УДК 517.977

© *К. А. Щелчков*

К НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С ДИСКРЕТНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ[1]

Рассматривается дифференциальная игра двух лиц, описываемая системой вида $\dot{x} = f(x,u) + g(x,v)$, $x \in \mathbb{R}^k$, $u \in U$, $v \in V$. Множеством значений управлений преследователя является конечное подмножество фазового пространства. Множеством значений управлений убегающего является компактное подмножество фазового пространства. Целью преследователя является приведение фазовых координат системы в ноль за конечное время. Цель убегающего — помешать этому. Получены достаточные условия на параметры игры для существования окрестности нуля, из которой происходит поимка, то есть приведение системы в ноль. Также доказано, что независимо от выбора действий убегающего время, необходимое преследователю для перевода системы в ноль, стремится к нулю с приближением начального положения к нулю.

Ключевые слова: дифференциальная игра, преследователь, убегающий, нелинейная система.

DOI: 10.20537/vm170308

Дифференциальные игры двух лиц, рассмотренные первоначально Айзексом [1], в настоящее время представляют содержательную математическую теорию [2–14]. Были разработаны методы решения различных классов игровых задач: метод Айзекса, основанный на анализе определенного уравнения в частных производных и его характеристик, метод экстремального прицеливания Красовского, метод Понтрягина и другие. Н. Н. Красовским и представителями его научной школы создана теория позиционных игр, в основе которой лежат понятие максимального стабильного моста и правило экстремального прицеливания. Однако эффективное построение таких мостов для исследования реальных конфликтно управляемых процессов, в первую очередь нелинейных дифференциальных игр, весьма затруднительно или даже невозможно. Удобнее строить мосты, не являющиеся максимальными, но обладающие свойством стабильности и дающие эффективно реализуемые процедуры управления для отдельных классов игр, обладающих дополнительными свойствами. Достаточные условия разрешимости задачи преследования в нелинейном примере Л. С. Понтрягина получены в [15]. В работе [16] представлены достаточные условия разрешимости задачи преследования в нелинейной дифференциальной игре при некоторых дополнительных условиях на вектограмму системы и терминальное множество. Построение стабильных мостов приближенно в нелинейных дифференциальных играх, в том числе численно, рассматривается, в частности, в работах [17, 18].

В данной статье развивается подход, предложенный в работах [19, 20] для исследования свойства управляемости нелинейных систем. Получены достаточные условия разрешимости задачи преследования.

§ 1. Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^k$ ($k \geqslant 2$) рассматривается дифференциальная игра двух лиц: преследователя P и убегающего E. Динамика игры описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = f(x,u) + g(x,v), \quad u \in U, \quad v \in V, \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^k$ — фазовая переменная, $u, v \in \mathbb{R}^k$ — управляющие воздействия. Множество $U = \{u_1, \ldots, u_m\}$, $u_i \in \mathbb{R}^k$, $i = 1, \ldots, m$. Множество V — компакт. Функция $f\colon \mathbb{R}^k \times U \to \mathbb{R}^k$ для

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 16–01–00346).

каждого $u \in U$ непрерывно дифференцируема по x. Функция $g\colon \mathbb{R}^k \times V \to \mathbb{R}^k$ для каждого $v \in V$ непрерывно дифференцируема по x и липшицева по v.

Под разбиением σ промежутка $[0, \infty)$ будем понимать последовательность $\{\tau_q\}_{q=0}^{\infty}$, не имеющую конечных точек сгущения и такую, что $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_q < \dots$.

Определение 1. Пара (σ, Q_σ) называется *кусочно-постоянной стратегией* Q убегающего E, если σ — разбиение промежутка $[t_0, \infty)$, а Q_σ — семейство отображений c_r, $r = 0, 1, \dots$, ставящих в соответствие величинам $(\tau_r, x(\tau_r))$ точку $v_r \in V$.

Замечание 1. Если Q — кусочно-постоянная стратегия убегающего E, отвечающая разбиению σ, то управление убегающего имеет вид $v(t) = v_r$, $t \in [\tau_r, \tau_{r+1})$.

