МАТЕМАТИКА 2017. Т. 27. Вып. 3

УДК 517.977

© *В. И. Максимов, П. Г. Сурков*

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ГАРАНТИРОВАННОГО ПАКЕТНОГО НАВЕДЕНИЯ НА СИСТЕМУ ЦЕЛЕВЫХ МНОЖЕСТВ[1]

Теория управления — активно развивающийся в настоящее время раздел современной математики. Класс задач, изучаемый в рамках этой теории, достаточно обширен и включает как вопросы, связанные с существованием решений, так и вопросы, связанные с эффективными способами построения управляющих воздействий. Один из подходов к решению задач управления при неполной информации был предложен в основополагающей статье Ю. С. Осипова, опубликованной в журнале «Успехи математических наук» в 2006 году. В дальнейшем этот подход, названный методом пакетов программ, получил развитие, в частности, в статьях, цитированных в настоящей работе. Указанный подход основан на подходящей модификации известного в теории позиционных дифференциальных игр метода неупреждающих стратегий (квазистратегий) для решения задач управления при неизвестном начальном состоянии. Как известно, квазистратегии, отражающие свойства вольтерровости программных реализаций управлений с обратной связью на соответствующие программные возмущения, ориентированы на исследование задач с известным начальным состоянием при наличии неизвестных динамических возмущений. В стандартных задачах управления с неполной информацией динамические возмущения, как правило, отсутствуют, а неполнота информации обусловлена дефицитом информации о начальном состоянии системы. Аналогом свойств неупреждаемости для задач с неизвестными начальными состояниями и стали пакеты программ. Следует отметить, что во всех предыдущих исследованиях, связанных с методом пакетов программ, рассматривались задачи наведения на одно-единственное целевое множество. В настоящей работе для линейной стационарной управляемой динамической системы рассмотрена задача гарантированного наведения на семейство целевых множеств в случае неполной информации о начальном состоянии. Установлен критерий разрешимости этой задачи, основанный на методе пакетов программ, и приведен иллюстрирующий пример.

Ключевые слова: линейные системы, управление, неполная информация.

DOI: 10.20537/vm170305

Введение

Рассмотрим управляемую систему вида

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + c(t), \tag{0.1}$$

где $t \in T = [t_0, \vartheta]$ — переменная времени, $t_0 < \vartheta < +\infty$; $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы, найденное в момент t; $u(t) \in \mathbb{R}^m$ — значение управляющего вектора в этот момент времени; A и B — матрицы соответствующих размерностей, функция $c(\cdot)\colon T \to \mathbb{R}^n$ кусочно-непрерывна.

Управляющей стороне априори известно, что истинное начальное состояние системы x_0 содержится в заданном конечном множестве $X_0 \subset \mathbb{R}^n$ (множество *допустимых начальных состояний*), хотя само x_0 неизвестно. Под *программным управлением* (*программой*) понимается всякая измеримая по Лебегу функция $u(\cdot)\colon T \to U$. Здесь $U \subset \mathbb{R}^m$ — выпуклый компакт, описывающий мгновенный ресурс управления. Множество всех программных управлений обозначим через $\mathcal{U}$. *Движение* системы (0.1), соответствующее допустимому начальному состоянию $x_0 \in X_0$, программе $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, является решением (по Каратеодори) системы дифференциальных уравнений (0.1), определенным на отрезке T и удовлетворяющим начальному условию $x(t_0) = x_0$; это движение обозначим через $x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot))$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 14–11–00539).

Как известно, стандартная задача оптимального программного управления (при известном начальном состоянии x_0) заключается в нахождении управления $u^{\mathrm{opt}}_{x_0}(\cdot)$, минимизирующего критерий качества:

$$u^{\mathrm{opt}}_{x_0}(\cdot) = \mathrm{argmin}\Big\{ f\big(x(\vartheta; t_0, x_0, u(\cdot))\big) \colon u(\cdot) \in \mathcal{U} \Big\}.$$

Введем следующие обозначения:

$$J_{x_0} = f\big(x(\vartheta; t_0, x_0, u^{\mathrm{opt}}_{x_0}(\cdot))\big), \quad M_{x_0} = \big\{ x \in \mathbb{R}^n \colon f(x) \leqslant J_{x_0} \big\}, \quad x_0 \in X_0.$$

Ниже полагаем, что $f(\cdot)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — собственная выпуклая функция и $0 \in \operatorname{int} D(f)$. Здесь $D(f) = \big\{ x \in \mathbb{R}^n \colon f(x) \leqslant +\infty \big\}$, символ int означает внутренность множества. Последнее условие, как известно, влечет непрерывность функции f в нуле.

Задача гарантированного позиционного наведения на систему целевых множеств состоит в формировании управляющего воздействия системы (0.1), обеспечивающего приведение ее фазовой траектории на множество $M_{\overline{x}_0}$, где $\overline{x}_0$ — истинное (неизвестное) начальное состояние. В процессе движения управляющая сторона формирует свое управление позиционно, наблюдая текущий сигнал $y(t) = Q(t)x(t)$ о состоянии $x(t)$ системы. В соответствии с формализацией, принятой в теории гарантированного управления [1, 2], управляющая сторона корректирует значения управления $u(\cdot)$ в заранее заданные моменты времени $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_m = \vartheta$. В каждый момент τ_j $(j = 0, \ldots, m-1)$ значения управления на полуинтервале $t \in [\tau_j, \tau_{j+1})$ определяются исходя из предыстории $t \to y(t)$ наблюдения на отрезке $[t_0, \tau_j]$ и предыстории $t \to u(t)$ управления на полуинтервале $[t_0, \tau_j)$. Таким образом, задача гарантированного позиционного наведения на систему целевых множеств состоит в том, чтобы по произвольному наперед заданному $\varepsilon > 0$ выбрать такое правило формирования управления, что для любого начального состояния $x_0 \in X_0$ движение $x(\cdot)$ системы (0.1), исходящее из этого состояния, в момент времени $t = \vartheta$ приходит в замкнутую ε-окрестность целевого множества M_{x_0}.

