

УДК 517.95

© А. С. Караваев, С. П. Копысов

## ПОШАГОВЫЙ КОНТАКТНЫЙ АЛГОРИТМ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ДЕКОМПОЗИЦИИ ШВАРЦА ДЛЯ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ<sup>1</sup>

Рассматривается построение и исследование неявных численных схем интегрирования задач динамического контактного взаимодействия двух контактирующих трехмерных тел без трения в рамках альтернирующего метода Шварца. Приводятся результаты тестирования контактного алгоритма декомпозиции Шварца с использованием схемы НТТ- $\alpha$  в комбинации с методом перераспределения массы на границе области контакта.

*Ключевые слова:* динамическая контактная задача, альтернирующий метод Шварца, перераспределение масс, неявная схема.

DOI: [10.20537/vm170309](https://doi.org/10.20537/vm170309)

### Введение

В современной вычислительной механике сплошной среды фактически сложился отдельный раздел, связанный с контактными задачами. Наименее исследованными являются вопросы динамического контактного взаимодействия деформируемых тел.

Один из наиболее сложных динамических эффектов, который представляет особый интерес, — это ударное взаимодействие тел, исследование которого становится все более важным для использования современных легковесных сред и материалов в различных отраслях. Явление ударного воздействия представляет собой динамические нагрузки непродолжительной и высокой интенсивности. Несмотря на кратковременное действие, они могут носить потенциально катастрофический характер и даже в случаях низкой скорости удара часто приводят к незначительным внутренним повреждениям, что может служить предпосылкой серьезных последствий.

Особым классом контактных задач являются задачи о взаимодействии сплошных сред, ограниченных выпуклыми поверхностями с зависящей от времени области контакта. Математические проблемы, связанные с динамическими контактными задачами и подвижными границами, приводят к необходимости разработки специфических подходов, позволяющих рассматривать процессы внутри и вне зоны контактного взаимодействия, диссипации энергии, рассеивание ударных волн, изменение с течением времени силы удара при динамическом контакте между телами.

В динамике контактного взаимодействия обычно рассматривается пространственно-временная дискретизация, включающая в себя конечно-элементную аппроксимацию в пространстве и пошаговую схему интегрирования по времени. В рассматриваемых случаях при аппроксимации задач динамического контактного взаимодействия возникает необходимость учета контактных сил. Эффективный совместный выбор всех этих схем затруднен.

Для решения контактных задач применяются различные численные подходы [1, 2]: метод множителей Лагранжа, методы штрафов и регуляризации, квадратичного программирования, модификаций методов Ньютона, псевдосреды и некоторые другие. Во многих случаях граница или считается известной, или искусственно определяется в рамках одной рассматриваемой области.

<sup>1</sup>Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 17-01-00402).

В основе другого подхода лежит естественное разделение контактирующих областей, в которых необходимо решить уравнения теории упругости для каждого тела. Затем строится итерационный процесс последовательности решений локальных задач упругости. Каждая из этих локальных задач определяется в подобласти с соответствующими граничными условиями. Одним из потенциальных преимуществ такого метода декомпозиции области (МДО), или более логично говорить о композиции для контактных задач, является то, что для решений локальных задач требуется гораздо меньшие вычислительные затраты, чем для исходной задачи, и потенциально возможно также применение параллельных вычислений при одновременном построении решений в каждой подобласти. Кроме того, для решения каждой из локальных задач могут использоваться различные аппроксимации или методы решений. Сходимость итерационных процессов такого получения решения теоретически во многих случаях обоснована для статических задач и позволяет получать результаты с приемлемой точностью.

Варианты метода декомпозиции области Шварца для статических контактных задач по мере их появления определим следующим образом: альтернирующего метода Шварца с чередующимися условиями Дирихле и Неймана на каждой подобласти представлены в серии работ [3, 4]; МДО с итерационным процессом при условиях Дирихле на контактной границе одной области и условиями Неймана на другой (B. Wohlmuth, C. Eck [5]); МДО с условиями на контактной границе Неймана-Неймана в каждой подобласти (Bayda G., Sassi T. [6]); МДО со смешанными условиями на контактных границах подобластей (Sassi T., Ippa M. [7]).

Применение классических схем пошагового интегрирования во времени в случае контактных задач осложняется тем, что точное выполнение условий на контактной границе при неявной схеме Ньюмарка при интегрировании по времени приводит к нефизичным колебаниям при существенном отклонении полной энергии в системе. Для явных схем с использованием, например, метода штрафа для выполнения условий на контактных поверхностях значительно ужесточаются требования на шаг интегрирования.

Во многом подобное поведение связано с тем, что при стандартной аппроксимации матрицы масс, в том числе и для узлов расчетной сетки на контактирующих поверхностях, узлам приписывается некоторая собственная масса, а они вносят вклад в полную энергию системы. В момент времени, соответствующий контактному взаимодействию, скорость узлов на поверхности контакта и их кинетическая энергия обращаются в ноль. Перераспределение вкладов в полную энергию системы приводит к значительным нефизичным численным колебаниям. Консервативные свойства схем сохраняются только для задачи линейной упругости с постоянной поверхностью контакта. Появление новых точек контакта уменьшает энергию аппроксимированной системы, а выход точки из контакта увеличивает ее.

Разрабатываемые методы решения динамических контактных задач с изменяющейся границей характеризуются выбранной схемой численного интегрирования, которая в многом определяет наличие паразитных осцилляций, обусловленных тем, что нельзя достаточно точно воспроизвести вклад высших форм в решении динамической задачи; сохранение полной энергии системы контактирующих тел.

Целью данной работы является построение и исследование неявных численных схем интегрирования задачи динамического контактного взаимодействия при удовлетворении условий на контактной границе в рамках альтернирующего метода Шварца для двух контактирующих трехмерных тел без трения. В рассматриваемом далее контактном алгоритме декомпозиции Шварца использована схема НТТ- $\alpha$  в комбинации с методом перераспределения массы на границе области контакта.

## § 1. Контакт между деформируемыми телами

Рассмотрим два однородных и изотропных линейно-упругих контактирующих тела, занимающих в пространстве области  $\Omega^{(1)}, \Omega^{(2)}$ , ограниченные поверхностями  $\partial\Omega^{(i)}$ , соответствующими недеформированному состоянию тел.

Пусть  $x = (x_1, x_2, x_3)$  — декартовы координаты. Отыскивается векторное поле перемещений  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  на множестве  $\Omega^{(1)} \cup \Omega^{(2)}$ , т. е.  $\mathbf{u}^{(1)} = (u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, u_3^{(1)})$  на  $\Omega^{(1)}$  и  $\mathbf{u}^{(2)} = (u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, u_3^{(2)})$

на  $\Omega^{(2)}$ , а также соответствующее тензорное поле деформаций

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1.1)$$

Тензор напряжений определяется обобщенным законом Гука:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

где всегда предполагается суммирование по повторяющемуся индексу.

Тензор напряжений удовлетворяет уравнениям движения на временном интервале  $[0, T]$ :

$$\partial \sigma_{ij}(\mathbf{u}) / \partial x_i + F_i = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad (1.2)$$

где  $F_i$  — компоненты вектора объемных сил.

Допустим, что тело  $\Omega^{(1)}$  закреплено на части  $\Gamma_u$  границы так, что

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_u \in \partial\Omega^{(1)}.$$

На части границы задаются поверхностные силы

$$\sigma_{ij}^{(k)} n_j^{(k)} = P_i^{(k)} \quad \text{на} \quad \Gamma_\sigma \in \partial\Omega^{(k)},$$

где  $n_j^{(k)}$  — единичный вектор внешней нормали к  $\Omega^{(k)}$ .

Рассмотрим такие взаимодействия, когда в начальный момент времени  $t = 0$  тела находятся в недеформированном состоянии и, как правило, поверхности  $\partial\Omega^{(1)}$  и  $\partial\Omega^{(2)}$  соприкасаются в некоторой точке.

Для корректной постановки начальной задачи для  $k$ -го тела достаточно задать в начальный момент времени перемещение и скорость:

$$\mathbf{u}^{(k)}|_{t=0} = 0, \quad \dot{\mathbf{u}}^{(k)}|_{t=0} = \dot{\mathbf{u}}_0^{(k)}, \quad k = 1, 2. \quad (1.3)$$

К системе уравнений (1.1)–(1.3) для замыкания необходимо добавить условия на контакте тел, которые сводятся к заданию граничных условий, давления или результирующих контактных сил. Обозначим поверхности, ограничивающие тела  $\Omega^{(k)}$  в произвольный момент времени  $t \geq 0$ , как  $\Gamma = \partial\Omega^{(k)}$ . Контакт двух тел происходит по части этих поверхностей — области контакта  $\Gamma_C$ .

В задачах динамического контакта тел, ограниченных выпуклыми поверхностями, необходимо определить в каждый момент времени области контакта  $\Gamma_C$ . Во многих случаях зона контакта может изменяться в процессе деформации.

Будем рассматривать задачи, когда контактирующие тела воспринимают только сжимающие напряжения, и использовать обычные обозначения нормальной и тангенциальной составляющей компонент вектора перемещений и напряжений на контактной границе  $\Gamma_C$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_n^{(k)} &= u_i^{(k)} n_i^{(k)}, \\ \sigma_n^{(k)} &= \sigma_{ij} n_i^{(k)} n_j^{(k)}, \quad \sigma_t^{(k)} = \sigma_{ij} n_j^{(k)} - \sigma_n^{(k)} n_i^{(k)}. \end{aligned}$$

Условие одностороннего контакта на  $\Gamma_C$  задается так:

$$u_n^{(1)} + u_n^{(2)} \leq 0, \quad (1.4)$$

$$\sigma_n^{(1)} = -\sigma_n^{(2)} \leq 0, \quad (u_n^{(1)} + u_n^{(2)})\sigma^{(1)} = 0, \quad \sigma_t^{(1)} = \sigma_t^{(2)} = 0. \quad (1.5)$$

Приведенные условия контакта, независимо от выбора модели среды и уравнений движения, носят нелинейный характер, который определяется неизвестной границей зоны контакта  $\Gamma_C$  и наличием неравенств для неизвестных полей напряжений.