Определение 2. Пара (σ, W_σ) называется *кусочно-постоянной стратегией* W преследователя P, если σ — разбиение промежутка $[t_0, \infty)$, а W_σ — семейство отображений d_r, $r = 0, 1, \dots$, ставящих в соответствие величинам $(\tau_r, x(\tau_r), v_r)$ кусочно-постоянную функцию $u_r\colon [\tau_r, \tau_{r+1}) \to U$ такую, что $u_r(t) = u_i^r$, $t \in [t_i^r, t_{i+1}^r)$, $i = 0, \dots, n_r$, $\{t_i^r\}_{i=0}^{n_r+1}$ — конечное разбиение интервала $[\tau_r, \tau_{r+1})$, $t_0^r = \tau_r$, $t_{n_r+1}^r = \tau_{r+1}$. Здесь v_r — значение управления убегающего E в момент времени τ_r.

Обозначим данную игру через $\Gamma(x_0)$.

Определение 3. В игре $\Gamma(x_0)$ *происходит поимка*, если существует $T > 0$ такое, что для любой кусочно-постоянной стратегии Q убегающего E существует кусочно-постоянная стратегия W преследователя P такая, что $x(\tau) = 0$ для некоторого $\tau \in (0, T)$.

Определение 4 (см. [19]). Совокупность векторов $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^k$ называется *положительным базисом*, если для любой точки $\xi \in \mathbb{R}^k$ существуют числа $\mu_1, \dots, \mu_n \geqslant 0$ такие, что $\xi = \sum_{i=1}^n \mu_i a_i$.

Введем следующие обозначения: $\operatorname{Int} A$ — внутренность множества A; $\operatorname{co} A$ — выпуклая оболочка множества A; $O_\varepsilon(x)$ — ε-окрестность точки x; $D_\varepsilon(x)$ — замкнутый шар радиуса ε с центром в точке x.

§ 2. Теорема о поимке

Теорема 1. *Пусть $f(0, u_1), \dots, f(0, u_m)$ образует положительный базис и*

$$-g(0, V) \subset \operatorname{Int}(\operatorname{co}\{f(0, u_1), \dots, f(0, u_m)\}).$$

Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любой точки $x_0 \in O_\varepsilon(0)$ в игре $\Gamma(x_0)$ происходит поимка.

Доказательство. $\mathbf{1^0}$. Докажем, что существуют $\alpha > 0$, $\varepsilon > 0$ такие, что для любой точки $x \in O_\varepsilon(0)$ и любого $v \in V$ найдется $i \in \{1, \dots, m\}$, для которого выполнено

$$\left\langle f(x, u_i) + g(x, v), -\frac{x}{\|x\|} \right\rangle > \alpha. \tag{2}$$

Так как функция $f(x, u)$ является липшицевой по x, то существует $\varepsilon_1 > 0$ такое, что для всех $x \in O_{\varepsilon_1}(0)$ набор векторов $\{f(x, u_1), \dots, f(x, u_m)\}$ является положительным базисом. Так как функция $g(x, v)$ липшицева по совокупности переменных, множество $g(x, V)$ является компактом для любого $x \in \mathbb{R}^k$. Кроме того, существует $\varepsilon_2 > 0$ такое, что для любого $x \in O_{\varepsilon_2}(0)$ выполнено $-g(x, V) \subset \operatorname{Int}(\operatorname{co}\{f(x, u_1), \dots, f(x, u_m)\})$. Возьмем произвольное положительное число $\varepsilon_3 < \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Тогда, для любого $x \in O_{\varepsilon_3}(0)$ и любого $v \in V$ выполнено включение $0 \in \operatorname{Int}(\operatorname{co}\{f(x, u_1) + g(x, v), \dots, f(x, u_m) + g(x, v)\})$. Следовательно, по свойству положительных базисов (см., например, [19]), набор векторов $\{f(x,u_1)+g(x,v),\dots,f(x,u_m)+g(x,v)\}$ является положительным базисом.

