ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА 2017. Т. 27. Вып. 3

УДК 519.6

© *А. Г. Ченцов*

УЛЬТРАФИЛЬТРЫ И МАКСИМАЛЬНЫЕ СЦЕПЛЕННЫЕ СИСТЕМЫ МНОЖЕСТВ[1]

Рассматривается семейство максимальных сцепленных систем, элементами которых являются множества произвольной решетки с «нулем» и «единицей», а также его подсемейство, составленное из ультрафильтров данной решетки. Исследуются соотношения между естественными топологиями, используемыми для оснащения множества максимальных сцепленных систем и множества ультрафильтров упомянутой решетки множеств. Показано, что последнее множество в естественном (для пространств ультрафильтров) оснащении является подпространством пространства максимальных сцепленных систем в оснащении двумя сравнимыми топологиями, одна из которых подобна используемой при построении расширения Волмэна, а вторая соответствует на идейном уровне схеме построения пространства Стоуна в случае, когда решетка является алгеброй множеств. Свойства получающейся битопологической структуры детализированы для случаев, когда решетка является алгеброй множеств, топологией, семейством замкнутых множеств топологического пространства.

Ключевые слова: решетка множеств, топология, ультрафильтр.

DOI: 10.20537/vm170307

Введение

Максимальные сцепленные системы (МСС) замкнутых множеств топологического пространства исследовались в связи с понятием суперкомпактности и построением суперрасширений (см. [1–3] и др.). Отметим важное положение (см. [4]) о суперкомпактности метризуемых компактов, а также связь суперкомпактности с пространствами Волмэна (см. [2]). В упомянутых и многих других работах рассматривалась сцепленность семейств замкнутых множеств.

Возможен, однако, и более широкий взгляд на вещи, когда имеется в виду сцепленность подсемейств того или иного заданного априори семейства множеств. Последнее может, например, отвечать оснащению множества, играющего роль «единицы», той или иной измеримой структурой. Можно также рассматривать сцепленные системы открытых множеств в топологическом пространстве (ТП). Упомянутые случаи удается охватить единой схемой, отвечающей идее оснащения «единицы» произвольной решеткой ее подмножеств (п/м). В то же время данный подход позволяет [5,6] исследовать ультрафильтры (у/ф) упомянутой решетки с применением элементов теории битопологических пространств [7]. В силу этих причин представляет интерес связать для данного весьма общего случая (оснащения исходного множества произвольной решеткой его п/м) конструкции, оперирующие с МСС и с у/ф упомянутой решетки, имея в виду возможность оснащения множества всех МСС двумя характерными топологиями: по смыслу волмэновской и стоуновской.

§ 1. Общие сведения

Используем стандартную теоретико-множественную символику (кванторы, связки и др.); $\varnothing$ — пустое множество, $\triangleq$ — равенство по определению, выражение def заменяет фразу «по определению». Принимаем аксиому выбора; семейством называем множество, все элементы которого — множества.

[1]Работа выполнена в рамках Программы Президиума РАН «Математические задачи современной теории управления».

Если x и y — объекты, то $\{x;y\}$ есть def множество, содержащее x,y и не содержащее никаких других элементов. Множества — объекты; следуя [8, с. 67], полагаем для произвольных объектов a и b, что $(a,b) \triangleq \big\{\{a\};\{a;b\}\big\}$, получая упорядоченную пару (УП) с первым элементом a и вторым элементом b. Для произвольной УП z через $\mathrm{pr}_1(z)$ и $\mathrm{pr}_2(z)$ обозначаем соответственно первый и второй элементы z, однозначно определяемые условием $z = \big(\mathrm{pr}_1(z), \mathrm{pr}_2(z)\big)$. Для каждого объекта x в виде $\{x\} \triangleq \{x;x\}$ имеем синглетон, содержащий x.

Если X — множество, то через $\mathcal{P}(X)$ обозначаем семейство всех п/м X, полагаем также $\mathcal{P}'(X) \triangleq \mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$; наконец, через $\mathrm{Fin}(X)$ обозначаем семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(X)$. В качестве X может, конечно, использоваться семейство. Если $\mathfrak{X}$ — непустое семейство, то полагаем, что

$$\{\cup\}(\mathfrak{X}) \triangleq \Big\{\bigcup_{X\in\mathcal{X}} X : \mathcal{X} \in \mathcal{P}(\mathfrak{X})\Big\}, \qquad \{\cap\}(\mathfrak{X}) \triangleq \Big\{\bigcap_{X\in\mathcal{X}} X : \mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathfrak{X})\Big\},$$

$$\{\cup\}_\sharp(\mathfrak{X}) \triangleq \Big\{\bigcup_{X\in\mathcal{K}} X : \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathfrak{X})\Big\}, \qquad \{\cap\}_\sharp(\mathfrak{X}) \triangleq \Big\{\bigcap_{X\in\mathcal{K}} X : \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathfrak{X})\Big\},$$

получая четыре семейства п/м объединения всех множеств из $\mathfrak{X}$; ясно, что каждое из этих семейств содержит $\mathfrak{X}$. Если $\mathbb{M}$ — множество и $\mathcal{M} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(\mathbb{M})\big)$, то

$$\mathbf{C}_{\mathbb{M}}[\mathcal{M}] \triangleq \{\mathbb{M} \setminus M : M \in \mathcal{M}\} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(\mathbb{M})\big) \tag{1.1}$$

(семейство п/м $\mathbb{M}$, двойственное по отношению к $\mathcal{M}$); (1.1) будет, в частности, использоваться в случае, когда $\mathcal{M}$ — топология на $\mathbb{M}$. Если $\mathcal{A}$ — непустое семейство, а B — множество, то

$$\mathcal{A}|_B \triangleq \{A \cap B : A \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(B)\big);$$

тем самым определен след $\mathcal{A}$ на множество B (обычно рассматривается случай, когда $\mathcal{A} \in \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(\mathbb{A})\big)$ и $B \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$, где $\mathbb{A}$ — множество).

Если A и B — множества, то B^A есть def множество всех отображений из A в B; если $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$, то $f^1(C) \triangleq \{f(x) : x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$ (образ C при действии f), $f^1(C) \neq \varnothing$ при $C \neq \varnothing$.

Специальные семейства. В пределах настоящего пункта фиксируем непустое множество I. Семейство

$$\pi[I] \triangleq \{\mathcal{I} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(I)\big) \,|\, (\varnothing \in \mathcal{I}) \& (I \in \mathcal{I}) \& (A \cap B \in \mathcal{I} \ \ \forall A \in \mathcal{I} \ \ \forall B \in \mathcal{I})\}$$

всех π-систем п/м I с «нулем» и «единицей», в качестве своих подсемейств содержит семейства

$$(\mathrm{alg})[I] \triangleq \{\mathcal{A} \in \pi[I] \,|\, I \setminus A \in \mathcal{A} \ \ \forall A \in \mathcal{A}\}, \tag{1.2}$$

$$(\mathrm{top})[I] \triangleq \{\tau \in \pi[I] \,|\, \bigcup_{G\in\mathcal{G}} G \in \tau \ \ \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau)\} = \{\tau \in \pi[I] \,|\, \bigcup_{G\in\mathcal{G}} G \in \tau \ \ \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}(\tau)\}$$

всех алгебр п/м I и всех топологий на I. Введем, кроме того, семейство

$$(\mathrm{LAT})_o[I] \triangleq \{\mathcal{I} \in \pi[I] \,|\, A \cup B \in \mathcal{I} \ \ \forall A \in \mathcal{I} \ \ \forall B \in \mathcal{I}\} \tag{1.3}$$

всех решеток п/м I с «нулем» и «единицей». В связи с (1.2)–(1.3) полезно учесть, что

$$\big((\mathrm{alg})[I] \subset (\mathrm{LAT})_o[I]\big) \& \big((\mathrm{top})[I] \subset (\mathrm{LAT})_o[I]\big) \& \big(\mathbf{C}_I[\tau] \in (\mathrm{LAT})_o[I] \ \ \forall \tau \in (\mathrm{top})[I]\big). \tag{1.4}$$

В дальнейшем будем ориентироваться на «работу» с решетками из семейств, подобных (1.3); (1.4) показывает, что такой подход является весьма общим. Заметим, что последняя в (1.4) возможность будет отвечать использованию традиционно понимаемого суперрасширения (см., например, [3, гл. VII, § 4]).

Введем в рассмотрение решетки с синглетонами:

$$(\mathrm{LAT})^o[I] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{L} \in (\mathrm{LAT})_o[I] |\, \{x\} \in \mathcal{L} \ \ \forall\, x \in I\};$$

полезно иметь в виду, что при $\tau \in (\mathrm{top})[E]$, в случае когда (E, τ) есть T_1-пространство, непременно $\mathbf{C}_E[\tau] \in (\mathrm{LAT})^o[I]$. Наконец, в виде

$$\widetilde{\pi}^o[I] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{L} \in \pi[I] |\, \forall\, L \in \mathcal{L} \ \ \forall\, x \in I \setminus L\ \exists\, \widetilde{L} \in \mathcal{L} :\ (x \in \widetilde{L}) \wedge (\widetilde{L} \cap L = \varnothing)\}$$

имеем семейство отделимых π-систем (с «нулем» и «единицей»); ясно, что $(\mathrm{LAT})^o[I] \subset \widetilde{\pi}^o[I]$. В то же время возможен случай $(\mathrm{LAT})^o[I] \neq (\mathrm{LAT})_o[I] \cap \widetilde{\pi}^o[I]$. Напомним, что при $\mathcal{I} \in \pi[I]$ $(\mathrm{Cen})[\mathcal{I}] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{Z} \in \mathcal{P}'(\mathcal{I}) |\, \bigcap\limits_{Z \in \mathcal{K}} Z \neq \varnothing \ \ \forall\, \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{Z})\}$ есть семейство всех непустых центрированных подсемейств π-системы $\mathcal{I}$.

Базы и предбазы топологических пространств. В целях большей краткости в обозначениях фиксируем до конца настоящего пункта непустое множество X. Будем рассматривать открытые и замкнутые базы и предбазы топологических пространств с «единицей» X. В виде

$$\begin{gathered}(\mathrm{BAS})[X] \stackrel{\triangle}{=} \Big\{\mathcal{B} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(X)\big) \,\Big|\, \Big(X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B\Big) \& \big(\forall\, B_1 \in \mathcal{B} \\ \forall\, B_2 \in \mathcal{B} \ \ \forall\, x \in B_1 \cap B_2\ \exists\, B_3 \in \mathcal{B} :\ (x \in B_3) \& (B_3 \subset B_1 \cap B_2)\big)\Big\}\end{gathered} \tag{1.5}$$

имеем семейство всевозможных открытых баз топологий на X. При этом $\{\cup\}(\mathcal{B}) \in (\mathrm{top})[X]$ $\forall\, \mathcal{B} \in (\mathrm{BAS})[X]$ (топология, порожденная соответствующей базой). Если $\tau \in (\mathrm{top})[X]$, то

$$(\tau - \mathrm{BAS})_o[X] \stackrel{\triangle}{=} \big\{\mathcal{B} \in (\mathrm{BAS})[X] |\, \{\cup\}(\mathcal{B}) = \tau\big\} \tag{1.6}$$

есть семейство всех открытых баз ТП (X, τ). Семейство всевозможных открытых предбаз топологий на множестве X имеет вид

$$(\mathrm{p} - \mathrm{BAS})[X] \stackrel{\triangle}{=} \big\{\mathfrak{X} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(X)\big) |\, \{\cap\}_\sharp(\mathfrak{X}) \in (\mathrm{BAS})[X]\big\} = \big\{\mathfrak{X} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(X)\big) |\, X = \bigcup_{\mathbb{X} \in \mathfrak{X}} \mathbb{X}\big\}. \tag{1.7}$$

С учетом (1.5)–(1.7) получаем свойство $\{\cup\}\big(\{\cap\}_\sharp(\mathfrak{X})\big) \in (\mathrm{top})[X]$ $\forall\, \mathfrak{X} \in (\mathrm{p} - \mathrm{BAS})[X]$. Если $\tau \in (\mathrm{top})[X]$, то

$$(\mathrm{p} - \mathrm{BAS})_o[X; \tau] \stackrel{\triangle}{=} \big\{\mathfrak{X} \in (\mathrm{p} - \mathrm{BAS})[X] |\, \{\cap\}_\sharp(\mathfrak{X}) \in (\tau - \mathrm{BAS})_o[X]\big\} \tag{1.8}$$

есть семейство всех открытых предбаз ТП (X, τ). Введем теперь в рассмотрение семейство всех замкнутых топологий П. С. Александрова, полагая в духе [9, с. 98], что

$$\begin{gathered}(\mathrm{clos})[X] \stackrel{\triangle}{=} \big\{\mathcal{F} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(X)\big) |\, (\varnothing \in \mathcal{F}) \& (X \in \mathcal{F}) \& (A \cup B \in \mathcal{F} \ \ \forall\, A \in \mathcal{F} \ \ \forall\, B \in \mathcal{F}) \& \\ \& \Big(\bigcap_{F \in \mathcal{F}'} F \in \mathcal{F} \ \ \forall\, \mathcal{F}' \in \mathcal{P}'(\mathcal{F})\Big)\big\}\end{gathered}$$

(ясно, что $\mathbf{C}_X[\tau] \in (\mathrm{clos})[X]$ $\forall\, \tau \in (\mathrm{top})[X]$; кроме того, $\mathbf{C}_X[\mathcal{F}] \in (\mathrm{top})[X]$ $\forall\, \mathcal{F} \in (\mathrm{clos})[X]$). Семейство всех замкнутых баз топологий на X есть

$$\begin{gathered}(\mathrm{cl} - \mathrm{BAS})[X] \stackrel{\triangle}{=} \big\{\mathcal{B} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(X)\big) |\, (X \in \mathcal{B}) \& \Big(\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B = \varnothing\Big) \& \big(\forall\, B_1 \in \mathcal{B} \ \ \forall\, B_2 \in \mathcal{B} \\ \forall\, x \in X \setminus (B_1 \cup B_2)\ \exists\, B_3 \in \mathcal{B} :\ (B_1 \cup B_2 \subset B_3) \& (x \notin B_3)\big)\big\};\end{gathered}$$

легко видеть, что $\{\cap\}(\mathfrak{B}) \in (\mathrm{clos})[X] \quad \forall \mathfrak{B} \in (\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})[X]$. При $\tau \in (\mathrm{top})[X]$ полагаем, что

$$(\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})_o[X;\tau] \triangleq \big\{\mathcal{B} \in (\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})[X] \,|\, \mathbf{C}_X[\tau] = \{\cap\}(\mathcal{B})\big\}, \tag{1.9}$$

получая семейство всех замкнутых баз ТП (X,τ). В виде

$$(\mathrm{p}-\mathrm{BAS})_{\mathrm{cl}}[X] \triangleq \{\mathcal{X} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(X)\big) \,|\, \{\cup\}_\sharp(\mathcal{X}) \in (\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})[X]\}$$

имеем семейство всех замкнутых предбаз топологий на X. Если же $\tau \in (\mathrm{top})[X]$, то (см. (1.9))

$$(\mathrm{p}-\mathrm{BAS})^o_{\mathrm{cl}}[X;\tau] \triangleq \{\mathcal{X} \in (\mathrm{p}-\mathrm{BAS})_{\mathrm{cl}}[X] \,|\, \{\cup\}_\sharp(\mathcal{X}) \in (\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})_o[X;\tau]\} \tag{1.10}$$

есть семейство всех замкнутых предбаз ТП (X,τ). Если $\mathcal{X} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(X)\big)$, то

$$(\mathrm{COV})[X \,|\, \mathcal{X}] \triangleq \{\mathfrak{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{X}) \,|\, X = \bigcup_{\mathbb{X} \in \mathfrak{X}} \mathbb{X}\}.$$

Элементы топологии. Сохраняем предположение относительно X: X — непустое множество. При $\tau \in (\mathrm{top})[X]$ и $x \in X$ полагаем $N^o_\tau(x) \triangleq \{G \in \tau \,|\, x \in G\}$ и

$$N_\tau(x) \triangleq \{H \in \mathcal{P}(X) \,|\, \exists\, G \in N^o_\tau(x) : G \subset H\},$$

получая семейство окрестностей (см. [10, гл. I]) x в ТП (X,τ). Если $\tau \in (\mathrm{top})[X]$ и $A \in \mathcal{P}(X)$, то $\mathrm{cl}(A,\tau) \in \mathbf{C}_X[\tau]$ есть def замыкание A в (X,τ). Наконец, при $\tau \in (\mathrm{top})[X]$ через $(\tau-\mathrm{comp})[X]$ обозначаем семейство всех компактных в ТП (X,τ) п/м множества X.