Для случая малых приращений перемещений соответствие между точками на  $\Gamma_C^{(k)}$  зададим функцией перекрытия между телами в произвольный момент времени как

$${}^t\delta(x) = \delta_0(x) + \mathbf{u}_n^{(k)}. \quad (1.6)$$

Отметим, что  ${}^t\delta(x)$  отрицательна, когда нет контакта, и положительна в случае перекрытия тел. Если использовать эти представления, то условия (1.4), (1.5) запишутся следующим образом:

$${}^t\delta(x) \leq 0, \quad \sigma_n^{(k)} \leq 0, \quad {}^t\delta(x)\sigma_n^{(k)} = 0, \quad \sigma_\tau^{(k)} = 0. \quad (1.7)$$

Первое условие — условие, обеспечивающее непроникания, второе — сжимающие контактные напряжения, последнее условие — условие совместности, когда нормальные напряжения ненулевые, а перекрытия нет и контакт существует. Во многих случаях перекрытие между поверхностью и контактной границей рассматривается как часть известных данных, определяемая геометрией тел.

Линеаризованное условие выполняется точно, если нормаль  $\mathbf{n}^{(k)}$  ортогональна контактной границе  $\Gamma_C$  в деформированном состоянии, а вектор перемещений направлен параллельно нормали. В дальнейшем эти положения используются при построении итерационного уточнения условий непроникания. Кинематику и линеаризацию для более общих случаев контактных условий можно найти в [8, 9].

Уравнения (1.1)–(1.3) с условиями (1.6), (1.7) описывают динамический контакт двух упругих тел без трения.

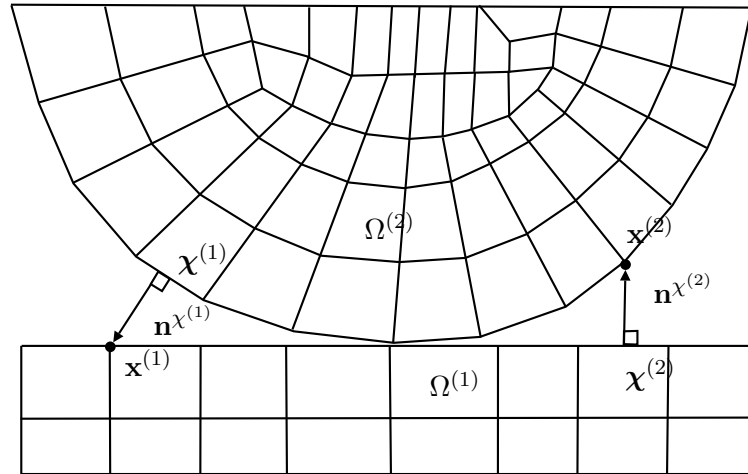
## § 2. Алгоритм отдельного рассмотрения контактирующих тел и аппроксимация на несогласованных сетках

Для построения решения трехмерной задачи с граничными условиями (1.6), (1.7) построим вариант альтернирующего метода Шварца, на каждой итерации которого приближение строится как результат независимого решения уравнений (1.2) для каждого тела  $\Omega^{(k)}$  с изменяющимися граничными условиями (см. [3]).

Определение вектора перемещений в соответствии с итерационным алгоритмом на каждой итерации выполняется за два шага. На первом из них на контактных поверхностях тел задается начальное приближение для компонент вектора перемещений (приближение выбирают из диапазона ожидаемых значений для зоны контактного взаимодействия). После решения данной задачи кинематическое условие (1.4) на контактной поверхности будет выполнено, но вычисленные контактные давления на противоположащих контактных поверхностях, принадлежащих взаимодействующим телам, оказываются неуравновешенными (нарушено силовое условие (1.5)). На втором шаге с помощью специальным образом выполненной коррекции добиваются равенства контактных напряжений, но полученные перемещения не удовлетворяют условию (1.4). Далее, на очередной итерации снова используются скорректированные кинематические условия (совмещением контактирующих поверхностей). Итерации выполняются до достижения сходимости, когда кинематические (1.6) и силовые (1.7) условия на контакте выполнены с заданной точностью.

Пусть  $\mathcal{T}^{(1)}, \mathcal{T}^{(2)}$  — несогласованные конечно-элементные сетки для областей  $\Omega^{(1)}, \Omega^{(2)}$  соответственно;  $\Lambda_{\Gamma_C}^{(1)}, \Lambda_{\Gamma_C}^{(2)}$  — множества узлов сеток, попавших в область контакта  $\Gamma_C$ ;  $N_{\Gamma_C}^{(1)}, N_{\Gamma_C}^{(2)}$  — число таких узлов. Строились неструктурированные сетки шестигранных ячеек с различными параметрами качества ячеек [10] и несколько вариантов интерполяции данных между несогласованными сетками (см. [11, 12]).

Сопряженной вершиной  $\chi^{(1)} \subset \Gamma_C^{(2)}$  для узла  $\mathbf{x}^{(1)} \subset \Gamma_C^{(1)}$ , лежащего на поверхности сетки  $\mathcal{T}^{(1)}$ , назовем вершину, являющуюся пересечением перпендикуляра, опущенного из узла  $\mathbf{x}^{(1)}$  на границу области  $\Gamma^{(2)}$ . Сопряженную вершину для узлов на поверхности сетки  $\mathcal{T}^{(2)}$  определим аналогично.



**Рис. 1.** Определение сопряженной точки  $\chi^{(1)} \subset \Gamma_C^{(2)}$  узла  $\mathbf{x}^{(1)} \subset \Gamma_C^{(1)}$  для тел на поверхностях областей контакта  $\Gamma_C^{(k)}$

Расстояние между сопряженной вершиной  $\chi^{(1)}$  и узлом  $\mathbf{x}^{(1)}$  совпадает по модулю со значением знакоопределенной функции расстояния для сетки  $\mathcal{T}^{(1)}$ , вычисленной в узле  $\mathbf{x}^{(1)}$ , то есть

$$SD_{\mathcal{T}^{(2)}}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}^{(1)} - \chi^{(2)}\|.$$

Узел  $\mathbf{x}^{(1)}$  находится внутри или на границе тела  $\Omega^{(2)}$  при  $SD_{\mathcal{T}^{(2)}}(\mathbf{x}) \geq 0$  (рис. 1). Процедура нахождения такой вершины приводится при описании алгоритма вычисления значений знакоопределенной функции расстояния [10].

Для тела  $\Omega^{(k)}$  на каждой силовой или кинематической итерации  $j = 0, 1, 2, \dots$  необходимо сформировать множество контактных узлов  $\Lambda_{\Gamma_c}^{(k)}$  ( $k = 1, 2$ ), для которых необходимо задавать вектор сосредоточенной узловой силы  $\bar{\mathbf{r}}_j^{(k)}$  или заданные перемещения  $\bar{\mathbf{u}}_j^{(k)}$ .

Для тела  $\Omega^{(1)}$  на итерации  $j = 0$  в множество  $\Lambda_{\Gamma_c}^{(1)}$  включаются все узлы, лежащие на поверхности сетки  $\mathcal{T}^{(1)}$ , которые находятся внутри тела  $\Omega^{(2)}$  после заданного смещения тела  $\Omega^{(1)}$ , то есть узел  $\mathbf{x}^{(1)} \in \Lambda_{\Gamma_c}^{(1)}$ , если  $SD_{\mathcal{T}^{(2)}}(\mathbf{x}^{(1)} + \bar{\mathbf{u}}_0^{(1)}) \geq 0$ , где  $\bar{\mathbf{u}}_0^{(1)}$  — заданное начальное перемещение на нулевой итерации для узла  $\mathbf{x}^{(1)}$ .

Пусть в процессе выполнения итераций список  $\mathcal{T}^{(1)}$  корректируется и для каждого узла  $\mathbf{x}^{(1)} \in \Lambda_{\Gamma_c}^{(1)}$  проверяется наличие сжимающего контактного напряжения, то есть условие  $\bar{\mathbf{r}}_j^{(1)} \cdot \mathbf{n}^{\chi^{(1)}} \geq 0$ , где  $\bar{\mathbf{r}}_j^{(1)}$  — вектор контактных напряжений  $\mathbf{x}^{(1)}$ , вычисление которого будет определено далее,  $\mathbf{n}^{\chi^{(1)}}$  — вектор нормали в сопряженной точке. Если  $\bar{\mathbf{r}}_j^{(1)} \cdot \mathbf{n}^{\chi^{(1)}} < 0$ , то узел  $\mathbf{x}^{(1)}$  исключается из рассмотрения на данной итерации.

В некоторых случаях сеточная аппроксимация затрудняет стабилизацию трехмерной зоны контакта при включении и исключении одного и того же узла в множествах  $\Lambda_{\Gamma_c}^{(k)}$  (см. [11]). Для этого вводилась дополнительная корректировка по перемещениям, заключающаяся в исключении из контактной области узлов, относительное перемещение которых с контактной поверхностью противоположного тела больше определенного значения заданной погрешности  $\epsilon$ . Такая операция дополнительно стабилизирует контактную область и позволяет сократить число контактных итераций. Узел  $\mathbf{x}^{(1)}$  исключается из множества, если  $(\mathbf{u}^{(1)} - \mathbf{u}^{\chi^{(1)}} - \delta^{(1)}) / (\mathbf{u}^{(1)} - \delta^{(1)}) > \epsilon$ . Кроме того, дополнительно рассматривалось исключение связи с недопустимыми усилиями, полученными на предыдущей итерации.

Аналогично для тела  $\Omega^{(2)}$  на каждой силовой или кинематической итерации  $j = 0, 1, 2, \dots$  вводится множество контактных узлов  $\Lambda_{\Gamma_c}^{(2)}$  и вычисляются соответствующие вектор сосредото-

точной узловой силы  $\bar{\mathbf{r}}_j^{(2)}$  и вектор перемещений  $\bar{\mathbf{u}}_j^{(2)}$ .

