УДК 517.977.1, 517.926

© ***Е. К. Макаров, С. Н. Попова***

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ РАВНОМЕРНОЙ ПОЛНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ[1]

Рассматривается линейная управляемая система

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

в предположении непрерывности по t и s матрицы Коши $X(t,s)$ свободной системы $\dot{x} = A(t)x$. На каждом отрезке $[\tau, \tau+\vartheta]$ фиксированной длины ϑ задается нормированное пространство Z_τ функций, определенных на этом отрезке. Управление u на отрезке $[\tau, \tau+\vartheta]$ называется допустимым, если $u \in Z_\tau$ и существует $\mathcal{Q}_\tau(u) := \int_\tau^{\tau+\vartheta} X(\tau,s)B(s)u(s)\,ds$. Векторное подпространство U_τ пространства Z_τ, на котором определен оператор $\mathcal{Q}_\tau$, называется пространством допустимых управлений для системы (1) на отрезке $[\tau, \tau+\vartheta]$. Предложено определение равномерной полной управляемости системы (1) для случая произвольной зависимости пространства допустимых управлений от момента начала процесса управления. Получены прямые и двойственные необходимые и достаточные условия равномерной полной управляемости линейной системы в этой ситуации. Показано, что при должном выборе пространства допустимых управлений полученные условия эквивалентны классическим определениям равномерной полной управляемости.

Ключевые слова: линейные управляемые системы, равномерная полная управляемость.

DOI: 10.20537/vm170304

Рассмотрим нестационарную линейную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

такую, что соответствующая свободная система

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

имеет матрицу Коши $X(t,s)$, непрерывную по каждой переменной. Другие требования к системам (1) и (2) будем формулировать по мере необходимости.

Элементы пространства $\mathbb{R}^n$ (вектор-столбцы) и элементы сопряженного пространства $\mathbb{R}^{n\prime}$ (вектор-строки) будем интерпретировать как матрицы размеров $n \times 1$ и $1 \times n$ соответственно, записывая скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$ в виде $x^T y$, а действие линейной формы $f \in \mathbb{R}^{n\prime}$ на вектор $x \in \mathbb{R}^n$ — в виде fx. В последнем случае при необходимости будет использоваться и обозначение $f(x)$. Если для каких-либо заданных $f \in \mathbb{R}^{n\prime}$ и $x \in \mathbb{R}^n$ выполнено равенство $f(x) = 0$, то мы будем говорить, что вектор x и ковектор f ортогональны, а также использовать обычные обозначения $x \perp f$ или $f \perp x$.

Норма в $\mathbb{R}^n$ всюду далее предполагается евклидовой, а в пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$ вещественных $n \times n$-матриц используется спектральная норма, т. е. матричная норма, подчиненная евклидовой векторной норме. Векторы канонического ортонормированного базиса в пространстве $\mathbb{R}^n$ обозначаются через e_k, $k = 1, \ldots, n$.

Для системы (1) поставим задачу терминального управления на некотором отрезке $[t_0, t_1]$ с начальным и конечным условиями $x(t_0) = x_0$ и $x(t_1) = x_1$. Зададим также некоторое множество допустимых программных управлений, обеспечивающих как минимум существование решения любой задачи Коши с произвольным начальным условием в точке t_0 и его продолжимость на весь отрезок $[t_0, t_1]$. Если допустимое управление, обеспечивающее перевод системы из

[1]Исследования второго автора выполнены при финансовой поддержке РФФИ (грант 16–01–00346).

состояния $x(t_0)=x_0$ в состояние $x(t_1)=x_1$, существует для любой пары начального и конечного состояний (x_0,x_1), то, как известно [1, с. 138], [2], система (1) называется вполне управляемой на отрезке $[t_0,t_1]$.

Свойства нестационарной системы с течением времени могут изменяться, поэтому, даже если система (1) вполне управляема на любом отрезке вещественной оси, характеристики управлений, связывающих два фиксированных состояния на разных отрезках, могут сильно отличаться. Это обстоятельство приводит к необходимости рассматривать различные виды управляемости.

Согласно [2] система (1) называется *равномерно вполне управляемой*, если существуют такие положительные числа ϑ и α_i, $i=1,\ldots,4$, что при всех $\tau\in\mathbb{R}$ справедливы неравенства

$$\alpha_1 E\leqslant W(\tau,\tau+\vartheta)\leqslant\alpha_2 E, \tag{3}$$

$$\alpha_3 E\leqslant \widehat{W}(\tau,\tau+\vartheta)\leqslant\alpha_4 E, \tag{4}$$

где матрица управляемости (матрица Калмана) W определяется равенством

$$W(t_0,t_1)=\int_{t_0}^{t_1}X(t_0,s)B(s)B^T(s)X^T(t_0,s)\,ds, \tag{5}$$

матрица $E\in\mathbb{R}^{n\times n}$ — единичная, $\widehat{W}(\tau,\tau+\vartheta)=X(\tau+\vartheta,\tau)W(\tau,\tau+\vartheta)X^T(\tau+\vartheta,\tau)$.

Если условия определения равномерной полной управляемости выполнены для некоторого заранее выбранного значения $\vartheta>0$, то система (1) называется *ϑ-равномерно вполне управляемой* [3].

Неравенства между матрицами в (3) и (4) представляют собой условную запись неравенств между соответствующими квадратичными формами и означают выполнение при всех $h\in\mathbb{R}^n$ обычных неравенств

$$\begin{gathered}\alpha_1\|h\|^2\leqslant h^TW(\tau,\tau+\vartheta)h=\int_\tau^{\tau+\vartheta}\|h^TX(\tau,s)B(s)\|^2ds\leqslant\alpha_2\|h\|^2,\\ \alpha_3\|h\|^2\leqslant h^T\widehat{W}(\tau,\tau+\vartheta)h=\int_\tau^{\tau+\vartheta}\|h^TX(\tau+\vartheta,s)B(s)\|^2ds\leqslant\alpha_4\|h\|^2.\end{gathered} \tag{6}$$

Если система (1) ϑ-равномерно вполне управляема по Калману, то для любых $x_0,x_1\in\mathbb{R}^n$ на каждом отрезке $[\tau,\tau+\vartheta]$ определены *калмановские управления*

$$u_1(t)=-B^T(t)X^T(\tau,t)W^{-1}(\tau,\tau+\vartheta)x_0,\quad u_2(t)=B^T(t)X^T(\tau+\vartheta,t)\widehat{W}^{-1}(\tau,\tau+\vartheta)x_1, \tag{7}$$

первое из которых переводит систему (1) из состояния $x(\tau)=x_0$ в состояние $x(\tau+\vartheta)=0$, а второе — из состояния $x(\tau)=0$ в состояние $x(\tau+\vartheta)=x_1$. Согласно [2] (см. также [4]) необходимым условием равномерной полной управляемости системы (1) по Калману является принадлежность элементов матрицы B пространству $L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ функций, интегрируемых с квадратом на любом отрезке вещественной оси. Поэтому управления (7) при каждом $\tau\in\mathbb{R}$ принадлежат классу $L_2[\tau,\tau+\vartheta]$. Более того, по построению они имеют минимальную L_2-норму среди всех управлений, осуществляющих указанные переходы [2] (см. также [5, с. 86–92]). Это означает, что равенства (7) представляют собой явные выражения для метрических обобщенных обратных операторов [6, с. 43] к интегральным операторам конечного ранга

$$x_0=-\int_\tau^{\tau+\vartheta}X(\tau,s)B(s)u(s)\,ds,\quad x_1=\int_\tau^{\tau+\vartheta}X(\tau+\vartheta,s)B(s)u(s)\,ds, \tag{8}$$

действующим из $L_2[\tau,\tau+\vartheta]$ в $\mathbb{R}^n$. Благодаря евклидовости нормы этого пространства отображения, ставящие управления u_1 и u_2 в соответствие векторам x_0 и x_1, линейны. Если предполагать операторы (8) действующими на других функциональных пространствах, то отображения, являющиеся обобщенными обратными к ним, могут быть нелинейными, многозначными и обладать достаточно неудобными свойствами.

Для случая пространства ограниченных измеримых функций альтернативу определению равномерной полной управляемости по Калману (3), (4) дает определение равномерной полной управляемости по Тонкову, согласно которому система (1) называется *ϑ-равномерно вполне управляемой*, если существует такое число $l > 0$, что для любого состояния x_0 на всяком отрезке длины ϑ найдется управление u, обеспечивающее перевод системы (1) из состояния x_0 в состояние 0 на этом отрезке и удовлетворяющее на нем оценке $\|u(t)\| \leqslant l\|x_0\|$. Если коэффициенты системы (1) ограничены, то равномерная полная управляемость по Тонкову эквивалентна равномерной полной управляемости по Калману. Эта эквивалентность была известна Е. Л. Тонкову по меньшей мере с начала 1970-х, но соответствующее утверждение опубликовано значительно позднее [7] (см. также [5, с. 95]).

В самом общем виде идея ϑ-равномерной полной управляемости состоит в осуществимости на всяком отрезке времени длины ϑ перехода между любыми двумя состояниями системы при примерно одинаковых затратах на допустимое управление. Последнее означает, что для любой заданной пары состояний эти затраты слабо зависят от момента начала процесса.

Конструкция Калмана основана на использовании допустимых управлений, принадлежащих пространствам $L_2[\tau, \tau + \vartheta]$, и понимании затрат как нормы в этих пространствах, которая в [2] называется *«control energy»*. Определение Тонкова, в свою очередь, подразумевает допустимость ограниченных кусочно-непрерывных либо измеримых управлений и использует в качестве затрат их чебышёвские нормы. В обоих случаях слабость зависимости затрат на управление от момента начала процесса интерпретируется как их двусторонняя оценка, равномерная по τ.

Зафиксируем некоторое ϑ и по аналогии с этими классическими конструкциями условимся считать управление u на отрезке $[\tau, \tau + \vartheta]$ допустимым, если для него существует интеграл

$$\mathcal{B}_\tau(u) := \int_\tau^{\tau+\vartheta} B(s)u(s)ds,$$

понимаемый как интеграл Лебега от вектор-функции, а само оно принадлежит некоторому заданному нормированному пространству Z_τ функций, определенных на этом отрезке (своему при каждом τ). Мерой затрат на управление u на отрезке $[\tau, \tau+\vartheta]$ будем считать его норму $\|u\|_\tau$ в пространстве Z_τ. Множество допустимых управлений обозначим через U_τ. В силу линейности отображения $u \mapsto \mathcal{B}_\tau(u)$ множество U_τ является линейным многообразием в пространстве Z_τ. При этом, если оператор $\mathcal{B}_\tau$ не непрерывен, многообразие U_τ может быть незамкнутым подмножеством Z_τ. В таком случае оно не будет подпространством нормированного пространства Z_τ.

При сделанных предположениях сформулированная общая идея может быть легко реализована для системы

$$\dot{x} = B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

т. е. системы (1) с нулевой матрицей A.