Рассмотрим шар $D_{\varepsilon_3}(0)$. Так как функции f,g являются липшицевыми по первому аргументу, то функции $f(x,u_1),\dots,f(x,u_m)$ непрерывны по x, компактное множество $g(x,V)$ непрерывно по x в метрике Хаусдорфа. Тогда на данном шаре достигается следующий минимакс:

$$\min_{x\in D_{\varepsilon_3}(0)}\min_{v\in V}\max_{i=1,\dots,m}\left\langle f(x,u_i)+g(x,v),-\frac{x}{\|x\|}\right\rangle. \tag{3}$$

Пусть он достигается в точках $\hat{x}\in D_{\varepsilon_3}(0)$, $\hat{v}\in V$, $u_j\in\{u_1,\dots,u_m\}$. Так как набор векторов $\{f(\hat{x},u_1)+g(\hat{x},\hat{v}),\dots,f(\hat{x},u_m)+g(\hat{x},\hat{v})\}$ является положительным базисом, то, в силу построения (3) и свойств положительных базисов (см., например, [19]), имеет место неравенство

$$\alpha_1=\left\langle f(\hat{x},u_j)+g(\hat{x},\hat{v}),-\frac{\hat{x}}{\|\hat{x}\|}\right\rangle>0.$$

Таким образом, ε_3 является искомым ε, а искомое α является произвольным числом из интервала $(0,\alpha_1)$. Неравенство (2) доказано.

Из свойств функций f,g следует, что существует $D>0$ такое, что для всех $x\in O_\varepsilon(0)$, любого $v\in V$ и любого $i\in\{1,\dots,m\}$ имеет место следующее неравенство:

$$\|f(x,u_i)+g(x,v)\|\leqslant D. \tag{4}$$

Оценка справедлива в силу ограниченности функций f,g в данной окрестности.

2^0. Пусть задана некоторая стратегия Q убегающего E, то есть заданы разбиение $\{\overline{\tau}_q\}_{q=0}^\infty$ и соответствующая ему последовательность значений управления $\{v_q\}_{q=0}^\infty$, $v_i\in V$, $i=0,1,\dots$. Пусть числа ε, α соответствуют (2) и $x_0\in O_\varepsilon(0)$. В силу (2) для любого $v_0\in V$ существует такой индекс $j\in\{1,\dots,m\}$, что выполнено неравенство

$$\left\langle f(x_0,u_j)+g(x_0,v_0),-\frac{x_0}{\|x_0\|}\right\rangle\geqslant\alpha.$$

Также, в силу (2) и липшицевости функций f,g по x, существует число $\delta>0$ такое, что для любого $x\in D_\delta(x_0)$, любого $v\in V$ выполнено неравенство

$$\left\langle f(x,u_j)+g(x,v),-\frac{x_0}{\|x_0\|}\right\rangle\geqslant\frac{\alpha}{2}>0. \tag{5}$$

В силу того, что $f(x,u_j)+g(x,v)\neq0$, для любого $x\in(O_\varepsilon(0)\cap D_\delta(x_0))$ и любого $v\in V$ выполнено следующее неравенство:

$$\left\langle\frac{f(x,u_j)+g(x,v)}{\|f(x,u_j)+g(x,v)\|},-\frac{x_0}{\|x_0\|}\right\rangle\geqslant\frac{\alpha}{2\|f(x,u_j)+g(x,v)\|}.$$

Так как $\|f(x,u_j)+g(x,v)\|\leqslant D$ в силу (4), то справедливо следующее неравенство:

$$1\geqslant\left\langle\frac{f(x,u_j)+g(x,v)}{\|f(x,u_j)+g(x,v)\|},-\frac{x_0}{\|x_0\|}\right\rangle\geqslant\frac{\alpha}{2D}.$$

Возьмем вектор $p\in\mathbb{R}^k$, $\|p\|=1$ и такой, что

$$\left\langle p,-\frac{x_0}{\|x_0\|}\right\rangle=\frac{\alpha}{2D}. \tag{6}$$

Тогда существует такое число $\gamma > 0$, что $\|x_0 + \gamma p\| = \|x_0\|$, то есть точка $x_0 + \gamma p$ является вторым концом хорды шара $D_{\|x_0\|}(0)$. Следовательно, имеет место следующее равенство:

$$\min_{\beta\in[0,1]} \|x_0 + \beta\gamma p\| = \left\|x_0 + \frac{\gamma}{2}p\right\|.$$