Сцепленные системы. Введем в рассмотрение семейство

$$(\mathrm{link})[X] \triangleq \{\mathcal{X} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(X)\big) \,|\, A \cap B \neq \varnothing \quad \forall\, A \in \mathcal{X} \quad \forall\, B \in \mathcal{X}\} \tag{1.11}$$

всех сцепленных (см. [1–3]) систем п/м множества X. Если $\mathfrak{X} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(X)\big)$, то полагаем, что

$$(\mathfrak{X}-\mathrm{link})[X] \triangleq \{\mathcal{X} \in (\mathrm{link})[X] \,|\, \mathcal{X} \subset \mathfrak{X}\}; \tag{1.12}$$

элементы (1.12) суть сцепленные системы из семейства (1.11), содержащиеся в $\mathfrak{X}$. Наконец, при $\mathfrak{X} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(X)\big)$

$$(\mathfrak{X}-\mathrm{link})_o[X] \triangleq \{\mathcal{X} \in (\mathfrak{X}-\mathrm{link})[X] \,|\, \forall\, \widetilde{\mathcal{X}} \in (\mathfrak{X}-\mathrm{link})[X] \quad (\mathcal{X} \subset \widetilde{\mathcal{X}}) \Rightarrow (\mathcal{X} = \widetilde{\mathcal{X}})\}$$

есть семейство всех МСС п/м X, содержащихся в $\mathfrak{X}$.

§ 2. Фильтры и сцепленные системы (общие свойства)

В дальнейшем фиксируем непустое множество E; рассматриваем семейства п/м E.

Фильтры. Если $\mathcal{L} \in \pi[E]$, то

$$\begin{gathered}\mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \triangleq \big\{\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L} \setminus \{\varnothing\}) \,|\, (A \cap B \in \mathcal{F} \quad \forall\, A \in \mathcal{F} \quad \forall\, B \in \mathcal{F})\& \\ \&\big(\forall\, F \in \mathcal{F} \quad \forall\, L \in \mathcal{L} \quad (F \subset L) \Rightarrow (L \in \mathcal{F})\big)\big\}\end{gathered} \tag{2.1}$$

есть множество всех фильтров широко понимаемого измеримого пространства (ИП) $(E,\mathcal{L})$. Соответственно, множество всех у/ф данного ИП есть

$$\begin{aligned}\mathbb{F}^*_o(\mathcal{L}) &\triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \,|\, \forall\, \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \ (\mathcal{U} \subset \mathcal{F}) \Longrightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{F})\} = \\ &= \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \,|\, \forall\, L \in \mathcal{L} \quad (L \cap U \neq \varnothing \quad \forall\, U \in \mathcal{U}) \Longrightarrow (L \in \mathcal{U})\} = \\ &= \{\mathcal{U} \in (\mathrm{Cen})[\mathcal{L}] \,|\, \forall\, \mathcal{V} \in (\mathrm{Cen})[\mathcal{L}] \ (\mathcal{U} \subset \mathcal{V}) \Longrightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{V})\};\end{aligned}$$

$\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}) \neq \varnothing$. Традиционным образом определяются тривиальные фильтры ИП $(E, \mathcal{L})$, где $\mathcal{L} \in \pi[E]$: если $x \in E$, то $(\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x] \triangleq \{L \in \mathcal{L} | \, x \in L\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ есть тривиальный (фиксированный) фильтр, отвечающий точке x. При этом (см. [11, (5.9)])

$$\big((\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x] \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}) \quad \forall\, x \in E\big) \Longleftrightarrow (\mathcal{L} \in \widetilde{\pi}^o[E]) \tag{2.2}$$

((2.2) определяет необходимые и достаточные условия максимальности тривиальных фильтров). Полагаем, что (при $\mathcal{L} \in \pi[E]$)

$$\Phi_{\mathcal{L}}(L) \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}) | \, L \in \mathcal{U}\} \quad \forall\, L \in \mathcal{L}.$$

Тогда (см. [11,12]) $(\mathbb{UF})[E; \mathcal{L}] \triangleq \{\Phi_{\mathcal{L}}(L) : \, L \in \mathcal{L}\} \in (\mathrm{BAS})[\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})]$, и при этом топология

$$\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E] \triangleq \{\cup\}\big((\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}]\big) = \{\mathbb{G} \in \mathcal{P}\big(\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})\big) | \, \forall\, \mathcal{U} \in \mathbb{G} \; \exists\, U \in \mathcal{U} : \, \Phi_{\mathcal{L}}(U) \subset \mathbb{G}\} \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})]$$

превращает $\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})$ в нульмерное T_2-пространство

$$\big(\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]\big). \tag{2.3}$$

Если же $\mathcal{L} \in (\mathrm{LAT})_o[E]$, то имеем также (см. [5, (6.7)]) $(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}] \in (\mathrm{cl} - \mathrm{BAS})[\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})]$, а порожденная данной замкнутой базой топология

$$\mathbf{T}^o_{\mathcal{L}}[E] \triangleq \mathbf{C}_{\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})}\big[\{\cap\}\big((\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}]\big)\big] \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})] \tag{2.4}$$

превращает [5, раздел 6] $\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})$ в компактное T_1-пространство

$$\big(\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}^o_{\mathcal{L}}[E]\big), \tag{2.5}$$

при этом (см. [6]) $\mathbf{T}^o_{\mathcal{L}}[E] \subset \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]$; в виде триплета

$$\big(\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}^o_{\mathcal{L}}[E], \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]\big) \tag{2.6}$$

имеем (см. [7]) битопологическое пространство. Топологию $\mathbf{T}^o_{\mathcal{L}}[E]$ уместно назвать волмэновской, а $\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]$ — стоуновской, имея в виду аналогии с естественными случаями: при $\mathcal{L} = \mathbf{C}_E[\tau]$, где $\tau \in (\mathrm{top})[E]$ реализует T_1-пространство (E, τ), ТП (2.5) отвечает расширению Волмэна исходного ТП (E, τ), а при $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$ в виде (2.3) имеем нульмерный компакт, а точнее, пространство Стоуна.

Сцепленные системы. Напомним, что семейство $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big)$ называется сцепленным, если $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \varnothing \quad \forall\, \Sigma_1 \in \mathcal{E} \quad \forall\, \Sigma_2 \in \mathcal{E}$. Тогда (см. (1.11))

$$(\mathrm{link})[E] \triangleq \{\mathcal{E} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big) | \, \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \varnothing \quad \forall\, \Sigma_1 \in \mathcal{E} \quad \forall\, \Sigma_2 \in \mathcal{E}\}.$$

Пусть $\mathcal{L} \in (\mathrm{LAT})_o[E]$. Будем рассматривать сцепленные подсемейства $\mathcal{L}$, называя их для краткости сцепленными системами п/м E (в том случае, когда $\mathcal{L} = \mathbf{C}_E[\tau]$, где $\tau \in (\mathrm{top})[E]$, получаем сцепленные системы замкнутых множеств, что соответствует [1–4]); в виде $(\mathcal{L} - \mathrm{link})[E] = \{\mathcal{E} \in (\mathrm{link})[E] | \, \mathcal{E} \subset \mathcal{L}\}$ имеем семейство всех сцепленных систем п/м E; ясно, что $\mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \subset (\mathcal{L} - \mathrm{link})[E]$. Наконец,

$$(\mathcal{L} - \mathrm{link})_o[E] = \big\{\mathcal{E} \in (\mathcal{L} - \mathrm{link})[E] | \, \forall\, \widetilde{\mathcal{E}} \in (\mathcal{L} - \mathrm{link})[E] \quad (\mathcal{E} \subset \widetilde{\mathcal{E}}) \Rightarrow (\mathcal{E} = \widetilde{\mathcal{E}})\big\} \tag{2.7}$$

есть семейство всех МСС п/м E. Легко видеть, что

$$(\mathcal{L} - \mathrm{link})_o[E] = \big\{\mathcal{E} : \, \mathcal{E} \in (\mathcal{L} - \mathrm{link})[E] | \, \forall\, L \in \mathcal{L} \quad (L \cap \Sigma \neq \varnothing \quad \forall\, \Sigma \in \mathcal{E}) \Rightarrow (L \in \mathcal{E})\big\}. \tag{2.8}$$

Представления (2.7), (2.8) стандартны и на идейном уровне соответствуют [3, предложение 4.8]. В качестве очевидного следствия отметим, что

$$\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}) \subset (\mathcal{L} - \mathrm{link})_o[E]. \tag{2.9}$$

Из (2.9) следует, что $(\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E] \neq \varnothing$. Кроме того, имеем свойство, аналогичное [3, 4.7],

$$\forall\, \mathcal{L}_1 \in (\mathcal{L}-\mathrm{link})[E]\ \exists\, \mathcal{L}_2 \in (\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]:\ \mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_2. \tag{2.10}$$

Из определений (см., в частности, (2.8)) легко следует, что $\forall\, \mathcal{E} \in (\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]\ \ \forall\, \Sigma \in \mathcal{E}\ \ \forall\, L \in \mathcal{L}$

$$(\Sigma \subset L) \Longrightarrow (L \in \mathcal{E}); \tag{2.11}$$

в связи с (2.11) отметим очевидную аналогию с (2.1). Дополняя (2.9), отметим также, что

$$\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}) = \{\mathcal{U} \in (\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E] |\ A \cap B \in \mathcal{U}\ \ \forall\, A \in \mathcal{U}\ \ \forall\, B \in \mathcal{U}\}.$$

Заметим, что $\{L\} \in (\mathcal{L}-\mathrm{link})[E]\ \forall\, L \in \mathcal{L}\setminus\{\varnothing\}$. При этом $\mathcal{E}\cup\{E\} \in (\mathcal{L}-\mathrm{link})[E]\ \forall\, \mathcal{E} \in (\mathcal{L}-\mathrm{link})[E]$. В виде следствия получаем, что

$$E \in \mathcal{E}\ \ \forall\, \mathcal{E} \in (\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]. \tag{2.12}$$

Введем в рассмотрение множества, подобные используемым в [3, 4.10]:

$$(\mathcal{L}-\mathrm{link})^o[E|\, L] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{E} \in (\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E] |\ L \in \mathcal{E}\}\ \ \forall\, L \in \mathcal{L}. \tag{2.13}$$

Ясно, что $(\mathcal{L}-\mathrm{link})^o[E|\,\varnothing] = \varnothing$ и $(\mathcal{L}-\mathrm{link})^o[E|\,E] = (\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]$ (см. (2.12)). С учетом (2.11) получаем, что $\forall\, L_1 \in \mathcal{L}\ \ \forall\, L_2 \in \mathcal{L}$

$$(L_1 \subset L_2) \Longrightarrow \big((\mathcal{L}-\mathrm{link})^o[E|\, L_1] \subset (\mathcal{L}-\mathrm{link})^o[E|\, L_2]\big).$$

§ 3. Некоторые свойства, связанные с двойственностью

Всюду в дальнейшем $\mathcal{L} \in (\mathrm{LAT})_o[E]$ фиксируется; получаем непустое семейство

$$\mathfrak{C}_o^*[E;\mathcal{L}] \overset{\triangle}{=} \{(\mathcal{L}-\mathrm{link})^o[E|\, L]:\ L \in \mathcal{L}\} \in \mathcal{P}'\Big(\mathcal{P}\big((\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]\big)\Big). \tag{3.1}$$

Нам потребуется также семейство, двойственное по отношению к (3.1). В этой связи отметим прежде всего, что с учетом соотношений двойственности

$$\mathbf{C}_E[\mathcal{L}] \in (\mathrm{LAT})_o[E]. \tag{3.2}$$

С учетом (3.2) введем в рассмотрение множества

$$(\mathcal{L}-\mathrm{link})_{\mathrm{op}}^o[E|\,\Lambda] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{E} \in (\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E] |\ \exists\, \Sigma \in \mathcal{E}:\ \Sigma \subset \Lambda\}\ \ \forall\, \Lambda \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]. \tag{3.3}$$

По определению (двойственной) решетки (3.2) имеем, конечно, множества $(\mathcal{L}-\mathrm{link})_{\mathrm{op}}^o[E|\,E\setminus L]$ при $L \in \mathcal{L}$.

Предложение 3.1. *Если $L \in \mathcal{L}$, то*

$$(\mathcal{L}-\mathrm{link})_{\mathrm{op}}^o[E|\,E\setminus L] = (\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E] \setminus (\mathcal{L}-\mathrm{link})^o[E|\, L].$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{V} \in (\mathcal{L}-\mathrm{link})_{\mathrm{op}}^o[E|\,E\setminus L]$. Согласно (3.3) для некоторого $V \in \mathcal{V}$ имеем, что $V \subset E\setminus L$. При этом $\mathcal{V} \notin (\mathcal{L}-\mathrm{link})^o[E|\, L]$. В самом деле, если $\mathcal{V} \in (\mathcal{L}-\mathrm{link})^o[E|\, L]$, то согласно (2.13) $L \in \mathcal{V}$ и $V \cap L \neq \varnothing$ в силу сцепленности $\mathcal{V}$; однако $V \cap L = \varnothing$ по выбору V. Противоречие доказывает требуемое свойство, и, коль скоро выбор $\mathcal{V}$ был произвольным,

$$(\mathcal{L}-\mathrm{link})_{\mathrm{op}}^o[E|\,E\setminus L] \subset (\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E] \setminus (\mathcal{L}-\mathrm{link})^o[E|\, L].$$

Пусть $\mathcal{W} \in (\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E] \setminus (\mathcal{L}-\mathrm{link})^o[E|\, L]$. Тогда в силу (2.13) $L \notin \mathcal{W}$. Поэтому согласно (2.8) для некоторого $W \in \mathcal{W}$ имеет место свойство

$$L \cap W = \varnothing$$

(учитываем, что $L \in \mathcal{L}$), то есть $W \subset E \setminus L$, где $E \setminus L \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]$. Из (3.3) следует, что $\mathcal{W} \in (\mathcal{L} - \mathrm{link})^o_{\mathrm{op}}[E|\, E \setminus L]$, чем и завершается проверка вложения

$$(\mathcal{L} - \mathrm{link})_o[E] \setminus (\mathcal{L} - \mathrm{link})^o[E|\, L] \subset (\mathcal{L} - \mathrm{link})^o_{\mathrm{op}}[E|\, E \setminus L]. \qquad \square$$

Из предложения 3.1 следует, конечно, что

$$(\mathcal{L} - \mathrm{link})^o_{\mathrm{op}}[E|\, E] = (\mathcal{L} - \mathrm{link})^o_{\mathrm{op}}[E|\, E \setminus \varnothing] = (\mathcal{L} - \mathrm{link})_o[E], \tag{3.4}$$