Определение 1. Система (9) называется *ϑ-равномерно вполне управляемой*, если для любой пары несовпадающих состояний $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ существуют числа $M(x_0, x_1) \geqslant m(x_0, x_1) > 0$ такие, что при всяком $\tau \in \mathbb{R}$ найдется допустимое управление u, которое удовлетворяет оценке $\|u\|_\tau \leqslant M(x_0, x_1)$ и переводит систему из состояния $x(\tau) = x_0$ в состояние $x(\tau + \vartheta) = x_1$, причем для каждого управления, осуществляющего такой переход, справедливо неравенство $\|u\|_\tau \geqslant m(x_0, x_1)$.

Замечание 1. Для совпадающих состояний $x_0 = x_1$ всегда существует связывающее их нулевое управление, и поэтому должны выполняться равенства $M(x_0, x_0) = m(x_0, x_0) = 0$. Если условия определения 1 выполнены, то совпадение начального и конечного состояний — единственный случай, когда такие равенства возможны.

Замечание 2. Поскольку для всякого управления u, переводящего x_0 в x_1, справедливо равенство $x_1 - x_0 = \mathcal{B}_\tau(u)$, такое управление одновременно переводит состояние $x_0 - x_1$ в нуль и нулевое состояние в $x_1 - x_0$. Поэтому условия определения 1 достаточно проверять лишь для пар состояний какого-либо одного из видов: $(x_0, 0)$ или $(0, x_1)$.

Лемма 1. *Пусть C_μ, $\mu \in \mathfrak{M}$, — произвольное семейство выпуклых подмножеств $\mathbb{R}^n$. Если их пересечение $P := \bigcap\limits_{\mu\in\mathfrak{M}} C_\mu$ содержит окрестность нуля, то множество $S := \bigcup\limits_{\mu} C_\mu$ либо ограничено, либо содержит некоторый луч с началом в нуле.*

Доказательство. Если S ограничено, то оно не содержит никакого луча. Пусть S — неограниченное множество. Тогда существует последовательность x_k, $k \in \mathbb{N}$, такая, что $x_k \in C_{\mu(k)}$ при некотором $\mu(k) \in \mathfrak{M}$ и $\|x_k\| \to +\infty$ при $k \to \infty$. Последнее означает, что $\|x_k\| \neq 0$ для всех достаточно больших $k \in \mathbb{N}$. Заранее выбирая подходящую подпоследовательность, можно сразу считать, что $\|x_k\| \neq 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$ и, в силу конечномерности пространства $\mathbb{R}^n$, что последовательность $x_k/\|x_k\|$ сходится к некоторому $h_0 \in \mathbb{R}^n$, $\|h_0\| = 1$. Представим x_k в виде $x_k = y_k + z_k$, где $y_k \| h_0$, $z_k \perp h_0$. Тогда $y_k = (x_k^T h_0) h_0$, и поэтому $\|y_k\|/\|x_k\| = |x_k^T h_0|/\|x_k\| \to \to \|h_0\|^2 = 1$, $\|z_k\|^2/\|x_k\|^2 = (\|x_k\|^2 - \|y_k\|^2)/\|x_k\|^2 \to 0$ при $k \to \infty$.

Если последовательность z_k содержит бесконечное число нулевых членов, то последовательность x_k содержит бесконечное число векторов, коллинеарных вектору h_0. В этом случае множество S содержит луч с направляющим вектором h_0. В противном случае, отбрасывая при необходимости конечное число нулевых начальных элементов последовательности z_k и сдвигая нумерацию, при каждом $k \in \mathbb{N}$ положим $v_k = -z_k/\|z_k\|$ и $\gamma_k = \|z_k\|/(1 + \|z_k\|)$. Очевидно, $\|v_k\| = 1$, $\gamma_k \in]0, 1[$, $1 - \gamma_k = 1/(1 + \|z_k\|) \in]0, 1[$.

Без ограничения общности считаем, что множество P содержит замкнутый единичный шар пространства $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле. Тогда $v_k \in P \subset C_{\mu(k)}$, и поэтому выпуклая комбинация $w_k := \gamma_k v_k + (1 - \gamma_k) x_k = y_k/(1 + \|z_k\|) = \|y_k\| h_0/(1 + \|z_k\|)$ также лежит в $C_{\mu(k)}$. Поскольку $0 \in P \subset C_{\mu(k)}$, в $C_{\mu(k)}$ содержится весь отрезок от 0 до w_k. При этом все векторы w_k, $k \in \mathbb{N}$, коллинеарны вектору h_0 и в силу соотношений

$$\|w_k\| = \frac{\|y_k\|}{1 + \|z_k\|} = \frac{\|x_k\|^{-1}\|y_k\|}{\|x_k\|^{-1} + \|x_k\|^{-1}\|z_k\|} \to +\infty, \quad k \to \infty,$$

весь луч с направляющим вектором h_0 и началом в нуле содержится в S. Лемма 1 доказана. □

Замечание 3. Если $\mathfrak{M}$ — конечное множество, то утверждение леммы очевидно. Мы не выделяем этот случай, поскольку он охватывается приведенным доказательством.

При каждом $z \in \mathbb{R}^n$ через $U_\tau^-(z)$ обозначим множество управлений $u \in U_\tau$, переводящих систему (9) из состояния $x(\tau) = z$ в состояние $x(\tau + \vartheta) = 0$. Для любого такого управления выполнено равенство $z = -\mathcal{B}_\tau(u)$. Аналогично: через $U_\tau^+(z)$ обозначим множество управлений $u \in U_\tau$, переводящих систему (9) из состояния $x(\tau) = 0$ в состояние $x(\tau + \vartheta) = z$. Для любого $u \in U_\tau^+(z)$ выполнено равенство $z = \mathcal{B}_\tau(u)$. Нетрудно проверить, что $U_\tau^-(z) = U_\tau^+(-z) = -U_\tau^+(z)$.

Утверждение 1. *Система (9) является ϑ-равномерно вполне управляемой в смысле определения 1 тогда и только тогда, когда существуют такие числа $L \geqslant l > 0$, что при каждом $\tau \in \mathbb{R}$ для любого состояния $x_0 \in \mathbb{R}^n$ найдется управление $u \in U_\tau^-(x_0)$, которое удовлетворяет оценке $\|u\|_\tau \leqslant L\|x_0\|$, и для всякого управления $u \in U_\tau^-(x_0)$ справедливо неравенство $\|u\|_\tau \geqslant l\|x_0\|$.*

Доказательство. Пусть система (9) является ϑ-равномерно вполне управляемой в смысле определения 1. Возьмем произвольное ненулевое состояние $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и запишем его разложение по каноническому базису пространства состояний $e_k \in \mathbb{R}^n$, $k = 1, \ldots, n$, в виде $x_0 = \xi_1 e_1 + \ldots + \xi_n e_n$. Очевидно, справедливы оценки $|\xi_k| \leqslant \|x_0\|$. Построим управления $u_k \in U_\tau$, переводящие состояния e_k, $k = 1, \ldots, n$, в нуль на отрезке $[\tau, \tau + \vartheta]$ и удовлетворяющие оценке $\|u_k\|_\tau \leqslant M(e_k, 0)$ из определения 1. Тогда управление $u_0 = \xi_1 u_1 + \ldots + \xi_n u_n \in Z_\tau$

является допустимым, переводит x_0 в нуль на этом отрезке и удовлетворяет неравенству $\|u_0\|_\tau \leqslant |\xi_1|\,\|u_1\|_\tau + \ldots + |\xi_n|\,\|u_n\|_\tau \leqslant (|\xi_1| + \ldots + |\xi_n|)\max\limits_k M(e_k,0) \leqslant n\|x_0\|\max\limits_k M(e_k,0)$. Полагая $L := n\max\limits_k M(e_k,0)$, получим первую из требуемых оценок $\|u_0\|_\tau \leqslant L\|x_0\|$ для некоторого $u_0 \in U_\tau^-(x_0)$.

При каждом $\tau \in \mathbb{R}$ в Z_τ рассмотрим выпуклое множество $G_\tau := \{u \in U_\tau : \|u\|_\tau \leqslant 1\}$. Его образ $H_\tau := \mathcal{B}_\tau G_\tau$ при линейном отображении $\mathcal{B}_\tau$ является выпуклым подмножеством $\mathbb{R}^n$. По доказанному, для любого $x \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющего условию $\|x\| < L^{-1}$, при всяком $\tau \in \mathbb{R}$ найдется управление $u_x \in U_\tau^-(x)$ такое, что справедлива оценка $\|u_x\|_\tau \leqslant L\|x\| < 1$. Поскольку $u_x \in G_\tau$, имеем включение $x \in H_\tau$, означающее, что каждое H_τ, $\tau \in \mathbb{R}$, содержит единичный шар пространства $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле и радиусом L^{-1}. Этот же шар, следовательно, содержится и в пересечении $P = \bigcap_{\tau\in\mathbb{R}} H_\tau$. Тогда по лемме 1 множество $S = \bigcup_{\tau\in\mathbb{R}} H_\tau$ либо ограничено, либо содержит некоторый луч с началом в нуле. Предположим, что S содержит такой луч с направляющим вектором $h_0 \in \mathbb{R}^n$. Тогда для любого $\lambda > 0$ найдется $\tau(\lambda) \in \mathbb{R}$, при котором выполнено включение $\lambda h_0 \in H_{\tau(\lambda)}$. Это означает, что существует управление $u_\lambda \in U_{\tau(\lambda)}^-(\lambda h_0)$, удовлетворяющее оценке $\|u_\lambda\|_{\tau(\lambda)} \leqslant 1$. Поскольку включение $u_\lambda \in U_{\tau(\lambda)}^-(\lambda h_0)$ эквивалентно равенству $\mathcal{B}_{\tau(\lambda)} u_\lambda = -\lambda h_0$, то управление $v_\lambda = u_\lambda/\lambda$ удовлетворяет оценке $\|v_\lambda\|_{\tau(\lambda)} \leqslant 1/\lambda$ и принадлежит множеству $U_{\tau(\lambda)}^-(h_0)$. Теперь, выбирая произвольное $\lambda > m^{-1}(x_0,0)$, получаем противоречие с определением 1.

Таким образом, S не может содержать никакого луча с началом в нуле и поэтому ограничено в силу леммы 1. Тогда найдется такое $l > 0$, что для всякого $x \in S$ выполнено неравенство $\|x\| \leqslant l^{-1}$. Отсюда следует, что при каждом $\tau \in \mathbb{R}$ для любого $u \in G_\tau$ справедлива оценка $\|\mathcal{B}_\tau u\| \leqslant l^{-1}$, которая в силу линейности оператора $\mathcal{B}_\tau$ эквивалентна выполнению неравенства $\|\mathcal{B}_\tau u\| \leqslant l^{-1}\|u\|_\tau$ для всех $u \in U_\tau$. Соответственно, для всех $u \in U_\tau^-(x_0)$ имеем требуемую оценку $\|u\|_\tau \leqslant l\|x_0\|$. Необходимость доказана.