Как следует из приведенной ниже теоремы 1, эта задача разрешима тогда и только тогда, когда разрешима задача так называемого пакетного наведения. В связи с этим в настоящей работе мы остановимся на выводе условий разрешимости последней. При этом воспользуемся предложенным в работах [3–5] подходом. Следует отметить, что ранее этот подход применялся для решения задач гарантированного наведения линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений [6, 7], линейных стохастических дифференциальных уравнений [8], дифференциальных уравнений с последействием [9], систем с распределенными параметрами [10]. При этом во всех цитированных выше работах предполагалось, что целевое множество одно и то же для всех начальных состояний.

Замечание 1. Пусть

$$J^* = \max_{x_0 \in X_0} J_{x_0} = \max_{x_0 \in X_0} \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} J\big(x(\vartheta; t_0, x_0, u(\cdot))\big), \tag{0.2}$$

а символ x_0^* означает вектор, на котором достигается максимум (по x_0) в правой части (0.2). Тогда, если

$$\overline{x}_0 = x_0^*,$$

рассматриваемую задачу управления естественно называть задачей гарантированного максиминного наведения.

§ 1. Вспомогательные результаты

Прежде чем перейти к выводу условий разрешимости рассматриваемой задачи, приведем некоторые результаты из работ [10, 11], сформулировав их в удобной для нас форме. Рассмотрим управляемую систему вида (0.1). Введем фундаментальную матрицу $F(\cdot,\cdot)$ однородной системы $\dot{x}(t) = Ax(t)$. Для каждого $x_0 \in X_0$ обозначим

$$g_{x_0}(t) = Q(t)F(t, t_0)x_0 \quad (t \in T);$$

функция $g_{x_0}(\cdot)$ называется *однородным сигналом* (соответствующим допустимому начальному состоянию x_0). Множество всех допустимых начальных состояний x_0, соответствующих однородному сигналу $g(\cdot)$ *до момента времени* $\tau \in [t_0, \vartheta]$, обозначаем символом $X_0\bigl(\tau|g(\cdot)\bigr)$; таким образом,

$$X_0\bigl(\tau|g(\cdot)\bigr) = \bigl\{\, x_0 \in X_0 \colon g(\cdot)|_{[t_0,\tau]} = g_{x_0}(\cdot)|_{[t_0,\tau]} \,\bigr\};$$

здесь и далее $g(\cdot)|_{[t_0,\tau]}$, где $\tau \in [t_0, \vartheta]$, — сужение однородного сигнала $g(\cdot)$ на отрезок $[\tau_0, \tau]$.

Семейство $(w_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0}$ программ называем *пакетом программ*, если оно удовлетворяет следующему *условию неупреждаемости*: для любых однородного сигнала $g(\cdot)$, момента $\tau \in (t_0, \vartheta]$ и допустимых начальных состояний $x_0', x_0'' \in X_0\bigl(\tau|g(\cdot)\bigr)$ при всех $t \in [\tau_0, \tau)$ выполняется равенство $w_{x_0'}(t) = w_{x_0''}(t)$. Пакет $\bigl(w_{x_0}(\cdot)\bigr)_{x_0 \in X_0}$ программ называем *наводящим*, если для любого $x_0 \in X_0$ имеет место включение $x\bigl(\vartheta; t_0, x_0, w_{x_0}(\cdot)\bigr) \in M_{x_0}$. Если существует наводящий пакет программ, то говорим, что *разрешима задача пакетного наведения*.

Пусть G — множество всех однородных сигналов. Для каждого однородного сигнала $g(\cdot)$ вводим множество $T\bigl(g(\cdot)\bigr) = \bigl\{\tau_j\bigl(g(\cdot)\bigr) \colon j = 1, \ldots, k_{g(\cdot)}\bigr\}$ всех моментов его расслоения (по поводу определения моментов расслоения см. [10]) и полагаем $T = \bigcup\limits_{g(\cdot) \in G} T\bigl(g(\cdot)\bigr)$. Ввиду конечности этого множества для каждого однородного сигнала $g(\cdot)$ существует номер $k_{g(\cdot)} \geqslant 1$ такой, что $\tau_{k_{g(\cdot)}}\bigl(g(\cdot)\bigr) = \vartheta$. Тогда множество T можно записать в виде $T = \{\tau_1, \ldots, \tau_K\}$, где $\tau_j < \tau_{j+1}$ $(i = j, \ldots, K-1)$. Принимаем $\tau_0 = t_0$. Для каждого $k = 1, \ldots, K$ вводим множество

$$\mathcal{X}_0(\tau_k) = \bigl\{\, X_0\bigl(\tau_k|g(\cdot)\bigr) \colon g(\cdot) \in G \,\bigr\}.$$