Без ограничений общности можно считать, что $\delta \leqslant \gamma/2$. Определим момент времени $t_1 = (\gamma/(2D) + t_0) = \gamma/(2D)$. Тогда, существует такой номер n, что $\overline{\tau}_n \leqslant t_1$, $\overline{\tau}_{n+1} > t_1$. Отсюда зададим первую часть разбиения $\{\tau_q\}_{q=0}^{\infty}$ для стратегии преследователя: $\tau_0 = 0$, $\tau_1 = \overline{\tau}_1, \ldots, \tau_n = \overline{\tau}_n$, $\tau_{n+1} = t_1$. На каждом интервале $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 0, \ldots, n$, определим соответствующие управления $u_{j_0}, \ldots, u_{j_n}$ преследователя P. Выбираем u_{j_i} для интервала $[\tau_i, \tau_{i+1})$ таким, что для данного вектора выполнено (5) при $x_0 = x(\tau_i)$, $v = v_i$. Номера j_i выбираются такими, что на них достигается максимум из (5) при $v = v_i$.

Рассмотрим точку $x(t_1) = x_0 + \int_{\tau_0}^{t_1}(f(x(s), u(s)) + g(x(s), v(s)))\, ds \doteq x_1$. Для данного x_1 выполнены следующие свойства: $\|x_1 - x_0\| \leqslant \gamma/2$ в силу выбора t_1; $\left\langle \dfrac{x_1 - x_0}{\|x_1 - x_0\|}, -\dfrac{x_0}{\|x_0\|}\right\rangle \geqslant \dfrac{\alpha}{2D}$ в силу (6). Докажем, что $\|x_1\| \leqslant \nu\|x_0\|$ для некоторого $\nu \in [0, 1)$. Рассмотрим величину $\|x_1\|^2$:

$$\|x_1\|^2 = \|x_0\|^2 + \left\|\int_{\tau_0}^{t_1}(f(x(s), u(s)) + g(x(s), v(s)))ds\right\|^2 + \\ + 2\left\langle x_0, \int_{\tau_0}^{t_1}(f(x(s), u(s)) + g(x(s), v(s)))ds\right\rangle.$$

Рассмотрим скалярное произведение:

$$\left\langle x_0, \int_{\tau_0}^{t_1}(f(x(s), u(s)) + g(x(s), v(s)))ds\right\rangle = \int_{\tau_0}^{t_1} \langle x_0,\ f(x(s), u(s)) + g(x(s), v(s))\rangle\ ds \leqslant \\ \leqslant -\int_{\tau_0}^{t_1} \frac{\alpha\|x_0\|}{2}\, ds = -\frac{\alpha\|x_0\|}{2}\cdot\frac{\gamma}{2D}.$$

Заметим, что

$$\left\|\int_{\tau_0}^{t_1}(f(x(s), u(s)) + g(x(s), v(s)))ds\right\|^2 \leqslant \frac{\gamma^2}{4}.$$

В силу (2), (4) имеет место неравенство $\alpha < D$. Тогда, в силу (6) и определения γ, имеет место равенство $\gamma = \alpha\|x_0\|/D$. Следовательно, справедлива оценка

$$\left\|\int_{\tau_0}^{t_1}(f(x(s), u(s)) + g(x(s), v(s)))ds\right\|^2 + 2\left\langle x_0, \int_{\tau_0}^{t_1}(f(x(s), u(s)) + g(x(s), v(s)))ds\right\rangle \leqslant \\ \leqslant \frac{\gamma^2}{4} - 2\cdot\frac{\alpha\|x_0\|}{2}\cdot\frac{\gamma}{2D} = \frac{\alpha^2\|x_0\|^2}{4D^2} - \frac{\alpha^2\|x_0\|^2}{2D^2} = -\frac{\alpha^2\|x_0\|}{4D^2}.$$

Тогда

$$\|x_1\|^2 \leqslant \|x_0\|^2 - \frac{\alpha^2\|x_0\|}{4D^2}.$$

Отсюда искомое $\nu = \sqrt{1 - \alpha^2/(4D^2)}$.

Далее, считая начальной точку x_1, производим вышеописанную процедуру. Определим момент времени t_2 из равенства $t_2 - t_1 = \gamma_1/(2D)$, где γ_1 — длина хорды шара радиуса $\|x_1\|$, соответствующая вектору p. Вектор p, с помощью которого находится γ_1, соответствует (6) при $x_0 = x_1$. Далее, аналогично первому шагу определим точки разбиения $\{\tau_q\}_{q=0}^{\infty}$, которые принадлежат интервалу $[t_1, t_2)$, и соответствующие векторы управления. Получим, что для $x_2 = x(t_2)$ будет выполнено неравенство $\|x_2\| \leqslant \nu\|x_1\|$, где ν остается неизменным с предыдущего шага.