Для доказательства достаточности положим $M(x_0,x_1) = L\|x_0 - x_1\|$, $m(x_0,x_1) = l\|x_0 - x_1\|$. Используя замечание 2, нетрудно проверить, что в условиях утверждения 1 при таком выборе функций M и m все требования определения 1 выполнены. Утверждение 1 доказано. □

Будем говорить, что семейство операторов $\mathcal{B}_\tau$, $\tau \in \mathbb{R}$, *равномерно ограничено*, если конечна величина

$$\beta := \sup_{\tau\in\mathbb{R}} \|\mathcal{B}_\tau\|, \tag{10}$$

где

$$\|\mathcal{B}_\tau\| := \sup_{0\neq u\in U_\tau} \frac{\|\mathcal{B}_\tau(u)\|}{\|u\|_\tau}.$$

Следствие 1. *Если система (9) является ϑ-равномерно вполне управляемой, то семейство операторов $\mathcal{B}_\tau$, $\tau \in \mathbb{R}$, равномерно ограничено.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Семейство операторов $\mathcal{B}_\tau$, $\tau \in \mathbb{R}$, равномерно ограничено тогда и только тогда, когда при всех $\tau \in \mathbb{R}$ для любого $u \in U_\tau$ выполнено неравенство $\|\mathcal{B}_\tau u\| \leqslant \beta\|u\|_\tau$, обеспечиваемое, как показано выше, оценкой снизу для управления в утверждении 1, причем $\beta < +\infty$ в силу того, что $\beta^{-1} = l > 0$.

Следствие 2. *Если семейство операторов $\mathcal{B}_\tau$, $\tau \in \mathbb{R}$, равномерно ограничено, то система (9) является ϑ-равномерно вполне управляемой тогда и только тогда, когда существует такое число $L > 0$, что при каждом $\tau \in \mathbb{R}$ для любого состояния $x_0 \in \mathbb{R}^n$ найдется управление $u \in U_\tau^-(x_0)$, которое удовлетворяет оценке $\|u\|_\tau \leqslant L\|x_0\|$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о вытекает непосредственно из утверждения 1 и понятия равномерной ограниченности семейства операторов.

Пример 1. Если матрица B непрерывна и ограничена на $\mathbb{R}$, $\|B(t)\| \leqslant b < +\infty$ и $Z_\tau = C[\tau, \tau+\vartheta]$, то каждый оператор $\mathcal{B}_\tau \colon C[\tau, \tau+\vartheta] \to \mathbb{R}^n$ ограничен, причем справедливы неравенства $\|\mathcal{B}_\tau\| \leqslant \vartheta \max_{\tau \leqslant t \leqslant \tau+\vartheta} \|B(t)\| \leqslant \vartheta b$. В этом случае заключение следствия 2 эквивалентно определению равномерной полной управляемости по Тонкову для системы (9).

Из следствия 1 вытекает, что если система (9) является ϑ-равномерно вполне управляемой, то при каждом τ оператор $\mathcal{B}_\tau$ непрерывен, и поэтому его ядро $\ker \mathcal{B}_\tau := \{u \in U_\tau : \mathcal{B}_\tau(u) = 0\}$ замкнуто в U_τ в топологии, индуцированной из Z_τ. При таком условии в фактор-пространстве $U_\tau / \ker \mathcal{B}_\tau$ можно ввести стандартную норму, полагая $\|[v]\|_\tau = \inf_{z \in \ker \mathcal{B}_\tau} \|v - z\|_\tau$ для каждого класса смежности $[v] = v + \ker \mathcal{B}_\tau$, $v \in U_\tau$. Оператор $\widetilde{\mathcal{B}}_\tau : U_\tau / \ker \mathcal{B}_\tau \to \mathbb{R}^n$, действующий по правилу $\widetilde{\mathcal{B}}_\tau([v]) = \mathcal{B}_\tau(v)$, называется фактор-оператором, а уравнение $\widetilde{\mathcal{B}}_\tau([v]) = -x_0$ — факторизованным уравнением [8, с. 9], соответствующим уравнению $\mathcal{B}_\tau(u) = -x_0$. Нетрудно видеть, что следствие 2 сводит равномерную полную управляемость системы (9) к равномерной по $\tau \in \mathbb{R}$ корректной разрешимости [8, с. 7] этого факторизованного уравнения, которая заключается в выполнении для всех $[v] \in U_\tau / \ker \mathcal{B}_\tau$ неравенства $\|[v]\|_\tau \leqslant k \|\widetilde{\mathcal{B}}_\tau([v])\|$ с некоторым $k > 0$, не зависящим от $[v]$. Естественно, для такой разрешимости могут быть сформулированы двойственные условия, выражающиеся через оператор, сопряженный к $\mathcal{B}_\tau$. Важнейшим их примером являются, в частности, исходные условия Калмана.

По общему правилу [8, с. 13] оператор $\mathcal{B}'_\tau$, алгебраически сопряженный оператору $\mathcal{B}_\tau$, действует из пространства $\mathbb{R}^{n\prime}$ линейных функционалов (линейных форм, ковекторов) на $\mathbb{R}^n$ в пространство U'_τ, состоящее из $\mathbb{R}$-линейных отображений $\phi : U_\tau \to \mathbb{R}$, и задается формулой

$$(\mathcal{B}'_\tau \xi)(u) = \xi \mathcal{B}_\tau u,$$

где $\xi \in \mathbb{R}^{n\prime}$, $u \in U_\tau$.

Пусть теперь U^*_τ состоит из всех непрерывных на U_τ отображений $\phi \in U'_\tau$. Если под действием $\mathcal{B}'_\tau$ каждый ковектор $\xi \in \mathbb{R}^{n\prime}$ переходит в некоторый элемент U^*_τ, то сопряженный оператор $\mathcal{B}'_\tau$ называется топологически сопряженным оператором для $\mathcal{B}_\tau$. Топологический сопряженный для оператора $\mathcal{B}_\tau$ мы будем обозначать через $\mathcal{B}^*_\tau$.

Если оператор $\mathcal{B}_\tau$ непрерывен на U_τ, то любой функционал вида $\xi \mathcal{B}_\tau$ тоже непрерывен. Поэтому топологически сопряженный оператор $\mathcal{B}^*_\tau$ в этом случае всегда существует, а его областью определения является все пространство $\mathbb{R}^{n\prime}$. Для разрывного оператора $\mathcal{B}_\tau$ некоторые (или все) функционалы вида $\xi \mathcal{B}_\tau$ могут оказаться разрывными. В этом случае принято считать, что топологический сопряженный к оператору $\mathcal{B}_\tau$ существует, но определен не на всем пространстве ковекторов $\mathbb{R}^{n\prime}$, а лишь на некотором его собственном подпространстве $\mathcal{D}(\mathcal{B}^*_\tau)$, таком, что $\xi \mathcal{B}_\tau \in U^*_\tau$ для любого $\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{B}^*_\tau)$.

Теорема 1. *Если система (9) ϑ-равномерно вполне управляема в смысле определения 1, то при каждом τ оператор $\mathcal{B}_\tau$ имеет топологически сопряженный оператор $\mathcal{B}^*_\tau$, значения которого определены на любом ковекторе $\xi \in \mathbb{R}^{n\prime}$ и удовлетворяют оценке*

$$\beta_1 \|\xi\| \leqslant \|\mathcal{B}^*_\tau \xi\| \leqslant \beta_2 \|\xi\|,$$

где числа $\beta_2 \geqslant \beta_1 > 0$ не зависят от τ.

Доказательство. Если система (9) ϑ-равномерно вполне управляема в смысле определения 1, то по следствию 1 семейство операторов $\mathcal{B}_\tau$ равномерно (по τ) ограничено, поэтому каждый оператор $\mathcal{B}_\tau$ непрерывен и, следовательно, имеет топологически сопряженный оператор $\mathcal{B}^*_\tau$, определенный всюду на $\mathbb{R}^{n\prime}$. При этом для любого $\xi \in \mathbb{R}^{n\prime}$ справедлива оценка

$$\|\mathcal{B}^*_\tau \xi\| = \sup_{0 \neq u \in U_\tau} \frac{|\xi \mathcal{B}_\tau u|}{\|u\|_\tau} \leqslant \|\xi\| \sup_{0 \neq u \in U_\tau} \frac{\|\mathcal{B}_\tau u\|}{\|u\|_\tau} \leqslant \beta \|\xi\|,$$

где β определяется равенством (10).

Оценим $\|\mathcal{B}_\tau^*\xi\|$ снизу. Для этого возьмем $x_0 = \xi^T$ и по нему, используя утверждение 1, найдем управление $u_\xi \in U_\tau^-(x_0)$, удовлетворяющее неравенству $\|u_\xi\|_\tau \leqslant L\|\xi\|$. Тогда $|\xi\mathcal{B}_\tau u_\xi| = |\xi\xi^T| = \|\xi\|^2$ и $|\xi\mathcal{B}_\tau u_\xi| \leqslant \|\mathcal{B}_\tau^*\xi\|\|u_\xi\| \leqslant \|\mathcal{B}_\tau^*\xi\|L\|\xi\|$. Отсюда имеем $\|\mathcal{B}_\tau^*\xi\| \geqslant L^{-1}\|\xi\|$. Теорема 1 доказана. □

Замечание 4. В силу следствия 1 справедливо равенство $\beta = l^{-1}$, где l — число из утверждения 1 (т. е. из альтернативного определения ϑ-равномерной полной управляемости). Поэтому в качестве чисел $\beta_2 \geqslant \beta_1 > 0$ в теореме 1 могут быть взяты любые положительные числа, удовлетворяющие неравенствам $\beta_2 \geqslant \beta = l^{-1}$ и $\beta_1 \leqslant L^{-1}$.

Теорема 2. *Пусть при каждом τ оператор $\mathcal{B}_\tau$ имеет топологический сопряженный, значения которого определены на любом ковекторе $\xi \in \mathbb{R}^{n\prime}$ и удовлетворяют оценке*

$$\beta_1\|\xi\| \leqslant \|\mathcal{B}_\tau^*\xi\| \leqslant \beta_2\|\xi\|,$$

где числа $\beta_2 \geqslant \beta_1 > 0$ не зависят от τ. Тогда система (9) равномерно вполне управляема в смысле определения 1.

Доказательство. Покажем, что в условиях теоремы выполняются требования утверждения 1. Возьмем любое ненулевое состояние $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и произвольное управление $u \in U_\tau^-(x_0)$. Тогда для $\xi = x_0^T$ имеем соотношения

$$0 < \|\xi\|^2 = |\xi x_0| = |\xi\mathcal{B}_\tau u| = |(\mathcal{B}_\tau^*\xi)u| \leqslant \|\mathcal{B}_\tau^*\xi\|\|u\|_\tau \leqslant \beta_2\|u\|_\tau\|\xi\|,$$

откуда следует оценка $\|u\|_\tau \geqslant \beta_2^{-1}\|x_0\|$.

Построим теперь управление $u_0 \in U_\tau^-(x_0)$, удовлетворяющее оценке противоположного знака. Поскольку

$$\|\mathcal{B}_\tau^*\xi\| = \sup_{0\neq u\in U_\tau} \frac{\|(\mathcal{B}_\tau^*\xi)(u)\|}{\|u\|_\tau} = \sup_{0\neq u\in U_\tau} \frac{|\xi\mathcal{B}_\tau u|}{\|u\|_\tau},$$

неравенство $\|\mathcal{B}_\tau^*\xi\| \geqslant \beta_1\|\xi\|$ означает, что для всякого $\xi \in \mathbb{R}^{n\prime}$, $\|\xi\| = 1$, найдется такое $u(\xi) \in U_\tau$, $\|u(\xi)\|_\tau = 1$, что выполнено неравенство $|\xi\mathcal{B}_\tau u(\xi)| > \beta_1/2$. Зафиксируем $\tau \in \mathbb{R}$ и проведем следующие пошаговые построения.