С использованием аппроксимации уравнений методом конечных элементов [13] и при обозначении через  $\mathbf{K}^{(k)}$ ,  $\mathbf{u}^{(k)}$ ,  $\mathbf{P}^{(k)}$ ,  $\mathbf{R}^{(k)}$  симметричной матрицы жесткости, вектора неизвестных перемещений, вектора заданных внешних нагрузок и вектора неизвестных контактных сил на контактной поверхности в  $k$ -ой подобласти соответственно для каждой подобласти  $\Omega^{(k)}$  строятся системы уравнений и степени свободы, связанные с внутренними и контактными узлами:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{II}^{(k)} & \mathbf{K}_{IC}^{(k)} \\ \mathbf{K}_{CI}^{(k)} & \mathbf{K}_{CC}^{(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_I^{(k)} \\ \mathbf{u}_C^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_I^{(k)} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{u}}_0^{(k)} \\ \bar{\mathbf{u}}_C^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\mathbf{R}}_C^{(k)} \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

где индексы  $I$ ,  $C$  относятся к внутренним и контактным узлам; вектор  $\bar{\mathbf{u}}^{(k)}$  определяется задаваемыми условиями Дирихле на границе подобласти для удовлетворения кинематическим условиям непроникания на границе контакта; вектор  $\bar{\mathbf{R}}_C^{(k)}$  узловых контактных сил обеспечивает сжимающие напряжения на контактной границе.

При построении итерационного алгоритма решения системы (2.1) используются невязки перемещений  $\bar{\mathbf{u}}_C^{(k)}$  и сил  $\bar{\mathbf{R}}_C^{(k)}$  на контактной поверхности, которые применяются поочередно на итерациях для каждого тела и обеспечивают выполнение кинематических и статических условий на границе тел.

На четных итерациях система уравнений принимает вид

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{II}^{(k)} & \mathbf{K}_{IC}^{(k)} \\ \mathbf{K}_{CI}^{(k)} & \mathbf{K}_{CC}^{(k)} \end{pmatrix}_{2n} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_I^{(k)} \\ \mathbf{u}_C^{(k)} \end{pmatrix}_{2n} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_I^{(k)} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{u}}_0^{(k)} \\ \bar{\mathbf{u}}_C^{(k)} \end{pmatrix}_{2n},$$

где

$$(\bar{\mathbf{u}}_C^{(k)})_{2n} = \begin{cases} u(x^{(k)})_0, & n = 0 \\ u(x^{(k)})_{2n-1} + \theta_{2n-1} [u(\chi^{(k)})_{2n-1} - u(x^{(k)})_{2n-1} - \delta^{(k)}], & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Здесь  $u(x^{(k)})_{2n-1}$ ,  $u(\chi^{(k)})_{2n-1}$  — соответственно проекции векторов перемещений узла  $\mathbf{x}^{(k)}$ ,  $\chi^{(k)}$  на нормаль  $\mathbf{n}^{\chi^{(k)}}$ ;  $\theta_{2n-1}$  — итерационный параметр;  $\delta^{(k)} = \|\mathbf{x}^{(k)} - \chi^{(k)}\|$  — зазор между поверхностями вдоль  $\mathbf{n}^{\chi^{(k)}}$ , что позволяет найти в  $\Omega^{(k)}$  решение и вычислить силы, действующие на контактной границе.

Вычислим для узла  $\mathbf{x}^{(k)}$  контактную нагрузку  $\mathbf{r}(\mathbf{x}^{(k)})_{2n} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_{2n}^{(k)})\mathbf{n}^{\chi^{(k)}}$  и аналогично  $\mathbf{r}(\chi^{(k)})_{2n}$  в сходственной точке  $\chi^{(k)}$ .

Вектор невязки нагрузки определим как  $\bar{\mathbf{r}}(x^{(k)})_{2n+1}$  для  $\mathbf{x}^{(k)}$ :

$$\bar{\mathbf{r}}(x^{(k)})_{2n+1} = \mathbf{r}(x^{(k)})_{2n} - \theta_2 [\mathbf{r}(\chi^{(k)})_{2n} + \mathbf{r}(x^{(k)})_{2n}].$$

Тогда вектор контактных сил на границе  $\Gamma_C^{(k)}$  вычислим как  $\mathbf{R}_{2n+1}^{(k)} = \int_{\Gamma_C^{(k)}} \bar{\mathbf{r}}_{2n+1}^{(k)} d\Gamma$  и, используя стандартную процедуру получения узловых сил, эквивалентных распределенной нагрузке [13], сформируем компоненту вектора правой части  $\bar{\mathbf{R}}_{2n+1}^{(k)}$  для системы уравнений на нечетных итерациях:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{II}^{(k)} & \mathbf{K}_{IC}^{(k)} \\ \mathbf{K}_{CI}^{(k)} & \mathbf{K}_{CC}^{(k)} \end{pmatrix}_{2n+1} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_I^{(k)} \\ \mathbf{u}_C^{(k)} \end{pmatrix}_{2n+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_I^{(k)} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\mathbf{R}}_C^{(k)} \end{pmatrix}_{2n+1}. \quad (2.2)$$

Далее необходимо проверить выполнение статических и кинематических контактных условий. Вопросы сходимости подобного типа алгоритмов рассмотрены в работе [3].

### § 3. Перераспределение масс и неявная схема по времени альтернирующего алгоритма Шварца

Численная реализация контактных условий (1.7) осуществляется в пошаговом анализе процесса нагружения и изменения состояния контакта в рассматриваемой модели динамического контактного взаимодействия.

Метод пошагового анализа является наиболее эффективным для рассматриваемого класса контактных задач. Кроме того, появляется возможность корректировки дискретной контактной границы в зависимости от поведения взаимодействующих тел, текущего состояния контактной зоны, уровня напряженно-деформированного состояния и т. д.

Моменты перехода от одного шага к другому представляет собой условия включения или исключения контактных узлов, существенно определяющие процесс устойчивого решения задачи.

Одним из решений по удалению нефизичных осцилляций в области контакта является использование диссипативных схем. Известно достаточно много схем второго порядка с численной диссипацией, которые имеют высокую частотную диссипацию с небольшим низкочастотным затуханием, таких как ННТ- $\alpha$ , WBZ- $\alpha$ , обобщенная- $\alpha$  схема, схема  $\alpha$ -функций,  $\gamma$ -схема и др. В некоторых работах для решения динамических контактных задач используется диссипативная схема Ньюмарка с параметрами  $\delta = \alpha = 0.5$  или  $\delta = 0.7, \alpha = 0.36$ , обоснованные численными экспериментами.

Как показывает практика, более эффективным является использование обобщенных диссипативных методов на основе схемы Ньюмарка, таких как схема НТТ- $\alpha$  [14], которая является безусловно устойчивой, второго порядка точности и диссипативной для высоких частот. Величина диссипации контролируется параметром  $\alpha$ , варьируемым в пределах от  $-1/3$  до 0.

Вторым способом повысить точность и устойчивость решения является использование группы алгоритмов, тем или иным способом изменяющих контактные условия на каждом временном шаге, включающих методы штрафа, коррекции контактных перемещений и давлений, а также контактной скорости. В указанных алгоритмах модифицируются базовые схемы интегрирования с целью диссипации контактных сил и предотвращению возникновения осциллирующих областей. Так, в работе [15] рассматриваются схема Ньюмарка с дополнительным шагом стабилизации контактной области, метод диссипации контактных сил на основе методов трапеций и Ньюмарка, усовершенствование этих схем на основе метода обновления контактных скоростей, введенного в [16].

Несколько другой подход предотвращения ложных колебаний связан с перераспределением массы, приписываемой к узлам на границе контактной области, в результате чего инерциальные характеристики расчетных узлов сетки изменяются [17]. Данный способ значительно стабилизирует контактную область, кроме того, он может быть использован в комбинации с любыми вышеописанными схемами.

Обычно матрица масс выбирается диагональной и тем самым полагается, что масса расчетных ячеек, окружающих узел сетки, сосредоточена в самом узле. Для контактных задач одной из особенностей схемы (3.2) является то, что узлы на границе контакта также имеют свою собственную инерцию, что приводит к неустойчивости даже для консервативных схем. При входе в контакт расчетный узел теряет свою кинетическую энергию и останавливается. В схемах, обеспечивающих сохранение энергии, осциллирующее движение контактного узла происходит для обеспечения сохранения полной энергии системы.

В [17] перераспределение массы вводится с сохранением общей массы, центра тяжести и момента инерции тела. В общем случае для вычисления модифицированной матрицы масс формулируется задача минимизации, удовлетворяющая приведенным выше требованиям. Различные варианты перераспределения также могут быть найдены в работах [18].

Используя введенное ранее упорядочивание системы уравнений вида (2.1) и считая, что последние уравнения соответствуют нормальным компонентам вектора перемещений на границе

контакта, представим модифицированную матрицу масс  $\tilde{\mathbf{M}}$  как

$$\tilde{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{II} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В случае диагональной матрицы масс процесс перераспределения сводится к обнулению элементов матрицы для контактирующих узлов.

Тогда система уравнений с учетом введенного ранее разделения примет вид

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_{II} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} {}^{t+\Delta t} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_I \\ \ddot{\mathbf{u}}_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{II} & \mathbf{K}_{IC} \\ \mathbf{K}_{CI} & \mathbf{K}_{CC} \end{pmatrix} {}^{t+\Delta t} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_I \\ \mathbf{u}_C \end{pmatrix} = {}^{t+\Delta t} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_I \\ 0 \end{pmatrix} + {}^{t+\Delta t} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{R}_C \end{pmatrix}.$$

Метод перераспределения масс устраняет большие побочные колебания контактного давления, которые появляются со стандартной матрицей масс, обеспечивая при этом точное соблюдение условия контакта. Кроме того, этот метод не требует дополнительных шагов или дополнительных параметров и может быть легко реализован. Более того, метод не влияет на распространение ударных волн. При малых размерах шага и углов сетки перераспределение массы незначительно. С момента своего появления метод перераспределения массы развивается в нескольких направлениях [19]: варианты построения модифицированной матрицы масс, использование явно-неявных схем интегрирования во времени, контактные задачи с трением. Кроме того, с помощью схемы Ньюмарка или ее обобщений достигается полное сохранение энергии на больших временных интервалах.