МАТЕМАТИКА 2017. Т. 27. Вып. 3

Продолжая данную процедуру, получим две последовательности $\{t_q\}_{q=0}^{\infty}$, $\{x_q\}_{q=0}^{\infty}$, где $t_0 = 0$. Рассмотрим предел норм элементов последовательности $\{x_q\}_{q=0}^{\infty}$:

$$\lim_{q\to\infty} \|x_q\| \leqslant \lim_{q\to\infty} \|x_0\|\nu^q = 0.$$

Рассмотрим предел последовательности $\{t_q\}_{q=0}^{\infty}$:

$$\lim_{q\to\infty} t_q = \lim_{q\to\infty} \sum_{s=0}^{s=q-1} (t_{s+1} - t_s) \leqslant \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\|x_s\|}{2D} \leqslant \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\|x_0\|\nu^s}{2D} = \frac{\|x_0\|}{2D(1-\nu)}.$$

Таким образом, $\lim\limits_{q\to\infty} t_q = T < +\infty$. Следовательно, без ограничений можно считать, что $T \in (\overline{\tau}_\eta, \overline{\tau}_{\eta+1})$ для некоторого натурального η.

3^0. Пусть выполнены построения пункта 2. Рассмотрим интервал $(\overline{\tau}_\eta, \overline{\tau}_{\eta+1})$. На данном интервале динамика игры описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = f(x, u) + g(x, v_\eta), \quad u \in U. \tag{7}$$

Начальным положением считаем точку $\overline{x} = x(\tau_\mu)$, где $\tau_\mu \in \{\tau_q\}_{q=0}^{\infty}$ и $\tau_\mu \in (\overline{\tau}_\eta, T)$. Так как v_η — постоянный вектор на данном интервале, то правая часть зависит только от x, u. Тогда, в силу результатов [20], на интервале $(\overline{\tau}_\eta, \overline{\tau}_{\eta+1})$ данная управляемая система (7) является N-локально управляемой. То есть для любого $\hat{\varepsilon} > 0$ существует $\hat{\delta}(\hat{\varepsilon}) > 0$ такое, что для любого $\overline{x} \in O_{\hat{\delta}}(0)$ существует разбиение $\tau_\mu = \hat{t}_0 < \hat{t}_1 < \ldots < \hat{t}_m < (\tau_\mu + \hat{\varepsilon})$ такое, что существует кусочно-постоянное управление, соответствующее данному разбиению, которое переводит систему в 0. Каждому интервалу $[\hat{t}_{i-1}, \hat{t}_i)$ соответствует постоянное управление u_i (см. [19]).

В силу построений из пункта 2, можем выбрать такую точку разбиения $\tau_\mu \in (\overline{\tau}_\eta, T)$, что для $\hat{\delta} = \|x(\tau_{\mu-1})\|$ соответствующее $\hat{\varepsilon} < (\overline{\tau}_{\eta+1} - T)$. Так как $\overline{x} = \|x(\tau_\mu)\| < \|x(\tau_{\mu-1})\|$, то для начального положения $\|\overline{x}\|$ существует кусочно-постоянное управление, соответствующее точкам переключения $\tau_\mu = \hat{t}_0 < \hat{t}_1 < \ldots < \hat{t}_m < (\tau_\mu + \hat{\varepsilon})$, такое, что $x(\hat{t}_m) = 0$, при этом $\hat{t}_m < \overline{\tau}_{\eta+1}$.

Таким образом, до определенного выше момента τ_μ кусочно-постоянное управление преследователя строим по процедуре пункта 2, получая моменты переключения управления $\{\tau_q\}_{q=0}^{\mu}$. Далее, соответственно результатам [19] строим кусочно-постоянное управление, переводящее систему в 0, соответствующее точкам переключения $\tau_\mu = \hat{t}_0 < \hat{t}_1 < \ldots < \hat{t}_m$. Причем на каждом интервале $[\hat{t}_{i-1}, \hat{t}_i)$ управление равно вектору $u_i \in U$, так как совокупность векторов $\{f(0, u_1) + g(0, v_\eta), \ldots, f(0, u_m) + g(0, v_\eta)\}$ образует положительный базис в силу условий теоремы.