На первом шаге возьмем любое $\xi_1 \in \mathbb{R}^{n\prime}$, удовлетворяющее условию $\|\xi_1\| = 1$, найдем $u_1 = u(\xi_1)$ и положим $y_1 = -\mathcal{B}_\tau u_1$.

На втором шаге выберем произвольное $\xi_2 \in \mathbb{R}^{n\prime}$, удовлетворяющее условиям $\|\xi_2\| = 1$ и $\xi_2 \perp y_1$, найдем $u_2 = u(\xi_2)$ и положим $y_2 = -\mathcal{B}_\tau u_2$.

На k-м шаге по построенным ранее векторам $y_1, \ldots, y_{k-1}$ образуем пространство W_{k-1} как линейную оболочку этих векторов, выберем любое $\xi_k \in \mathbb{R}^{n\prime}$, удовлетворяющее условиям $\|\xi_k\| = 1$ и $\xi_k \perp W_{k-1}$, найдем $u_k = u(\xi_k)$ и положим $y_k = -\mathcal{B}_\tau u_k$. Эти построения выполнимы без всяких дополнительных условий и ограничений до тех пор, пока $W_{k-1} \neq \mathbb{R}^n$.

Пусть V_k — k-мерный объем системы векторов $y_1, \ldots, y_k$, тогда при $k > 1$ справедливо равенство $V_k = V_{k-1}z_k$, где $z_k = |\xi_k y_k|$ — длина проекции вектора y_k на нормаль к подпространству W_{k-1}. При этом $V_1 = \|y_1\| \geqslant z_1$. Отсюда имеем неравенства

$$V_n = \|y_1\|\prod_{i=2}^{n} z_i \geqslant \prod_{i=1}^{n} z_i \geqslant \left(\frac{\beta_1}{2}\right)^n.$$

Но $V_n = |\det Y|$, где Y — матрица, составленная из столбцов $y_1, \ldots, y_n$. Таким образом, матрица Y невырождена, и поэтому векторы $y_1, \ldots, y_n$ составляют базис пространства $\mathbb{R}^n$. Это означает, что $W_n = \mathbb{R}^n$, и проводимый нами процесс построений завершится на шаге с номером n.

На каждом из сделанных шагов для любого $\xi \in \mathbb{R}^{n\prime}$ справедливы соотношения

$$|\xi y_k| = |\xi\mathcal{B}_\tau u_k| = |(\mathcal{B}_\tau^*\xi)u_k| \leqslant \|\mathcal{B}_\tau^*\xi\|\|u_k\|_\tau \leqslant \beta_2\|\xi\|,$$

полагая в которых $\xi = y_k^T$, получим неравенство $\|y_k\|^2 \leqslant \beta_2\|y_k^T\|$ и, следовательно, оценку $\|y_k\| \leqslant \beta_2$. Поскольку $Yx = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$, где $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, отсюда имеем также оценку

$$\|Y\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Yx\|}{\|x\|} \leqslant \sup_{x\neq 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{\|y_i\||x_i|}{\|x\|} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \|y_i\| \leqslant n\beta_2.$$

Кроме того, согласно [5, с. 94] справедливо неравенство

$$\|Y^{-1}\| \leqslant \|Y\|^{n-1}|\det Y|^{-1} \leqslant (n\beta_2)^{n-1}(\beta_1/2)^{-n}.$$

Возьмем теперь зафиксированное ранее $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и разложим его по базису $y_1, \ldots, y_n$. Пусть $x_0 = \mu_1y_1 + \ldots + \mu_ny_n$, т. е. $x_0 = Ym_0$, где $m_0 = (\mu_1, \ldots, \mu_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Тогда $m_0 = Y^{-1}x_0$ и $\|m_0\| \leqslant \|Y^{-1}\|\|x_0\|$. Для управления $u_0 = \mu_1u_1 + \ldots + \mu_nu_n$ имеем равенство $\mathcal{B}_\tau u_0 = -x_0$ и оценку $\|u_0\| \leqslant |\mu_1|\|u_1\| + \ldots + |\mu_n|\|u_n\| \leqslant n\|m_0\| \leqslant n\|Y^{-1}\|\|x_0\|$, т. е. $u_0 \in U_\tau^-(x_0)$ и $\|u_0\| \leqslant \gamma\|x_0\|$, где $\gamma = n\|Y^{-1}\| \leqslant (2n)^n\beta_2^{n-1}\beta_1^{-n}$.

Таким образом, если положить $l = \beta_2^{-1}$ и $L = \gamma$, то все требования утверждения 1 будут выполнены. Это означает, что система (9) равномерно вполне управляема в смысле определения 1. Теорема 2 доказана. $\square$

Замечание 5. Процесс построения базиса управлений, использованный при доказательстве теоремы 2, применялся в [9] (см. также [5, с. 271]) для случая $Z_\tau = L_2[\tau, \tau + \vartheta]$ и в [10–12] для случая $Z_\tau = L_\infty[\tau, \tau + \vartheta]$.

Замечание 6. Некоторые из доказанных выше утверждений могут быть получены как следствия общих теорем функционального анализа о разрешимости линейных уравнений (см., например, [8]). Мы тем не менее приводим прямые доказательства, использующие конечномерность пространства образов оператора $\mathcal{B}_\tau$. Это позволяет отказаться от принятого в [8] требования банаховости пространств Z_τ и сделать рассуждения более прозрачными.

Замечание 7. Доказательства, приведенные выше, не используют конкретный вид оператора $\mathcal{B}_\tau$ и остаются справедливыми для любой управляемой системы, порождающей линейный оператор с конечномерным пространством образов.

В случае системы (9) все траектории соответствующей свободной системы $\dot{x} = 0$ являются положениями равновесия. Как только мы отказываемся от одноточечности траекторий свободной системы, т. е. переходим к случаю ненулевой матрицы A, возникает необходимость измерения отклонения целевого состояния от конечной точки траектории свободной системы, исходящей из начального состояния. Действительно, как отмечено в [2], если $x_1 = X(\tau+\vartheta, \tau)x_0$, то для перехода из состояния x_0 в состояние x_1 можно обойтись нулевым управлением, сколь бы различны ни были состояния x_0 и x_1 сами по себе. И обратно, если $X(\tau+\vartheta, \tau)x_0 \neq x_0$, то для удержания системы в начальном состоянии x_0 должно быть применено ненулевое управление, величина которого и, соответственно, затраты на него в общем случае зависят не только от состояния x_0 и матриц A и B, но и от момента начала процесса τ. Это означает, что равномерная по τ оценка для затрат на управление, выражающаяся только через начальное и конечное состояние системы, при $A(t) \not\equiv 0$ невозможна.

Возьмем произвольные состояния $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ системы (1) и связывающее их управление u. Тогда в силу формулы Коши (формулы вариации произвольных постоянных) справедливо равенство

$$x_1 - X(\tau + \vartheta, \tau)x_0 = \widehat{\mathcal{Q}}_\tau(u), \tag{11}$$

где

$$\widehat{\mathcal{Q}}_\tau(u) := \int_\tau^{\tau+\vartheta} X(\tau + \vartheta, s)B(s)u(s)\, ds. \tag{12}$$

Выражение $x_1 - X(\tau + \vartheta, \tau)x_0$, представляющее собой отклонение управляемой траектории в момент $\tau+\vartheta$ от траектории свободной системы с тем же началом, в общем случае существенно зависит от τ. Однако в рассмотренном выше случае $A(t) \equiv 0$ оно от τ не зависит, поскольку совпадает с разностью $x_1 - x_0$, что и позволило получить для системы (9) равномерные по τ оценки управлений. При рассмотрении системы (1) такие оценки можно получить лишь для пар состояний вида $(0, x_1)$ и $(x_0, 0)$, для которых равенство (11) приобретает соответственно вид $x_1 = \widehat{\mathcal{Q}}_\tau(u)$ и $x_0 = -\mathcal{Q}_\tau(u)$, где

$$\mathcal{Q}_\tau(u) := X(\tau, \tau+\vartheta)\widehat{\mathcal{Q}}_\tau(u) = \int_\tau^{\tau+\vartheta} X(\tau, s)B(s)u(s)\,ds.$$

Поскольку именно такие и только такие пары рассматривались в [2] при формулировке концепции равномерной полной управляемости[2], этого оказывается достаточно для переноса ее классического определения на рассматриваемую нами общую ситуацию. При этом отличие от случая системы (9) будет заключаться лишь в том, что вместо одного уравнения $\mathcal{B}_\tau(u) = -x_0$ нужно будет решать два уравнения $x_1 = \widehat{\mathcal{Q}}_\tau(u)$ и $x_0 = -\mathcal{Q}_\tau(u)$ аналогичного вида.

Снова зададим на каждом отрезке $[\tau, \tau+\vartheta]$ некоторое (свое при каждом τ) нормированное пространство Z_τ функций, определенных на этом отрезке, и в дальнейшем будем считать управление u на отрезке $[\tau, \tau+\vartheta]$ допустимым, если $u \in Z_\tau$ и существует $\widehat{\mathcal{Q}}_\tau(u)$. Как и в случае системы (9), мерой затрат на управление u на отрезке $[\tau, \tau+\vartheta]$ будем считать его норму $\|u\|_\tau$ в пространстве Z_τ, а векторное подпространство пространства Z_τ, на котором определен оператор $\widehat{\mathcal{Q}}_\tau$, обозначим через U_τ. Обозначения $U_\tau^+(z)$ и $U_\tau^-(z)$ будем использовать в прежнем смысле, а символ $U_\tau^\pm(z)$ будет обозначать любое из них. При этом будут справедливы легко проверяемые равенства $U_\tau^-(z) = U_\tau^+(-X(\tau+\vartheta, \tau)z) = -U_\tau^+(X(\tau+\vartheta, \tau)z)$.

Определение 2. Система (1) называется *ϑ-равномерно вполне управляемой*, если для любого ненулевого состояния $x_0 \in \mathbb{R}^n$ существуют такие числа $M(x_0) \geqslant m(x_0) > 0$, что при всяком $\tau \in \mathbb{R}$ для каждого управления $u \in U_\tau^\pm(x_0)$ справедлива оценка $\|u\|_\tau \geqslant m(x_0)$, причем найдутся допустимые управления $u_+ \in U_\tau^+(x_0)$ и $u_- \in U_\tau^-(x_0)$, которые удовлетворяют оценке $\|u_\pm\|_\tau \leqslant M(x_0)$.

Замечание 8. Используя замечание 2, нетрудно показать, что система (9) является ϑ-равномерно вполне управляемой в смысле определения 2 тогда и только тогда, когда она является ϑ-равномерно вполне управляемой в смысле определения 1.