Согласно методу НТТ- $\alpha$  (см. [14]) матричную форму уравнения равновесия системы динамически контактирующих тел без учета демпфирования можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{M} {}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{u}} + (1 + \alpha) \mathbf{K} {}^{t+\Delta t} \mathbf{u} - \alpha \mathbf{K} {}^t \mathbf{u} = (1 + \alpha) {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}({}^{t+\Delta t} \mathbf{u}) - \alpha {}^t \mathbf{R} + (1 + \alpha) {}^{t+\Delta t} \mathbf{P} - \alpha {}^t \mathbf{P}, \quad (3.1)$$

где  $t + \Delta t$  — текущий шаг по времени;  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$  — матрицы масс и жесткости соответственно;  $\mathbf{P}$  — вектор внешних нагрузок;  $\mathbf{R}$  — вектор контактных сил;  $\mathbf{u}$  — вектор узловых перемещений;  $\ddot{\mathbf{u}}$  — вектор ускорений;  $\alpha$  — диссипативный параметр, находящийся в диапазоне от  $-1/3$  до 0.

Для аппроксимации перемещений и скоростей используются следующие соотношения:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{u} = {}^t \mathbf{u} + \Delta t {}^t \dot{\mathbf{u}} + \frac{\Delta t^2}{2} \left( (1 - 2\beta) {}^t \ddot{\mathbf{u}} + 2\beta {}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{u}} \right), \quad {}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{u}} = {}^t \dot{\mathbf{u}} + \Delta t \left( (1 - \gamma) {}^t \ddot{\mathbf{u}} + \gamma {}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{u}} \right).$$

Здесь  $\gamma \geq 0.5$  и  $\beta \geq 0.25(\gamma + 0.5)^2$ . Причем наиболее часто используется следующая зависимость от параметра  $\alpha$ :  $\gamma = 0.5 - \alpha$  и  $\beta = 0.25(1 - \alpha)^2$ .

Выражая  ${}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{u}}$  через  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{u}$ , получим

$${}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{u}} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} {}^{t+\Delta t} \mathbf{u} - \frac{1}{\beta \Delta t^2} {}^t \mathbf{u} - \frac{1}{\beta \Delta t} {}^t \dot{\mathbf{u}} - \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) {}^t \ddot{\mathbf{u}}$$

и, подставив в выражение (3.1), получим

$$\hat{\mathbf{K}} {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}_{j+1} = (1 + \alpha) \mathbf{R}({}^{t+\Delta t} \mathbf{u}_j) + (1 + \alpha) {}^{t+\Delta t} \mathbf{P} + {}^t \mathbf{H}, \quad (3.2)$$

где

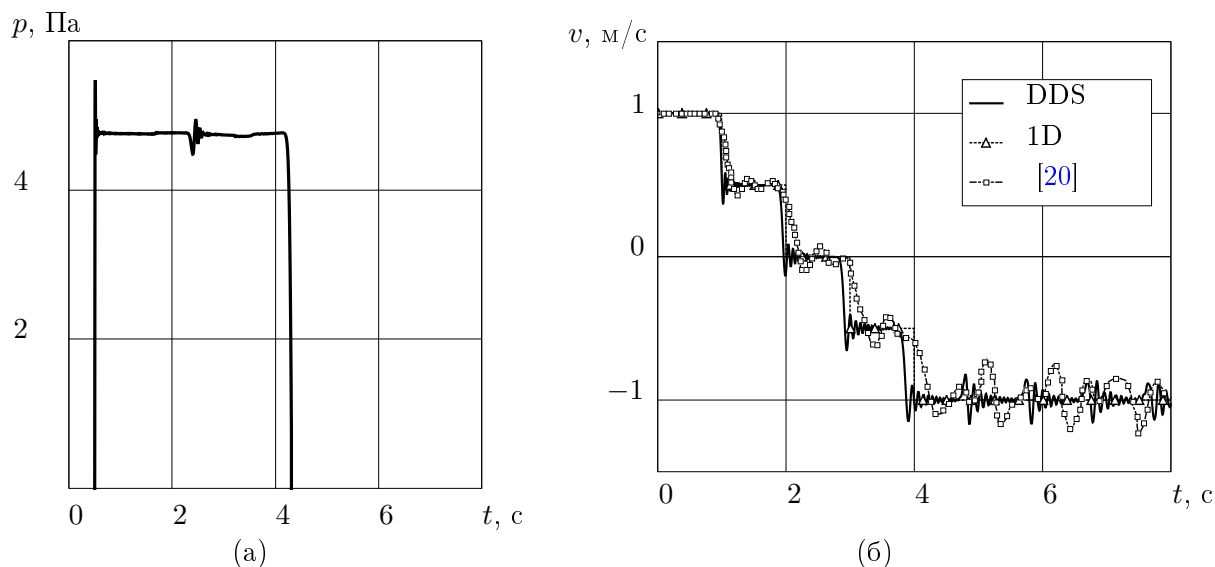
$$\hat{\mathbf{K}} = \left( \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + (1 + \alpha) \mathbf{K} \right)$$

и

$${}^t \mathbf{H} = -\alpha {}^t \mathbf{R} + \alpha \mathbf{K} {}^t \mathbf{u} + \mathbf{M} \left( \frac{1}{\beta \Delta t^2} {}^t \mathbf{u} + \frac{1}{\beta \Delta t} {}^t \dot{\mathbf{u}} + \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) {}^t \ddot{\mathbf{u}} \right) - \alpha {}^t \mathbf{P}.$$

Как видно из соотношения (3.2), после линеаризации ускорения в системе все еще присутствует нелинейность, обусловленная наличием контактных сил. Одним из вариантов решения такого вида уравнения является применение итерационного уточнения решения.





**Рис. 2.** Зависимости от времени (аналитическое решение (1D) — пунктирная кривая с треугольными маркерами; алгоритм (см. [20]) — штрихпунктирная кривая с квадратными маркерами; DDS — сплошная кривая): а) контактное давление; б) скорости в среднем сечении первого бруса

На каждом шаге интегрирования  $t + \Delta t$  построим итерационный процесс решения нелинейной системы с правой частью, зависящей от контактных сил  $\mathbf{R}$ , с итерационными приближениями по альтернирующему методу Шварца по подобластям контактирующих тел в виде (2.2). Условия выхода из итерационного процесса (3.2) остаются прежними, основным отличием является замена матрицы жесткости  $\mathbf{K}$  на эффективную матрицу жесткости  $\hat{\mathbf{K}}$  и появление дополнительных инерциальных слагаемых в  $\mathbf{H}$  с предыдущего временного шага  $t$ :

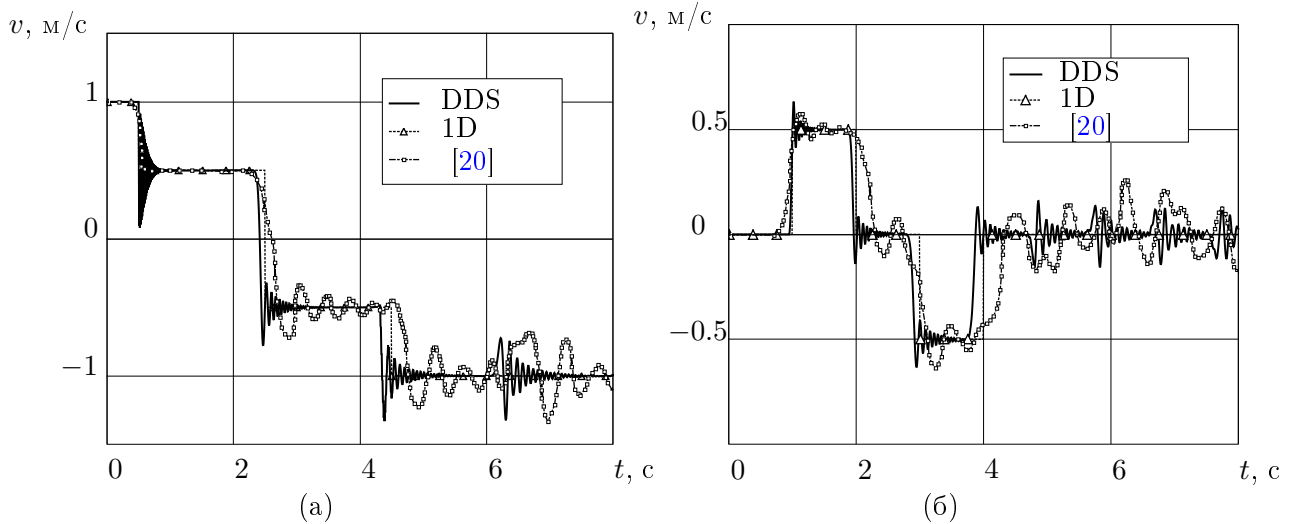
$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{\beta \Delta t^2} \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{II}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (1 + \alpha) \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{II}^{(k)} & \mathbf{K}_{IC}^{(k)} \\ \mathbf{K}_{CI}^{(k)} & \mathbf{K}_{CC}^{(k)} \end{pmatrix} \right]_{2n+1} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_I^{(k)} \\ \mathbf{U}_C^{(k)} \end{pmatrix}_{2n+1}^{t+\Delta t} = \\ = (1 + \alpha) \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{R}_C^{(k)} \end{pmatrix}_{2n+1}^{t+\Delta t} + \\ + (1 + \alpha) \begin{pmatrix} \mathbf{P}_I^{(k)} \\ 0 \end{pmatrix}_{2n+1}^{t+\Delta t} + \begin{pmatrix} \mathbf{H}_I^{(k)} \\ \mathbf{H}_C^{(k)} \end{pmatrix}_{2n+1}^t. \end{aligned} \quad (3.3)$$

В данной работе для тестирования на пространственных задачах решалась система уравнений в блочном виде (3.3), хотя возможно ее представление и решение в виде системы двух уравнений относительно вектора неизвестных перемещений на границе несколько другими и, возможно, более экономичными методами.