Таким образом, стратегия преследователя строится в два этапа. На первом этапе осуществляется приближение к 0 достаточно близко за конечное время, для того чтобы было возможно использовать свойство N-локальной управляемости системы (7). На втором этапе используется данное свойство для приведения системы в 0.

Теорема доказана. □

Пример 1. Рассмотрим систему (1) в $\mathbb{R}^2$, где

$$f(x, u) = \begin{pmatrix} 2\cos(x_1 + u_1) \\ u_2 e^{x_2} \end{pmatrix}, \quad g(x, v) = \begin{pmatrix} \sin(x_1 + v_1) \\ v_2 e^{x_2}/2 \end{pmatrix}.$$

Заданы множество $U = \{(\pi/2, 1), (\pi, -1), (0, -1)\}$ и множество $V = [-1, 1] \times [0, 1]$. Функции f, g являются липшицевыми по совокупности переменных. $f(0, U) = \{(0, 1), (-2, -1), (2, -1)\}$, $g(0, V) = [\sin(-1), \sin(1)] \times [0, 1/2]$. Значит, включение $-g(0, V) \subset \operatorname{Int}(\operatorname{co} f(0, U))$ выполнено. Следовательно, выполнены условия теоремы, то есть существует окрестность нуля, из которой происходит поимка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 480 с.
2. Blaquiere A., Gerard F., Leitmann G. Quantitative and qualitative differential games. New York: Academic Press, 1969. 172 p.
3. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
4. Friedman A. Differential games. New York: John Wiley and Sons, 1971. 350 p.
5. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
6. Hajek O. Pursuit games. New York: Academic Press, 1975. 266 p.
7. Leitmann G. Cooperative and non-cooperative many players differential games. Udine: Springer-Verlag Wien, 1974. 77 p. DOI: 10.1007/978-3-7091-2914-2
8. Петросян Л.А. Дифференциальные игры преследования. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1977. 222 с.
9. Черноусько Ф.Л., Меликян А.А. Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978. 270 с.
10. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
11. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. Т. 2. М.: Наука, 1988. 575 с.
12. Chikrii A.A. Conflict-controlled processes. Springer Netherlands, 1997. xx + 404 p. DOI: 10.1007/978-94-017-1135-7
13. Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во Московского ун-та, 1990. 197 с.
14. Сатимов Н.Ю., Рихсиев Б.Б. Методы решения задачи уклонения от встречи в математической теории управления. Ташкент: Фан, 2000. 176 с.
15. Никольский М.С. Одна нелинейная задача преследования // Кибернетика. 1973. № 2. С. 92–94.
16. Пшеничный Б.Н., Шишкина Н.Б. Достаточные условия конечности времени преследования // Прикладная математика и механика. 1985. Т. 49. Вып. 4. С. 517–523.
17. Двуреченский П.Е., Иванов Г.Е. Алгоритмы вычисления операторов Минковского и их применение в дифференциальных играх // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т. 54. № 2. С. 224–255. DOI: 10.7868/S0044466914020057
18. Ушаков В.Н., Ершов А.А. К решению задачи управления с фиксированным моментом окончания // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 4. С. 543–564. DOI: 10.20537/vm160409
19. Петров Н.Н. Об управляемости автономных систем // Дифференциальные уравнения. 1968. Т. 4. № 4. С. 606–617.
20. Петров Н.Н. Локальная управляемость автономных систем // Дифференциальные уравнения. 1968. Т. 4. № 7. С. 1218–1232.

Поступила в редакцию 26.06.2017

Щелчков Кирилл Александрович, аспирант, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: incognitobox@mail.ru

K. A. Shchelchkov

To a nonlinear pursuit problem with discrete control

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 3, pp. 389–395 (in Russian).

Keywords: differential game, pursuer, evader, nonlinear system.