Утверждение 2. *Система (1) является ϑ-равномерно вполне управляемой в смысле определения 2 тогда и только тогда, когда существуют такие числа $L \geqslant l > 0$, что при каждом $\tau \in \mathbb{R}$ для любого состояния $x_0 \in \mathbb{R}^n$ найдутся управления $u_\pm \in U_\tau^\pm(x_0)$, которые удовлетворяют оценке $\|u_\pm\|_\tau \leqslant L\|x_0\|$, и для всякого управления $u_\pm \in U_\tau^\pm(x_0)$ справедливо неравенство $\|u_\pm\|_\tau \geqslant l\|x_0\|$.*

Следствие 3. *Если система (1) является ϑ-равномерно вполне управляемой, то семейства операторов $\mathcal{Q}_\tau$ и $\widehat{\mathcal{Q}}_\tau$ равномерно ограничены.*

Следствие 4. *Если семейства операторов $\mathcal{Q}_\tau$ и $\widehat{\mathcal{Q}}_\tau$ равномерно ограничены, то система (1) является ϑ-равномерно вполне управляемой тогда и только тогда, когда существует такое число $L > 0$, что при каждом $\tau \in \mathbb{R}$ для любого состояния $x_0 \in \mathbb{R}^n$ найдутся управления $u_\pm \in U_\tau^\pm(x_0)$, которые удовлетворяют оценке $\|u_\pm\|_\tau \leqslant L\|x_0\|$.*

Теорема 3. *Если система (9) ϑ-равномерно вполне управляема в смысле определения 2, то при каждом τ для операторов $\mathcal{Q}_\tau$ и $\widehat{\mathcal{Q}}_\tau$ существуют топологически сопряженные им операторы, значения которых на любом ковекторе $\xi \in \mathbb{R}^{n\prime}$ удовлетворяют оценкам*

$$\beta_1\|\xi\| \leqslant \|\widehat{\mathcal{Q}}_\tau^*\xi\| \leqslant \beta_2\|\xi\|, \quad \beta_1\|\xi\| \leqslant \|\mathcal{Q}_\tau^*\xi\| \leqslant \beta_2\|\xi\|, \tag{13}$$

где числа $\beta_2 \geqslant \beta_1 > 0$ не зависят от τ.

[2] Она была сформулирована в [2] в следующем виде: «In other words, one can always transfer x to 0 and 0 to x in a finite length σ of time; moreover, such a transfer can never take place using an arbitrarily small amount (or requiring an arbitrarily large amount) of control energy.»

Теорема 4. *Пусть при каждом τ для операторов $\mathcal{Q}_\tau$ и $\widehat{\mathcal{Q}}_\tau$ существуют топологически сопряженные им операторы, причем для любого $\xi \in \mathbb{R}^{n\prime}$ выполнены оценки (13), в которых числа $\beta_2 \geqslant \beta_1 > 0$ не зависят от τ. Тогда система (1) равномерно вполне управляема в смысле определения 2.*

Доказательство утверждения 2, следствий 3 и 4, а также теорем 3 и 4 с небольшими изменениями повторяет доказательство утверждения 1, следствий 1 и 2, а также теорем 1 и 2 соответственно.

Пример 2. Пусть $Z_\tau = L_2[\tau, \tau+\vartheta]$ и $B \in L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Нетрудно проверить, что в этом случае

$$\|\mathcal{Q}_\tau^*\xi\|^2 = \int_\tau^{\tau+\vartheta} \xi X(\tau,s)B(s)B^T(s)X^T(\tau,s)\xi^T\,ds =$$
$$= \int_\tau^{\tau+\vartheta} \|\xi X(\tau,s)B(s)\|^2 ds = \xi W(\tau,\tau+\vartheta)\xi^T,$$
$$\|\widehat{\mathcal{Q}}_\tau^*\xi\|^2 = \int_\tau^{\tau+\vartheta} \xi X(\tau+\vartheta,s)B(s)B^T(s)X^T(\tau+\vartheta,s)\xi^T\,ds =$$
$$= \int_\tau^{\tau+\vartheta} \|\xi X(\tau+\vartheta,s)B(s)\|^2\,ds = \xi\widehat{W}(\tau,\tau+\vartheta)\xi^T.$$

Таким образом, при сделанных предположениях, являющихся (в силу [2, 4]) необходимыми условиями равномерной полной управляемости по Калману, неравенства (13) эквивалентны классическим условиям Калмана (6).

Пример 3. Пусть $Z_\tau = L_\infty[\tau, \tau+\vartheta]$ и $B \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Тогда

$$\|\mathcal{Q}_\tau^*\xi\| = \int_\tau^{\tau+\vartheta} \|\xi X(\tau,s)B(s)\|ds, \quad \|\widehat{\mathcal{Q}}_\tau^*\xi\| = \int_\tau^{\tau+\vartheta} \|\xi X(\tau+\vartheta,s)B(s)\|\,ds.$$

В работе [4] введено свойство $H(\vartheta)$, определяемое условиями

$$\beta_1\|\xi\| \leqslant \int_\tau^{\tau+\vartheta} \|\xi X(\tau,s)B(s)\|ds \leqslant \beta_2\|\xi\|, \quad \beta_3\|\xi\| \leqslant \int_\tau^{\tau+\vartheta} \|\xi X(\tau+\vartheta,s)B(s)\|\,ds \leqslant \beta_4\|\xi\|,$$

совпадающими с неравенствами (13) при сделанных нами предположениях. Согласно [4] свойство $H(\vartheta)$ при условии ограниченности всех коэффициентов системы (1) эквивалентно как равномерной полной управляемости по Тонкову, так и равномерной полной управляемости по Калману.

Пример 4. Пусть $Z_\tau = L_1[\tau, \tau+\vartheta]$, а матрица B непрерывна всюду на $\mathbb{R}$. Тогда

$$\|\mathcal{Q}_\tau^*\xi\| = \max_{s\in[\tau,\tau+\vartheta]} \|\xi X(\tau,s)B(s)\|, \quad \|\widehat{\mathcal{Q}}_\tau^*\xi\| = \max_{s\in[\tau,\tau+\vartheta]} \|\xi X(\tau+\vartheta,s)B(s)\|.$$

В этом случае условие $\|\widehat{\mathcal{Q}}_\tau^*\xi\| \geqslant \beta_1\|\xi\|$ оказывается наиболее близким по форме к стандартному неявному критерию полной управляемости [1, с. 152] (см. также [13, с. 172]) системы (1) на отрезке $[\tau, \tau+\vartheta]$, состоящему в линейной независимости строк матрицы $X(\tau,s)B(s)$ при $s \in [\tau, \tau+\vartheta]$, т. е. в выполнении условия $\xi X(\tau,s)B(s) \not\equiv 0$ на $[\tau, \tau+\vartheta]$ при любом $\xi \in \mathbb{R}^{n\prime}$.

Замечание 9. Для применения теорем 3 и 4, как это видно из их формулировок и приведенных примеров, нет необходимости вычислять в явном виде ни сами операторы $\mathcal{Q}_\tau^*$ и $\widehat{\mathcal{Q}}_\tau^*$, ни их значения на каких-либо ковекторах $\xi \in \mathbb{R}^{n\prime}$. Достаточно вычислить лишь евклидовы нормы этих значений в конечномерном пространстве $\mathbb{R}^n$.

По аналогии со случаем дискретной переменной [14] будем называть матричнозначную функцию L, определенную на некотором промежутке $J \subset \mathbb{R}$, *вполне ограниченной*, если ее значения $L(t)$ обратимы при каждом $t \in J$ и при некотором $\alpha > 0$ для всех $t \in J$ выполнены неравенства $\|L(t)\| \leqslant \alpha$ и $\|L^{-1}(t)\| \leqslant \alpha$. Поскольку $\alpha^2 \geqslant \|L(t)\|\|L^{-1}(t)\| \geqslant 1$, здесь всегда $\alpha \geqslant 1$. Если коэффициенты свободной системы (2) ограничены, то при любом фиксированном $T > 0$ ее матрица Коши $X(\tau + T, \tau)$, вычисленная на отрезках $[\tau, \tau + T]$, является вполне ограниченной на $\mathbb{R}$ функцией аргумента τ. В [2] установлено, что ϑ-равномерная полная управляемость системы (1) по Калману также влечет за собой полную ограниченность по τ матрицы Коши $X(\tau + \vartheta, \tau)$ соответствующей свободной системы (2). В [4] аналогичное утверждение доказано для упомянутого выше в примере 3 свойства $H(\vartheta)$.

Утверждение 3. *Если система* (1) *ϑ-равномерно вполне управляема в смысле определения* 2*, то матрица Коши $X(\tau + \vartheta, \tau)$ соответствующей свободной системы* (2) *вполне ограничена как функция $\tau \in \mathbb{R}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольное $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и положим $x_1 = X(\tau + \vartheta, \tau)x_0$. Пользуясь утверждением 2, построим управление $u_0 \in U_\tau^-(x_0)$, удовлетворяющее оценке $\|u_0\|_\tau \leqslant L\|x_0\|$. Поскольку, как отмечено выше при определении этих пространств, выполнено равенство $U_\tau^-(x_0) = -U_\tau^+(x_1)$, управление $u_1 = -u_0$ переводит 0 в x_1 на отрезке $[\tau, \tau + \vartheta]$ и поэтому удовлетворяет оценке $\|u_1\|_\tau \geqslant l\|x_1\|$. Таким образом, справедливы соотношения $l\|X(\tau + \vartheta, \tau)x_0\| = l\|x_1\| \leqslant \|u_1\|_\tau = \|u_0\|_\tau \leqslant L\|x_0\|$, из которых в силу произвольности x_0 следует первая из требуемых оценок $\|X(\tau + \vartheta, \tau)\| \leqslant L/l$.

Возьмем теперь произвольное $x_1 \in \mathbb{R}^n$ и положим $x_0 = X(\tau, \tau + \vartheta)x_1$. Пользуясь утверждением 2, построим управление $u_1 \in U_\tau^+(x_1)$, удовлетворяющее оценке $\|u_1\|_\tau \leqslant L\|x_1\|$. Поскольку $U_\tau^+(x_1) = -U_\tau^-(x_0)$, управление $u_0 = -u_1 \in U_\tau^-(x_0)$ удовлетворяет оценке $\|u_0\|_\tau \geqslant l\|x_0\|$. Таким образом, справедливы соотношения $l\|X(\tau, \tau + \vartheta)x_1\| = l\|x_0\| \leqslant \|u_0\|_\tau = \|u_1\|_\tau \leqslant L\|x_1\|$, из которых в силу произвольности x_1 следует вторая из требуемых оценок $\|X(\tau, \tau + \vartheta)\| \leqslant L/l$. Утверждение 3 доказано. □

Следствие 5. *В условиях утверждения* 3 *неравенства $\|X(\tau+\vartheta, \tau)\| \leqslant \alpha$ и $\|X(\tau, \tau+\vartheta)\| \leqslant \alpha$ выполняются для любого $\alpha > 1$, удовлетворяющего условию $\alpha \geqslant L/l$ либо условию $\alpha \geqslant L\beta$, где L и l — константы из утверждения* 2*, β — число, ограничивающее сверху нормы операторов $\mathcal{Q}_\tau$ и $\widehat{\mathcal{Q}}_\tau$ согласно следствию* 3*.*

Замечание 10. Существует и обратная взаимосвязь условий полной ограниченности матрицы Коши свободной системы и полной управляемости системы (2). Нетрудно убедиться в том, что если матрица Коши системы (2) вполне ограничена, то требования утверждения 2, следствия 4 и теоремы 4 достаточно проверять лишь для одной из задач: либо перевода состояния x_0 в 0, либо перевода нулевого состояния в состояние x_1, что соответствует рассмотрению только одного из индексов $\pm$ и лишь одного из операторов $\mathcal{Q}_\tau$ и $\widehat{\mathcal{Q}}_\tau$, поскольку при этом условии обе задачи разрешимы одновременно.