#### § 4. Тестовые примеры

Рассматривалось несколько случаев соударения однородных тел, без их разрушения, с определением силы удара, что является весьма сложной задачей. Тестирование алгоритмов выполнялось на задачах, имеющих различные параметры массы, скорости, упругих свойств контактирующих тел, а также площади и формы поверхностей контакта, определяющих максимальную силу удара.

В первом тестовом примере два однородных бруса квадратного сечения размером  $10 \times 1 \text{ м}^2$  сталкивались друг с другом [20]. На первом брус задавалась начальная скорость  $\dot{\mathbf{u}}_0^{(1)} = 10 \text{ м/с}$ ,



**Рис. 3.** Зависимости от времени параметров (аналитическое решение в одномерном случае (1D) — пунктирная кривая с треугольными маркерами; алгоритм (см. [20]) — штрихпунктирная кривая с квадратными маркерами; DDS — сплошная кривая): а) скорости на контактной поверхности первого бруса; б) скорости в среднем сечении второго бруса

второй брус, с закрепленным снизу основанием, находился в состоянии покоя. Начальный зазор между брусами составлял  $\delta = 0.5$  м. Задача решалась в трехмерной постановке с ячейками шестигранной формы, при этом каждый брус состоял из 256 шестигранных элементов и 1026 узлов. Граничные условия скольжения определялись на боковых гранях бруса, шаг интегрирования по времени составлял  $\Delta t = 6.25$  мс. Линейные свойства материалов ( $k = 1, 2$ ) выбирались исходя из условия скорости распространения продольной волны, равной 10 м/с, модуль Юнга  $E^{(k)} = 100$  Па, коэффициент Пуассона  $\nu^{(k)} = 0$ , плотность  $\rho^{(k)} = 1$  кг/м<sup>3</sup>.

Осцилляции контактного давления возникают при начальном вхождении тел в контакт, а также в середине контакта, когда первый брус начинает обратное движение под действием упругих контактных сил второго бруса (см. рис. 2, а).

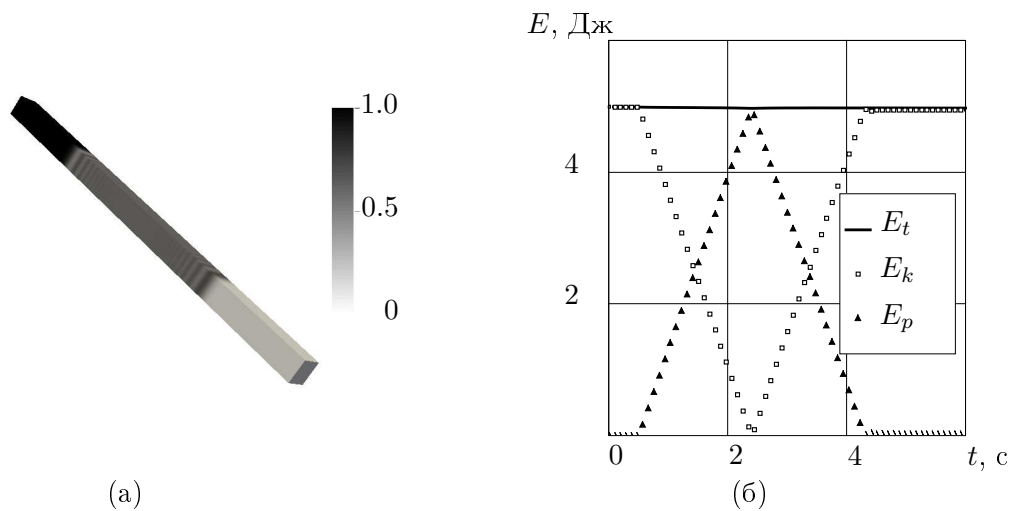
Поле скоростей соударяемых тел можно видеть на рис. 2, б и 3. Результаты расчетов показывают, что представленный алгоритм, обозначаемый далее для краткости как DDS, хорошо согласуется с точным решением по сравнению с методом из работы [20].

Распространение продольной волны внутри соударяемых тел наблюдается в направлении от границы контакта (см. рис. 4, а). Сохранение полной энергии системы подтверждается данными графика, изображенного на рисунке 4, б.

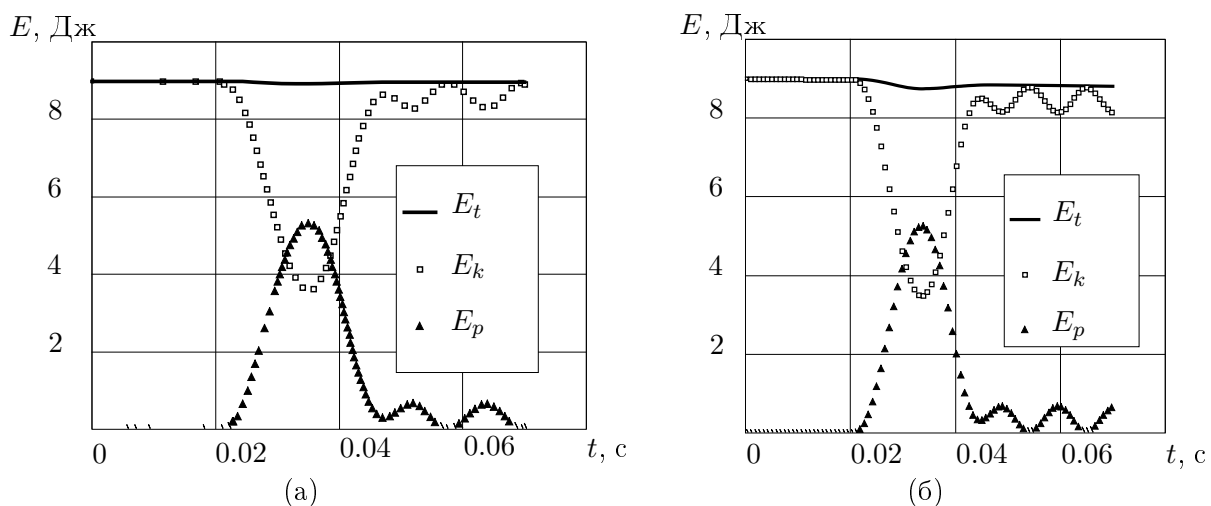
Во втором примере сфера радиуса 0.6 м, движущаяся со скоростью  $\dot{\mathbf{u}} = -5$  м/с вдоль оси  $OZ$ , сталкивалась с незакрепленным неподвижным прямоугольным основанием размером  $1.4 \times 1.4 \times 0.6$  м [21]. Конечно-элементная модель сферы состояла из 36384 шестигранников и 39007 узлов, минимальный нормированный Якобиан сетки равнялся  $Q_J = 0.24$ , угол искривленности четырехугольной грани  $\theta_w = 32.5^\circ$ , аспектное соотношение  $Q_a = 4.48$ . Расчетная сетка с ячейками из шестигранников прямоугольного основания содержала 14296 ячеек и 15959 узлов со следующими характеристиками:  $Q_J = 0.266$ ,  $\theta_w = 37.5^\circ$ ,  $Q_a = 9.78$ .

Линейно-упругие свойства материала сферы имели следующие значения:  $E^{(1)} = 60000$  Па,  $\nu^{(1)} = 0.3$ ,  $\rho^{(1)} = 0.8$  кг/м<sup>3</sup>, а основания —  $E^{(2)} = 30000$  Па,  $\nu^{(2)} = 0.3$ ,  $\rho^{(2)} = 1$  кг/м<sup>3</sup>. Начальное расстояние между телами равнялось  $\delta = 0.1$  м, шаг интегрирования по времени составлял  $\Delta t = 2 \cdot 10^{-5}$  с.

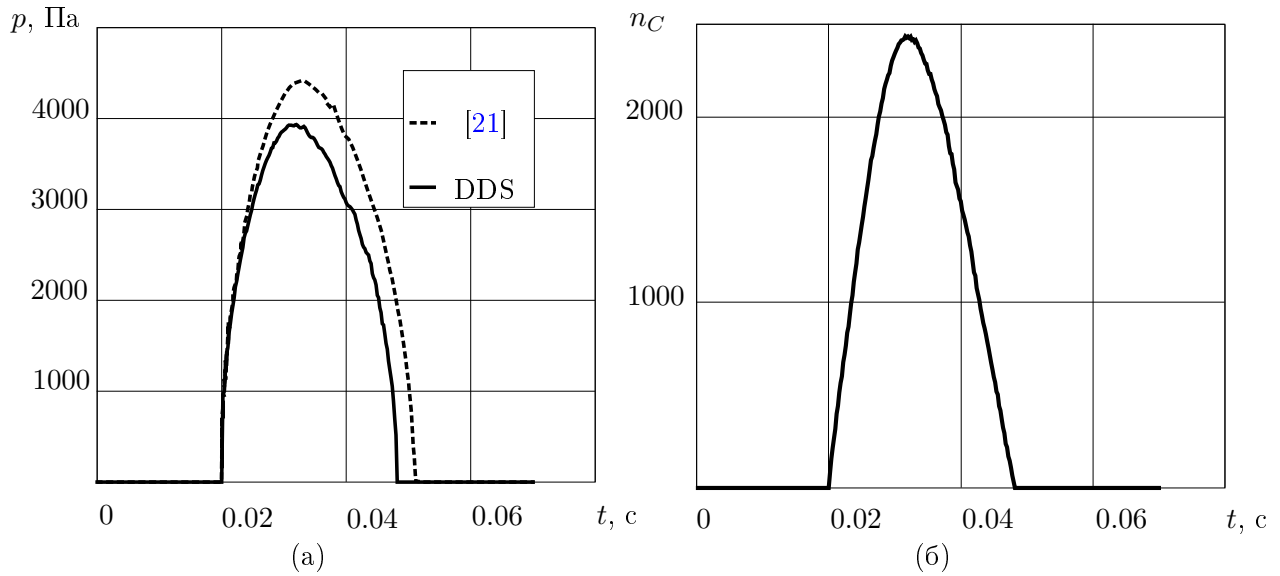
Максимальное отклонение значения полной энергии, в сравнении с ее исходной кинетической составляющей в 9 Дж, равнялось 2.8%. Однако, как показано на рис. 5, схема из работы [21] обладает лучшей консервативностью, чем DDS. Максимальное контактное давление для DDS в нижней точке сферы, возникающее на 3.1 секунде эксперимента, соответствует макси-