так как $(\mathcal{L} - \mathrm{link})^o[E|\, \varnothing] = \varnothing$. Отметим, что

$$\mathfrak{C}^o_{\mathrm{op}}[E; L] \stackrel{\triangle}{=} \{(\mathcal{L} - \mathrm{link})^o_{\mathrm{op}}[E|\, \Lambda] :\ \Lambda \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]\} \in (\mathrm{p} - \mathrm{BAS})\big[(\mathcal{L} - \mathrm{link})_o[E]\big]. \tag{3.5}$$

Замечание 3.1. Проверим, что $\mathfrak{C}^o_{\mathrm{op}}[E; \mathcal{L}] \in (\mathrm{p} - \mathrm{BAS})\big[(\mathcal{L} - \mathrm{link})_o[E]\big]$. Действительно, из определения (см. (3.5)) следует, что

$$\mathfrak{C}^o_{\mathrm{op}}[E; \mathcal{L}] \in \mathcal{P}'\Big(\mathcal{P}\big((\mathcal{L} - \mathrm{link})_o[E]\big)\Big). \tag{3.6}$$

Пусть $\mathcal{E} \in (\mathcal{L} - \mathrm{link})_o[E]$. Тогда в силу (3.4) имеем, что $\mathcal{E} \in (\mathcal{L} - \mathrm{link})^o_{\mathrm{op}}[E|\, E]$. При этом согласно (3.2) $E \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]$, а тогда

$$(\mathcal{L} - \mathrm{link})^o_{\mathrm{op}}[E|\, E] \subset \bigcup_{S \in \mathfrak{C}^o_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{L}]} S.$$

Поэтому $\mathcal{E} \in \bigcup\limits_{S \in \mathfrak{C}^o_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{L}]} S$, чем завершается проверка вложения

$$(\mathcal{L} - \mathrm{link})_o[E] \subset \bigcup_{S \in \mathfrak{C}^o_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{L}]} S,$$

а следовательно (см. (3.6)), и равенства

$$(\mathcal{L} - \mathrm{link})_o[E] = \bigcup_{S \in \mathfrak{C}^o_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{L}]} S.$$

С учетом (1.7) получаем требуемое свойство: $\mathfrak{C}^o_{\mathrm{op}}[E; \mathcal{L}]$ есть открытая предбаза некоторой топологии на $(\mathcal{L} - \mathrm{link})_o[E]$. $\square$

Из (3.5) получаем, что $\{\cap\}_\sharp(\mathfrak{C}^o_{\mathrm{op}}[E; \mathcal{L}]) \in (\mathrm{BAS})\big[(\mathcal{L} - \mathrm{link})_o[E]\big]$ и, как следствие,

$$\mathbb{T}_o(E|\, \mathcal{L}) \stackrel{\triangle}{=} \{\cup\}\big(\{\cap\}_\sharp(\mathfrak{C}^o_{\mathrm{op}}[E; \mathcal{L}])\big) \in (\mathrm{top})\big[(\mathcal{L} - \mathrm{link})_o[E]\big]; \tag{3.7}$$

при этом, как легко проверить (см. предложение 3.1),

$$\mathfrak{C}^*_o[E; \mathcal{L}] = \mathbf{C}_{(\mathcal{L} - \mathrm{link})_o[E]}\big[\mathfrak{C}^o_{\mathrm{op}}[E; \mathcal{L}]\big]. \tag{3.8}$$

Замечание 3.2. Проверим (3.8). Поскольку при $L \in \mathcal{L}$ имеет место $E \setminus L \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]$, то

$$(\mathcal{L} - \mathrm{link})^o_{\mathrm{op}}[E|\, E \setminus L] \in \mathfrak{C}^o_{\mathrm{op}}[E; \mathcal{L}],$$

а потому (см. предложение 3.1)

$$(\mathcal{L} - \mathrm{link})_o[E] \setminus (\mathcal{L} - \mathrm{link})^o[E|\, L] \in \mathfrak{C}^o_{\mathrm{op}}[E; \mathcal{L}],$$

и, как следствие, получаем свойство

$$(\mathcal{L}-\mathrm{link})^o[E|\,L] = (\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]\setminus\big((\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]\setminus(\mathcal{L}-\mathrm{link})^o[E|\,L]\big)\in \mathbf{C}_{(\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]}\big[\mathfrak{C}^o_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{L}]\big]. \quad (3.9)$$

С учетом (3.1) и (3.9) получаем вложение

$$\mathfrak{C}^*_o[E;\mathcal{L}] \subset \mathbf{C}_{(\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]}\big[\mathfrak{C}^o_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{L}]\big]. \quad (3.10)$$

Выберем произвольно $\mathbf{M} \in \mathbf{C}_{(\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]}\big[\mathfrak{C}^o_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{L}]\big]$, после чего подберем $\mathbf{N} \in \mathfrak{C}^o_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{L}]$ такое, что $\mathbf{M} = (\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]\setminus \mathbf{N}$. Тогда с учетом (3.5) подберем $\Lambda \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]$ со свойством

$$\mathbf{N} = (\mathcal{L}-\mathrm{link})^o_{\mathrm{op}}[E|\,\Lambda].$$

При этом $E\setminus\Lambda \in \mathcal{L}$, и в силу предложения 3.1

$$\mathbf{N} = (\mathcal{L}-\mathrm{link})^o_{\mathrm{op}}[E|\,\Lambda] = (\mathcal{L}-\mathrm{link})^o_{\mathrm{op}}[E|\,E\setminus(E\setminus\Lambda)] = (\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]\setminus(\mathcal{L}-\mathrm{link})^o[E|\,E\setminus\Lambda] \in$$
$$\in \mathbf{C}_{(\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]}\big[\mathfrak{C}^*_o[E;\mathcal{L}]\big].$$

Как следствие, $\mathbf{M} \in \mathfrak{C}^*_o[E;\mathcal{L}]$, чем завершается проверка вложения

$$\mathfrak{C}_{(\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]}\big[\mathfrak{C}^o_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{L}]\big]\subset \mathfrak{C}^*_o[E;\mathcal{L}],$$

а стало быть (см. (3.10)), и требуемого равенства (3.8). □

Заметим, что $\varnothing = (\mathcal{L}-\mathrm{link})^o_{\mathrm{op}}[E|\,\varnothing] \in \mathfrak{C}^o_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{L}]$ (см. (3.2), (3.5)). Заметим также, что согласно (1.6) и (3.7)

$$\{\cap\}_\sharp(\mathfrak{C}^o_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{L}]) \in \big(\mathbb{T}_o(E|\,\mathcal{L})-\mathrm{BAS}\big)_o\big[(\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]\big].$$

С учетом (1.8) и (3.5) получаем, как следствие, что

$$\mathfrak{C}^o_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{L}] \in (\mathrm{p}-\mathrm{BAS})_o\big[(\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E];\mathbb{T}_o(E|\,\mathcal{L})\big]. \quad (3.11)$$

С учетом этого из (3.5), (3.8) и (3.11) получаем, используя двойственность, что

$$\mathfrak{C}^*_o[E;\mathcal{L}] \in (\mathrm{p}-\mathrm{BAS})^o_{\mathrm{cl}}\big[(\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E];\mathbb{T}_o(E|\,\mathcal{L})\big] \quad (3.12)$$

(заметим, что, поскольку $\varnothing \in \mathfrak{C}^o_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{L}]$, непременно $\varnothing \in \{\cap\}_\sharp(\mathfrak{C}^o_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{L}])$). Итак (см. (3.11), (3.12)), $\mathfrak{C}^o_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{L}]$ — открытая, а $\mathfrak{C}^*_o[E;\mathcal{L}]$ — замкнутая предбазы ТП

$$\big((\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E],\mathbb{T}_o(E|\,\mathcal{L})\big). \quad (3.13)$$

§ 4. Суперкомпактность пространства максимальных сцепленных систем

Сначала напомним основные понятия, связанные с суперкомпактными ТП. В этих построениях следуем [1–3]. Некоторые определения напомним.

Суперкомпактность. Если $(X,\tau), X \neq \varnothing$, есть ТП (то есть X — непустое множество и $\tau \in (\mathrm{top})[X]$), то полагаем, что

$$\big((\mathrm{p},\mathrm{bin})-\mathrm{cl}\big)[X;\tau] \triangleq \{\mathcal{X} \in (\mathrm{p}-\mathrm{BAS})^o_{\mathrm{cl}}[X;\tau]|\ \bigcap_{S\in\mathcal{S}} S \neq \varnothing\quad \forall\,\mathcal{S} \in (\mathcal{X}-\mathrm{link})[X]\} \quad (4.1)$$

(семейство всех замкнутых бинарных предбаз ТП (X,τ); оно может быть пустым). Легко видеть, что $\forall\,\mathcal{X} \in \big((\mathrm{p},\mathrm{bin})-\mathrm{cl}\big)[X;\tau]\quad \forall\,\mathfrak{C} \in (\mathrm{COV})\big[X|\,\mathbf{C}_X[\mathcal{X}]\big]\ \exists\,C_1 \in \mathfrak{C}\ \ \exists\,C_2 \in \mathfrak{C}$:

$$X = C_1 \cup C_2. \quad (4.2)$$

В (4.2) проясняется смысл бинарности соответствующей предбазы. Отметим в связи с (4.1), (4.2), что $\forall\,\mathcal{X} \in (\mathrm{p}-\mathrm{BAS})^o_{\mathrm{cl}}[X;\tau]$

$$\bigl(\forall\,\mathfrak{C} \in (\mathrm{COV})\bigl[X|\,\mathbf{C}_X[\mathcal{X}]\bigr]\ \exists\,C_1 \in \mathfrak{C}\ \ \exists\,C_2 \in \mathfrak{C}:\ X = C_1 \cup C_2\bigr) \Rightarrow \Bigl(\mathcal{X} \in \bigl((\mathrm{p},\mathrm{bin}) - \mathrm{cl}\bigr)[X;\tau]\Bigr).$$

Следуя [1–3], называем ТП (X,τ) суперкомпактным, если $\bigl((\mathrm{p},\mathrm{bin}) - \mathrm{cl}\bigr)[X;\tau] \neq \varnothing$.

Для всякого множества $M, M \neq \varnothing$, в виде

$$\bigl((\mathbb{SC}) - \mathrm{top}\bigr)[M] \triangleq \bigl\{\mathbf{t} \in (\mathrm{top})[M]|\ \bigl((\mathrm{p},\mathrm{bin}) - \mathrm{cl}\bigr)[M;\mathbf{t}] \neq \varnothing\bigr\}$$

имеем семейство всех топологий, превращающих M в суперкомпактное ТП. Супекомпактное T_2-пространство называется [13, 5.11] суперкомпактом. Напомним, что (см. [1–3,13]) суперкомпактное ТП компактно; поэтому при $\tau \in \bigl((\mathbb{SC}) - \mathrm{top}\bigr)[M]$, где M — непустое множество, имеем в виде (M,τ) компактное ТП.

Предложение 4.1. *В виде $\mathfrak{C}^*_o[E;\mathcal{L}]$ (3.8) имеем замкнутую бинарную предбазу ТП (3.13):*

$$\mathfrak{C}^*_o[E;\mathcal{L}] \in \bigl((\mathrm{p},\mathrm{bin}) - \mathrm{cl}\bigr)\bigl[(\mathcal{L} - \mathrm{link})_o[E];\mathbb{T}_o(E|\,\mathcal{L})\bigr].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Идея доказательства соответствует [3, 4.13]. Тем не менее рассмотрим данное рассуждение, имея в виду момент, связанный с существенным обобщением постановки (см. (1.4)). Полагаем для краткости, что $\mathfrak{C} \triangleq \mathfrak{C}^*_o[E;\mathcal{L}]$, получая (см. (3.12)) свойство

$$\mathfrak{C} \in (\mathrm{p}-\mathrm{BAS})^o_{\mathrm{cl}}\bigl[(\mathcal{L} - \mathrm{link})_o[E];\mathbb{T}_o(E|\,\mathcal{L})\bigr]. \tag{4.3}$$

Выберем произвольно $\mathcal{U} \in (\mathfrak{C}-\mathrm{link})\bigl[(\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]\bigr]$. Тогда в силу (1.12) $\mathcal{U} \in (\mathrm{link})\bigl[(\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]\bigr]$, при этом

$$\mathcal{U} \subset \mathfrak{C}. \tag{4.4}$$

Тогда $\forall\,A \in \mathcal{U}\ \ \forall\,B \in \mathcal{U}:\ A \cap B \neq \varnothing$. Введем в рассмотрение

$$\mathcal{V} \triangleq \{L \in \mathcal{L}|\ (\mathcal{L} - \mathrm{link})^o[E|\,L] \in \mathcal{U}\}. \tag{4.5}$$

Заметим, что $\mathcal{U} \neq \varnothing$ в силу (1.11). Пусть $\mathbb{U} \in \mathcal{U}$. Тогда $\mathbb{U} \in \mathfrak{C}$. При этом $\mathbb{U} \in \mathcal{P}\bigl((\mathcal{L} - \mathrm{link})_o[E]\bigr)$; см. (1.11). Из (4.4) следует (см. (3.1)), что для некоторого $U \in \mathcal{L}$

$$\mathbb{U} = (\mathcal{L} - \mathrm{link})^o[E|\,U].$$

Получаем, что $(\mathcal{L}-\mathrm{link})^o[E|\,U] \in \mathcal{U}$. Это означает (см. (4.5)), что $U \in \mathcal{V}$. Таким образом, $\mathcal{V} \neq \varnothing$. Получили свойство $\mathcal{V} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$ и, в частности, $\mathcal{V} \in \mathcal{P}'\bigl(\mathcal{P}(E)\bigr)$. Введем в рассмотрение

$$\mathfrak{U} \triangleq \{(\mathcal{L} - \mathrm{link})^o[E|\,L]:\ L \in \mathcal{V}\}. \tag{4.6}$$

В силу непустоты $\mathcal{V}$ и (4.5) имеем, что $\mathfrak{U} \neq \varnothing$. Далее, по определению $\mathcal{V}$ имеем вложение $\mathfrak{U} \subset \mathcal{U}$. Стало быть,

$$\mathfrak{U} \in \mathcal{P}'(\mathcal{U}).$$

Выберем произвольно $\alpha \in \mathcal{U}$. При этом согласно (1.11) $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}\bigl((\mathcal{L} - \mathrm{link})_o[E]\bigr)$, а потому $\alpha \in \mathcal{P}\bigl((\mathcal{L} - \mathrm{link})_o[E]\bigr)$, то есть $\alpha \subset (\mathcal{L} - \mathrm{link})_o[E]$. Отметим (см. (4.4)), что $\alpha \in \mathfrak{C}$, а тогда согласно (3.1) для некоторого $F \in \mathcal{L}$

$$\alpha = (\mathcal{L} - \mathrm{link})^o[E|\,F]. \tag{4.7}$$

Тогда в силу (4.5), (4.7) $F \in \mathcal{V}$. Из (4.6), (4.7) имеем теперь, что $\alpha \in \mathfrak{U}$. Поскольку выбор α был произвольным, установлено, что $\mathcal{U} \subset \mathfrak{U}$ и, как следствие,

$$\mathcal{U} = \mathfrak{U} = \{(\mathcal{L} - \mathrm{link})^o[E|\,L]:\ L \in \mathcal{V}\}. \tag{4.8}$$

Пусть $V_1 \in \mathcal{V}$ и $V_2 \in \mathcal{V}$. Рассмотрим множества $(\mathcal{L}-\mathrm{link})^o[E|\,V_1] \in \mathcal{U}$ и $(\mathcal{L}-\mathrm{link})^o[E|\,V_2] \in \mathcal{U}$. В силу сцепленности $\mathcal{U}$ имеем свойство

$$(\mathcal{L}-\mathrm{link})^o[E|\,V_1] \cap (\mathcal{L}-\mathrm{link})^o[E|\,V_2] \neq \varnothing.$$