Если кроме полной ограниченности матрицы Коши свободной системы ограниченной является и матрица B, $\|B(t)\| \leqslant b < +\infty$, а норма в пространстве U_τ мажорирует норму пространства $L_1[\tau, \tau + \vartheta]$ в том смысле, что при некотором $\gamma > 0$ для любого $u \in U_\tau$ выполнено неравенство

$$\|u\|_\tau \geqslant \gamma \int_\tau^{\tau+\vartheta} \|u(s)\| ds,$$

то из соотношений

$$\|\mathcal{Q}_\tau u\| \leqslant \int_\tau^{\tau+\vartheta} \|X(\tau, s)B(s)u(s)\| ds \leqslant \alpha b \int_\tau^{\tau+\vartheta} \|u(s)\| ds \leqslant \alpha b \gamma^{-1} \|u\|_\tau$$

вытекает автоматическое выполнение условия равномерной ограниченности семейства операторов $\mathcal{Q}_\tau$ и $\widehat{\mathcal{Q}}_\tau$. Именно для такой ситуации сформулировано определение равномерной полной управляемости по Тонкову, содержащее лишь одно условие из четырех, присутствующих в определении 2.

Во многих естественных случаях из ϑ_0-равномерной полной управляемости системы (1) вытекает ее ϑ-равномерная полная управляемость при всех $\vartheta > \vartheta_0$. В случае равномерной полной управляемости по Калману и свойства $H(\vartheta)$ соответствующие утверждения доказаны в [2] и [4]. В случае равномерной полной управляемости по Тонкову такое свойство очевидным образом вытекает из линейности управляемой системы (1), которая может неограниченно долго оставаться в состоянии $x = 0$ при условии, что $u = 0$.

В [2] из этого простого свойства выведено ограничение на матрицу Коши свободной системы (2), соответствующей равномерно вполне управляемой по Калману системе (1), имеющее вид

$$\|X(t,s)\| \leqslant \eta(|t-s|),$$

где η — некоторая функция, $t,s \in \mathbb{R}$ произвольны. В [2] установлено лишь существование функции η, но ее конкретный вид не приведен. В работе [4] В. А. Зайцевым было показано, что если система (1) ϑ-равномерно вполне управляема по Калману либо обладает свойством $H(\vartheta)$, то существует такое $\gamma > 1$, что для любых $t,s \in \mathbb{R}$, $|t-s| \leqslant \vartheta$, выполнено неравенство

$$\|X(t,s)\| \leqslant \gamma.$$

Нетрудно проверить (см. ниже конец доказательства теоремы 5), что это последнее условие («условие d» в терминологии работы [4]) эквивалентно так называемому условию *ограниченного роста*

$$\|X(t,s)\| \leqslant K\exp\bigl(a|t-s|\bigr) \tag{14}$$

(где $K \geqslant 1$, $a \geqslant 0$ — не зависящие от $t,s \in \mathbb{R}$ константы), которое иногда также называется условием *экспоненциального роста* [15]. Таким образом, в работе [4] получено существенное усиление результата работы [2].

Доказательство аналога условия (14) для систем, удовлетворяющих определению 2, предполагает рассмотрение равномерной полной управляемости на отрезках разной длины и поэтому требует определенных ограничений на выбор пространств допустимых управлений, определенных на этих отрезках. Для их формулировки введем новые обозначения, учитывающие влияние параметра ϑ. С этой целью вместо индекса τ, обозначающего принадлежность объекта отрезку $[\tau,\tau+\vartheta]$, будем использовать индекс I, обозначающий принадлежность произвольному отрезку $I \subset \mathbb{R}$.

Пусть на каждом отрезке $I \subset \mathbb{R}$ заданы нормированное пространство функций Z_I и множество допустимых управлений U_I.

Определение 3. Будем говорить, что система пространств U_I, $I \subset \mathbb{R}$, является *самосогласованной*, если для любых двух отрезков $I, J \subset \mathbb{R}$, таких, что $J \subset I$, имеют место следующие свойства:

1) для всякого $u \in U_I$ его сужение $u|_J$ на отрезок J содержится в U_J, причем $\|u|_J\|_J \leqslant \|u\|_I$;

2) для всякого $u \in U_J$ функция u^I, совпадающая с u на J и равная 0 на $I \setminus J$, содержится в U_I, и при этом $\|u^I\|_I \leqslant \|u\|_J$.

Теорема 5. *Пусть система пространств U_I, $I \subset \mathbb{R}$, является самосогласованной. Если система* (1) *ϑ_0-равномерно вполне управляема в смысле определения* 2 *при некотором $\vartheta_0 > 0$, то она ϑ-равномерно вполне управляема в смысле определения* 2 *при всех $\vartheta > \vartheta_0$, а для матрицы Коши соответствующей свободной системы* (2) *выполняется условие ограниченного роста* (14).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем какое-либо $\vartheta > \vartheta_0$ и найдем такое $k \in \mathbb{N}$, что выполнены неравенства $(k-1)\vartheta_0 \leqslant \vartheta < k\vartheta_0$. При произвольном τ рассмотрим отрезки $\Theta := [\tau,\tau+\vartheta]$, $I(k) := [\tau,\tau+k\vartheta_0]$ и $J(i) := [\tau+(i-1)\vartheta_0, \tau+i\vartheta_0]$, $i = 1,\ldots,k$. Очевидно,

$$I(k-1) \subset \Theta \subset I(k) = \bigcup_{i=1}^{k} J(i).$$

По определению имеем равенства

$$\mathcal{Q}_{\Theta}u=\int_{\Theta}X(\tau,s)B(s)u(s)\,ds,\quad \widehat{\mathcal{Q}}_{\Theta}u=\int_{\Theta}X(\tau+\vartheta,s)B(s)u(s)\,ds,$$

$$\mathcal{Q}_{I(k)}u=\int_{I(k)}X(\tau,s)B(s)u(s)\,ds,\quad \widehat{\mathcal{Q}}_{I(k)}u=\int_{I(k)}X(\tau+k\vartheta_0,s)B(s)u(s)\,ds,$$

$$\mathcal{Q}_{J(i)}u=\int_{J(i)}X(\tau+(i-1)\vartheta_0,s)B(s)u(s)\,ds,\quad \widehat{\mathcal{Q}}_{J(i)}u=\int_{J(i)}X(\tau+i\vartheta_0,s)B(s)u(s)\,ds,$$

выполняющиеся всюду на области определения каждого из операторов.

Возьмем любое $u\in U_{I(k)}$. Тогда

$$\mathcal{Q}_{I(k)}u=\sum_{i=1}^{k}\int_{J(i)}X(\tau,s)B(s)u(s)\,ds=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}X(\tau,\tau+(i-1)\vartheta_0)\int_{J(i)}X(\tau+(i-1)\vartheta_0,s)B(s)u(s)\,ds=\sum_{i=1}^{k}X(\tau,\tau+(i-1)\vartheta_0)\mathcal{Q}_{J(i)}u,$$

$$\widehat{\mathcal{Q}}_{I(k)}u=\sum_{i=1}^{k}\int_{J(i)}X(\tau+k\vartheta_0,s)B(s)u(s)\,ds=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}X(\tau+k\vartheta_0,\tau+i\vartheta_0)\int_{J(i)}X(\tau+i\vartheta_0,s)B(s)u(s)\,ds=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}X(\tau+k\vartheta_0,\tau+i\vartheta_0)\widehat{\mathcal{Q}}_{J(i)}u.$$

В силу самосогласованности системы пространств U_I имеет место включение $u|_{J(i)}\in U_{J(i)}$ и неравенство $\|u|_{J(i)}\|_{J(i)}\leqslant\|u\|_{I(k)}$. Кроме того, из ϑ_0-равномерной полной управляемости системы (1), в силу утверждения 3, вытекает полная ограниченность по $s\in\mathbb{R}$ матрицы Коши $X(s+\vartheta_0,s)$, а в силу следствия 3 — равномерная ограниченность по τ семейств операторов $\mathcal{Q}_{I(k)}$ и $\widehat{\mathcal{Q}}_{I(k)}$ (при фиксированных k и ϑ_0). Поэтому справедливы равенства

$$\mathcal{Q}_{I(k)}u=\sum_{i=1}^{k}X(\tau,\tau+(i-1)\vartheta_0)\mathcal{Q}_{J(i)}u|_{J(i)},\quad \widehat{\mathcal{Q}}_{I(k)}u=\sum_{i=1}^{k}X(\tau+k\vartheta_0,\tau+i\vartheta_0)\widehat{\mathcal{Q}}_{J(i)}u|_{J(i)}$$

и вытекающие из них оценки

$$\|\mathcal{Q}_{I(k)}u\|\leqslant\sum_{i=1}^{k}\|X(\tau,\tau+(i-1)\vartheta_0)\|\|\mathcal{Q}_{J(i)}u|_{J(i)}\|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{k}\alpha^{i-1}\|\mathcal{Q}_{J(i)}u|_{J(i)}\|\leqslant(\alpha-1)^{-1}\alpha^{k}\beta\|u|_{J(i)}\|_{J(i)}\leqslant(\alpha-1)^{-1}\alpha^{k}\beta\|u\|_{I(k)},$$

$$\|\widehat{\mathcal{Q}}_{I(k)}u\|\leqslant\sum_{i=1}^{k}\|X(\tau+k\vartheta_0,\tau+i\vartheta_0)\|\|\widehat{\mathcal{Q}}_{J(i)}u|_{J(i)}\|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{k}\alpha^{k-i}\|\widehat{\mathcal{Q}}_{J(i)}u|_{J(i)}\|\leqslant(\alpha-1)^{-1}\alpha^{k}\beta\|u|_{J(i)}\|_{J(i)}\leqslant(\alpha-1)^{-1}\alpha^{k}\beta\|u\|_{I(k)},$$

где β ограничивает сверху норму операторов $\mathcal{Q}_{I(k)}$ и $\widehat{\mathcal{Q}}_{I(k)}$, $\alpha\geqslant\|X(t,s)\|$ при $t-s=\pm\vartheta_0$.

Возьмем любое $u\in U_{\Theta}$. Согласно условию самосогласованности это управление может быть продолжено нулем на отрезок $I(k)$ до функции $u^{I(k)}\in U_{I(k)}$ без увеличения нормы, т. е.