**Рис. 4.** Численные результаты: а) распределения модуля скорости на 1 с.; б) график изменения полной  $E_t$  (сплошная линия), потенциальной  $E_p$  (треугольные маркеры) и кинетической  $E_k$  (квадратные маркеры) энергии во времени



**Рис. 5.** Изменение во времени полной  $E_t$  (сплошная линия), потенциальной  $E_p$  (треугольные маркеры) и кинетической  $E_k$  (квадратные маркеры) энергии: а) алгоритм (см. [21]); б) DDS



**Рис. 6.** Изменение расчетных параметров: а) давление в нижней точке сферы алгоритма из [21] (штрихпунктирная линия) и DDS (сплошная линия); б) число контактных точек на сфере в DDS

мальной площади соприкосновения контактирующих тел (см. рис. 6, б) и составляет 3933 Па, что на 11 % отличается от результатов, представленных в цитируемой работе (см. рис. 6, а). Использование алгоритма DDS без диссипации при  $\alpha = 0$  в соотношении (3.3) показало совпадение с результатами в [21]. Одной из причин занижения величин энергии и контактного давления является использование более сильной диссипации для схемы DDS с параметром  $\alpha = -0.11$ , в работе [21] принималось значение  $\alpha = -0.05$ . Кроме того, отличие в значениях напряжений связано с выбором контрольных узлов в нижней части сферы и разных характерных размеров расчетных сеток, которые использовались в численных экспериментах.

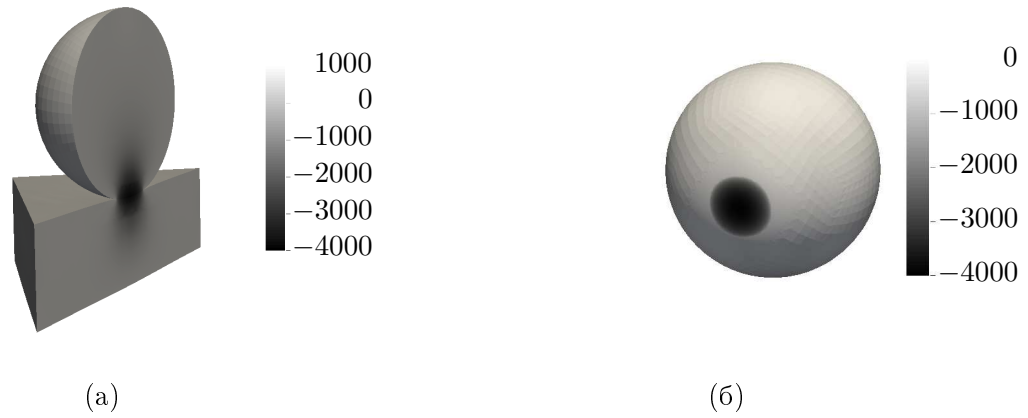
На рис. 7 изображено распределение величин контактного давления и компоненты  $\sigma_{zz}$  напряжения на третьей секунде эксперимента. Наибольшие значения возникают в середине области соприкосновения, наименьшие — по краям контакта.

В следующей тестовой задаче моделировался контакт по криволинейной границе двух трехмерных упругих тел  $\Omega^{(1)}$  и  $\Omega^{(2)}$ , полученных из единичного куба со стороной 0.001 (рис. 8). Контактная граница для  $\Omega^{(1)}$  описывалась функцией следующего вида:  $5 \sin(20 - \sqrt{400 - x^2 - y^2})$ , а для  $\Omega^{(2)}$  —  $5 \sin(\sqrt{20.2^2 - x^2 - y^2} - 20.2)$  [22]. Материал тел имел модуль Юнга  $E^{(1)} = E^{(2)} = 2.1 \cdot 10^8$  МПа, коэффициент Пуассона  $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 0.3$ , плотность  $\rho^{(k)} = 7850$  кг/м<sup>3</sup>. Начальный зазор между телами составил  $\delta = 10^{-6}$  м, для тела  $\Omega^{(2)}$  вдоль оси  $OZ$  задавалась начальная скорость 1 м/с, в то время как основание нижнего тела  $\Omega^{(1)}$  было закреплено, шаг интегрирования принимался равным  $4 \cdot 10^{-7}$  с (см. рис. 8).

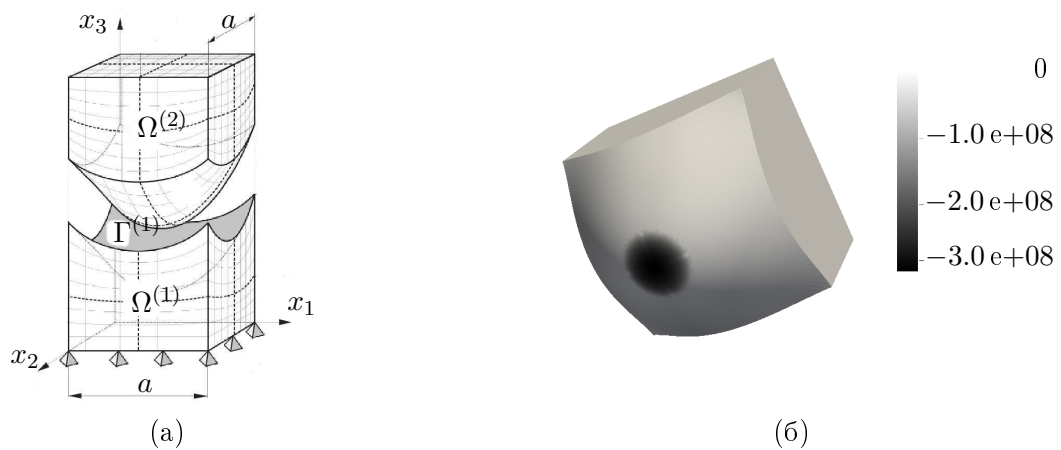
Для каждого из рассматриваемых тел была построена сетка, содержащая 21600 шестигранных ячеек и 226981 узлов. Минимальный нормированный якобиан сетки верхнего тела равнялся  $Q_J = 0.64$ , угол искривленности грани  $\theta_w = 3.72^\circ$ , аспектное соотношение  $Q_a = 2.23$ , сетка нижнего тела имела параметры качества  $Q_J = 0.65$ ,  $\theta_w = 3.59^\circ$ ,  $Q_a = 2.22$ .

Как и в случае контакта сферы и основания, для метода DDS наблюдается некоторое уменьшение значения полной энергии в момент вхождения тел в контакт. При этом наиболее заметное отклонение в 4.2 % возникает в момент максимального соприкосновения контактирующих тел (см. рис. 9, 10, б). Согласно данным рис. 10 имеются некоторые осцилляции значений контактного давления и числа точек в области контакта, что связано со сложной геометрией области контакта.

В отличие от предыдущего теста для DDS наблюдается хорошее совпадение величины контактного давления в нижней точке тела  $\Omega^{(2)}$  с алгоритмом TFETI, в котором использовалась



**Рис. 7.** Распределение расчетных параметров в момент времени  $t = 3$  с: а) компоненты напряжений  $\sigma_{zz}$  в сечении тел; б) контактное давление на сфере



**Рис. 8.** Расчетная схема (а); контактное давление (б)

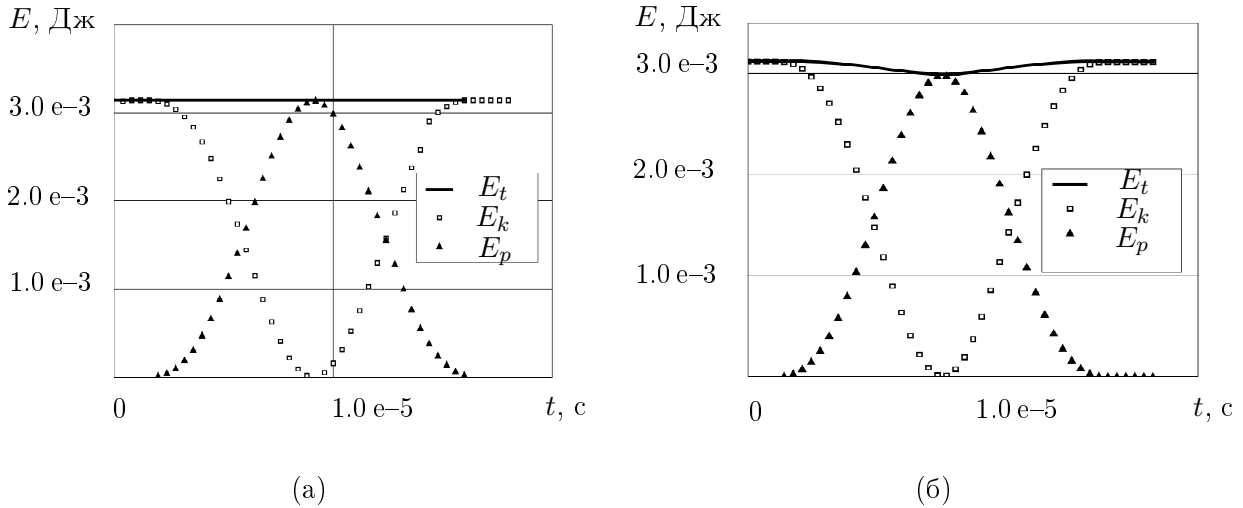


Рис. 9. Изменение энергии во времени: полной —  $E_t$  (сплошная линия), потенциальной —  $E_p$  (треугольные маркеры) и кинетической —  $E_k$  (квадратные маркеры); а) алгоритм из [22]; б) алгоритм DDS

