doi.org/10.7763/IJET.2010.V2.155)
10. Krasinskaya E.M., Krasinskii A.Ya., Obnosov K.B. On the development of M. F. Shul'gin's school scientific methods in application to problems of stability and stabilization of mechatronic systems with redundant coordinates equilibria, *Teoreticheskaya mekhanika: Sbornik nauchno-metodicheskikh statei* (Theoretical mechanics: scientific and methodical transactions), Moscow State University, Moscow, 2012, no. 28, pp. 169–184 (in Russian).
11. Krasinskaya E.M., Krasinskii A.Ya. Stability and stabilization of equilibrium state of mechanical systems with redundant coordinates, *Science and Education of the Bauman MSTU*, 2013, vol. 13, no. 3, pp. 347–376 (in Russian).
12. Krasinskii A.Ya., Krasinskaya E.M. Modeling of the dynamics of GBB 1005 Ball and Beam educational control system as a controlled mechanical system with a redundant coordinate, *Science and Education of the Bauman MSTU*, 2014, vol. 14, no. 1, pp. 282–297 (in Russian). DOI: [10.7463/0114.0646446](https://doi.org/10.7463/0114.0646446)
13. Shul'gin M.F. *O nekotorykh differentsial'nykh uravneniyakh analiticheskoi dinamiki i ikh integririrovani* (On some differential equations of analytical dynamics and their integration), Tashkent: Middle Asian State University, 1958, 183 p.
14. Routh E.J. *Dynamics of a system of rigid bodies. Vol. 2*, London: Dover Publications, 1955. Translated under the title *Dinamika sistemy tverdykh tel. Tom 2*, Moscow: Nauka, 1983, 544 p.
15. Krasinskii A.Ya., Krasinskaya E.M. On the admissibility of geometric constraint equations linearization in the problems of stability and stabilization of equilibria, *Teoreticheskaya mekhanika: Sbornik nauchno-metodicheskikh statei* (Theoretical mechanics: scientific and methodical transactions), Moscow State University, Moscow, 2015, no. 29, pp. 54–65 (in Russian).
16. Il'ina A.N. On the research of disturbed motion linearized dynamic equations structure for systems with geometric constraints and redundant coordinates, *Proceedings of XI All-Russian Conference on*

- Fundamental Problems of Theoretical and Applied Mechanics*, Kazan Federal University, Kazan, 2015, pp. 1602–1604 (in Russian). <https://elibrary.ru/item.asp?id=24824015>
17. Krasinskaya E.M., Krasinskiy A.Ya. About the research technique of stability and stabilization of mechanical systems with redundant coordinates steady motions, *XII Vserossiiskoe soveshchanie po problemam upravleniya (VSPU-2014): Trudy* (Proc. XII All-Russia Conf. on Control Problems), Moscow: Institute of Control Problems of the Russian Academy of Sciences, 2014, pp. 1766–1778 (in Russian). <https://elibrary.ru/item.asp?id=22224064>
 18. Krasinskiy A.Ya., Krasinskaya E.M., Ilyina A.N. On modeling the dynamics of mechatronic systems with geometric constraints as systems with redundant coordinates, *Control Problems: Proceedings of the 8-th All-Russian Multiconference*, Institute of Control Problems of the Russian Academy of Sciences, Gelendzhik, Divnomorskoe, 2015, vol. 2, pp. 37–39 (in Russian).
 19. Krasinskii A.Ya., Il'ina A.N., Krasinskaya E.M. On the control and stabilization of mechatronic systems with geometric constraints by the example of the G 1005 Ball and Beam system, *Stability and Oscillation of Nonlinear Control Systems: Proceedings of Int. Conf.*, Institute of Control Problems of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 2016, pp. 211–214 (in Russian). <https://elibrary.ru/item.asp?id=28299614>
 20. Zenkevich S.L., Yushchenko A.S. *Osnovy upravleniya manipulyatsionnymi robotami* (Basics of manipulating robots control), Moscow: Bauman Moscow State Technical University, 2004, 400 p.
 21. Kuntsevich V.M., Lychak M.M. *Sintez sistem avtomaticheskogo upravleniya s pomoshch'yu funktsii Lyapunova* (Synthesis of automatic control systems by Lyapunov functions), Moscow: Nauka, 1977, 400 p.
 22. Lyapunov A.M. *Sobranie sochinenii. Tom 2* (Collected works. Vol. 2), Moscow: USSR Academy of Sciences, 1956, 472 p.
 23. Malkin I.G. *Teoriya ustoychivosti dvizheniya* (Theory of stability of motion), Moscow: Nauka, 1966, 530 p.
 24. Krasinskii A.Ya., Iofe V.V., Kayumova D.R., Khalikov A.A. *Programmnoe sostavlenie uravnenii dvizheniya i issledovanie stabilizatsii mekhanicheskikh dvizhenii* (Software compilation of equations of motion and the study of the mechanical motions stabilization), Software Patent RF no. 2011615362, 2011.

Received 16.08.2017

Krasinskii Alexandr Yakovlevich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Moscow State University of Food Production, Volokolamskoe shosse, 11, Moscow, 125080, Russia.

E-mail: krasinsk@mail.ru

Il'ina Anastasiya Nikolaevna, Senior Lecturer, Department of Probability Theory, Moscow Aviation Institute, Volokolamskoe shosse, 4, Moscow, 125993, Russia.

E-mail: happyday@list.ru

Krasinskaya Esphira Mustaphovna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Theoretical Mechanics, Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul., 5, Moscow, 105005, Russia.

E-mail: krasinsk@mail.ru