Пусть $\beta \in (\mathcal{L}-\mathrm{link})^o[E|\,V_1] \cap (\mathcal{L}-\mathrm{link})^o[E|\,V_2]$. Тогда $\beta \in (\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]$; при этом $V_1 \in \beta$ и $V_2 \in \beta$. Поскольку β сцеплено, имеем свойство $V_1 \cap V_2 \neq \varnothing$. Коль скоро выбор V_1 и V_2 был произвольным, установлено, что $\mathcal{V} \in (\mathrm{link})[E]$ (см. (1.11)). Однако $\mathcal{V} \subset \mathcal{L}$ в силу (4.5), а потому (см. (1.12))

$$\mathcal{V} \in (\mathcal{L}-\mathrm{link})[E].$$

Выберем (см. (2.10)) произвольную МСС $\mathcal{W} \in (\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]$ со свойством

$$\mathcal{V} \subset \mathcal{W}. \tag{4.9}$$

Тогда, в частности, $\mathcal{W} \subset \mathcal{L}$. Если $\mathbb{V} \in \mathcal{V}$, то в силу (4.9) $\mathbb{V} \in \mathcal{W}$, а это означает, что $\mathcal{W} \in (\mathcal{L}-\mathrm{link})^o[E|\,\mathbb{V}]$. Итак,

$$\mathcal{W} \in (\mathcal{L}-\mathrm{link})^o[E|\,S] \quad \forall\, S \in \mathcal{V}. \tag{4.10}$$

Выберем произвольно $\lambda \in \mathcal{U}$. В силу (4.8) имеем для некоторого $\Phi \in \mathcal{V}$ равенство

$$\lambda = (\mathcal{L}-\mathrm{link})^o[E|\,\Phi]. \tag{4.11}$$

С учетом (4.10), (4.11) получаем теперь свойство $\mathcal{W} \in \lambda$. Поскольку λ выбиралось произвольно, установлено, что $\mathcal{W} \in \kappa \quad \forall\, \kappa \in \mathcal{U}$, то есть

$$\mathcal{W} \in \bigcap_{\kappa \in \mathcal{U}} \kappa.$$

Таким образом, пересечение всех множеств из $\mathcal{U}$ непусто. Коль скоро выбор $\mathcal{U}$ был произвольным, установлено, что

$$\bigcap_{\mathbb{L} \in \mathfrak{L}} \mathbb{L} \neq \varnothing \quad \forall\, \mathfrak{L} \in (\mathfrak{C}-\mathrm{link})\big[(\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]\big]. \tag{4.12}$$

Из (4.1), (4.3) и (4.12) вытекает, что

$$\mathfrak{C} \in \big((\mathrm{p},\mathrm{bin})-\mathrm{cl}\big)\big[(\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E];\mathbb{T}_o(E|\,\mathcal{L})\big],$$

чем и завершается доказательство. □

Из предложения 4.1 вытекает, что ТП (3.13) суперкомпактно; иными словами,

$$\mathbb{T}_o(E|\,\mathcal{L}) \in \big((\mathbb{SC})-\mathrm{top}\big)\big[(\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]\big]. \tag{4.13}$$

Из (4.2) и предложения 4.1 имеем, что $\forall\, \chi \in (\mathrm{COV})\Big[(\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]|\,\mathbf{C}_{(\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]}\big[\mathfrak{C}_o^*[E;\mathcal{L}]\big]\Big]$ $\exists\, C_1 \in \chi\ \exists\, C_2 \in \chi\colon (\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E] = C_1 \cup C_2$. Однако в силу (3.8) имеем равенство

$$\mathbf{C}_{(\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]}\big[\mathfrak{C}_o^*[E;\mathcal{L}]\big] = \mathfrak{C}_{\mathrm{op}}^o[E;\mathcal{L}].$$

Поэтому получаем следующее свойство:

$$\forall\, \chi \in (\mathrm{COV})\big[(\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]|\,\mathfrak{C}_{\mathrm{op}}^o[E;\mathcal{L}]\big]\ \exists\, C_1 \in \chi\ \exists\, C_2 \in \chi : (\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E] = C_1 \cup C_2. \tag{4.14}$$

С учетом (3.5) и (4.14) получаем, что $\forall\, \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\mathbf{C}_E[\mathcal{L}])$

$$\Big((\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E] = \bigcup_{\mathbb{G} \in \mathcal{G}} (\mathcal{L}-\mathrm{link})_{\mathrm{op}}^o[E|\,\mathbb{G}]\Big) \Rightarrow \big(\exists\, \mathbb{G}_1 \in \mathcal{G}\ \exists\, \mathbb{G}_2 \in \mathcal{G} :\ (\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E] =$$

$$= (\mathcal{L}-\mathrm{link})_{\mathrm{op}}^o[E|\,\mathbb{G}_1] \cup (\mathcal{L}-\mathrm{link})_{\mathrm{op}}^o[E|\mathbb{G}_2]\big).$$

§ 5. Связь с ультрафильтрами

Рассмотрим ТП (2.5), имея в виду свойство (2.9). Итак, у/ф — суть МСС. В то же время полезно отметить очевидное положение: $\forall\,\Lambda_1 \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]\ \ \forall\,\Lambda_2 \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]$

$$(\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \varnothing) \Longrightarrow \Big((\mathcal{L} - \mathrm{link})^o_{\mathrm{op}}[E|\,\Lambda_1] \cap (\mathcal{L} - \mathrm{link})^o_{\mathrm{op}}[E|\,\Lambda_2] = \varnothing\Big). \tag{5.1}$$

Замечание 5.1. Проверим (5.1), фиксируя $\Lambda_1 \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]$ и $\Lambda_2 \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]$ со свойством $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \varnothing$. Покажем, что

$$(\mathcal{L} - \mathrm{link})^o_{\mathrm{op}}[E|\,\Lambda_1] \cap (\mathcal{L} - \mathrm{link})^o_{\mathrm{op}}[E|\,\Lambda_2] = \varnothing. \tag{5.2}$$

Допустим противное: данное множество-пересечение непусто. Выберем

$$\mathcal{E} \in (\mathcal{L} - \mathrm{link})^o_{\mathrm{op}}[E|\,\Lambda_1] \cap (\mathcal{L} - \mathrm{link})^o_{\mathrm{op}}[E|\,\Lambda_2]. \tag{5.3}$$

Тогда в силу (3.3) и (5.3) для некоторых $\Sigma_1 \in \mathcal{E}$ и $\Sigma_2 \in \mathcal{E}$ имеют место вложения

$$(\Sigma_1 \subset \Lambda_1)\&(\Sigma_2 \subset \Lambda_2). \tag{5.4}$$

По выбору Λ_1 и Λ_2 имеем из (5.4), что $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \varnothing$, что противоречит сцепленности $\mathcal{E}$. Полученное противоречие доказывает (5.2), чем и завершается проверка (5.1). □

Заметим здесь же, что в силу (2.10) и сцепленности каждого синглетона, отвечающего непустому множеству из $\mathcal{L}$, получаем, что

$$\mathcal{L} \setminus \{\varnothing\} = \bigcup_{\mathcal{E} \in (\mathcal{L} - \mathrm{link})_o[E]} \mathcal{E} = \bigcup_{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_o(\mathcal{L})} \mathcal{U}$$

(для у/ф справедливо свойство, подобное (2.10)). Вернемся к пространству (2.5). Полагаем, что

$$\widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}|\,\Lambda] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_o(\mathcal{L})\,|\,\exists\, U \in \mathcal{U} :\ U \subset \Lambda\} \quad \forall\,\Lambda \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]. \tag{5.5}$$

Предложение 5.1. *Если $L \in \mathcal{L}$, то*

$$\mathbb{F}^*_o(\mathcal{L}) \setminus \Phi_{\mathcal{L}}(L) = \widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}|\,E \setminus L]. \tag{5.6}$$

Доказательство подобно обоснованию предложения 3.1. Тем не менее рассмотрим его схему. Пусть $\mathcal{V} \in \widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}|\,E \setminus L]$. Тогда, в частности, $\mathcal{V} \in \mathbb{F}^*_o(\mathcal{L})$, и при этом для некоторого $V \in \mathcal{V}$ имеет место вложение

$$V \subset E \setminus L.$$

В этом случае $V \cap L = \varnothing$. Тогда согласно определению § 2 имеем, что $\mathcal{V} \notin \Phi_{\mathcal{L}}(L)$ (см. также [14, (2.4)]). Получили, что $\mathcal{V} \in \mathbb{F}^*_o(\mathcal{L}) \setminus \Phi_{\mathcal{L}}(L)$, чем завершается проверка вложения

$$\widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}|\,E \setminus L] \subset \mathbb{F}^*_o(\mathcal{L}) \setminus \Phi_{\mathcal{L}}(L). \tag{5.7}$$

Выберем произвольно $\mathcal{W} \in \mathbb{F}^*_o(\mathcal{L}) \setminus \Phi_{\mathcal{L}}(L)$. Тогда $L \notin \mathcal{W}$, и, как следствие, для некоторого $W \in \mathcal{W}$ имеет место (см. [14, (2.4)]) свойство $L \cap W = \varnothing$. Тогда $W \subset E \setminus L$, где по выбору L имеем $E \setminus L \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]$. Поэтому согласно (5.5) $\mathcal{W} \in \widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}|\,E \setminus L]$. Итак, получили вложение

$$\mathbb{F}^*_o(\mathcal{L}) \setminus \Phi_{\mathcal{L}}(L) \subset \widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}|\,E \setminus L],$$

а стало быть (см. (5.7)), и требуемое равенство (5.6). □

Введем в рассмотрение непустое семейство

$$\widetilde{\mathfrak{F}}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}] \overset{\triangle}{=} \{\widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}|\,\Lambda] :\ \Lambda \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]\} \in \mathcal{P}'\Big(\mathcal{P}\big(\mathbb{F}^*_o(\mathcal{L})\big)\Big). \tag{5.8}$$

Предложение 5.2. *Справедливо равенство*

$$\widetilde{\mathfrak{F}}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}] = \mathbf{C}_{\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})}\big[(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}]\big]. \tag{5.9}$$

Доказательство. Выберем произвольно $\mathbb{V} \in \widetilde{\mathfrak{F}}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}]$. Тогда для некоторого $V \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]$ имеем (см. (5.8))

$$\mathbb{V} = \widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}|\, V]. \tag{5.10}$$

Отметим, что $W \triangleq E \setminus V \in \mathcal{L}$ по выбору V, причем $E \setminus W = V$, а тогда в силу предложения 5.1 и (5.10) $\mathbb{V} = \widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}|\, V] = \widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}|\, E \setminus W] = \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}) \setminus \Phi_{\mathcal{L}}(W) \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})}[(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}]]$, чем и завершается проверка вложения

$$\widetilde{\mathfrak{F}}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}] \subset \mathbf{C}_{\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})}\big[(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}]\big]. \tag{5.11}$$

Пусть $\mathbf{M} \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})}\big[(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}]\big]$, а $\mathbf{N} \in (\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}]$ таково, что

$$\mathbf{M} = \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}) \setminus \mathbf{N}. \tag{5.12}$$

Используя определения § 2, подберем $\mathbf{L} \in \mathcal{L}$ со свойством $\mathbf{N} = \Phi_{\mathcal{L}}(\mathbf{L})$. Тогда согласно предложению 5.1 имеем (см. (5.12))

$$\mathbf{M} = \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}) \setminus \Phi_{\mathcal{L}}(\mathbf{L}) = \widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}|\, E \setminus \mathbf{L}], \tag{5.13}$$

где $E \setminus \mathbf{L} \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]$. Из (5.8) и (5.13) получаем, что $\mathbf{M} \in \widetilde{\mathfrak{F}}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}]$. Итак, установлено, что

$$\mathbf{C}_{\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})}\big[(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}]\big] \subset \widetilde{\mathfrak{F}}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}],$$

откуда с учетом (5.11) получаем требуемое равенство (5.9). □

Напомним (см. § 2), что $(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}]$ есть замкнутая база, порождающая топологию $\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^o[E]$; при этом $\varnothing = \Phi_{\mathcal{L}}(\varnothing) \in (\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}]$ и $\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}) = \Phi_{\mathcal{L}}(E) \in (\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}]$. Тогда (см. [5, (1.18)])

$$\mathbf{C}_{\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})}\big[(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}]\big] \in (\mathrm{BAS})[\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})], \tag{5.14}$$

и при этом (см. (2.4), [5, (1.20)]) справедлива цепочка равенств

$$\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^o[E] = \mathbf{C}_{\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})}\big[\{\cap\}\big((\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}]\big)\big] = \{\cup\}\Big(\mathbf{C}_{\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})}\big[(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}]\big]\Big). \tag{5.15}$$

Из (5.14) и предложения 5.2 получаем, что $\widetilde{\mathfrak{F}}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}] \in (\mathrm{BAS})[\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})]$, и при этом (см. (5.15))

$$\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^o[E] = \{\cup\}(\widetilde{\mathfrak{F}}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}]). \tag{5.16}$$

Из (1.6) и (5.16) вытекает следующее свойство:

$$\widetilde{\mathfrak{F}}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}] \in (\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^o[E] - \mathrm{BAS})_o[\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})]. \tag{5.17}$$

Итак (см. (5.17)), семейство (5.8) является открытой базой ТП (2.5).

Предложение 5.3. *Если* $\Lambda \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]$, *то*

$$\widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}|\, \Lambda] = (\mathcal{L} - \mathrm{link})_{\mathrm{op}}^o[E|\, \Lambda] \cap \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}). \tag{5.18}$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{U} \in \widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}|\, \Lambda]$. Тогда $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})$ и для некоторого $U \in \mathcal{U}$ имеет место вложение $U \subset \Lambda$. Из (2.9) получаем, что $\mathcal{U} \in (\mathcal{L} - \mathrm{link})_o[E]$, а тогда согласно (3.3) $\mathcal{U} \in (\mathcal{L} - \mathrm{link})_{\mathrm{op}}^o[E|\, \Lambda] \cap \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})$. Итак, установлено вложение

$$\widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}|\, \Lambda] \subset (\mathcal{L} - \mathrm{link})_{\mathrm{op}}^o[E|\, \Lambda] \cap \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}). \tag{5.19}$$

Пусть $\mathfrak{U} \in (\mathcal{L} - \mathrm{link})_{\mathrm{op}}^o[E|\, \Lambda] \cap \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})$. Тогда в силу (3.3) для некоторого $\Sigma \in \mathfrak{U}$ имеет место $\Sigma \subset \Lambda$ (при этом, конечно, $\mathfrak{U} \in (\mathcal{L} - \mathrm{link})_o[E]$), а, поскольку $\mathfrak{U} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})$, из (5.5) следует, что

$\mathfrak{U} \in \widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}|\,\Lambda]$, чем и завершается проверка вложения $(\mathcal{L} - \mathrm{link})^o_{\mathrm{op}}[E|\,\Lambda] \cap \mathbb{F}^*_o(\mathcal{L}) \subset \widetilde{\mathbb{F}}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}|\,\Lambda]$, а следовательно (см. (5.19)), и равенства (5.18). □

Из (3.5), (5.8) и предложения 5.4 вытекает, что

$$\widetilde{\mathfrak{F}}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}] = \{(\mathcal{L} - \mathrm{link})^o_{\mathrm{op}}[E|\,\Lambda] \cap \mathbb{F}^*_o(\mathcal{L}) :\ \Lambda \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]\} = \\ = \{\mathbb{S} \cap \mathbb{F}^*_o(\mathcal{L}) :\ \mathbb{S} \in \mathfrak{C}^o_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{L}]\} = \mathfrak{C}^o_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{L}]\big|_{\mathbb{F}^*_o(\mathcal{L})}. \quad (5.20)$$

Итак, открытая база (5.17) есть след открытой предбазы (3.11). Из (5.20) следует

Предложение 5.4. *Топология $\mathbf{T}^o_{\mathcal{L}}[E]$ индуцирована на $\mathbb{F}^*_o(\mathcal{L})$ из ТП (3.13):*

$$\mathbf{T}^o_{\mathcal{L}}[E] = \mathbb{T}_o(E|\,\mathcal{L})\big|_{\mathbb{F}^*_o(\mathcal{L})}.$$

Итак, (2.5) является подпространством ТП (3.13). С учетом положений § 2 получаем, что $\mathbb{F}^*_o(\mathcal{L}) \in \big(\mathbb{T}_o(E|\,\mathcal{L}) - \mathrm{comp}\big)\big[(\mathcal{L} - \mathrm{link})_o[E]\big]$.