Элементы $X_{0,k}$ множества $\mathcal{X}_0(\tau_k)$ называются *кластерами начальных состояний* в момент τ_k. Для каждого $k = 0, \ldots, K$ кластеры начальных состояний в момент τ_k образуют разбиение множества X_0 всех допустимых начальных состояний, то есть

$$X_0 = \bigcup_{X_{0,k} \in \mathcal{X}_0(\tau_k)} X_{0,k}, \quad X_{0,k}' \bigcap X_{0,k}'' = \varnothing \quad \bigl(X_{0,k}', X_{0,k}'' \in \mathcal{X}_0(\tau_k), \quad X_{0,k}' \neq X_{0,k}''\bigr).$$

Пусть $\mathcal{U}_{X_0}$ — множество всех семейств $(w_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0}$ векторов из U. Любую измеримую по Лебегу функцию $t \to \bigl(w_{x_0}(t)\bigr)_{x_0 \in X_0} \colon T \to \mathcal{U}_{X_0}$ называем *расширенной программой*. Семейство программ $\bigl(w_{x_0}(\cdot)\bigr)_{x_0 \in X_0}$ естественно (как это сделано в [9–11]) отождествлять с расширенной программой $t \to \bigl(w_{x_0}(t)\bigr)_{x_0 \in X_0}$. Для каждого $k = 0, \ldots, K$ вводим множество $\mathcal{U}_k$ всех семейств $(w_{x_0})_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{U}_{X_0}$ таких, что для всякого кластера $X_{0,k} \subset \mathcal{X}_0(\tau_k)$ и произвольных начальных состояний $x_0', x_0'' \in X_{0,k}$ справедливо равенство $w_{x_0'} = w_{x_0''}$. Расширенную программу $\bigl(w_{x_0}(\cdot)\bigr)_{x_0 \in X_0}$ называем *допустимой*, если для каждого $k = 0, \ldots, K$ выполняется включение $\bigl(w_{x_0}(t)\bigr)_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{U}_k$ при всех $t \in (\tau_{k-1}, \tau_k]$ в случае $k > 1$ и при всех $t \in [t_0, \tau_1]$ в случае $k = 1$.

Для $j = 1, 2, \ldots$ определяем *расширенное пространство* $\mathcal{R}_j$ как конечномерное гильбертово пространство всех семейств $l = (l_{x_0})_{x_0 \in X_0}$ векторов из $\mathbb{R}^j$ со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ вида

$$\langle l', l'' \rangle = \sum_{x_0 \in X_0} (l_{x_0}', l_{x_0}'') \quad \bigl(l' = (l_{x_0}')_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{R}_j, \quad l'' = (l_{x_0}'')_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{R}_j\bigr).$$

Здесь и далее $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в конечномерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, и норму в этом же пространстве обозначим через $|\cdot|_{\mathbb{R}^n}$.

Рассмотрим *расширенную систему*, которая состоит из экземпляров системы (0.1), параметризованных начальными состояниями $x_0 \in X_0$; экземпляр системы, отвечающий параметру x_0, исходит из начального состояния x_0 под действием программного управления $w_{x_0}(\cdot)$. Запишем расширенную систему в виде

$$\dot{x}_{x_0}(t) = A x_{x_0}(t) + B u_{x_0}(t) + c(t), \quad x_{x_0}(t_0) = x_0 \quad (x_0 \in X_0). \tag{1.1}$$

За фазовое пространство расширенной системы принимаем $\mathcal{R}_n$. Управление расширенной системой выбираем из класса всех допустимых расширенных программ. Для каждой допустимой расширенной программы $t \to \bigl(w_{x_0}(t)\bigr)_{x_0 \in X_0}$ под соответствующим ей *движением* расширенной системы понимаем функцию $t \to \big(x(t;t_0,x_0,w_{x_0}(\cdot))\big)_{x_0\in X_0}\colon T \to \mathcal{R}_n$. *Расширенным целевым множеством* назовем множество $\mathcal{M}$ всех семейств $(x_{x_0})_{x_0\in X_0} \in \mathcal{R}_n$ таких, что $x_{x_0} \in M_{x_0}$ для всех $x_0 \in X_0$. Считаем, что допустимая расширенная программа $t \to \big(w_{x_0}(t)\big)_{x_0\in X_0}$ является *наводящей для расширенной системы,* если для движения $\big(x(\cdot;t_0,x_0,w_{x_0}(\cdot))\big)_{x_0\in X_0}$ расширенной системы, соответствующего $t \to \big(w_{x_0}(t)\big)_{x_0\in X_0}$, выполняется условие $\big(x(\vartheta;t_0,x_0,w_{x_0}(\cdot))\big)_{x_0\in X_0} \in \mathcal{M}$. Будем говорить, что разрешима *расширенная задача программного наведения*, если существует допустимая расширенная программа, являющаяся наводящей для расширенной системы.

Аналогично [3–5] доказывается

Теорема 1. 1) *Расширенная программа $t \to \big(w_{x_0}(t)\big)_{x_0\in X_0}$ является пакетом программ тогда и только тогда, когда она допустима.*

2) *Допустимая расширенная программа является наводящим пакетом программ тогда и только тогда, когда она является наводящей для расширенной системы.*

3) *Задача гарантированного позиционного наведения на систему целевых множеств разрешима тогда и только тогда, когда разрешима задача пакетного наведения.*

4) *Задача пакетного наведения на систему целевых множеств разрешима тогда и только тогда, когда разрешима расширенная задача програмного наведения.*

Пусть S — подпространство пространства $\mathbb{R}^n$, ортогональное всем $l \in \mathbb{R}^n$ таким, что для каждого $x_0 \in X_0$ имеем $\rho^+(l|M_{x_0}) = \infty$. В качестве $L \subset S$ возьмем выпуклый компакт, содержащий образ единичной сферы, то есть существуют постоянные r_1, $r_2 > 0$, удовлетворяющие неравенству $r_2 > r_1$ и такие, что для каждого вектора $z \in S$ единичной нормы найдется $r \in [r_1, r_2]$, для которого $rz \in L$. Тогда через $\mathcal{L}$ обозначим множество всех $(l_{x_0})_{x_0\in X_0} \in \mathcal{R}_n$ таких, что $l_{x_0} \in L$ при всех $x_0 \in X_0$.