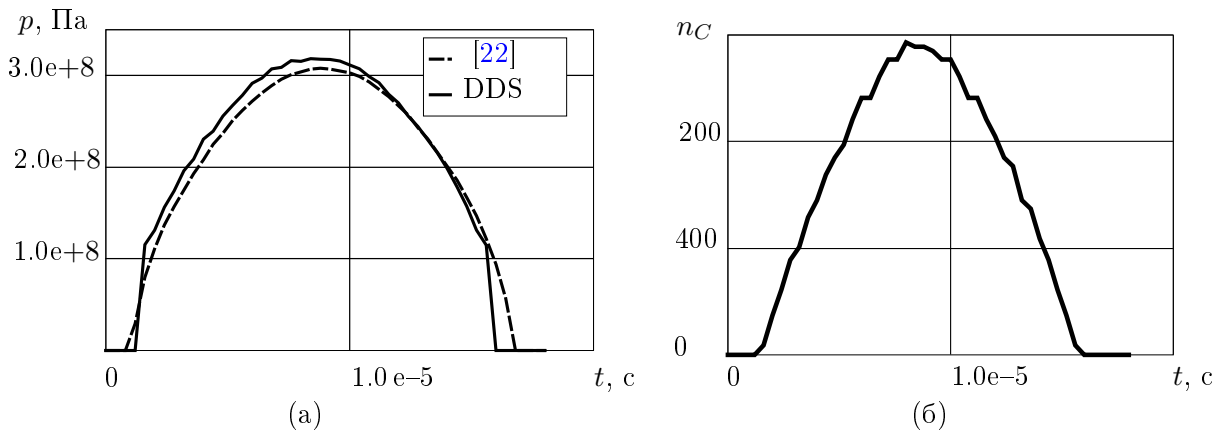
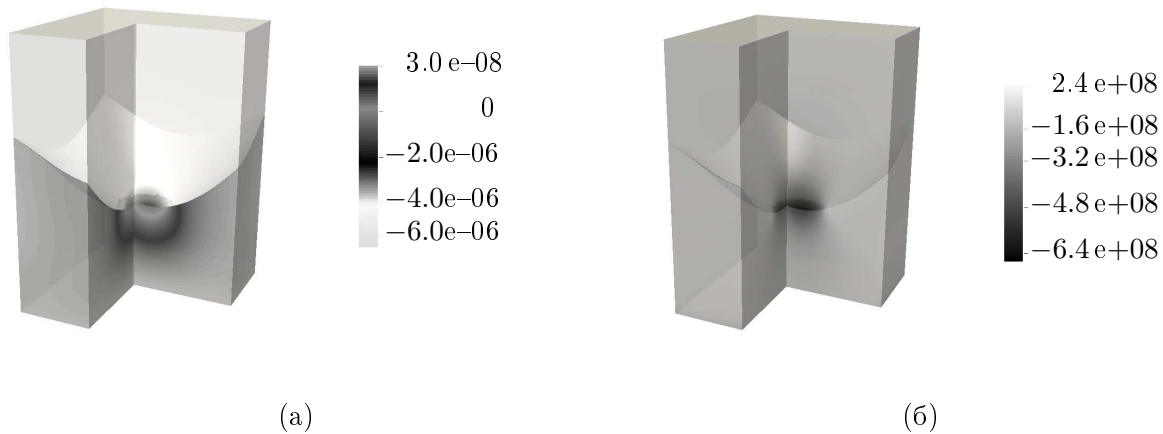


Рис. 10. Сравнение расчетных параметров (штрихпунктирная линия — алгоритм из [22]; сплошная линия — DDS): а) давление в нижней точке верхнего куба; б) число контактных точек на сфере в алгоритме DDS

контактно-стабилизированная схема Ньюмарка [22]. При этом для максимальных значений отличие не превышает 4% (см. рис. 10, б) при существенно меньшем числе узлов сетки и меньших размерах решаемых систем.

На рис. 11 изображены распределения полей компонент перемещения  $u_z$ , напряжения  $\sigma_{zz}$  и контактного давления для тела  $\Omega^{(2)}$ . Максимальные значения компонент напряжений и давления соответствуют областям максимального смещения узлов на контактной поверхности нижнего тела.

Таким образом, для решения контактных задач при динамическом воздействии построен альтернирующий алгоритм Шварца, обеспечивающий выполнение условий на изменяющейся контактной границе при пошаговом интегрировании уравнений по неявной диссипативной схеме с перераспределением массы контактных узлов. Основным преимуществом данного подхода является возможность использовать многосеточные методы для ускорения алгоритма на подобластях, нет необходимости в контактных конечных элементах, параметрах контакта, множителях Лагранжа или регуляризации. Как показали результаты тестовых задач на ударные контактные взаимодействия, рассматриваемые варианты вычисления контактных сил обес-



**Рис. 11.** Распределение параметров в сечении расчетной области и на поверхности верхнего куба на  $t = 8.8 \text{e-}06$  секунде: а) компонента вектора перемещений  $u_z$ ; б) компонента тензора напряжений  $\sigma_{zz}$

печивают за небольшое число итераций высокую точность при их сравнении с известными алгоритмами и имеют высокую устойчивость и надежность. Независимость аппроксимации решения для каждого тела позволяет использовать эффективные численные схемы и их параллельные реализации при исследовании контактных задач с конструктивной нелинейностью масштабных трехмерных конструкций на статические и динамические воздействия.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бураго Н.Г., Кукуджанов В.Н. Обзор контактных алгоритмов // Изв. РАН. МТТ. 2005. № 1. С. 45–87.
2. Laursen T.A. Computational contact and impact mechanics: fundamentals of modeling interfacial phenomena in nonlinear finite element analysis. New York: Springer, 2003. xv+454 p. DOI: [10.1007/978-3-662-04864-1](https://doi.org/10.1007/978-3-662-04864-1)
3. Цвик Л.Б. Обобщение алгоритма Шварца на случай областей, сопряженных без налегания // ДАН СССР. 1975. Т. 224. № 2. С. 309–312.
4. Галанин М.П., Лукин В.В., Родин А.С., Станкевич И.В. Применение метода Шварца для моделирования контактного взаимодействия системы тел // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2015. Т. 55. № 8. С. 1429–1443. DOI: [10.7868/S0044466915080104](https://doi.org/10.7868/S0044466915080104)
5. Eck C., Wohlmuth B. Convergence of a contact-Neumann iteration for the solution of two-body contact problems // Math. Models Methods Appl. Sci. 2003. Vol. 13. Issue 8. P. 1103–1118. DOI: [10.1142/S0218202503002830](https://doi.org/10.1142/S0218202503002830)
6. Bayada G., Sabil J., Sassi T. A Neumann-Neumann domain decomposition algorithm for the Signorini problem // Appl. Math. Lett. 2004. Vol. 17. Issue 10. P. 1153–1159. DOI: [10.1016/j.aml.2003.10.010](https://doi.org/10.1016/j.aml.2003.10.010)
7. Sassi T., Iropa M., Roux F.X. Generalization of Lions' nonoverlapping domain decomposition method for contact problems // Domain decomposition methods in science and engineering XVII / Langer U., Discacciati M., Keyes D.E., Widlund O.B., Zulehner W. Springer Berlin Heidelberg, 2008. P. 623–630. DOI: [10.1007/978-3-540-75199-1\\_78](https://doi.org/10.1007/978-3-540-75199-1_78)
8. Konyukhov A., Schweizerhof K. Computational contact mechanics: geometrically exact theory for arbitrary shaped bodies. Springer, 2013. DOI: [10.1007/978-3-642-31531-2](https://doi.org/10.1007/978-3-642-31531-2)
9. Yastrebov V.A., Breitenkopf P. Numerical methods in contact mechanics. John Wiley & Sons, 2013. 416 p. DOI: [10.1002/9781118647974](https://doi.org/10.1002/9781118647974)
10. Караваев А.С., Копысов С.П. Метод построения неструктурированных шестигранных сеток из объемных данных // Компьютерные исследования и моделирование. 2013. Т. 5. № 1. С. 11–24.
11. Караваев А.С., Копысов С.П. Метод Шварца декомпозиции области в контактных задачах / Труды Института механики УрО РАН «Проблемы механики и материаловедения». Ижевск: Институт механики УрО РАН, 2017. С. 6–20.

12. Караваев А.С., Копысов С.П., Кузьмин И.М. Метод консервативной интерполяции на нестыкующихся поверхностных сетках // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. Вып. 4. С. 64–75. DOI: [10.20537/vm140405](https://doi.org/10.20537/vm140405)
13. Шабров Н.Н. Метод конечных элементов в расчетах деталей тепловых двигателей. Л.: Машиностроение, 1983. 212 с.
14. Hilber H.M., Hughes T.R.J., Taylor R.L. Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics // Earthquake Engineering and Structural Dynamics. 1977. Vol. 5. Issue 3. P. 283–292. DOI: [10.1002/eqe.4290050306](https://doi.org/10.1002/eqe.4290050306)
15. Deuffhard P., Krause R., Ertel S. A contact-stabilized Newmark method for dynamical contact problems // Internat. J. Numer. Methods Engrg. 2008. Vol. 73. Issue 9. P. 1274–1290. DOI: [10.1002/nme.2119](https://doi.org/10.1002/nme.2119)
16. Laursen T.A., Chawla V. Design of energy conserving algorithms for frictionless dynamic contact problems // Internat. J. Numer. Methods Engrg. 1997. Vol. 40. Issue 5. P. 863–886. DOI: [10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19970315\)40:5<863::AID-NME92>3.0.CO;2-V](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19970315)40:5<863::AID-NME92>3.0.CO;2-V)
17. Khenous H.B., Laborde P., Renard Y. Mass redistribution method for finite element contact problems in elastodynamics // Eur. J. Mech. A Solids. 2008. Vol. 27. Issue 5. P. 918–932. DOI: [10.1016/j.euromechsol.2008.01.001](https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2008.01.001)
18. Hager C., Hüeber S., Wohlmuth B.I. A stable energy-conserving approach for frictional contact problems based on quadrature formulas // Internat. J. Numer. Methods Engrg. 2008. Vol. 73. Issue 2. P. 205–225. DOI: [10.1002/nme.2069](https://doi.org/10.1002/nme.2069)
19. Krause R., Walloth M. Presentation and comparison of selected algorithms for dynamic contact based on the Newmark scheme // Appl. Numer. Math. 2012. Vol. 62. Issue 10. P. 1393–1410. DOI: [10.1016/j.apnum.2012.06.014](https://doi.org/10.1016/j.apnum.2012.06.014)
20. Belytschko T., Neal M.O. Contact-impact by the pinball algorithm with penalty and Lagrangian methods // Internat. J. Numer. Methods Engrg. 1991. Vol. 31. Issue 3. P. 547–572. DOI: [10.1002/nme.1620310309](https://doi.org/10.1002/nme.1620310309)
21. Sitzmann S. Robust algorithms for contact problems with constitutive contact laws / Zur Erlangung des Doktorgrades Dr.-Ing. 2016. Der Technischen Fakultät der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg. 164 p.
22. Dostál Z., Kozubek T., Brzobohatý T., Markopoulos A., Vlach O. Scalable TFETI with optional preconditioning by conjugate projector for transient frictionless contact problems of elasticity // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 2012. Vol. 247–248. P. 37–50. DOI: [10.1016/j.cma.2012.08.003](https://doi.org/10.1016/j.cma.2012.08.003)