$\|u\|_\Theta \geqslant \|u^{I(k)}\|_{I(k)}$. По определению операторов $\mathcal{Q}$ и $\widehat{\mathcal{Q}}$ справедливы равенства $\mathcal{Q}_{I(k)}u^{I(k)} = \mathcal{Q}_\Theta u$ и $\widehat{\mathcal{Q}}_{I(k)}u^{I(k)} = \widehat{\mathcal{Q}}_\Theta u$, из которых имеем оценки $\|\mathcal{Q}_\Theta u\| = \|\mathcal{Q}_{I(k)}u^{I(k)}\| \leqslant (\alpha-1)^{-1}\alpha^k\beta\|u_{I(k)}\|_{I(k)} \leqslant \leqslant (\alpha-1)^{-1}\alpha^k\beta\|u\|_\Theta$ и, аналогично, $\|\widehat{\mathcal{Q}}_\Theta u\| \leqslant (\alpha-1)^{-1}\alpha^k\beta\|u\|_\Theta$. Таким образом, семейства операторов $\mathcal{Q}_\Theta$ и $\widehat{\mathcal{Q}}_\Theta$ равномерно ограничены.

Выберем теперь произвольное $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и покажем, что существует управление $u^- \in U^-_\Theta(x_0)$ такое, что $\|u^-\|_\Theta \leqslant L\|x_0\|$, где L совпадает с соответствующей константой, определяемой условием ϑ_0-равномерной полной управляемости системы (1). Для этого возьмем $u_0 \in U^-_{J(1)}(x_0)$ такое, что $\|u_0\|_{J(1)} \leqslant L\|x_0\|$, и продолжим его нулем на весь отрезок Θ. Тогда согласно условию самосогласованности $u_0^\Theta \in U^-_\Theta(x_0)$ и $\|u_0^\Theta\|_\Theta \leqslant \|u_0\|_{J(1)} \leqslant L\|x_0\|$. Это означает, что $u^- = u_0^\Theta \in U^-(x_0)$ — искомое управление. Построение управления $u^+ \in U^+_\Theta(x_0)$, удовлетворяющего такой же оценке, осуществляется аналогично, путем продолжения с отрезка $[\tau+\vartheta-\vartheta_0, \tau+\vartheta]$. В силу следствия 4 отсюда заключаем, что система (1) является ϑ-равномерно вполне управляемой.

Следуя схеме рассуждений из работ [2, 4], докажем свойство (14). Возьмем любые $t, s \in \mathbb{R}$ такие, что $0 < t - s < \vartheta_0$. Поскольку $\vartheta_0 < t + \vartheta_0 - s < 2\vartheta_0$, то согласно утверждению 3 и следствию 5 имеем оценку $\|X(t+\vartheta_0, s)\| \leqslant L(\alpha-1)^{-1}\alpha^2\beta$ и, следовательно, неравенство

$$\|X(t,s)\| \leqslant \|X(t, t+\vartheta_0)\|\|X(t+\vartheta_0, s)\| \leqslant L(\alpha-1)^{-1}\alpha^3\beta =: \gamma.$$

Тем самым доказан аналог свойства d для равномерной полной управляемости в смысле определения 2. Возьмем теперь произвольные $t, s \in \mathbb{R}$, $t > s$, и представим их разность в виде $t - s = k\vartheta_0 + \vartheta'$, где $0 < \vartheta' < \vartheta_0$. Тогда, очевидно,

$$\|X(t,s)\| \leqslant \|X(t, t-\vartheta')\|\|X(k\vartheta_0 + s, s)\| \leqslant \alpha^k\|X(t, t-\vartheta')\| \leqslant \alpha^k\gamma.$$

Для X^{-1} все оценки выглядят точно так же, поэтому $\|X(s,t)\| = \|X^{-1}(t,s)\| \leqslant \alpha^k\gamma$. Отсюда следует справедливость оценки $\|X(t,s)\| \leqslant \alpha^k\gamma$ и при $t < s$. Поскольку в обоих случаях $k = |t-s|/\vartheta_0 - \vartheta'/\vartheta_0 \leqslant |t-s|/\vartheta_0$, полагая $a := \ln\alpha$, для любых $t, s \in \mathbb{R}$ будем иметь

$$\|X(t,s)\| \leqslant \gamma\exp(ak) \leqslant \gamma\exp(a|t-s|/\vartheta_0).$$

При $t = s$ справедливость доказываемой оценки очевидна. Теорема 5 доказана. □

Если система (1) ϑ-равномерно вполне управляема в смысле определения 2 и $u^+ \in U^+_\tau(x_1)$, $u^- \in U^-_\tau(x_0)$, то управление $u = u^+ + u^-$ переводит состояние x_0 в состояние x_1 на отрезке $[\tau, \tau+\vartheta]$, и при этом u^+ и u^- могут быть выбраны такими, что будет выполняться оценка $\|u\|_\tau \leqslant L(\|x_0\| + \|x_1\|)$. В то же время ненулевая оценка снизу для управления, переводящего состояние x_0 в состояние x_1, которая выражалась бы лишь через начальное и конечное состояния, как показано выше, невозможна. В связи с этим возникает вопрос: можно ли так интерпретировать элементы рассматриваемой нами задачи, чтобы нетривиальная оценка снизу требуемого вида имела место, пусть даже и в некотором обобщенном смысле? Возможным ответом на поставленный вопрос является введение расширенных состояний управляемой системы.

Назовем *расширенным состоянием* системы (1) произвольное решение соответствующей свободной системы (2). Будем говорить, что система (1) находится в момент $\tau \in \mathbb{R}$ в расширенном состоянии z, если $x(\tau) = z(\tau)$, где $x(\tau)$ — обычное состояние системы (1) в момент времени τ. Расширенным состоянием системы (1) на отрезке $[\tau, \tau+\vartheta]$ будем называть сужение произвольного ее расширенного состояния на этот отрезок. Множество всех расширенных состояний системы (1) на отрезке $[\tau, \tau+\vartheta]$ будем обозначать через $\mathbb{S}_\tau$. Оно имеет естественную структуру n-мерного вещественного векторного пространства и может рассматриваться как подпространство пространства $C[\tau, \tau+\vartheta]$ непрерывных функций со значениями в $\mathbb{R}^n$.

Лемма 2. *Если система (1) ϑ-равномерно вполне управляема в смысле определения 2, то величина $d_\sigma(z_0, z_1) := \|z_1(\tau+\sigma) - z_0(\tau+\sigma)\|$, $z_0, z_1 \in \mathbb{S}_\tau$, при любом $\sigma \in [0, \vartheta]$ является метрикой на $\mathbb{S}_\tau$, эквивалентной метрике, индуцируемой на $\mathbb{S}_\tau$ из пространства $C[\tau, \tau+\vartheta]$.*

Доказательство. Выполнение для d_σ свойств метрики (неотрицательности, симметричности и неравенства треугольника) очевидно. Невырожденность, т. е. равносильность равенств $d_\sigma(z_0,z_1)=0$ и $z_0=z_1$, следует из единственности решения задачи Коши для системы (2). Эквивалентность d_σ и индуцированной метрики вытекает из следующих неравенств:

$$\|z_1-z_0\|_C := \max_{t\in\Theta}\|z_1(t)-z_0(t)\| = \max_{t\in\Theta}\|X(t,\tau+\sigma)(z_1(\tau+\sigma)-z_0(\tau+\sigma))\| \leqslant$$
$$\leqslant \gamma\|z_1(\tau+\sigma)-z_0(\tau+\sigma)\| = \gamma d_\sigma(z_1,z_0),$$
$$\|z_1-z_0\|_C = \max_{t\in\Theta}\|X(t,\tau+\sigma)(z_1(\tau+\sigma)-z_0(\tau+\sigma))\| \geqslant$$
$$\geqslant \min_{t\in\Theta}\|X(t,\tau+\sigma)(z_1(\tau+\sigma)-z_0(\tau+\sigma))\| \geqslant$$
$$\geqslant \min_{t\in\Theta}\|X^{-1}(t,\tau+\sigma)\|^{-1}\|(z_1(\tau+\sigma)-z_0(\tau+\sigma))\| \geqslant \gamma^{-1}\|z_1(\tau+\sigma)-z_0(\tau+\sigma)\| = \gamma^{-1}d_\sigma(z_1,z_0),$$

где $z_1,z_0\in\mathbb{S}_\tau$, $\|\cdot\|_C$ — норма в $C[\tau,\tau+\vartheta]$, а неравенство $\|X(t,\tau+\sigma)\|\leqslant\gamma$ выполнено в силу теоремы 5.

Теорема 6. *Система (1) ϑ-равномерно вполне управляема в смысле определения 2 тогда и только тогда, когда найдутся такие числа $L_1\geqslant l_1>0$, что для каждого $\tau\in\mathbb{R}$ при любом $\sigma\in[0,\vartheta]$ и для любых $z_1,z_0\in\mathbb{S}_\tau$ существует управление $u_0\in U_\tau$, переводящее систему (1) из расширенного состояния z_0 в расширенное состояние z_1 на отрезке $[\tau,\tau+\vartheta]$, такое, что выполнена оценка $\|u_0\|_\tau\leqslant L_1 d_\sigma(z_0,z_1)$, причем любое управление u, осуществляющее этот переход, удовлетворяет неравенству $\|u\|_\tau\geqslant l_1 d_\sigma(z_0,z_1)$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\tau\in\mathbb{R}$, возьмем любые $z_1,z_0\in\mathbb{S}_\tau$ и рассмотрим вектор $\xi:=z_1(\tau+\vartheta)-z_0(\tau+\vartheta)$. Тогда при произвольном $\sigma\in[0,\vartheta]$ справедливо равенство

$$\xi = X(\tau+\vartheta,\tau+\sigma)\big(z_1(\tau+\sigma)-z_0(\tau+\sigma)\big),$$

поэтому

$$\|X^{-1}(\tau+\vartheta,\tau+\sigma)\|^{-1}d_\sigma(z_0,z_1)\leqslant\|\xi\|\leqslant\|X(\tau+\vartheta,\tau+\sigma)\|d_\sigma(z_0,z_1).$$

Если система (1) ϑ-равномерно вполне управляема в смысле определения 2, то в силу утверждения 2 уравнение $\xi=\widehat{\mathcal{Q}}_\tau u$ разрешимо, любое его решение удовлетворяет неравенству $\|u\|_\tau\geqslant l\|\xi\|\geqslant l\gamma^{-1}d_\sigma(z_0,z_1)=:l_1 d_\sigma(z_0,z_1)$ и существует такое решение u_0, что справедлива оценка $\|u_0\|_\tau\leqslant L\|\xi\|\leqslant L\gamma d_\sigma(z_0,z_1)=:L_1 d_\sigma(z_0,z_1)$, где $\|X^{\pm1}(\tau+\vartheta,\tau+\sigma)\|\leqslant\gamma$ в силу теоремы 5. Но равенство

$$z_1(\tau+\vartheta)-X(\tau+\vartheta,\tau)z_0(\tau)=z_1(\tau+\vartheta)-z_0(\tau+\vartheta)=\xi=\widehat{\mathcal{Q}}_\tau u$$

как раз и означает, что управление u переводит систему (1) из обычного состояния $z_0(\tau)$ в момент τ в обычное состояние $z_1(\tau+\vartheta)$ в момент $\tau+\vartheta$, т. е. переводит ее из расширенного состояния z_0 в расширенное состояние z_1 на отрезке $[\tau,\tau+\vartheta]$.