В свою очередь, аналогично [5] устанавливается критерий разрешимости расширенной задачи программного наведения. В нашем случае этот критерий имеет вид неравенства

$$\sup_{(l_{x_0})_{x_0\in X_0}\in\mathcal{L}} \gamma\big((l_{x_0})_{x_0\in X_0}\big) \leqslant 0. \tag{1.2}$$

Здесь

$$\gamma\big((l_{x_0})_{x_0\in X_0}\big) = \mathcal{V}(l_{x_0};\vartheta,t_0) - \sum_{x_0\in X_0} p^+(l_{x_0}|M_{x_0}), \quad D(\tau) = B^\top F^\top(\vartheta,\tau), \quad d_k(\tau) = D(\tau)\sum_{x_0\in X_{0,k}} l_{x_0},$$

$$\mathcal{V}(l_{x_0};\vartheta,t_0) = \Big\langle l_{x_0}, F(\vartheta,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{\vartheta} F(\vartheta,\tau)c(\tau)\,d\tau \Big\rangle + \sum_{k=1}^{K}\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \sum_{X_{0,k}\in\mathcal{X}(\tau_k)} \varrho^-(d_k(\tau)|U)\,d\tau,$$

$\varrho^-(l|U) = \inf\{\,(l,x)\colon x \in U\,\}$, $\varrho^+(l|M_{x_0}) = \sup\{\,(l,x)\colon x \in M_{x_0}\,\}$ — нижняя и верхняя опорные функции, $\top$ — транспонирование.

§ 2. Разрешимость задачи гарантированного программного наведения

Пусть для любого x_0 существует решение задачи

$$\min_{u(\cdot)\in\mathcal{U}} f\big(x(\vartheta;t_0,x_0,u(\cdot))\big) = J_{x_0}.$$

Для произвольного $a > 0$ введем множество

$$M^a_{x_0} = \big\{\, x \in \mathbb{R}^n\colon f(x) \leqslant J_{x_0} - a \,\big\}.$$

Лемма 1. *Пусть $a > 0$, тогда существует число $\mu \in (0,a)$ такое, что, каково бы ни было начальное состояние $x_0 \in X_0$, имеет место включение*

$$O_\mu(M^a_{x_0}) \subset M_{x_0}. \tag{2.1}$$

Здесь $O_\mu(M)$ означает μ-окрестность множества M.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу конечности множества X_0 достаточно установить справедливость включения (2.1) для одного x_0. Предположим, что (2.1) не выполняется для некоторого $x_0 \in X_0$. Возьмем произвольную последовательность чисел $\mu_i \to 0$ при $i \to \infty$. Тогда для любого натурального i найдется вектор $x_i \in O_{\mu_i}(M^a_{x_0})$ такой, что $x_i \notin M_{x_0}$. Значит, $f(x_i) > J_{x_0}$. Поэтому

$$\varliminf_{i\to\infty} f(x_i) \geqslant J_{x_0}. \tag{2.2}$$

Заметим, что каждый вектор x_i можно представить в виде суммы двух векторов:

$$x_i = y_i + z_i,$$

где $y_i \in M^a_{x_0}$, то есть $f(y_i) \leqslant J_{x_0} - a$, а $|z_i|_{\mathbb{R}^n} \leqslant \mu_i$. Тогда в силу выпуклости функции f имеем

$$f(x_i) \leqslant f(y_i) + f(z_i) \leqslant J_{x_0} - a + f(z_i).$$

Поскольку функция f непрерывна в нуле, $f(z_i) \to f(0) = 0$ при $i \to \infty$. Следовательно,

$$\varlimsup_{i\to\infty} f(x_i) \leqslant J_{x_0} - a.$$

Получаем противоречие с (2.2). Лемма доказана. □

В дальнейшем нам понадобится

Условие 1. Для любого $b > 0$ можно указать $\mu \in (0, b)$ такое, что для любого $x_0 \in X_0$ верно включение

$$M_{x_0} \in O_\mu(M^b_{x_0}).$$

Замечание 2. Как нетрудно видеть, условие 1 выполняется не всегда. Например, для критерия качества $f(x) = c|x|_{\mathbb{R}^n}$ при $c > 1$ оно выполнено, если же $c < 1$, то нет. Условие 1 является в некотором смысле обратным к утверждению леммы 1.