MSC2010: 49N70, 49N75

DOI: 10.20537/vm170308

A two-person differential game is considered. The game is described by the following system of differential equations $\dot{x} = f(x,u) + g(x,v)$, where $x \in \mathbb{R}^k$, $u \in U$, $v \in V$. The pursuer's admissible control set is a finite subset of phase space. The evader's admissible control set is a compact subset of phase space. The pursuer's purpose is a translation of phase coordinates to zero. The evader's purpose is to prevent implementation of pursuer's purpose. Sufficient conditions on game parameters for the existence of zero neighborhood from which a capture occurs, that is translation of phase coordinates to zero, have been received. Also, it is proved that a period of time necessary for the pursuer to translate phase coordinates to zero tends to zero with the approaching of the initial position to zero. It happens regardless of the evader's control.

REFERENCES

1. Isaacs R. *Differential games*, New York: John Wiley and Sons, 1965, 416 p. Translated under the title *Differentsial'nye igry*, Moscow: Mir, 1967, 480 p.
2. Blaquiere A., Gerard F., Leitmann G. *Quantitative and qualitative differential games*, New York: Academic Press, 1969, 172 p.
3. Krasovskii N.N. *Igrovye zadachi o vstreche dvizhenii* (Game problems on meeting motions), Moscow: Nauka, 1970, 420 p.
4. Friedman A. *Differential games*, New York: John Wiley and Sons, 1971, 350 p.
5. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry* (Positional differential games), Moscow: Nauka, 1974, 456 p.
6. Hajek O. *Pursuit games*, New York: Academic Press, 1975, 266 p.
7. Leitmann G. *Cooperative and non-cooperative many players differential games*, Udine: Springer-Verlag Wien, 1974, 77 p. DOI: 10.1007/978-3-7091-2914-2
8. Petrosyan L.A. *Differentsial'nye igry presledovaniya* (Differential pursuit games), Leningrad: Leningrad State University, 1977, 222 p.
9. Chernous'ko F.L., Melikyan A.A. *Igrovye zadachi upravleniya i poiska* (Control and search game problems), Moscow: Nauka, 1978, 270 p.
10. Subbotin A.I., Chentsov A.G. *Optimizatsiya garantii v zadachakh upravleniya* (Optimization of guarantee in control problems), Moscow: Nauka, 1981, 288 p.
11. Pontryagin L.S. *Izbrannye nauchnye trudy. Tom 2* (Selected scientific works. Vol. 2), Moscow: Nauka, 1988, 575 p.
12. Chikrii A.A. *Conflict-controlled processes*, Springer Netherlands, 1997, xx + 404 p. DOI: 10.1007/978-94-017-1135-7
13. Grigorenko N.L. *Matematicheskie metody upravleniya neskol'kimi dinamicheskimi protsessami* (Mathematical methods of control over multiple dynamic processes), Moscow: Moscow State University, 1990, 197 p.
14. Satimov N.Yu., Rikhsiev B.B. *Metody resheniya zadachi ukloneniya ot vstrechi v matematicheskoi teorii upravleniya* (Methods of solution of evasion problems in mathematical control theory), Tashkent: Fan, 2000, 176 p.
15. Nikol'skii M.S. A certain nonlinear pursuit problem, *Kibernetika*, 1973, no. 2, pp. 92–94 (in Russian).
16. Pshenichnyi B.N., Shishkina N.B. Sufficient conditions of finiteness of the pursuit time, *J. Appl. Math. Mech.*, 1985, vol. 49, issue 4, pp. 399–404. DOI: 10.1016/0021-8928(85)90043-7
17. Dvurechensky P.E., Ivanov G.E. Algorithms for computing Minkowski operators and their application in differential games, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2014, vol. 54, issue 2, pp. 235–264. DOI: 10.1134/S0965542514020055
18. Ushakov V.N., Ershov A.A. On the solution of control problems with fixed terminal time, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2016, vol. 26, issue 4, pp. 543–564 (in Russian). DOI: 10.20537/vm160409
19. Petrov N.N. On the controllability of autonomous systems, *Differ. Uravn.*, 1968, vol. 4, no. 4, pp. 606–617 (in Russian).
20. Petrov N.N. Local controllability of autonomous systems, *Differ. Uravn.*, 1968, vol. 4, no. 7, pp. 1218–1232 (in Russian).

Received 26.06.2017

Shchelchkov Kirill Aleksandrovich, Post-Graduate Student, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: incognitobox@mail.ru