Обратно, пусть выполнены условия теоремы. Зафиксируем произвольное $\tau\in\mathbb{R}$ и возьмем любое $x_0\in\mathbb{R}^n$. Пусть $z_0\in\mathbb{S}_\tau$ таково, что $z_0(\tau)=x_0$, а $z_1\equiv0\in\mathbb{S}_\tau$. Выберем $\sigma=0$. Тогда существует управление $u_0\in U_\tau$, переводящее систему (1) из расширенного состояния z_0 в расширенное состояние z_1 (т. е. из обычного состояния x_0 в обычное состояние 0) на отрезке $[\tau,\tau+\vartheta]$, причем $\|u_0\|_\tau\leqslant L_1 d_0(z_0,z_1)=L_1\|z_0(\tau)-z_1(\tau)\|=L_1\|x_0\|$, и любое управление u, осуществляющее этот переход, удовлетворяет оценке $\|u\|_\tau\geqslant l_1 d_0(z_0,z_1)=l_1\|x_0\|$.

Далее, возьмем любое $x_1\in\mathbb{R}^n$ и рассмотрим расширенные состояния $z_0\equiv0\in\mathbb{S}_\tau$ и $z_1\in\mathbb{S}_\tau$, такие, что $z_1(\tau+\vartheta)=x_1$. Выберем $\sigma=\vartheta$. Тогда существует управление $u_1\in U_\tau$, переводящее систему (1) из расширенного состояния z_0 в расширенное состояние z_1 (т. е. из обычного состояния 0 в обычное состояние x_1) на отрезке $[\tau,\tau+\vartheta]$, причем $\|u_1\|_\tau\leqslant L_1 d_\vartheta(z_0,z_1)=L_1\|z_0(\tau+\vartheta)-z_1(\tau+\vartheta)\|=L_1\|x_1\|$, и любое управление u, осуществляющее этот переход, удовлетворяет оценке $\|u\|_\tau\geqslant l_1 d_\vartheta(z_0,z_1)=l_1\|x_1\|$. В силу утверждения 2 система (1) ϑ-равномерно вполне управляема в смысле определения 2. Теорема 6 доказана. □

Следствие 6. *Система* (1) ϑ*-равномерно вполне управляема в смысле определения* 2 *тогда и только тогда, когда найдутся такие числа* $L_1 \geqslant l_1 > 0$*, что для каждого* $\tau \in \mathbb{R}$ *при любых* $z_1, z_0 \in \mathbb{S}_\tau$ *существует управление* $u_0 \in U_\tau$*, переводящее систему* (1) *из расширенного состояния* z_0 *в расширенное состояние* z_1 *на отрезке* $[\tau, \tau+\vartheta]$*, такое, что выполнена оценка* $\|u_0\|_\tau \leqslant L_1\|z_0 - z_1\|_{C[\tau,\tau+\vartheta]}$*, причем любое управление* u*, осуществляющее этот переход, удовлетворяет неравенству* $\|u\|_\tau \geqslant l_1\|z_0 - z_1\|_{C[\tau,\tau+\vartheta]}$.

Доказательство вытекает непосредственно из леммы 2 и теоремы 6.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
2. Kalman R.E. Contribution to the theory of optimal control // Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana. 1960. Vol. 5. No. 1. P. 102–119.
3. Попова С.Н. Задачи управления показателями Ляпунова: Дис. ... канд. физ.-матем. наук / УдГУ. Ижевск, 1992. 103 с.
4. Зайцев В.А. Критерии равномерной полной управляемости линейной системы // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25. Вып. 2. С. 157–179. DOI: 10.20537/vm150202
5. Макаров Е.К., Попова С.Н. Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем. Минск: Беларус. навука, 2012. 407 с.
6. Nashed M.Z., Votruba G.F. A unified operator theory of generalized inverses // Generalized inverses and applications. 1976. P. 1–109. DOI: 10.1016/B978-0-12-514250-2.50005-6
7. Тонков Е.Л. Критерий равномерной управляемости и стабилизация линейной рекуррентной системы // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 10. С. 1804–1813.
8. Крейн С.Г. Линейные уравнения в банаховых пространствах. М.: Наука, 1971. 104 с.
9. Макаров Е.К., Попова С.Н. О глобальной управляемости полной совокупности ляпуновских инвариантов двумерных линейных систем // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 1. С. 97–106.
10. Козлов А.А. Об управлении показателями Ляпунова двумерных линейных систем с локально-интегрируемыми коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 10. С. 1319–1335.
11. Козлов А.А., Бурак А.Д. Об управлении характеристическими показателями трехмерных линейных дифференциальных систем с разрывными и быстро осциллирующими коэффициентами // Веснік Віцебск. дзярж. ун-та. 2013. № 5 (77). С. 11–31.
12. Козлов А.А., Инц И.В. О глобальной ляпуновской приводимости двумерных линейных систем с локально интегрируемыми коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 6. С. 720–742. DOI: 10.1134/S0374064116060029
13. Габасов Р.Ф., Кириллова Ф.М. Оптимизация линейных систем. Минск: Изд-во БГУ, 1973. 248 с.
14. Демидович В.Б. Об одном признаке устойчивости разностных уравнений // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 7. С. 1247–1255.
15. Latushkin Y., Randolph T., Schnaubelt R. Exponential dichotomy and mild solutions of non autonomous equations in Banach spaces // Journal of Dynamics and Differential Equations. 1998. Vol. 10. No. 3. P. 489–510. DOI: 10.1023/A:1022609414870

Поступила в редакцию 22.06.2017

Макаров Евгений Константинович, д. ф.-м. н., зав. отделом дифференциальных уравнений, Институт математики НАН Беларуси, 220072, Беларусь, г. Минск, ул. Сурганова, 11.
E-mail: jcm@im.bas-net.by

Попова Светлана Николаевна, д. ф.-м. н., зав. кафедрой дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1;

ведущий научный сотрудник, отдел динамических систем, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: ps@uni.udm.ru

E. K. Makarov, S. N. Popova

On the definition of uniform complete controllability

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 3, pp. 326–343 (in Russian).

Keywords: linear control systems, uniform complete controllability.

MSC2010: 93B05, 93C05

DOI: 10.20537/vm170304

We consider a linear control system

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

under the assumption that the transition matrix $X(t,s)$ of the free system $\dot{x} = A(t)x$ is continuous with respect to t and s separately. We also suppose that on each interval $[\tau, \tau+\vartheta]$ of fixed length ϑ the normed space Z_τ of functions defined on this interval is given. A control u on the interval $[\tau,\tau+\vartheta]$ is called admissible if $u \in Z_\tau$ and there exists the integral $\mathcal{Q}_\tau(u) := \int_\tau^{\tau+\vartheta} X(\tau,s)B(s)u(s)\,ds$. The vector subspace U_τ of the space Z_τ where the operator $\mathcal{Q}_\tau$ is defined is called the space of admissible controls for the system (1) on the interval $[\tau,\tau+\vartheta]$. We propose a definition of uniform complete controllability of the system (1) for the case of an arbitrary dependence of the space of admissible controls on the moment of the beginning of the control process. In this situation direct and dual necessary and sufficient conditions for uniform complete controllability of a linear system are obtained. It is shown that with proper choice of the space of admissible controls, the resulting conditions are equivalent to the classical definitions of uniform complete controllability.

REFERENCES

1. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* (Theory of motion control), Moscow: Nauka, 1968, 476 p.
2. Kalman R.E. Contribution to the theory of optimal control, *Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana*, 1960, vol. 5, no. 1, pp. 102–119.
3. Popova S.N. *Problems of control over Lyapunov exponents*, Cand. Sci. (Phys.–Math.) Dissertation, Izhevsk, 1992, 103 p. (In Russian).
4. Zaitsev V.A. Criteria for uniform complete controllability of a linear system, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mech. Komp'yt. Nauki*, 2015, vol. 25, issue 2, pp. 157–179 (in Russian). DOI: 10.20537/vm150202
5. Makarov E.K., Popova S.N. *Upravlyaemost' asimptoticheskikh invariantov nestatsionarnykh lineinykh sistem* (Controllability of asymptotic invariants of non-stationary linear systems), Minsk: Belarus. Navuka, 2012, 407 p.
6. Nashed M.Z., Votruba G.F. A unified operator theory of generalized inverses, *Generalized Inverses and Applications*, 1976, pp. 1–109. DOI: 10.1016/B978-0-12-514250-2.50005-6
7. Tonkov E.L. A criterion of uniform controllability and stabilization of a linear recurrent system, *Differential Equations*, 1979, vol. 15, pp. 1285–1292.
8. Krein S.G. *Lineinye uravneniya v banakhovykh prostranstvakh* (Linear equations in Banach spaces), Moscow: Nauka, 1971, 104 p.
9. Makarov E.K., Popova S.N. On the global controllability of a complete set of Lyapunov invariants of two-dimensional linear systems, *Differential Equations*, 1999, vol. 35, no. 1, pp. 97–107.
10. Kozlov A.A. On the control of Lyapunov exponents of two-dimensional linear systems with locally integrable coefficients, *Differential Equations*, 2008, vol. 44, no. 10, pp. 1375–1392. DOI: 10.1134/S0012266108100042
11. Kozlov A.A., Burak A.D. On the control of characteristic exponents of three-dimensional linear differential systems with discontinuous and fast oscillating coefficients, *Vesnik Vitsebsk. Dzyarzh. Univ.*, 2013, no. 5 (77), pp. 11–31 (in Russian).
12. Kozlov A.A., Ints I.V. On the global Lyapunov reducibility of two-dimensional linear systems with locally integrable coefficients, *Differential Equations*, 2016, vol. 52, issue 6, pp. 699–721. DOI: 10.1134/S0012266116060021
13. Gabasov R.F., Kirillova F.M. *Optimizatsiya lineinykh sistem* (Optimization of linear systems), Minsk: Belarusian State University, 1973, 248 p.
14. Demidovich V.B. A certain criterion for the stability of difference equations, *Differ. Uravn.*, 1969, vol. 5, no. 7, pp. 1247–1255 (in Russian).

15. Latushkin Y., Randolph T., Schnaubelt R. Exponential dichotomy and mild solutions of non autonomous equations in Banach spaces, *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 1998, vol. 10, no. 3, pp. 489–510. DOI: 10.1023/A:1022609414870

Received 22.06.2017

Makarov Evgenii Konstantinovich, Doctor of Physics and Mathematics, Head of the Department of Differential Equations, Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus, ul. Surganova, 11, Minsk, 220072, Belarus.
E-mail: jcm@im.bas-net.by

Popova Svetlana Nikolaevna, Doctor of Physics and Mathematics, Head of the Department of Differential Equations, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia;
Leading Researcher, Department of Dynamical Systems, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia.
E-mail: ps@uni.udm.ru