Теорема 2. *Пусть функция f удовлетворяет условию 1. Тогда для разрешимости задачи гарантированного программного наведения на систему целевых множеств необходимо и достаточно выполнение соотношения*

$$\max_{(l_{x_0})_{x_0\in X_0}\in\mathcal{L}} \gamma\big((l_{x_0})_{x_0\in X_0}\big) = 0. \tag{2.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Начнем с необходимости. Предположим противное. Пусть задача разрешима и

$$\gamma \equiv \sup_{(l_{x_0})_{x_0\in X_0}\in\mathcal{L}} \gamma(l_{x_0}) = -\gamma^* < 0,$$

где $\gamma^* > 0$. Тогда для любого $x_0 \in X_0$ имеем $\gamma(l_{x_0}) \leqslant -\gamma^*$, то есть

$$\sup_{(l_{x_0})_{x_0\in X_0}\in\mathcal{L}} \Big(\mathcal{V}(l_{x_0}; \vartheta, t_0) - \sum_{x_0\in X_0} \rho^+(l_{x_0}|M_{x_0})\Big) \leqslant -\gamma^*. \tag{2.4}$$

Из определения множества $\mathcal{L}$ следует существование числа $\mu^* > 0$ такого, что

$$\sup_{(l_{x_0})_{x_0\in X_0}\in\mathcal{L}} |l_{x_0}|_{\mathbb{R}^n} = \mu^*.$$

Тогда в силу условия 1 найдется такое число $\mu \in \Big(0, \dfrac{\gamma^*}{\mu^* K}\Big)$, что

$$\rho^+\big(l_{x_0}|O_\mu(M^{\gamma^*}_{x_0})\big) = \rho^+(l_{x_0}|M^{\gamma^*}_{x_0}) + \mu|l_{x_0}|_{\mathbb{R}^n} \geqslant \rho^+(l_{x_0}|M_{x_0}), \tag{2.5}$$

где K — число элементов множества X_0. В свою очередь, из неравенства (2.4) следует неравенство

$$\sup_{(l_{x_0})_{x_0\in X_0}\in\mathcal{L}}\Bigl(\mathcal{V}(l_{x_0};\vartheta,t_0)-\sum_{x_0\in X_0}\rho^+\bigl(l_{x_0}|O_\mu(M^{\gamma^*}_{x_0})\bigr)\Bigr)\leqslant-\gamma^*. \tag{2.6}$$

Заметим, что

$$\sum_{x_0\in X_0}\sup_{(l_{x_0})_{x_0\in X_0}\in\mathcal{L}}\mu|l_{x_0}|_{\mathbb{R}^n}\leqslant\mu\mu^*K<\gamma^*.$$

Учитывая это неравенство, а также (2.5), из (2.6) получаем

$$\sup_{(l_{x_0})_{x_0\in X_0}\in\mathcal{L}}\Bigl(\mathcal{V}(l_{x_0};\vartheta,t_0)-\sum_{x_0\in X_0}\rho^+(l_{x_0}|M^{\gamma^*}_{x_0})\Bigr)-\sum_{x_0\in X_0}\sup_{(l_{x_0})_{x_0\in X_0}\in\mathcal{L}}\mu|l_{x_0}|_{\mathbb{R}^n}\leqslant$$

$$\leqslant\sup_{(l_{x_0})_{x_0\in X_0}\in\mathcal{L}}\Bigl(\mathcal{V}(l_{x_0};\vartheta,t_0)-\sum_{x_0\in X_0}\rho^+(l_{x_0}|M^{\gamma^*}_{x_0})\Bigr)\leqslant-\gamma^*+\mu\mu^*K<0.$$

Однако последнее неравенство противоречит условию разрешимости задачи пакетного наведения (1.2) и правилу определения множества M_{x_0}. Необходимость доказана. Достаточность следует из уже упоминавшегося условия (1.2). Теорема доказана. □

Теорема 3. *Пусть $(l^*_{x_0})_{x_0\in X_0}\in\mathcal{L}$ является вектором, на котором достигается максимум в выражении (2.3), причем вектор $d^*_k(\tau)=D(\tau)\sum\limits_{x_0\in X_{0,k}}l^*_{x_0}$ отличен от нуля при всех $\tau\in T$. Пусть нулевая расширенная программа не является наводящей (для расширенной системы) и для произвольного $k=1,\ldots,K$ и произвольного кластера $X_{0,k}\in\mathcal{X}(\tau_k)$ выполняется равенство*

$$\bigl(d^*_k(\tau),w_{X_{0,k}}(\tau)\bigr)=\varrho^-\bigl(d^*_k(\tau)|U\bigr)\quad(\tau\in[\tau_{k-1},\tau_k)). \tag{2.7}$$

Тогда расширенная программа $t\to(w_{x_0}(t))_{x_0\in X_0}$ является наводящей для системы (1.1).

Доказательство. Справедливость утверждения теоремы устанавливается аналогично [11]. □

Следствие 1. *Пакет программ, соответствующий расширенной программе, определяемой согласно теореме 3, является наводящим.*

Пример 1. Рассмотрим линейную управляемую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=-2x_1-x_2+t,\\ \dot{x}_2&=x_2+u;\end{aligned} \tag{2.8}$$

здесь $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — координаты фазового вектора $x(t)=\bigl(x_1(t),x_2(t)\bigr)^\top$. Значения управления $u(t)$ ограничены отрезком $[-p,p]$, где $p=0.1151$. Таким образом, имеем следующие параметры системы (0.1): $n=2$, $m=1$ и $U=[-p,p]$; матрицы A, B и вектор $c(t)$ имеют вид

$$A=\begin{pmatrix}-2&-1\\0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\quad c(t)=\begin{pmatrix}t\\0\end{pmatrix}.$$