Предложение 5.5. *Если $\mathcal{E} \in (\mathcal{L} - \mathrm{link})_o[E]$, то*

$$\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} (\mathcal{L} - \mathrm{link})^o[E|\,\Sigma] = \{\mathcal{E}\}. \quad (5.21)$$

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{L}$ множество-пересечение в левой части (5.21). Сравним $\mathfrak{L}$ и $\{\mathcal{E}\}$. Тогда из (2.13) имеем с очевидностью, что $\mathcal{E} \in \mathfrak{L}$, а потому

$$\{\mathcal{E}\} \subset \mathfrak{L}. \quad (5.22)$$

Выберем произвольно $\mathcal{S} \in \mathfrak{L}$. Тогда $\mathcal{S} \in (\mathcal{L} - \mathrm{link})^o[E|\,\Sigma]\ \forall\,\Sigma \in \mathcal{E}$. Поскольку $\mathcal{E} \neq \varnothing$, имеем из (2.13), что $\mathcal{S} \in (\mathcal{L} - \mathrm{link})_o[E]$. Кроме того, в силу (2.13) $\Sigma \in \mathcal{S}\ \ \forall\,\Sigma \in \mathcal{E}$. Иными словами, $\mathcal{E} \subset \mathcal{S}$, а тогда с учетом максимальности $\mathcal{E}$ получаем (см. (2.7)) равенство $\mathcal{S} = \mathcal{E}$; поэтому $\mathcal{S} \in \{\mathcal{E}\}$, чем и завершается проверка вложения $\mathfrak{L} \subset \{\mathcal{E}\}$, откуда (см. (5.22)) следует требуемое равенство $\mathfrak{L} = \{\mathcal{E}\}$. □

Заметим, что (см. § 1) из (3.12) вытекает, что

$$\mathfrak{C}^*_o[E;\mathcal{L}] \subset \{\cup\}_\sharp(\mathfrak{C}^*_o[E;\mathcal{L}]) \subset \mathbf{C}_{(\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]}[\mathbb{T}_o(E|\,\mathcal{L})]; \quad (5.23)$$

мы учли (1.9) и (1.10), а также очевидное вложение $\{\cup\}_\sharp(\mathfrak{C}^*_o[E;\mathcal{L}]) \subset \{\cap\}\big(\{\cup\}_\sharp(\mathfrak{C}^*_o[E;\mathcal{L}])\big)$. Из (3.1) и (5.23) получаем следующее свойство:

$$(\mathcal{L} - \mathrm{link})^o[E|\,L] \in \mathbf{C}_{(\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]}[\mathbb{T}_o(E|\,\mathcal{L})]\ \ \forall\,L \in \mathcal{L}.$$

Теперь с учетом предложения 5.5 получаем (по свойствам замкнутых множеств), что

$$\{\mathcal{E}\} \in \mathbf{C}_{(\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]}[\mathbb{T}_o(E|\,\mathcal{L})]\ \ \forall\,\mathcal{E} \in (\mathcal{L} - \mathrm{link})_o[E].$$

Это означает, что (3.13) является T_1-пространством. С учетом положений § 4 получаем важное свойство: в виде (3.13) имеем суперкомпактное T_1-пространство.

Заметим, что согласно (3.7) $\mathfrak{C}^o_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{L}] \subset \mathbb{T}_o(E|\,\mathcal{L})$, а потому (см. (3.5)) при $\Lambda \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]$

$$(\mathcal{L} - \mathrm{link})^o_{\mathrm{op}}[E|\,\Lambda] \in \mathbb{T}_o(E|\,\mathcal{L});$$

если при этом $\mathcal{E} \in (\mathcal{L} - \mathrm{link})^o_{\mathrm{op}}[E|\,\Lambda]$, то (см. § 1) $(\mathcal{L} - \mathrm{link})^o_{\mathrm{op}}[E|\,\Lambda] \in N^o_{\mathbb{T}_o(E|\,\mathcal{L})}(\mathcal{E})$; в качестве Λ может использоваться множество $E \setminus L$, где $L \in \mathcal{L}$.

Предложение 5.6. *Если $\mathcal{E}_1 \in (\mathcal{L} - \mathrm{link})_o[E]$ и $\mathcal{E}_2 \in (\mathcal{L} - \mathrm{link})_o[E]$, то*

$$(\mathcal{E}_1 \neq \mathcal{E}_2) \Longleftrightarrow \big((\mathcal{E}_1 \setminus \mathcal{E}_2 \neq \varnothing)\&(\mathcal{E}_2 \setminus \mathcal{E}_1 \neq \varnothing)\big).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем МСС $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$. Пусть $\mathcal{E}_1 \neq \mathcal{E}_2$. Тогда $\mathcal{E}_1 \setminus \mathcal{E}_2 \neq \varnothing$. В самом деле, допустим противное: $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_2$. Тогда в силу максимальности $\mathcal{E}_1$ имеем (см. (2.7)) равенство $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$, что невозможно. Противоречие доказывает, что $\mathcal{E}_1 \setminus \mathcal{E}_2 \neq \varnothing$. Аналогичным образом проверяется, что $\mathcal{E}_2 \setminus \mathcal{E}_1 \neq \varnothing$. Итак, $(\mathcal{E}_1 \neq \mathcal{E}_2) \Longrightarrow \big((\mathcal{E}_1 \setminus \mathcal{E}_2 \neq \varnothing)\&(\mathcal{E}_2 \setminus \mathcal{E}_1 \neq \varnothing)\big)$. Противоположная импликация очевидна. $\square$

Следствие 5.1. *Пусть* $\mathcal{E}_1 \in (\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]$ *и* $\mathcal{E}_2 \in (\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]$. *Тогда*

$$(\mathcal{E}_1 \neq \mathcal{E}_2) \Longleftrightarrow (\exists\,\Sigma_1 \in \mathcal{E}_1 \ \ \exists\,\Sigma_2 \in \mathcal{E}_2 : \ \Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \varnothing).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{E}_1 \neq \mathcal{E}_2$. Тогда согласно предложению 5.6 $\mathcal{E}_1 \setminus \mathcal{E}_2 \neq \varnothing$. Пусть $A \in \mathcal{E}_1 \setminus \mathcal{E}_2$. Тогда $A \in \mathcal{L}$, и в силу (2.8) для некоторого $B \in \mathcal{E}_2$ имеет место $A \cap B = \varnothing$. Итак, установлена импликация $(\mathcal{E}_1 \neq \mathcal{E}_2) \Longrightarrow (\exists\,\Sigma_1 \in \mathcal{E}_1 \ \ \exists\,\Sigma_2 \in \mathcal{E}_2 : \ \Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \varnothing)$. Если же $\Xi_1 \in \mathcal{E}_1$ и $\Xi_2 \in \mathcal{E}_2$ таковы, что $\Xi_1 \cap \Xi_2 = \varnothing$, то $\mathcal{E}_1 \neq \mathcal{E}_2$ силу сцепленности и $\mathcal{E}_1$, и $\mathcal{E}_2$. $\square$

Для любых двух непустых семейств $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ полагаем, что

$$(\mathrm{Dis})[\mathcal{E}_1;\mathcal{E}_2] \triangleq \{z \in \mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2 |\, \mathrm{pr}_1(z) \cap \mathrm{pr}_2(z) = \varnothing\}. \tag{5.24}$$

Для нас важен вариант (5.24) в случае, когда $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ суть МСС. Легко видеть, что при $\mathcal{E}_1 \in (\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]$, $\mathcal{E}_2 \in (\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]$ и $z \in (\mathrm{Dis})[\mathcal{E}_1;\mathcal{E}_2]$

$$(\mathcal{L}-\mathrm{link})^o_{\mathrm{op}}[E|\, E \setminus \mathrm{pr}_2(z)] \in N^o_{\mathbb{T}_o(E|\,\mathcal{L})}(\mathcal{E}_1) : \ \mathcal{E}_2 \notin (\mathcal{L}-\mathrm{link})^o_{\mathrm{op}}[E \setminus \mathrm{pr}_2(z)]. \tag{5.25}$$

В дополнение к (5.25) отметим (см. (5.24) и следствие 5.1), что $(\mathrm{Dis})[\mathcal{E}_1;\mathcal{E}_2] \neq \varnothing$ при $\mathcal{E}_1 \in$ $\in (\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]$ и $\mathcal{E}_2 \in (\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E] \setminus \{\mathcal{E}_1\}$. Поэтому (5.25) определяет конкретную реализацию T_1-отделимости в ТП (3.13).

§ 6. Семейство максимальных сцепленных систем как нульмерное T_2-пространство

Вернемся к рассмотрению семейства (3.1). Ранее отмечалось, что (см. предложение 4.1) данное семейство есть замкнутая бинарная предбаза ТП (3.13). Вместе с тем (см. (2.7), (2.13))

$$\bigcup_{\mathbb{S} \in \mathfrak{C}^*_o[E;\mathcal{L}]} \mathbb{S} = \bigcup_{L \in \mathcal{L}} (\mathcal{L}-\mathrm{link})^o[E|\, L] = (\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E],$$

а потому согласно (1.7) и (3.1) имеет место свойство

$$\mathfrak{C}^*_o[E;\mathcal{L}] \in (\mathrm{p}-\mathrm{Bas})\big[(\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]\big], \tag{6.1}$$

то есть (3.1) есть также и открытая предбаза. Как следствие,

$$\{\cap\}_\sharp(\mathfrak{C}^*_o[E;\mathcal{L}]) \in (\mathrm{BAS})\big[(\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]\big]$$

и

$$\mathbb{T}_*(E|\,\mathcal{L}) \triangleq \{\cup\}\big(\{\cap\}_\sharp(\mathfrak{C}^*_o[E;\mathcal{L}])\big) \in (\mathrm{top})\big[(\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]\big]. \tag{6.2}$$

Мы получили (непустое) ТП

$$\big((\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E], \mathbb{T}_*(E|\,\mathcal{L})\big), \tag{6.3}$$

для которого (см. (6.1), (6.2)) имеет место вложение

$$\mathfrak{C}^*_o[E;\mathcal{L}] \subset \mathbb{T}_*(E|\,\mathcal{L}). \tag{6.4}$$

Отметим, что в силу (2.13) $\forall\, L_1 \in \mathcal{L} \ \ \forall\, L_2 \in \mathcal{L}$

$$(L_1 \cap L_2 = \varnothing) \Longrightarrow \big((\mathcal{L}-\mathrm{link})^o[E|\, L_1] \cap (\mathcal{L}-\mathrm{link})^o[E|\, L_2] = \varnothing\big) \tag{6.5}$$

(используем определение сцепленности в § 1). Поэтому с учетом (5.24) имеем, что

$$(\mathcal{L}-\mathrm{link})^o[E|\,\mathrm{pr}_1(z)]\cap(\mathcal{L}-\mathrm{link})^o[E|\,\mathrm{pr}_2(z)]=\varnothing$$
$$\forall\,\mathcal{E}_1\in(\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]\quad\forall\,\mathcal{E}_2\in(\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]\quad\forall\,z\in(\mathrm{Dis})[\mathcal{E}_1;\mathcal{E}_2]. \tag{6.6}$$

Из (2.13), (3.1) и (6.4) вытекает, однако, что $(\mathcal{L}-\mathrm{link})^o[E|\,L]\in N^o_{\mathbb{T}_*(E|\mathcal{L})}(\mathcal{E})\ \forall\,\mathcal{E}\in(\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]$ $\forall\,L\in\mathcal{E}$. Из (6.6) по свойствам, отмеченным в заключении § 5, следует теперь, что

$$\forall\,\mathcal{E}_1\in(\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]\quad\forall\,\mathcal{E}_2\in(\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]\setminus\{\mathcal{E}_1\}$$
$$\exists\,\mathbb{G}_1\in N^o_{\mathbb{T}_*(E|\mathcal{L})}(\mathcal{E}_1)\quad\exists\,\mathbb{G}_2\in N^o_{\mathbb{T}_*(E|\mathcal{L})}(\mathcal{E}_2):\ \mathbb{G}_1\cap\mathbb{G}_2=\varnothing. \tag{6.7}$$

Замечание 6.1. Проверим (6.7), фиксируя $\mathcal{E}_1\in(\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]$ и $\mathcal{E}_2\in(\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]\setminus\{\mathcal{E}_1\}$. Тогда $(\mathrm{Dis})[\mathcal{E}_1;\mathcal{E}_2]\neq\varnothing$ (см. следствие 5.1 и (5.24)). Выберем произвольно $\mathbf{z}\in(\mathrm{Dis})[\mathcal{E}_1;\mathcal{E}_2]$; тогда имеем для $\mathbb{L}_1\triangleq\mathrm{pr}_1(\mathbf{z})\in\mathcal{E}_1$ и $\mathbb{L}_2\triangleq\mathrm{pr}_2(\mathbf{z})\in\mathcal{E}_2$ свойство $\mathbb{L}_1\cap\mathbb{L}_2=\varnothing$. Поскольку $\mathbb{L}_1\in\mathcal{L}$ и $\mathbb{L}_2\in\mathcal{L}$, имеем из (6.5)

$$(\mathcal{L}-\mathrm{link})^o[E|\,\mathbb{L}_1]\cap(\mathcal{L}-\mathrm{link})^o[E|\,\mathbb{L}_2]=\varnothing, \tag{6.8}$$

где $(\mathcal{L}-\mathrm{link})^o[E|\,\mathbb{L}_1]\in N^o_{\mathbb{T}_*(E|\mathcal{L})}(\mathcal{E}_1)$ и $(\mathcal{L}-\mathrm{link})^o[E|\,\mathbb{L}_2]\in N^o_{\mathbb{T}_*(E|\mathcal{L})}(\mathcal{E}_2)$. Теперь из (6.8) получаем утверждение, определяющее (6.7), так как выбор $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ был произвольным. □

Из (6.7) вытекает, что (6.3) есть T_2-пространство. Покажем, что данное ТП нульмерно. Заметим сначала, что справедливо следующее

Предложение 6.1. *Если $A\in\mathcal{L}$, то справедливо равенство*

$$(\mathcal{L}-\mathrm{link})^o[E|\,A]=\{\mathcal{E}\in(\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]|\,A\cap\Sigma\neq\varnothing\quad\forall\,\Sigma\in\mathcal{E}\}. \tag{6.9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через Ω множество в правой части (6.9) (множество $A\in\mathcal{L}$ фиксируем). Пусть $\mathcal{S}\in(\mathcal{L}-\mathrm{link})^o[E|\,A]$. Тогда в силу (2.13) $\mathcal{S}\in(\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]$, и при этом $A\in\mathcal{S}$. Тогда по свойству сцепленности $A\cap\Sigma\neq\varnothing\quad\forall\,\Sigma\in\mathcal{S}$. В итоге $\mathcal{S}\in\Omega$. Установлено вложение

$$(\mathcal{L}-\mathrm{link})^o[E|\,A]\subset\Omega. \tag{6.10}$$

Пусть $\mathcal{V}\in\Omega$. Тогда $\mathcal{V}\in(\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]$, и при этом $A\cap\Sigma\neq\varnothing\quad\forall\,\Sigma\in\mathcal{V}$. С учетом этого свойства и (2.8) получаем в силу максимальности $\mathcal{V}$, что $A\in\mathcal{V}$, а тогда из (2.13) следует, что $\mathcal{V}\in(\mathcal{L}-\mathrm{link})^o[E|\,A]$, чем и завершается проверка вложения $\Omega\subset(\mathcal{L}-\mathrm{link})^o[E|\,A]$, а стало быть (см. (6.10)), и равенства (6.9). □