Поступила в редакцию 04.08.2017

Караваев Александр Сергеевич, научный сотрудник, лаборатория вычислительных технологий, Институт механики УрО РАН, 426067, Россия, г. Ижевск, ул. Т. Барамзиной, 34.

E-mail: [karavaev-alexander@yandex.ru](mailto:karavaev-alexander@yandex.ru)

Копысов Сергей Петрович, д. ф.-м. н., профессор, главный научный сотрудник, лаборатория вычислительных технологий, Институт механики УрО РАН, 426067, Россия, г. Ижевск, ул. Т. Барамзиной, 34; профессор, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.

E-mail: [s.kopysov@gmail.com](mailto:s.kopysov@gmail.com)

*A. S. Karavaev, S. P. Kopysov*

**Space semidiscrete formulation of contact algorithm based on the Schwarz's decomposition method for deformable bodies**

**Citation:** *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 3, pp. 396–413 (in Russian).

*Keywords:* dynamic contact analysis, Schwarz alternating method, mass redistribution, implicit schemes.

MSC2010: 74S05, 74H15

DOI: [10.20537/vm170309](https://doi.org/10.20537/vm170309)



Implicit integration scheme for Schwarz alternating method for dynamic contact interaction problems of two interacting volumetric bodies without friction is considered. The paper presents the results of testing a contact algorithm of Schwarz domain decomposition using HTT- $\alpha$  scheme in consistent method redistribution of mass on the boundary of contact. To prevent artificial oscillations on the contact boundary together with common dissipative properties of the  $\alpha$ -scheme, the consistent mass redistribution method was used. The main advantage of this approach is the option to use multigrid methods to speed up the algorithm on subdomains, also there is no need for contact elements, contact parameters, Lagrange multipliers or regularization. Numerical examples including various contact zones, different materials of contact bodies and comparisons with measurements of other methods show the wide applicability of the derived algorithm.

## REFERENCES

1. Bourago N.G., Kukudzhyanov V.N. A review of contact algorithms, *Mechanics of Solids*, 2005, vol. 40, no. 1, pp. 35–71.
2. Laursen T.A. *Computational contact and impact mechanics: fundamentals of modeling interfacial phenomena in nonlinear finite element analysis*, New York: Springer, 2003, xv+454 p.  
DOI: [10.1007/978-3-662-04864-1](https://doi.org/10.1007/978-3-662-04864-1)
3. Tsvik L.B. Generalization of the Schwarz algorithm to the case of regions in contact without overlapping, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1975, vol. 224, no. 2, pp. 309–312 (in Russian).
4. Galanin M.P., Lukin V.V., Rodin A.S., Stankevich I.V. Application of the Schwarz alternating method for simulating the contact interaction of a system of bodies, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2015, vol. 55, issue 8, pp. 1393–1406. DOI: [10.1134/S0965542515080102](https://doi.org/10.1134/S0965542515080102)
5. Eck C., Wohlmuth B. Convergence of a contact-Neumann iteration for the solution of two-body contact problems, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 2003, vol. 13, issue 8, pp. 1103–1118.  
DOI: [10.1142/S0218202503002830](https://doi.org/10.1142/S0218202503002830)
6. Bayada G., Sabil J., Sassi T. A Neumann-Neumann domain decomposition algorithm for the Signorini problem, *Appl. Math. Lett.*, 2004, vol. 17, issue 10, pp. 1153–1159. DOI: [10.1016/j.aml.2003.10.010](https://doi.org/10.1016/j.aml.2003.10.010)
7. Sassi T., Ipopa M., Roux F.X. Generalization of Lions' nonoverlapping domain decomposition method for contact problems, *Domain decomposition methods in science and engineering XVII*, Eds.: Langer U., Discacciati M., Keyes D.E., Widlund O.B., Zulehner W., Springer Berlin Heidelberg, 2008, pp. 623–630.  
DOI: [10.1007/978-3-540-75199-1\\_78](https://doi.org/10.1007/978-3-540-75199-1_78)
8. Konyukhov A., Schweizerhof K. *Computational contact mechanics: geometrically exact theory for arbitrary shaped bodies*, Springer, 2013. DOI: [10.1007/978-3-642-31531-2](https://doi.org/10.1007/978-3-642-31531-2)
9. Yastrebov V.A., Breitenkopf P. *Numerical methods in contact mechanics*. Wiley, 2013, 416 p.  
DOI: [10.1002/9781118647974](https://doi.org/10.1002/9781118647974)
10. Karavaev A.S., Kopysov S.P. The method of unstructured hexahedral mesh generation from volumetric data, *Komp'yuternye issledovaniya i modelirovaniye*, 2013, vol. 5, no. 1, pp. 11–24 (in Russian).
11. Karavaev A.S., Kopysov S.P. The Schwarz method of domain decomposition in contact problems, *Trudy Instituta mekhaniki Ural'skogo otdeleniya Rossiiskoi Akademii Nauk "Problemy mekhaniki i materialovedeniya"*, Izhevsk: Institute of Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 2017, pp. 6–20 (in Russian).
12. Karavaev A.S., Kopysov S.P., Kuz'min I.M. Conservative interpolation method between non-matching surface meshes, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2014, issue 4, pp. 64–75 (in Russian). DOI: [10.20537/vm140405](https://doi.org/10.20537/vm140405)
13. Shabrov N.N. *Metod konechnykh elementov v raschetakh detalei teplovykh dvigatelei* (The finite element method in calculating the details of thermal engines), Leningrad: Mashinostroenie, 1983, 212 p.
14. Hilber H.M., Hughes T.R.J., Taylor R.L. Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1977, vol. 5, issue 3, pp. 283–292. DOI: [10.1002/eqe.4290050306](https://doi.org/10.1002/eqe.4290050306)
15. Deuffhard P., Krause R., Ertel S. A contact-stabilized Newmark method for dynamical contact problems, *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 2008, vol. 73, issue 9, pp. 1274–1290. DOI: [10.1002/nme.2119](https://doi.org/10.1002/nme.2119)
16. Laursen T.A., Chawla V. Design of energy conserving algorithms for frictionless dynamic contact problems, *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 1997, vol. 40, issue 5, pp. 863–886.  
DOI: [10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19970315\)40:5<863::AID-NME92>3.0.CO;2-V](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19970315)40:5<863::AID-NME92>3.0.CO;2-V)
17. Khenous H.B., Laborde P., Renard Y. Mass redistribution method for finite element contact problems in elastodynamics, *Eur. J. Mech. A Solids*, 2008, vol. 27, issue 5, pp. 918–932.  
DOI: [10.1016/j.euromechsol.2008.01.001](https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2008.01.001)
18. Hager C., Hüeber S., Wohlmuth B.I. A stable energy-conserving approach for frictional contact problems

- based on quadrature formulas, *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 2008, vol. 73, issue 2, pp. 205–225. DOI: [10.1002/nme.2069](https://doi.org/10.1002/nme.2069)
19. Krause R., Walloth M. Presentation and comparison of selected algorithms for dynamic contact based on the Newmark scheme, *Appl. Numer. Math.*, 2012, vol. 62, issue 10, pp. 1393–1410. DOI: [10.1016/j.apnum.2012.06.014](https://doi.org/10.1016/j.apnum.2012.06.014)
  20. Belytschko T., Neal M. O. Contact-impact by the pinball algorithm with penalty and Lagrangian methods, *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 1991, vol. 31, issue 3, pp. 547–572. DOI: [10.1002/nme.1620310309](https://doi.org/10.1002/nme.1620310309)
  21. Sitzmann S. *Robust algorithms for contact problems with constitutive contact laws*, Zur Erlangung des Doktorgrades Dr.-Ing., 2016, Der Technischen Fakultät der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, 164 p.
  22. Dostál Z., Kozubek T., Brzobohatý T., Markopoulos A., Vlach O. Scalable TFETI with optional preconditioning by conjugate projector for transient frictionless contact problems of elasticity, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 2012, vol. 247–248, pp. 37–50. DOI: [10.1016/j.cma.2012.08.003](https://doi.org/10.1016/j.cma.2012.08.003)

Received 04.08.2017

Karavaev Aleksandr Sergeevich, Senior Researcher, Laboratory of Computational Technologies, Institute of Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. T. Baramzinoi, 34, Izhevsk, 426067, Russia.  
E-mail: [karavaev-alexander@yandex.ru](mailto:karavaev-alexander@yandex.ru)

Kopysov Sergei Petrovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Chief Researcher, Laboratory of Computational Technologies, Institute of Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. T. Baramzinoi, 34, Izhevsk, 426067, Russia.  
Professor, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.  
E-mail: [s.kopysov@gmail.com](mailto:s.kopysov@gmail.com)