Пусть $[t_0,\vartheta]=[0,2]$ и множество допустимых начальных состояний состоит из двух различных элементов, $X_0=\{x',x''\}$, где

$$x'=(x'_1,x'_2)^\top=(-1,0.5)^\top,\quad x''=(x''_1,x''_2)^\top=(-2,1)^\top.$$

Предположим, что данные о положении системы на отрезке $[0,1]$ при движении будут недоступны, а на полуинтервале $(1,2]$ состояние системы будет полностью отслеживаться, то есть мы имеем сигнал вида

$$y(t)=\begin{pmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\end{pmatrix}=\begin{cases}(0,0)^\top, & t\in[0,1],\\ (t-1)\big(x_1(t),x_2(t)\big)^\top, & t\in(1,2],\end{cases}$$

который соответствует следующей непрерывной матрице наблюдения:

$$Q(t)=\begin{cases}0, & t\in[0,1],\\ (t-1)I_2, & t\in(1,2],\end{cases}$$

где $I_2\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ — единичная матрица. Пусть $f(x)=2|x_1|$. Цель управления будет состоять в том, чтобы по имеющимся значениям сигнала сформировать программу управления системой, которая в момент времени $t=2$ обеспечивала бы выполнение условий

$$J_{x'}=0.5,\quad J_{x''}=3.$$

Тогда целевыми множествами будут цилиндрические множества

$$M_{x'}=\Big\{\,(x_1,x_2)^\top\in\mathbb{R}^2\colon |x_1|\leqslant m_1,\ x_2\in\mathbb{R}\,\Big\},$$

$$M_{x''}=\Big\{\,(x_1,x_2)^\top\in\mathbb{R}^2\colon |x_1|\leqslant m_2,\ x_2\in\mathbb{R}\,\Big\},$$

где $m_1=0.25$, $m_2=1.5$. Проверим выполнение критерия (1.2) разрешимости задачи о гарантированном позиционном наведении. Собственными числами матрицы A являются $\lambda_1=-2$ и $\lambda_2=1$, а поскольку система (2.8) автономная, то фундаментальная матрица $F(\cdot,\cdot)$ зависит только от разности аргументов и определяется формулой

$$F(t,s)=F(t-s)=\begin{pmatrix}e^{-2(t-s)} & -\dfrac{1}{3}e^{t-s}\\ 0 & e^{t-s}\end{pmatrix}.$$

Для автономной системы с управлением формула Коши записывается в виде

$$x(t)=F(t)x(0)+\int_0^t F(t-s)c(s)\,ds+\int_0^t F(t-s)Bu(s)\,ds.$$

Однородные сигналы, соответствующие допустимым начальным состояниям x' и x'', имеют соответственно вид

$$g_{x'}(t)=Q(t)F(t)x'=\begin{cases}(0,0)^\top, & t\in[0,1],\\ (t-1)\begin{pmatrix}e^{-2t}x'_1-\dfrac{1}{3}e^t x'_2\\ e^t x'_2\end{pmatrix}, & t\in(1,2],\end{cases}$$

$$g_{x''}(t)=Q(t)F(t)x''=\begin{cases}(0,0)^\top, & t\in[0,1],\\ (t-1)\begin{pmatrix}e^{-2t}x''_1-\dfrac{1}{3}e^t x''_2\\ e^t x''_2\end{pmatrix}, & t\in(1,2].\end{cases}$$

Поскольку начальные состояния предполагаются различные ($x'\neq x''$), то $\tau_1=1$ — первый момент расслоения каждого из этих однородных сигналов. При этом второй момент расслоения τ_2 — конечный момент $T=2$. Число K моментов расслоения однородных сигналов равно 2, кластерная позиция $\mathcal{X}_0(1)$ в момент $t=1$ содержит единственное множество X_0, а кластерная позиция $\mathcal{X}_0(2)$ в момент $t=2$ содержит два множества, $\{x'\}$ и $\{x''\}$.

Для построения наводящего пакета с помощью теоремы 3 нам понадобится

$$D(s) = B^\top F^\top(\vartheta - s) = \Big(-\frac{1}{3}e^{\vartheta - s}, e^{\vartheta - s}\Big), \quad s \in [0, 2].$$

Пусть $\mathcal{L}$ есть множество всех семейств $(\bar{l}'_1, \bar{l}''_1) \in \mathcal{R}_2$ $\big(\bar{l}'_1 = (l'_1, 0)^\top, \bar{l}''_1 = (l'_1, 0)^\top\big)$ таких, что выполняется одно из соотношений:

$$|l'_1| = 1, \quad |l''_1| \leqslant 1 \quad \text{или} \quad |l'_1| \leqslant 1, \quad |l''_1| = 1.$$

Принимая во внимание выражения

$$\rho^+\big((l,0)^\top | M_{x'}\big) = m_1|l|, \quad \rho^+\big((l,0)^\top | M_{x''}\big) = m_2|l|, \quad \rho^-(l|U) = -p|l|,$$

для значений функции $\gamma(\cdot)$ при произвольных действительных l' и l'' из формулы (1.2) получаем

$$\gamma\big((l',0)^\top, (l'',0)^\top\big) = l'z' + l''z'' - p\frac{1}{3}\int_0^1 e^{2-s}|l' + l''|\,ds - p\frac{1}{3}\int_1^2 e^{2-s}(|l'| + |l''|)\,ds - m_1|l'| - m_2|l''| =$$

$$= l'z' + l''z'' - p\frac{1}{3}(e^2 - e)|l' + l''| - p\frac{1}{3}(e - 1)(|l'| + |l''|) - m_1|l'| - m_2|l''|,$$

где $z' = e^{-4}x'_1 - \frac{1}{3}e^2 x'_2 + \frac{1}{4}(3 + e^{-4})$ и $z'' = e^{-4}x''_1 - \frac{1}{3}e^2 x''_2 + \frac{1}{4}(3 + e^{-4})$.