Предложение 6.2. *Если $A\in\mathcal{L}$, то $(\mathcal{L}-\mathrm{link})^o[E|\,A]\in\mathbf{C}_{(\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]}[\mathbb{T}_*(E|\,\mathcal{L})]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $A\in\mathcal{L}$; полагаем $\mathbb{A}\triangleq(\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]\setminus(\mathcal{L}-\mathrm{link})^o[E|\,A]$. Пусть $\mathcal{V}\in\mathbb{A}$. Тогда согласно предложению 6.1 для некоторого $V\in\mathcal{V}$ имеем

$$A\cap V=\varnothing. \tag{6.11}$$

Отметим, что $\mathcal{V}\in(\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]$, а тогда $V\in\mathcal{L}$ (см. § 2) и в соответствии с (2.13) определено множество

$$(\mathcal{L}-\mathrm{link})^o[E|\,V]=\{\mathcal{E}\in(\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]|\,V\in\mathcal{E}\},\ (\mathcal{L}-\mathrm{link})^o[E|\,V]\in\mathfrak{C}^*_o[E;\mathcal{L}]$$

(см. (3.1)). При этом $\mathcal{V}\in(\mathcal{L}-\mathrm{link})^o[E|\,V]$. Если $\mathcal{W}\in(\mathcal{L}-\mathrm{link})^o[E|\,V]$, то в силу (2.13) $V\in\mathcal{W}$, откуда с учетом (6.11) следует, что $\exists\,\Sigma\in\mathcal{W}:\ A\cap\Sigma=\varnothing$. Вновь используя предложение 6.1, получаем, что $\mathcal{W}\notin(\mathcal{L}-\mathrm{link})^o[E|\,A]$, а потому $\mathcal{W}\in\mathbb{A}$. Итак, установлено вложение $(\mathcal{L}-\mathrm{link})^o[E|\,V]\subset\mathbb{A}$. Таким образом, $\exists\,\mathbb{G}\in\mathfrak{C}^*_o[E;\mathcal{L}]:\ (\mathcal{V}\in\mathbb{G})\wedge(\mathbb{G}\subset\mathbb{A})$. Коль скоро выбор $\mathcal{V}$ был произвольным, получаем, что

$$\forall\,\mathcal{E}\in\mathbb{A}\ \exists\,\mathbb{G}\in\mathfrak{C}^*_o[E;\mathcal{L}]:\ (\mathcal{E}\in\mathbb{G})\&(\mathbb{G}\subset\mathbb{A}). \tag{6.12}$$

Поскольку $\mathfrak{C}_o^*[E;\mathcal{L}] \subset \{\cap\}_\sharp(\mathfrak{C}_o^*[E;\mathcal{L}])$, (6.12) означает (см. (6.2)), что $\mathbb{A} \in \mathbb{T}_*(E|\,\mathcal{L})$, а тогда $(\mathcal{L}-\mathrm{link})^o[E|\,A] = (\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E] \setminus \mathbb{A} \in \mathbf{C}_{(\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]}[\mathbb{T}_*(E|\,\mathcal{L})]$, что и требовалось доказать. $\square$

Из предложения 6.2 и (3.1) вытекает, что $\mathfrak{C}_o^*[E;\mathcal{L}] \subset \mathbf{C}_{(\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]}[\mathbb{T}_*(E|\,\mathcal{L})]$, и, как следствие (по свойствам замкнутых множеств),

$$\{\cap\}_\sharp(\mathbf{C}_o^*[E;\mathcal{L}]) \subset \mathbf{C}_{(\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]}[\mathbb{T}_*(E|\,\mathcal{L})]; \tag{6.13}$$

разумеется, учитываем то, что в правой части (6.13) используется семейство всех подмножеств $(\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]$, замкнутых в ТП (6.3). Итак, ТП (6.3) обладает базой, состоящей из открыто-замкнутых множеств. Поэтому (6.3) есть нульмерное T_2-пространство.

Отметим, что из определений § 2, (2.9) и (2.13) следует свойство

$$\Phi_\mathcal{L}(L) = (\mathcal{L}-\mathrm{link})^o[E|\,L] \cap \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}) \quad \forall\, L \in \mathcal{L}. \tag{6.14}$$

Предложение 6.3. *Справедливо равенство* $(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}] = \mathfrak{C}_o^*[E;\mathcal{L}]\big|_{\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используем (6.14). Если $\mathbf{U} \in (\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}]$, то для некоторого $\mathbf{L} \in \mathcal{L}$ имеем (см. § 2, (6.14)) $\mathbf{U} = \Phi_\mathcal{L}(\mathbf{L}) = (\mathcal{L}-\mathrm{link})^o[E|\,\mathbf{L}] \cap \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})$, где $(\mathcal{L}-\mathrm{link})^o[E|\,\mathbf{L}] \in \mathfrak{C}_o^*[E;\mathcal{L}]$ согласно (3.1). Поэтому $\mathbf{U} \in \mathfrak{C}_o^*[E;\mathcal{L}]\big|_{\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})}$. Установлено, что

$$(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}] \subset \mathfrak{C}_o^*[E;\mathcal{L}]\big|_{\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})}. \tag{6.15}$$

Пусть теперь $\alpha \in \mathfrak{C}_o^*[E;\mathcal{L}]\big|_{\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})}$, а $\beta \in \mathfrak{C}_o^*[E;\mathcal{L}]$ таково, что

$$\alpha = \beta \cap \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}).$$

Тогда для некоторого $\mathbf{B} \in \mathcal{L}$ имеет место $\beta = (\mathcal{L}-\mathrm{link})^o[E|\,\mathbf{B}]$ (см. (3.1)), а потому из (6.14) следует, что $\Phi_\mathcal{L}(\mathbf{B}) = (\mathcal{L}-\mathrm{link})^o[E|\,\mathbf{B}] \cap \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}) = \beta \cap \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}) = \alpha$, где $\Phi_\mathcal{L}(\mathbf{B}) \in (\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}]$. В итоге $\alpha \in (\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}]$, чем завершается проверка вложения $\mathfrak{C}_o^*[E;\mathcal{L}]\big|_{\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})} \subset (\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}]$, а с учетом (6.15) и требуемого равенства $(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}] = \mathfrak{C}_o^*[E;\mathcal{L}]\big|_{\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})}$. $\square$

В качестве весьма очевидного следствия получаем

Предложение 6.4. *Справедливо следующее равенство топологий:*

$$\mathbf{T}_\mathcal{L}^*[E] = \mathbb{T}_*(E|\,\mathcal{L})\big|_{\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})}. \tag{6.16}$$

Предложение 6.5. *Топологии* $\mathbb{T}_o(E|\,\mathcal{L})$ *и* $\mathbb{T}_*(E|\,\mathcal{L})$ *сравнимы, и при этом*

$$\mathbb{T}_o(E|\,\mathcal{L}) \subset \mathbb{T}_*(E|\,\mathcal{L}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учтем (3.1), (3.8) и (3.12). В связи с (3.12) отметим, что (см. (1.10)) $\{\cup\}_\sharp(\mathfrak{C}_o^*[E;\mathcal{L}]) \in (\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})_o[(\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E];\mathbb{T}_o(E|\,\mathcal{L})]$, а тогда согласно (1.9) получаем равенство

$$\mathbf{C}_{(\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]}[\mathbb{T}_o(E|\,\mathcal{L})] = \{\cap\}\big(\{\cup\}_\sharp(\mathfrak{C}_o^*[E;\mathcal{L}])\big). \tag{6.17}$$

При этом, конечно, справедливо вложение $\mathfrak{C}_o^*[E;\mathcal{L}] \subset \{\cup\}_\sharp(\mathfrak{C}_o^*[E;\mathcal{L}])$. Как следствие, получаем (см. (6.17)) следующее вложение: $\{\cap\}(\mathfrak{C}_o^*[E;\mathcal{L}]) \subset \mathbf{C}_{(\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]}[\mathbb{T}_o(E|\,\mathcal{L})]$. Выберем произвольно множество $\mathbb{F} \in \mathbf{C}_{(\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]}[\mathbb{T}_o(E|\,\mathcal{L})]$. Тогда $\mathbb{F} \in \mathcal{P}\big((\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]\big)$, и согласно (6.17)

$$\mathbb{F} = \bigcap_{\mathbb{X} \in \kappa} \mathbb{X}, \tag{6.18}$$

где $\kappa \in \mathcal{P}'\big(\{\cup\}_\sharp(\mathfrak{C}_o^*[E;\mathcal{L}])\big)$. При этом $\kappa \neq \varnothing$ и $\kappa \subset \{\cup\}_\sharp(\mathfrak{C}_o^*[E;\mathcal{L}])$. Заметим, что согласно (6.13) имеем, в частности, цепочку вложений $\mathfrak{C}_o^*[E;\mathcal{L}] \subset \{\cap\}(\mathfrak{C}_o^*[E;\mathcal{L}]) \subset \mathbf{C}_{(\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]}[\mathbb{T}_*(E|\,\mathcal{L})]$.

Поэтому по свойствам замкнутых множеств в произвольном ТП получаем очевидное вложение $\{\cup\}_\sharp(\mathfrak{C}_o^*[E;\mathcal{L}]) \subset \mathbf{C}_{(\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]}[\mathbb{T}_*(E|\,\mathcal{L})]$ (объединение конечного семейства замкнутых множеств замкнуто). Тогда по выбору κ имеем следующее свойство:

$$\kappa \subset \mathbf{C}_{(\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]}[\mathbb{T}_*(E|\,\mathcal{L})],$$

где $\kappa \neq \varnothing$. Но в этом случае (см.(6.18))

$$\mathbb{F} \in \mathbf{C}_{(\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]}[\mathbb{T}_*(E|\,\mathcal{L})].$$

Поскольку выбор $\mathbb{F}$ был произвольным, установлено вложение

$$\mathbf{C}_{(\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]}[\mathbb{T}_o(E|\,\mathcal{L})] \subset \mathbf{C}_{(\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]}[\mathbb{T}_*(E|\,\mathcal{L})].$$

Как следствие, получаем требуемое вложение $\mathbb{T}_o(E|\,\mathcal{L}) \subset \mathbb{T}_*(E|\,\mathcal{L})$. $\square$

С учетом предложения 6.5 получаем, что

$$\big((\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E], \mathbb{T}_o(E|\,\mathcal{L}), \mathbb{T}_*(E|\,\mathcal{L})\big) \tag{6.19}$$

есть битопологическое пространство [7]. С учетом предложений 5.4 и 6.4 получаем (см. (6.19)) следующее положение.

Теорема 6.1. *Битопологическое пространство* (2.6) *индуцировано из битопологического пространства* (6.19)*:*

$$\big(\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^o[E] = \mathbb{T}_o(E|\,\mathcal{L})|_{\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})}\big)\&\big(\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] = \mathbb{T}_*(E|\,\mathcal{L})|_{\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})}\big). \tag{6.20}$$

Полагаем до конца настоящего параграфа, что $\mathcal{L} \in (\mathrm{LAT})_o[E] \cap \widetilde{\pi}^o[E]$, получая случай отделимой решетки (заметим, что (см. § 1) упомянутое свойство отделимости решетки $\mathcal{L}$ имеет место при $\mathcal{L} \in (\mathrm{LAT})^o[E]$). Тогда согласно (2.2)

$$(\mathcal{L}-\mathrm{triv})[x] \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}) \quad \forall\, x \in E. \tag{6.21}$$

С учетом (6.21) мы в виде $(\mathcal{L}-\mathrm{triv})[\cdot] \triangleq \big((\mathcal{L}-\mathrm{triv})[x]\big)_{x\in E}$ имеем отображение из E в $\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})$, а потому при $A \in \mathcal{P}(E)$

$$(\mathcal{L}-\mathrm{triv})[\cdot]^1(A) = \{(\mathcal{L}-\mathrm{triv})[x]:\ \ x \in A\} \in \mathcal{P}\big(\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})\big) \tag{6.22}$$

и определены следующие множества-замыкания:

$$\Big(\mathrm{cl}\big((\mathcal{L}-\mathrm{triv})[\cdot]^1(A), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]\big)\in \mathcal{P}\big(\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})\big)\Big)\&\Big(\mathrm{cl}\big((\mathcal{L}-\mathrm{triv})[\cdot]^1(A), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^o[E]\big)\in \mathcal{P}\big(\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})\big)\Big), \tag{6.23}$$

для которых по свойствам (2.6) имеет место вложение

$$\mathrm{cl}\big((\mathcal{L}-\mathrm{triv})[\cdot]^1(A), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]\big)\subset \mathrm{cl}\big((\mathcal{L}-\mathrm{triv})[\cdot]^1(A), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^o[E]\big). \tag{6.24}$$

Разумеется, (6.23) и (6.24) применимы в случае $A \in \mathcal{L}$.

Предложение 6.6. *Если $L \in \mathcal{L}$, то*

$$\mathrm{cl}\big((\mathcal{L}-\mathrm{triv})[\cdot]^1(L), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]\big)= \mathrm{cl}\big((\mathcal{L}-\mathrm{triv})[\cdot]^1(L), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^o[E]\big)= \Phi_{\mathcal{L}}(L). \tag{6.25}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что в случае $\mathcal{L} \in (\mathrm{LAT})^o[E]$ (6.25) установлено в [6, (4.10)]. Коль скоро у нас рассматривается более общий случай, приведем соответствующее рассуждение, учитывая (6.24). Поскольку (см., например, [12, (1.20)]) $\Phi_{\mathcal{L}}(L) = \mathrm{cl}\big((\mathcal{L}-\mathrm{triv})[\cdot]^1(L), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]\big)$, для доказательства (6.25) достаточно установить вложение

$$\mathrm{cl}\big((\mathcal{L}-\mathrm{triv})[\cdot]^1(L), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^o[E]\big)\subset \Phi_{\mathcal{L}}(L). \tag{6.26}$$

Заметим в этой связи, что согласно (2.4) $(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}] \subset \{\cap\}\big((\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}]\big) = \mathbf{C}_{\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})}\big[\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^o[E]\big]$ и при этом $\Phi_{\mathcal{L}}(L) \in (\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}]$. Тогда

$$\Phi_{\mathcal{L}}(L) \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})}\big[\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^o[E]\big]. \tag{6.27}$$

Если $\mathcal{U}_* \in (\mathcal{L}-\mathrm{triv})[\cdot]^1(L)$, то (см. (6.22)) для некоторого $x_* \in L$ имеет место $\mathcal{U}_* = (\mathcal{L}-\mathrm{triv})[x_*]$, а потому $L \in \mathcal{U}_*$ и, как следствие, $\mathcal{U}_* \in \Phi_{\mathcal{L}}(L)$. Итак, $(\mathcal{L}-\mathrm{triv})[\cdot]^1(L) \subset \Phi_{\mathcal{L}}(L)$, откуда в силу (6.27) извлекается (6.26). □

Из предложения 6.6 следует, в частности, что

$$\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}) = \mathrm{cl}\big((\mathcal{L}-\mathrm{triv})[\cdot]^1(E), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]\big) = \mathrm{cl}\big((\mathcal{L}-\mathrm{triv})[\cdot]^1(E),\ \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^o[E]\big).$$