В условиях теоремы 2 находим максимум

$$\gamma = \max_{\bar{l}', \bar{l}'' \in \mathcal{L}} \gamma\big((l',0)^\top, (l'',0)^\top\big) = 0,$$

который достигается при $l' = -1$ и $l'' = 0$. Следовательно, критерий разрешимости (1.2) выполняется. Для построения наводящего пакета с помощью теоремы 3 вычислим

$$\sum_{x_0 \in X_{0,0}} l^*_{x_0} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

а также

$$D(s) \sum_{x_0 \in X_{0,0}} l^*_{x_0} = -\frac{1}{3}e^{\vartheta - s}, \quad s \in [0, 2].$$

Тогда на отрезке $[0, 1]$, пользуясь формулой (2.7), можно построить $u^*_{X_{0,0}}(s) = -p$. Таким же образом на полуинтервале $(1, 2]$ находим $u_{x'}(s) = -p$, но для $u_{x''}(s)$ условия теоремы 3 не выполняются ввиду $\sum\limits_{x_0 \in X_{0,1}} l^*_{x_0} = 0$. В этом случае также примем $u_{x''}(s) = -p$. В результате получаем пакет программ

$$u_{x'}(t) = -0.1151, \quad u_{x''}(t) = -0.1151, \quad t \in [0, 2],$$

который приводит систему в следующие положения:

$$x_1\big(2|x', u_{x'}(\cdot)\big) = z' - \frac{1}{3}\int_0^1 e^{t-s}u_{x',x''}(s)\,ds - \frac{1}{3}\int_1^2 e^{t-s}u_{x'}(s)\,ds = -0.25,$$

$$x_1\big(2|x'', u_{x''}(\cdot)\big) = z'' - \frac{1}{3}\int_0^1 e^{t-s}u_{x',x''}(s)\,ds - \frac{1}{3}\int_1^2 e^{t-s}u_{x''}(s)\,ds = -1.5.$$

На рисунках изображены зависимости первой координаты системы от времени, если начальное состояние x' (рис. 1) и x'' (рис. 2). Пунктирной линией обозначена часть траектории, когда нет сигнала о состоянии системы ($t \in [0, 1]$), а сплошной линией — когда система наблюдаемая ($t \in [1, 2]$). Заштрихованные фигуры являются целевыми множествами $M_{x'}$ и $M_{x''}$ на рис. 1 и рис. 2 соответственно.

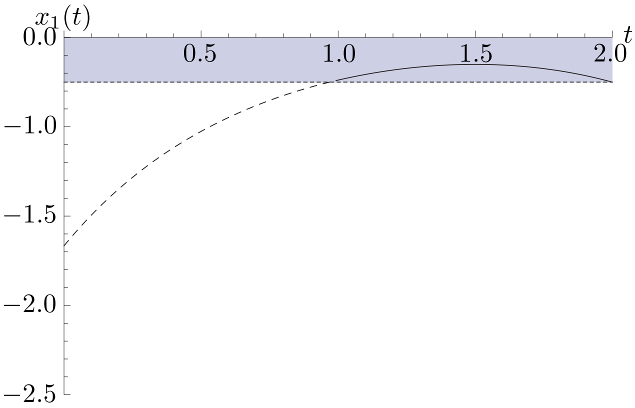

Рис. 1. Траектория x_1, порожденная решением системы (2.8) из x'

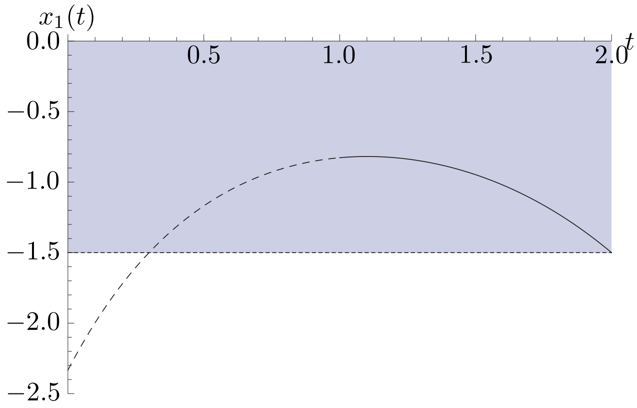

Рис. 2. Траектория x_1, порожденная решением системы (2.8) из x''