§ 7. Добавление 1: пространство замкнутых ультрафильтров

В настоящем параграфе отмечаются некоторые свойства, связанные с битопологическим пространством (2.6) в том случае, когда $\mathcal{L} = \mathbf{C}_E[\tau]$, где $\tau \in (\mathrm{top})[E]$ реализует в виде (E,τ) T_1-пространство. Итак, в виде

$$(E,\tau) \tag{7.1}$$

имеем T_1-пространство, а тогда $\mathcal{L} \in (\mathrm{LAT})^o[E]$ и, в частности, $\mathcal{L} \in (\mathrm{LAT})_o[E] \cap \widetilde{\pi}^o[E]$. Данный частный случай, связанный с (7.1), рассматривался в [6, § 6] в связи с вопросами построения расширений абстрактных задач о достижимости. Сейчас отметим некоторые достаточно простые следствия положений предыдущих параграфов настоящей работы. Так, в частности, $\forall A \in \mathcal{P}(E)\ \ \forall F \in \mathbf{C}_E[\tau]$

$$\big((\mathbf{C}_E[\tau]-\mathrm{triv})[\cdot]^1(A) \subset \Phi_{\mathbf{C}_E[\tau]}(F)\big) \Longrightarrow (A \subset F). \tag{7.2}$$

В свою очередь, из (7.2) вытекает, что

$$\mathrm{cl}\big((\mathbf{C}_E[\tau]-\mathrm{triv})[\cdot]^1(A), \mathbf{T}^o_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E]\big) = \Phi_{\mathbf{C}_E[\tau]}\big(\mathrm{cl}(A,\tau)\big)\quad \forall A \in \mathcal{P}(E).$$

С учетом предложения 6.5 и T_1-отделимости ТП (7.1) получаем, что (см. [15, предложение 8.3])

$$\begin{gathered}(\mathbf{C}_E[\tau]-\mathrm{triv})[x_*] \in \mathrm{cl}\big((\mathbf{C}_E[\tau]-\mathrm{triv})[\cdot]^1(A),\ \mathbf{T}^o_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E]\big) \setminus \mathrm{cl}\big((\mathbf{C}_E[\tau]-\mathrm{triv})[\cdot]^1(A),\\ \mathbf{T}^*_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E]\big)\quad \forall A \in \mathcal{P}(E)\quad \forall x_* \in \mathrm{cl}(A,\tau) \setminus A.\end{gathered} \tag{7.3}$$

В свою очередь, с использованием (7.3) устанавливается [15, теорема 8.1] равенство

$$\mathbf{C}_E[\tau] = \big\{A \in \mathcal{P}(E) \,|\, \mathrm{cl}\big((\mathbf{C}_E[\tau]-\mathrm{triv})[\cdot]^1(A), \mathbf{T}^*_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E]\big) = \mathrm{cl}\big((\mathbf{C}_E[\tau]-\mathrm{triv})[\cdot]^1(A), \mathbf{T}^o_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E]\big)\big\}. \tag{7.4}$$

Теорема 7.1. *Если ТП (E,τ) не является дискретным, то есть в случае $\tau \neq \mathcal{P}(E)$, непременно*

$$\mathbf{T}^*_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E] \neq \mathbf{T}^o_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E]. \tag{7.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Итак, пусть $\tau \neq \mathcal{P}(E)$. Тогда, как следствие,

$$\mathbf{C}_E[\tau] \neq \mathcal{P}(E). \tag{7.6}$$

В самом деле, если $\mathbf{C}_E[\tau] = \mathcal{P}(E)$, то, поскольку $\tau = \mathbf{C}_E[\mathbf{C}_E[\tau]]$, получаем цепочку равенств $\tau = \mathbf{C}_E[\mathcal{P}(E)] = \mathcal{P}(E)$, что невозможно по предположению. Итак, (7.6) установлено, что означает справедливость свойства $\mathcal{P}(E) \setminus \mathbf{C}_E[\tau] \neq \varnothing$. С учетом этого выберем и зафиксируем $H \in \mathcal{P}(E) \setminus \mathbf{C}_E[\tau]$ (H незамкнуто в ТП (E,τ)). Тогда в силу (7.4)

$$\mathrm{cl}((\mathbf{C}_E[\tau]-\mathrm{triv})[\cdot]^1(H), \mathbf{T}^*_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E]) \neq \mathrm{cl}\big((\mathbf{C}_E[\tau]-\mathrm{triv})[\cdot]^1(H), \mathbf{T}^o_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E]\big), \tag{7.7}$$

где $(\mathbf{C}_E[\tau]-\mathrm{triv})[\cdot]^1(H) \in \mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\tau]))$. Из (7.7) следует (7.5). □

Следствие 7.1. *При условии $\tau \neq \mathcal{P}(E)$ непременно*

$$\mathbb{T}_*(E|\mathbf{C}_E[\tau]) \neq \mathbb{T}_o(E|\mathbf{C}_E[\tau]). \tag{7.8}$$

Доказательство. Пусть ТП (E, τ) не является дискретным. Тогда имеем (7.5), где топологии, используемые в (7.5), удовлетворяют (6.20). Из (6.20) вытекает, однако, что

$$(\mathbb{T}_*(E|\mathbf{C}_E[\tau]) = \mathbb{T}_o(E|\mathbf{C}_E[\tau])) \Longrightarrow (\mathbf{T}^*_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E] = \mathbf{T}^o_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E]),$$

а потому (см. (7.5)) имеет место (7.8). □

§ 8. Добавление 2: пространства Стоуна

В настоящем параграфе, учитывая (1.4), полагаем, что $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$. В этом случае согласно [5, предложение 9.2] имеем равенство

$$\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E] = \mathbf{T}^o_{\mathcal{L}}[E]; \tag{8.1}$$

при этом ТП (2.3) есть непустой нульмерный компакт (компактное T_2-пространство), пространство Стоуна. Рассмотрим теперь битопологическое пространство (6.19). Отметим прежде всего, что в рассматриваемом сейчас случае

$$\mathcal{L} = \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]. \tag{8.2}$$

Замечание 8.1. Свойство (8.2) практически очевидно, но все же рассмотрим его обоснование. Итак, проверим (8.2). Пусть $A_1 \in \mathcal{L}$. Тогда $E \setminus A_1 \in \mathcal{L}$ (см. (1.2)), где $A_1 \in \mathcal{P}(E)$, а тогда $E \setminus (E \setminus A_1) = A_1$. Но $E \setminus (E \setminus A_1) \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]$, а потому $A_1 \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]$, чем и завершается обоснование вложения $\mathcal{L} \subset \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]$. Осталось установить вложение $\mathbf{C}_E[\mathcal{L}] \subset \mathcal{L}$. Итак, пусть $A_2 \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]$. Тогда согласно (1.1) $A_2 = E \setminus L$, где $L \in \mathcal{L}$. Но в этом случае согласно (1.2) $E \setminus L \in \mathcal{L}$, а следовательно, $A_2 \in \mathcal{L}$. Итак, $\mathbf{C}_E[\mathcal{L}] \subset \mathcal{L}$. □

Из (3.3) и (8.2) вытекает, что при $L \in \mathcal{L}$ определено множество

$$(\mathcal{L} - \mathrm{link})^o_{\mathrm{op}}[E|L] = \{\mathcal{E} \in (\mathcal{L} - \mathrm{link})_o[E] | \exists\, \Sigma \in \mathcal{E} :\ \Sigma \subset L\}. \tag{8.3}$$

Предложение 8.1. *Если $L \in \mathcal{L}$, то*

$$(\mathcal{L} - \mathrm{link})^o_{\mathrm{op}}[E|L] = (\mathcal{L} - \mathrm{link})^o[E|L]. \tag{8.4}$$

Доказательство. Фиксируем $L \in \mathcal{L}$. Пусть $\mathcal{V} \in (\mathcal{L} - \mathrm{link})^o_{\mathrm{op}}[E|L]$. Тогда $\mathcal{V} \in (\mathcal{L} - \mathrm{link})_o[E]$, и согласно (8.3) для некоторого $V \in \mathcal{V}$ имеет место

$$V \subset L. \tag{8.5}$$

Из (2.11) и (8.5) следует, что $L \in \mathcal{V}$. Стало быть, $\mathcal{V} \in (\mathcal{L} - \mathrm{link})_o[E] :\ L \in \mathcal{V}$. Поэтому (см. (2.13)) $\mathcal{V} \in (\mathcal{L} - \mathrm{link})^o[E|L]$, чем и завершается проверка вложения

$$(\mathcal{L} - \mathrm{link})^o_{\mathrm{op}}[E|L] \subset (\mathcal{L} - \mathrm{link})^o[E|L]. \tag{8.6}$$

Пусть $\mathcal{W} \in (\mathcal{L} - \mathrm{link})^o[E|L]$. Тогда в силу (2.13) $\mathcal{W} \in (\mathcal{L} - \mathrm{link})_o[E]$, и при этом $L \in \mathcal{W}$. Тогда, в частности, $\exists\, \Sigma \in \mathcal{W} :\ \Sigma \subset L$. Поэтому (см. (8.3)) $\mathcal{W} \in (\mathcal{L} - \mathrm{link})^o_{\mathrm{op}}[E|L]$, чем и завершается проверка вложения $(\mathcal{L} - \mathrm{link})^o[E|L] \subset (\mathcal{L} - \mathrm{link})^o_{\mathrm{op}}[E|L]$. С учетом (8.6) получаем требуемое равенство (8.4). □

Предложение 8.2. *Справедливо равенство $\mathfrak{C}^*_o[E;\mathcal{L}] = \mathfrak{C}^o_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{L}]$.*

Доказательство. Выберем произвольно $\mathbb{A} \in \mathfrak{C}^*_o[E;\mathcal{L}]$. Тогда $\mathbb{A} \in \mathcal{P}((\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E])$ и для некоторого $A \in \mathcal{L}$
$$\mathbb{A} = (\mathcal{L}-\mathrm{link})^o[E|A]. \tag{8.7}$$
При этом согласно (8.2) $A \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]$ и, кроме того (см. (8.7), предложение 8.1), выполнено $\mathbb{A} = (\mathcal{L}-\mathrm{link})^o_{\mathrm{op}}[E|A]$. Тогда (см. (3.5)) $(\mathcal{L}-\mathrm{link})^o_{\mathrm{op}}[E|A] \in \mathfrak{C}^o_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{L}]$, а потому $\mathbb{A} \in \mathfrak{C}^o_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{L}]$, чем и завершается проверка вложения
$$\mathfrak{C}^*_o[E;\mathcal{L}] \subset \mathfrak{C}^o_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{L}]. \tag{8.8}$$
Пусть $\mathbb{B} \in \mathfrak{C}^o_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{L}]$, а множество $\Lambda \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]$ таково, что $\mathbb{B} = (\mathcal{L}-\mathrm{link})^o_{\mathrm{op}}[E|\Lambda]$. Тогда в силу (8.2) $\Lambda \in \mathcal{L}$, и при этом согласно предложению 8.1
$$(\mathcal{L}-\mathrm{link})^o_{\mathrm{op}}[E|\Lambda] = (\mathcal{L}-\mathrm{link})^o[E|\Lambda].$$
Стало быть, $\mathbb{B} = (\mathcal{L}-\mathrm{link})^o[E|\Lambda]$, где (см. (3.1)) $(\mathcal{L}-\mathrm{link})^o[E|\Lambda] \in \mathfrak{C}^*_o[E;\mathcal{L}]$. Итак, $\mathbb{B} \in \mathfrak{C}^*_o[E;\mathcal{L}]$, чем и завершается проверка вложения $\mathfrak{C}^o_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{L}] \subset \mathfrak{C}^*_o[E;\mathcal{L}]$, а следовательно (см. (8.8)), и требуемого равенства. □

Из (3.7), (6.2) и предложения 8.2 вытекает, что в рассматриваемом сейчас случае (алгебры множеств)
$$\mathbb{T}_o(E|\mathcal{L}) = \mathbb{T}_*(E|\mathcal{L}).$$
Используя свойства ТП (3.13) и (6.3), получаем (см. (4.13), (6.7)), что
$$((\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E], \mathbb{T}_o(E|\mathcal{L})) = ((\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E], \mathbb{T}_*(E|\mathcal{L})) \tag{8.9}$$
есть непустой суперкомпакт (суперкомпактное T_2-пространство). В частности, (8.9) — компакт. Заметим, что из предложения 6.4 и суперкомпактности ТП (8.9) вытекает, что пространство Стоуна (см. (2.3) в рассматриваемом сейчас случае $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$) является подпространством суперкомпакта, так как (8.9) — суперкомпакт и справедливо (6.16). Итак, пространство Стоуна (компакт Стоуна) есть подпространство суперкомпакта. С учетом предложения 6.4 и отделимости ТП (8.9) получаем, что $\mathbb{F}^*_o(\mathcal{L}) \in \mathbf{C}_{(\mathcal{L}-\mathrm{link})_o[E]}[\mathbb{T}_*(E|\mathcal{L})]$ (напомним о компактности пространства с топологией (8.1)).

§ 9. Добавление 3: максимальные сцепленные системы открытых множеств

Учитывая (1.4), всюду в настоящем параграфе полагаем, что $\mathcal{L} = \tau$, где τ есть фиксированная топология множества E, то есть $\tau \in (\mathrm{top})[E]$. Отметим, что, как показано в [6, § 8],
$$\mathbf{T}^o_\tau[E] = \mathbf{T}^*_\tau[E],$$
причем ТП $(\mathbb{F}^*_o(\tau), \mathbf{T}^o_\tau[E]) = (\mathbb{F}^*_o(\tau), \mathbf{T}^*_\tau[E])$ есть непустой нульмерный компакт. Элементы множества $\mathbb{F}^*_o(\tau)$ — суть у/ф, «составленные» из открытых множеств. Для краткости будем называть у/ф из $\mathbb{F}^*_o(\tau)$ открытыми. Напомним, что $\forall\, G_1 \in \tau\ \forall\, G_2 \in \tau$
$$(G_1 \cap G_2 = \varnothing) \Longrightarrow (G_1 \cap \mathrm{cl}(G_2,\tau) = \varnothing). \tag{9.1}$$

Предложение 9.1. *Если $G \in \tau$, то справедливо равенство*
$$(\tau-\mathrm{link})_o[E] \setminus (\tau-\mathrm{link})^o[E|G] = (\tau-\mathrm{link})^o[E|E \setminus \mathrm{cl}(G,\tau)]. \tag{9.2}$$

Доказательство. Фиксируем $G \in \tau$. Пусть $\mathcal{V} \in (\tau-\mathrm{link})_o[E] \setminus (\tau-\mathrm{link})^o[E|G]$. Тогда $G \notin \mathcal{V}$. Согласно (2.8) имеем импликацию $(G \cap \Sigma \neq \varnothing \quad \forall\, \Sigma \in \mathcal{V}) \Longrightarrow (G \in \mathcal{V})$, а потому для некоторого $V \in \mathcal{V}$ реализуется равенство $G \cap V = \varnothing$. При этом $V \in \tau$, а потому согласно (9.1) $V \cap \mathrm{cl}(G,\tau) = \varnothing$. Итак, $V \subset E \setminus \mathrm{cl}(G,\tau)$, где $E \setminus \mathrm{cl}(G,\tau) \in \tau$. С учетом (2.11) имеем по выбору

МСС $\mathcal{V}$, что $E \setminus \mathrm{cl}(G,\tau) \in \mathcal{V}$. Поэтому согласно (2.13) $\mathcal{V} \in (\tau-\mathrm{link})^o[E|E \setminus \mathrm{cl}(G,\tau)]$, чем и завершается проверка вложения

$$(\tau-\mathrm{link})_o[E] \setminus (\tau-\mathrm{link})^o[E|G] \subset (\tau-\mathrm{link})^o[E|E \setminus \mathrm{cl}(G,\tau)]. \tag{9.3}$$