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Krasovskii A.N., Krasovskii N.N. Control under lack of information. Boston: Birkhauser, 1995. 324 p.
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Физматлит, 1974. 456 с.
3. Осипов Ю.С. Пакеты программ: подход к решению задач позиционного управления с неполной информацией // Успехи математических наук. 2006. Т. 61. Вып. 4. С. 25–76. DOI: 10.4213/rm1760
4. Кряжимский А.В., Осипов Ю.С. О разрешимости задач гарантирующего управления для частично наблюдаемых линенйых динамических систем // Труды Математического института им. В. А. Стеклова. 2012. Т. 277. С. 152–167.
5. Кряжимский А.В., Стрелковский Н.В. Программный критерий разрешимости задач позиционного наведения с неполной информацией. Линейные управляемые системы // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20. № 3. С. 132–147.
6. Григоренко Н.Л. Задача управления с доминирующей неопределенностью // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19. № 4. С. 64–72.
7. Максимов В.И. Дифференциальная игра наведения при неполной информации о фазовых координатах и неизвестном начальном состоянии // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51. № 12. С. 1676–1685. DOI: 10.1134/S0374064115120134
8. Розенберг В.Л. Об одной задаче управления при дефиците информации для линейного стохастического дифференциального уравнения // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21. № 3. С. 292–302.
9. Сурков П.Г. Задача пакетного наведения к заданному моменту времени для линейной управляемой системы с запаздыванием // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22. № 2. С. 267–276. DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-267-276
10. Максимов В.И. Об отслеживании предписанного решения нелинейного распределенного уравнения второго порядка // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 1. С 128–132. DOI: 10.1134/S0374064116010118
11. Стрелковский Н.В. Построение стратегии гарантированного позиционного наведения для линейной управляемой системы при неполной информации // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. 2015. № 3. С. 27–34.

Поступила в редакцию 01.08.2017

МАТЕМАТИКА 2017. Т. 27. Вып. 3

Максимов Вячеслав Иванович, д. ф.-м. н., профессор, заведущий отделом дифференциальных уравнений, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: maksimov@imm.uran.ru

Сурков Платон Геннадьевич, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, отдел дифференциальных уравнений, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: spg@imm.uran.ru

V. I. Maksimov, P. G. Surkov

On the solvability of the problem of guaranteed package guidance to a system of target sets

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 3, pp. 344–354 (in Russian).

Keywords: linear systems, control, incomplete information.

MSC2010: 91A24, 93C41, 49N75

DOI: 10.20537/vm170305

Control theory is a section of modern mathematics being actively developed at present time. The class of problems investigated within the framework of this theory is quite extensive and includes issues related to the existence of solutions as well as issues related to the effective methods for constructing controls. One of the approaches to solving control problems under lack of information was suggested by Yu. S. Osipov in the fundamental paper published in the Russian Mathematical Surveys in 2006. Later, this approach, called the method of program packages, was developed, in particular, in the articles cited in this paper. This approach is based on a suitable modification of the method of non-anticipatory strategies (quasi-strategies) for solving control problems with unknown initial states. As is known, quasi-strategies reflecting the Volterra properties of program realizations of closed-loop controls in corresponding program disturbances are oriented to the investigation of problems with known initial states under the presence of unknown dynamical disturbances. Such disturbances are usually absent in standard control problems with incomplete information and incompleteness of information is due to a lack of information about the initial state of the system. So, program packages became an analogue of the properties of nonanticipativeness for problems with unknown initial states. It should be noted that in all previous works related to the method of program packages, the guidance problems to one single target set were considered. In the present paper the guaranteed guidance problem to a collection of target sets under incomplete information about the initial state is considered for a linear autonomous control dynamical system. The criterion for the solvability of that problem is established. It is based on the method of program packages. An illustrative example is given.

REFERENCES

1. Krasovskii A.N., Krasovskii N.N. *Control under lack of information*, Boston: Birkhauser, 1995, 324 p.
2. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems*, New York: Springer, 1988, 517 p. Original Russian text published in Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry*, Moscow: Nauka, 1974, 456 p.
3. Osipov Yu.S. Control packages: an approach to solution of positional control problems with incomplete information, *Russian Mathematical Surveys*, 2006, vol. 61, issue 4, pp. 611–661. DOI: 10.1070/RM2006v061n04ABEH004342
4. Kryazhimskiy A.V., Osipov Yu.S. On the solvability of problems of guaranteeing control for partially observable linear dynamical systems, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2012, vol. 277, pp. 144–159. DOI: 10.1134/S0081543812040104
5. Kryazhimskii A.V., Strelkovskii N.V. An open-loop criterion for the solvability of a closed-loop guidance problem with incomplete information. Linear control systems, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2015, vol. 291, suppl. 1, pp. 113–127. DOI: 10.1134/S0081543815090084
6. Grigorenko N.L. A control problem with dominating uncertainty, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2014, vol. 287, suppl. 1, pp. 68–76. DOI: 10.1134/S0081543814090077

7. Maksimov V.I. Differential guidance game with incomplete information on the state coordinates and unknown initial state, *Differential Equations*, 2015, vol. 51, issue 12, pp. 1656–1665. DOI: 10.1134/S0012266115120137
8. Rozenberg V.L. A control problem under incomplete information for a linear stochastic differential equation, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2016, vol. 295, suppl. 1, pp. 145–155. DOI: 10.1134/S0081543816090157
9. Surkov P.G. The problem of package guidance by a given time for a linear control system with delay, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2017, vol. 296, suppl. 1, pp. 218–227. DOI: 10.1134/S0081543817020201
10. Maksimov V.I. Tracking a given solution of a nonlinear distributed second-order equation, *Differential Equations*, 2016, vol. 52, issue 1, pp. 128–132. DOI: 10.1134/S0012266116010110
11. Strelkovskii N.V. Constructing a strategy for the guaranteed positioning guidance of a linear controlled system with incomplete data, *Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics*, 2015, vol. 39, issue 3, pp. 126–134. DOI: 10.3103/S0278641915030085

Received 01.08.2017

Maksimov Vyacheslav Ivanovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Department of Differential Equations, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia.
E-mail: maksimov@imm.uran.ru

Surkov Platon Gennad'evich, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Department of Differential Equations, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia.
E-mail: spg@imm.uran.ru