Выберем произвольно $\mathcal{W} \in (\tau-\mathrm{link})^o[E|E \setminus \mathrm{cl}(G,\tau)]$. Тогда $\mathcal{W} \in (\tau-\mathrm{link})_o[E]$, и при этом

$$E \setminus \mathrm{cl}(G,\tau) \in \mathcal{W}. \tag{9.4}$$

Из (9.4) следует в силу сцепленности $\mathcal{W}$, что

$$(E \setminus \mathrm{cl}(G,\tau)) \cap \Sigma \neq \varnothing \quad \forall\, \Sigma \in \mathcal{W}. \tag{9.5}$$

При этом $G \subset \mathrm{cl}(G,\tau))$ и, как следствие, $G \cap (E \setminus \mathrm{cl}(G,\tau)) = \varnothing$, а потому (см. (9.5)) $G \notin \mathcal{W}$ и согласно (2.13) $\mathcal{W} \notin (\tau-\mathrm{link})^o[E|G]$. Получаем, что $\mathcal{W} \in (\tau-\mathrm{link})_o[E] \setminus (\tau-\mathrm{link})^o[E|G]$, чем и завершается проверка вложения $(\tau-\mathrm{link})^o[E|E \setminus \mathrm{cl}(G,\tau)] \subset (\tau-\mathrm{link})_o[E] \setminus (\tau-\mathrm{link})^o[E|G]$, а стало быть (см. (9.3)), и равенства (9.2). □

Предложение 9.2. *Справедливо равенство*

$$\mathbb{T}_o(E|\tau) = \mathbb{T}_*(E|\tau). \tag{9.6}$$

Доказательство. Прежде всего напомним, что (см. (1.4)) согласно предложению 6.5

$$\mathbb{T}_o(E|\tau) \subset \mathbb{T}_*(E|\tau). \tag{9.7}$$

Покажем теперь, что справедливо следующее вложение:

$$\mathbf{C}_{(\tau-\mathrm{link})_o[E]}[\mathbb{T}_*(E|\tau)] \subset \{\cap\}(\{\cup\}_\sharp(\mathfrak{C}_o^*[E;\tau])). \tag{9.8}$$

В самом деле, пусть $\mathbf{F} \in \mathbf{C}_{(\tau-\mathrm{link})_o[E]}[\mathbb{T}_*(E|\tau)]$, а множество $\mathbf{G} \in \mathbb{T}_*(E|\tau)$ таково, что

$$\mathbf{F} = (\tau-\mathrm{link})_o[E] \setminus \mathbf{G}. \tag{9.9}$$

Из положений §2 легко следует импликация $(\mathbf{G} = \varnothing) \Longrightarrow (\mathbf{F} = (\tau-\mathrm{link})^o[E|E])$, где $(\tau-\mathrm{link})^o[E|E] \in \mathfrak{C}_o^*[E;\tau]$ согласно (3.1). Итак,

$$(\mathbf{G} = \varnothing) \Longrightarrow (\mathbf{F} \in \{\cap\}(\{\cup\}_\sharp(\mathfrak{C}_o^*[E;\tau]))). \tag{9.10}$$

Пусть теперь $\mathbf{G} \neq \varnothing$. С учетом (6.2) имеем для некоторого семейства $\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\{\cap\}_\sharp(\mathfrak{C}_o^*[E;\tau]))$ равенство

$$\mathbf{G} = \bigcup_{\mathbb{B} \in \mathcal{B}} \mathbb{B}. \tag{9.11}$$

Из (9.9) и (9.11) получаем, следовательно, цепочку равенств

$$\mathbf{F} = (\tau-\mathrm{link})_o[E] \setminus (\bigcup_{\mathbb{B} \in \mathcal{B}} \mathbb{B}) = \bigcap_{\mathbb{B} \in \mathcal{B}} ((\tau-\mathrm{link})_o[E] \setminus \mathbb{B}). \tag{9.12}$$

Пусть $\mathbf{B} \in \mathcal{B}$. Тогда (см. §1) для некоторого $\mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathfrak{C}_o^*[E;\tau])$

$$\mathbf{B} = \bigcap_{\mathbb{G} \in \mathcal{K}} \mathbb{G}. \tag{9.13}$$

С учетом (3.1) подберем семейство $\mathfrak{K} \in \mathrm{Fin}(\tau)$, для которого

$$\mathcal{K} = \{(\tau-\mathrm{link})^o[E|L] :\ L \in \mathfrak{K}\}. \tag{9.14}$$

Тогда из (9.13) и (9.14) получаем,что

$$(\tau - \text{link})_o[E] \setminus \mathbf{B} = (\tau - \text{link})_o[E] \setminus (\bigcap_{\mathbb{G} \in \mathcal{K}} \mathbb{G}) = \bigcup_{\mathbb{G} \in \mathcal{K}} ((\tau - \text{link})_o[E] \setminus \mathbb{G}) = \\ = \bigcup_{L \in \mathfrak{K}} ((\tau - \text{link})_o[E] \setminus (\tau - \text{link})^o[E|L]). \tag{9.15}$$

Из предложения 9.1 и (9.15) вытекает (см. (9.2)) равенство

$$(\tau - \text{link})_o[E] \setminus \mathbf{B} = \bigcup_{L \in \mathfrak{K}} (\tau - \text{link})^o[E|E \setminus \text{cl}(L, \tau)]; \tag{9.16}$$

при этом, конечно, $(\tau - \text{link})^o[E|E \setminus \text{cl}(\tilde{L}, \tau)] \in \mathfrak{C}_o^*[E; \tau]\ \forall \tilde{L} \in \mathfrak{K}$ (при этом $\mathfrak{K} \subset \tau$). С учетом (1.10) имеем, стало быть, свойство

$$\bigcup_{L \in \mathfrak{K}} (\tau - \text{link})^o[E|E \setminus \text{cl}(L, \tau)] \in \{\cup\}_\sharp(\mathfrak{C}_o^*[E; \tau]. \tag{9.17}$$

В самом деле, $\mathfrak{L} \overset{\triangle}{=} \{(\tau - \text{link})^o[E|E \setminus \text{cl}(L, \tau)] :\ L \in \mathfrak{K}\} \in \text{Fin}(\mathfrak{C}_o^*[E; \tau])$, причем

$$\bigcup_{L \in \mathfrak{K}} (\tau - \text{link})^o[E|E \setminus \text{cl}(L, \tau)] = \bigcup_{\mathbb{L} \in \mathfrak{L}} \mathbb{L} \in \{\cup\}_\sharp(\mathfrak{C}_o^*[E; \tau]$$

(см. определения § 1). Итак, имеем (9.17). Получаем из (9.16), (9.17), что имеет место включение $(\tau - \text{link})_o[E] \setminus \mathbf{B} \in \{\cup\}_\sharp(\mathfrak{C}_o^*[E; \tau])$. Коль скоро и выбор $\mathbf{B}$ был произвольным, установлено, что $(\tau - \text{link})_o[E] \setminus \mathbb{B} \in \{\cup\}_\sharp(\mathfrak{C}_o^*[E; \tau])\ \ \forall \mathbb{B} \in \mathcal{B}$. Как следствие, получаем следующее свойство:

$$\mathfrak{B} \overset{\triangle}{=} \{(\tau - \text{link})_o[E] \setminus \mathbb{B} :\ \mathbb{B} \in \mathcal{B}\} \in \mathcal{P}'(\{\cup\}_\sharp(\mathfrak{C}_o^*[E; \tau])).$$

При этом (см. (1.10), (3.12)) $\{\cup\}_\sharp(\mathfrak{C}_o^*[E; \tau]) \in (\text{cl} - \text{BAS})_o[(\tau - \text{link})_o[E]; \mathbb{T}_o(E|\mathcal{L})]$. В этом случае (см. определения § 1) и при $\mathbf{G} \neq \varnothing$

$$\mathbf{F} = \bigcap_{\mathbb{B} \in \mathcal{B}} ((\tau - \text{link})_o[E] \setminus \mathbb{B}) = \bigcap_{\tilde{\mathbb{B}} \in \mathfrak{B}} \tilde{\mathbb{B}} \in \{\cap\}(\{\cup\}_\sharp(\mathfrak{C}_o^*[E; \tau])),$$

и, с учетом (1.9), (3.12) и (9.12), получаем включение

$$\mathbf{F} \in \{\cap\}(\{\cup\}_\sharp(\mathfrak{C}_o^*[E; \tau])). \tag{9.18}$$

С учетом (9.10) получаем теперь, что (9.18) имеет место во всех возможных случаях. Поскольку выбор $\mathbf{F}$ был произвольным, установлено вложение (9.8), а тогда $\mathbf{C}_{(\tau-\text{link})_o[E]}[\mathbb{T}_*(E|\tau)] \subset \subset \mathbf{C}_{(\tau-\text{link})_o[E]}[\mathbb{T}_0(E|\tau)]$. Это означает (по двойственности), что $\mathbb{T}_*(E|\tau) \subset \mathbb{T}_0(E|\tau)$, откуда с учетом (9.7) вытекает требуемое равенство (9.6). □

Итак, получаем, что ТП $((\tau - \text{link})_o[E], \mathbb{T}_0(E|\tau)) = ((\tau - \text{link})_o[E], \mathbb{T}_*(E|\tau))$ есть непустой суперкомпакт. Компакт $(\mathbb{F}_o^*(\tau), \mathbf{T}_\tau^*[E]) = (\mathbb{F}_o^*(\tau), \mathbf{T}_\tau^o[E]))$ является попространством упомянутого суперкомпакта (см. теорему 6.1). По свойствам T_2-пространств имеем, что

$$\mathbb{F}_o^*(\tau) \in \mathbf{C}_{(\tau-\text{link})_o[E]}[\mathbb{T}_*(E|\tau)].$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. de Groot J. Superextensions and supercompactness // Proc. I. Intern. Symp. on extension theory of topological structures and its applications. Berlin: VEB Deutscher Verlag Wis., 1969. P. 89–90.
2. van Mill J. Supercompactness and Wallman spaces. Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1977. 238 p.
3. Федорчук В.В., Филиппов В.В. Общая топология. Основные конструкции. М.: Физматлит, 2006. 336 с.
4. Strok M., Szymański A. Compact metric spaces have binary bases // Fund. Math. 1975. Vol. 89. No. 1. P. 81–91. DOI: 10.4064/fm-89-1-81-91

5. Ченцов А.Г. Фильтры и ультрафильтры в конструкциях множеств притяжения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 1. С. 113–142. DOI: 10.20537/vm110112
6. Ченцов А.Г., Пыткеев Е.Г. Некоторые топологические конструкции расширений абстрактных задач о достижимости // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20. № 4. С. 312–329.
7. Dvalishvili B.P. Bitopological spaces: theory, relations with generalized algebraic structures, and applications. Amsterdam: Elsevier Science, 2005. 422 p.
8. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
9. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Едиториал УРСС, 2004. 368 с.
10. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968. 272 с.
11. Ченцов А.Г. Множества притяжения в абстрактных задачах о достижимости: эквивалентные представления и основные свойства // Известия вузов. Математика. 2013. № 11. С. 33–50.
12. Ченцов А.Г. К вопросу о реализации элементов притяжения в абстрактных задачах о достижимости // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25. Вып. 2. С. 212–229. DOI: 10.20537/vm150206
13. Архангельский А.В. Компактность // Общая топология — 2. Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 50. М.: ВИНИТИ, 1989. С. 5–128.
14. Ченцов А.Г. Некоторые свойства ультрафильтров, связанные с конструкциями расширений // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. Вып. 1. С. 87–101. DOI: 10.20537/vm140108
15. Ченцов А.Г. Суперрасширение как битопологическое пространство // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2017. Т. 49. С. 55–79. DOI: 10.20537/2226-3594-2017-49-03

Поступила в редакцию 05.07.2017

Ченцов Александр Георгиевич, д. ф.-м. н., профессор, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С.Ковалевской, 16;
профессор, кафедра вычислительных методов и уравнений математической физики, Институт радиоэлектроники и информационных технологий, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 32.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

A. G. Chentsov

Ultrafilters and maximal linked systems

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 3, pp. 365–388 (in Russian).

Keywords: lattice of sets, topology, ultrafilter.

MSC2010: 28A33

DOI: 10.20537/vm170307

The family of maximal linked systems all elements of which are sets of an arbitrary lattice with “zero” and “unit” is considered; its subfamily composed of ultrafilters of that lattice is also considered. Relations between natural topologies used to equip the set of maximal linked systems and the set of the lattice ultrafilters are investigated. It is demonstrated that the last set under natural (for ultrafilter spaces) equipment is a subspace of the space of maximal linked systems under equipment with two comparable topologies one of which is similar to the topology used for the Wallman extension and the second corresponds (conceptually) to the scheme of Stone space in the case when the initial lattice is an algebra of sets. Properties of the resulting bitopological structure are detailed for the cases when our lattice is an algebra of sets, a topology, and a family of closed sets in a topological space.

REFERENCES

1. de Groot J. Superextensions and supercompactness, *Proc. I. Intern. Symp. on extension theory of topological structures and its applications*, Berlin: VEB Deutscher Verlag Wis., 1969, pp. 89–90.
2. van Mill J. *Supercompactness and Wallman spaces*, Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1977, 238 p.
3. Fedorchuk V.V., Filippov V.V. *Obshchaya topologiya. Osnovnye konstruktsii* (General topology. Base constructions), Moscow: Fizmatlit, 2006, 336 p.
4. Strok M., Szymański A. Compact metric spaces have binary bases, *Fund. Math.*, 1975, vol. 89, no. 1, pp. 81–91. DOI: 10.4064/fm-89-1-81-91
5. Chentsov A.G. Filters and ultrafilters in the constructions of attraction sets, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2011, issue 1, pp. 113–142 (in Russian). DOI: 10.20537/vm110112
6. Chentsov A.G., Pytkeev E.G. Some topological structures of extensions of abstract reachability problems, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2016, vol. 292, suppl. 1, pp. 36–54. DOI: 10.1134/S0081543816020048
7. Dvalishvili B.P. *Bitopological spaces: theory, relations with generalized algebraic structures, and applications*, Amsterdam: North-Holland, 2005, 422 p.
8. Kuratowski K., Mostowski A. *Set theory*, Warsawa: PWN, 1968, vii+417 p. Translated under the title *Teoriya mnozhestv*, Moscow: Mir, 1970, 416 p.
9. Aleksandrov P.S. *Vvedenie v teoriyu mnozhestv i obshchuyu topologiyu* (Introduction to set theory and general topology), Moscow: Editorial URSS, 2004, 368 p.
10. Bourbaki N. *Topologie Générale*, Paris: Hermann, 1961, 263 p. Translated under the title *Obshchaya topologiya*, Moscow: Nauka, 1968, 272 p.
11. Chentsov A.G. Attraction sets in abstract attainability problems: equivalent representations and basic properties, *Russian Mathematics*, 2013, vol. 57, issue 11, pp. 28–44. DOI: 10.3103/S1066369X13110030
12. Chentsov A.G. To question about realization of attraction elements in abstract attainability problems, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2015, vol. 25, issue 2, pp. 212–229 (in Russian). DOI: 10.20537/vm150206
13. Arkhangelskii A.A. Compactness, *General Topology II, Encyclopaedia Math. Sci.*, vol. 50, Berlin: Springer-Verlag, 1996, pp. 1–117.
14. Chentsov A.G. Some ultrafilter properties connected with extension constructions, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2014, issue 1, pp. 87–101 (in Russian). DOI: 10.20537/vm140108
15. Chentsov A.G. Superextension as bitopological space, *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2017, vol. 49, pp. 55–79 (in Russian). DOI: 10.20537/2226-3594-2017-49-03

Received 05.07.2017

Chentsov Aleksandr Georgievich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member, Russian Academy of Sciences, Chief Researcher, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia;
Professor, Institute of Radioelectronics and Information Technologies, Ural Federal University, ul. Mira, 32, Yekaterinburg, 620002, Russia.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru